2022 年春季学期/数理统计/第六周/课后作业解答

龚梓阳

更新：2022 年 3 月 31 日

3 **证明.** 由于 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计，即 $E(\hat{\theta})=\theta$，因此，

$$E\left[(\hat{\theta})^2\right]=\operatorname{Var}(\hat{\theta})+[E(\hat{\theta})]^2=\operatorname{Var}(\hat{\theta})+\theta^2>\theta^2$$

故，$(\hat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计。

6 **证明.** 由 $X\sim U(0,\theta)$，可知 $x_{(1)},x_{(3)}$ 的密度函数分别为

$$p_1(x)=3[1-F(x)]^2p(x)=\frac{3(\theta-x)^2}{\theta^3},\quad 0<x<\theta$$
$$p_3(x)=3[F(x)]^2p(x)=\frac{3x^2}{\theta^3},\quad 0<x<\theta$$

则，

$$E\left(X_{(1)}\right)=\int_0^\theta x\cdot\frac{3(\theta-x)^2}{\theta^3}\mathrm{d}x=\frac{3}{\theta^3}\left(\theta^2\cdot\frac{x^2}{2}-2\theta\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^\theta=\frac{\theta}{4}$$
$$E\left(X_{(1)}^2\right)=\int_0^\theta x^2\cdot\frac{3(\theta-x)^2}{\theta^3}\mathrm{d}x=\frac{3}{\theta^3}\left(\theta^2\cdot\frac{x^3}{3}-2\theta\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^\theta=\frac{\theta^2}{10}$$
$$E\left(X_{(3)}\right)=\int_0^\theta x\cdot\frac{3x^2}{\theta^3}dy=\frac{3}{\theta^3}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^\theta=\frac{3\theta}{4}$$
$$E\left(X_{(3)}^2\right)=\int_0^\theta x^2\cdot\frac{3x^2}{\theta^3}dy=\frac{3}{\theta^3}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_0^\theta=\frac{3\theta^2}{5}$$

因此，

$$E\left(4X_{(1)}\right)=4\cdot\frac{\theta}{4}=\theta,\quad E\left(\frac{4}{3}X_{(3)}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{3\theta}{4}=\theta$$

故，$4X_{(1)}$ 及 $\frac{4}{3}X_{(3)}$ 都是 θ 的无偏估计；

同时，

$$\operatorname{Var}\left(4X_{(1)}\right)=16\cdot\left[\frac{\theta^2}{10}-\left(\frac{\theta}{4}\right)^2\right]=\frac{3\theta^2}{5}$$
$$\operatorname{Var}\left(\frac{4}{3}X_{(3)}\right)=\frac{16}{9}\cdot\left[\frac{3\theta^2}{5}-\left(\frac{3\theta}{4}\right)^2\right]=\frac{\theta^2}{15}$$

故，$\operatorname{Var}\left(4X_{(1)}\right)>\operatorname{Var}\left(\frac{4}{3}X_{(3)}\right)$，即 $\frac{4}{3}X_{(3)}$ 比 $4X_{(1)}$ 更有效。

8 **证明.** 因 $T\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ 为 μ 的任一线性无偏估计量，不妨设

$$T\left(X_1,\ldots,X_n\right)=\sum_{i=1}^n a_iX_i$$

则，

$$E(T)=\sum_{i=1}^{n} a_i E\left(X_i\right)=\mu \sum_{i=1}^{n} a_i=\mu$$

因此 $\sum_{i=1}^{n} a_i=1$。

同时，由于 $X_1, \ldots, X_n$ 相互独立，当 $i \neq j$ 时，有

$$\operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right)=0$$

则，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(\bar{X}, T) & =\operatorname{Cov}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) \\
& =\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Cov}\left(\frac{1}{n} X_i, a_i X_i\right) \\
& =\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n} \operatorname{Cov}\left(X_i, X_i\right) \\
& =\frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i=\frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

因此，

$$\operatorname{Var}(\bar{X})=\frac{1}{n} \operatorname{Var}(X)=\frac{\sigma^2}{n}=\operatorname{Cov}(\bar{X}, T)$$

故 $\bar{X}$ 与 T 的相关系数为

$$\begin{aligned}
\operatorname{Corr}(\bar{X}, T) & =\frac{\operatorname{Cov}(\bar{X}, T)}{\sqrt{\operatorname{Var}(\bar{X})} \sqrt{\operatorname{Var}(T)}} \\
& =\frac{\operatorname{Var}(\bar{X})}{\sqrt{\operatorname{Var}(\bar{X})} \sqrt{\operatorname{Var}(T)}} \\
& =\sqrt{\frac{\operatorname{Var}(\bar{X})}{\operatorname{Var}(T)}}
\end{aligned}$$