9° Tarea análisis de sistemas lineales

Método de estabilidad de Routh

Alumno: Leonardo Bogantes Bogantes

El teorema de Routh–Hürwitz sirve para analizar la estabilidad de los sistemas dinámicos.

Básicamente, el teorema proporciona un criterio capaz de determinar en cuál semiplano (izquierdo o derecho) del plano complejo están localizadas las raíces del denominador de la función de transferencia de un sistema; y en consecuencia, conocer si dicho sistema es estable o no. Si tras aplicar el criterio nos da como resultado que todos los polos están en el semiplano izquierdo, el sistema es estable, y si hay un mínimo de un polo en el semiplano derecho, el sistema es inestable.

El criterio se refiere a la función de transferencia en lazo cerrado del sistema. Para aplicar el criterio a un sistema descrito por su función de transferencia en lazo abierto, hay que incluir la realimentación haciendo

$$G_{BC}(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$

El criterio de Routh-Hurwitz también se utiliza para el trazado del lugar de las raíces. En este caso, dicho procedimiento de análisis estudia la función de transferencia del sistema en bucle abierto 1+K·Gba(s)=0 (siendo K la ganancia variable del sistema). Su objetivo es determinar los puntos de corte del LdR con el eje imaginario. Dichos puntos marcan el límite de estabilidad del sistema, dicho en otras palabras, determinan el límite en el que los polos del sistema en bucle cerrado pasan al semiplano derecho complejo y por lo tanto el sistema se vuelve inestable. Como es evidente, tras la aplicación del criterio de Routh-Hurwitz, los resultados obtenidos quedarán en función de la ganancia K, lo cual nos indicará a partir de qué valores de K el sistema pasará de estable a inestable (ganancia K límite).

Dado:

$$G(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

donde G (s) es la ecuación característica de un sistema.

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots \\
s^{n-3} & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
s^0 & \delta_1 & & &
\end{array}$$

$$\alpha_1 = \frac{(a_{n-1} \cdot a_{n-2}) - (a_n \cdot a_{n-3})}{a_{n-1}} \qquad \beta_1 = \frac{(\alpha_1 \cdot a_{n-3}) - (a_{n-1} \cdot \alpha_2)}{\alpha_1} \qquad \ldots$$

$$\alpha_2 = \frac{(a_{n-1} \cdot a_{n-4}) - (a_n \cdot a_{n-5})}{a_{n-1}} \qquad \beta_2 = \frac{(\alpha_1 \cdot a_{n-5}) - (a_{n-1} \cdot \alpha_3)}{\alpha_1} \qquad \ldots$$

$$\alpha_3 = \frac{(a_{n-1} \cdot a_{n-6}) - (a_n \cdot a_{n-7})}{a_{n-1}} \qquad \beta_3 = \frac{(\alpha_1 \cdot a_{n-7}) - (a_{n-1} \cdot \alpha_4)}{\alpha_1} \qquad \ldots$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

El número de cambios de signo de: a_n, a_{n-1}, α_1, β_1, …, γ_1, δ_1 (primera columna resultante del criterio de Routh – Hürwitz), nos da la cantidad de elementos que están en el semiplano derecho. Si todos los elementos tienen el mismo signo, el sistema será asintóticamente estable, en cambio, si encontramos cambios de signo, el sistema será asintóticamente inestable. Como está indicado arriba, tendremos tantos polos en el semiplano positivo como variaciones de signo en la primera columna.

Ejemplo

Ejemplo: G(s) =

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 3 & 2 \\
s^3 & 5 & 1 & 0 \\
s^2 & 2'8 & 2 & 0 \\
s^1 & -2'57 & 0 & 0 \\
s^0 & 2 & &
\end{array}
$$

$$\alpha_1 = \frac{(5\cdot3)-(1\cdot1)}{5} \qquad \beta_1 = \frac{(2'8\cdot1)-(5\cdot2)}{2'8}$$

$$\alpha_2 = \frac{(5\cdot2)-(1\cdot0)}{5} \qquad \beta_2 = \frac{(2'8\cdot0)-(5\cdot0)}{2'8}$$

$$\alpha_3 = \frac{(5\cdot0)-(1\cdot0)}{5} \qquad \beta_3 = \frac{(2'8\cdot0)-(5\cdot0)}{2'8}$$

$$\delta_1 = \frac{(-2'57\cdot2)-(-2'8\cdot0)}{-2'57}$$

Esto nos da como resultado en la primera columna: 1, 5, 2´8, -2´57, 2, con lo que por haber dos cambios de signo, el sistema es inestable por poseer dos elementos (-2,57 y 2) con cambio de signo.