1. 贝叶斯学派认为任一未知量 $\theta$ 都可被看作 <u>**随机变量**</u>。

2. 若对于二项分布 $b(n,\theta)$ 中的参数 $\theta$ 无任何了解，我们通常使用 **均匀分布** $U(0,1)$ 作为 $\theta$ 的先验分布。

3. 对于样本 $X$，参数 $\theta$ 的后验分布为 **C**。

   A. $\pi(\theta)$ B. $h(X,\theta)$ **C.** $\pi(\theta \mid X)$ D. $p(X \mid \theta)$

4. （高等数理统计 5.16）设 $\theta$ 是一批产品的不合格品率，已知它必为 0.1 和 0.2 中之一，且其先验分布为

$$P(\theta = 0.1) = 0.7, \quad P(\theta = 0.2) = 0.3,$$

   假如从这批产品中随机取出 8 个进行检查，发现有 2 个是不合格品。求 $\theta$ 的后验分布。

5. （高等数理统计 5.17）设 $\theta$ 是一批产品的不合格品率，从中任取 8 个产品进行检验，发现 3 个是不合格品。请在下列先验分布的假设下，分别求 $\theta$ 的后验分布。

   (a) $\theta \sim U(0,1)$；

   (b) $\theta \sim \pi(\theta) = \begin{cases} 2(1-\theta), & 0 < \theta < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

**Solution:** 记不合格品的发生次数为 $X$，显然 $x \mid \theta \sim b(8,\theta)$，其中 $0 < \theta < 1$，所以 $X = 3$ 在给定 $\theta$ 时的条件概率为

$$p(X = 3 \mid \theta) = \binom{8}{3} \theta^3 (1-\theta)^5.$$

(a) 若 $\theta$ 的先验分布为 $\theta \sim U(0,1)$，则 $X$ 和 $\theta$ 的联合分布为

$$h(X = 3, \theta) = \binom{8}{3} \theta^3 (1-\theta)^5.$$

$X$ 的边际分布为

$$m(X = 3) = \binom{8}{3} \int_0^1 \theta^3 (1-\theta)^5 \, \mathrm{d}\theta = \binom{8}{3} \frac{\Gamma(4)\Gamma(6)}{\Gamma(10)}.$$

因此 $\theta$ 的后验分布为

$$\pi(\theta \mid X = 3) = \frac{h(X = 3, \theta)}{m(X = 3)} = \frac{\Gamma(10)}{\Gamma(4)\Gamma(6)} \theta^3 (1-\theta)^5.$$

即 $\theta \mid X = 3 \sim \mathrm{Be}(4,6)$。

(b) 若 $\theta$ 的先验分布为

$$\theta \sim \pi(\theta) = \begin{cases} 2(1-\theta), & 0 < \theta < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

则 $X$ 和 $\theta$ 的联合分布为

$$h(X=3,\theta)=2\binom{8}{3}\theta^3(1-\theta)^6.$$

$X$ 的边际分布为

$$m(X=3)=2\binom{8}{3}\int_0^1\theta^3(1-\theta)^6\,\mathrm{d}\theta=2\binom{8}{3}\frac{\Gamma(4)\Gamma(7)}{\Gamma(11)}.$$

因此 $\theta$ 的后验分布为

$$\pi(\theta\mid X=3)=\frac{h(X=3,\theta)}{m(X=3)}=\frac{\Gamma(11)}{\Gamma(4)\Gamma(7)}\theta^3(1-\theta)^6.$$

即 $\theta\mid X=3\sim\mathrm{Be}(4,7)$。

6.（高等数理统计 5.30）证明：均匀分布 $U(0,\theta)$ 的参数 $\theta$ 的共轭先验分布是帕雷托（Pareto）分布，其密度函数为

$$\pi(\theta)=\frac{\beta\theta_0^\beta}{\theta^{\beta+1}},\theta>\theta_0,$$

$\beta,\theta_0$ 为两个已知的常数。

**Solution:**