2021 年春季学期/数理统计/第十一周/课后作业解答

龚梓阳

更新：2021 年 5 月 30 日

2 **证明.** 由于 T_1, T_2 分别为 θ_1, θ_2 的 UMVUE，所以

$$E(T_i) = \theta_i, \quad i = 1, 2$$

且对于任意满足 $E(\varphi) = 0, \operatorname{Var}(\varphi) < \infty$ 的 φ 有

$$\operatorname{Cov}(T_i, \theta_i), \quad i = 1, 2$$

因此，

$$E(aT_1 + bT_2) = a\theta_1 + b\theta_2$$

$$\operatorname{Cov}(aT_1 + bT_2, \varphi) = a \operatorname{Cov}(T_1, \varphi) + b \operatorname{Cov}(T_2, \varphi)$$

故，由 UMVUE 的判断准则有，$aT_1 + bT_2$ 是 $a\theta_1 + b\theta_2$ 的 UMVUE。

3 **证明.** 由于 $T, \hat{g}$ 是 $g(\theta)$ 的无偏估计，故

$$E(T) = g(\theta), \quad E(\hat{g}) = g(\theta)$$

因此，

$$E(T - \hat{g}) = 0$$

由于 $\operatorname{Var}(T) < \infty, \operatorname{Var}(\hat{g}) < \infty$，故

$$\operatorname{Var}(T - \hat{g}) < \infty$$

所以，由判断准则有，

$$\operatorname{Cov}(T, T - \hat{g}) = \operatorname{Var}(T) - \operatorname{Cov}(T, \hat{g}) = 0$$

故，

$$\operatorname{Cov}(T, \hat{g}) = \operatorname{Var}(T) \geq 0$$

5 **证明.** 令

$$S_\theta = \frac{\partial \ln p(x; \theta)}{\partial \theta}$$

则，

$$\begin{aligned}
E(S_\theta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p(x;\theta)} \cdot \frac{\partial p(x;\theta)}{\partial \theta} \cdot p(x;\theta)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \theta} p(x;\theta)\, \mathrm{d}x = \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x;\theta)\, \mathrm{d}x = 0
\end{aligned}$$

所以，

$$\frac{\partial}{\partial\theta}E\left(S_\theta\right)=0$$

同时，

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E\left(S_\theta\right)}{\partial\theta}&=\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{+\infty}S_\theta\cdot p\left(x;\theta\right)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[S_\theta\cdot p\left(x;\theta\right)\right]\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial S_\theta}{\partial\theta}\cdot p\left(x;\theta\right)+S_\theta\cdot\frac{\partial p\left(x;\theta\right)}{\partial\theta}\right]\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2\ln p\left(x;\theta\right)}{\partial\theta^2}\cdot p\left(x;\theta\right)\,\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial\ln p\left(x;\theta\right)}{\partial\theta}\right]^2\cdot p\left(x;\theta\right)\,\mathrm{d}x\\
&=E\left[\frac{\partial^2\ln p\left(x;\theta\right)}{\partial\theta^2}\right]+E\left(S_\theta^2\right)\\
&=E\left[\frac{\partial^2\ln p\left(x;\theta\right)}{\partial\theta^2}\right]+I\left(\theta\right)=0
\end{aligned}$$

故，

$$I\left(\theta\right)=-E\left[\frac{\partial^2\ln p\left(x;\theta\right)}{\partial\theta^2}\right]$$

6 **证明.** (a). 样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的似然函数为

$$L\left(\theta\right)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}$$

对数似然函数为

$$\ln L\left(\theta\right)=n\ln\theta+\left(\theta-1\right)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=-n\ln g\left(\theta\right)+\left[\frac{1}{g\left(\theta\right)}-1\right]\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令

$$\frac{\partial\ln L\left(\theta\right)}{\partial g\left(\theta\right)}=-\frac{n}{g\left(\theta\right)}-\frac{1}{g^2\left(\theta\right)}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

所以，$g\left(\theta\right)$ 的极大似然估计为

$$\hat{g}\left(\theta\right)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

(b). 令 $Y=-\ln X$，则

$$P\left(Y<y\right)=P\left(-\ln X<y\right)=P\left(X>\mathrm{e}^{-y}\right)=\int_{e^{-y}}^{1}\theta x^{\theta-1}\,\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-\theta y}$$

因此，

$$Y\sim\mathrm{Exp}(\theta),\quad\hat{g}\left(\theta\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y\sim\mathrm{Ga}\left(n,n\theta\right)$$

于是，

$$E\left(\hat{g}\right)=\frac{n}{n\theta}=\frac{1}{\theta}=g(\theta),\quad\mathrm{Var}\left(\hat{g}\right)=\frac{n}{\left(n\theta\right)^2}=\frac{1}{n\theta^2}$$

$$\frac{\partial p(x;\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{\theta}+\ln x,\quad \frac{\partial^2\ln p(x;\theta)}{\partial\theta^2}=-\frac{1}{\theta^2}$$

因此，θ 的费舍尔信息量为

$$I(\theta)=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x;\theta)\right]=\frac{1}{\theta^2}$$

故，$g(\theta)$ 的任一无偏估计的 C-R 下界为

$$\frac{[g'(\theta)]^2}{nI(\theta)}=\frac{1}{n\theta^2}$$

所以，$\hat{g}(\theta)=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln x_i$ 是 $g(\theta)$ 的有效估计。

7 **证明.** 对数密度函数为

$$\ln p(x;\theta)=\ln 2+\ln\theta-3\ln x-\frac{\theta}{x^2}$$

于是，

$$\frac{\partial\ln p(x;\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{\theta}-\frac{1}{x^2},\quad \frac{\partial^2\ln p(x;\theta)}{\partial\theta^2}=-\frac{1}{\theta^2}$$

因此，θ 的费舍尔信息量为

$$I(\theta)=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln p(x;\theta)\right]=\frac{1}{\theta^2}$$

10 **证明.** 总体 $\mathrm{Ga}(\alpha,\lambda)$ 的密度函数为

$$p(x;\lambda)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x},\quad x>0$$

对数密度函数为

$$\ln p(x;\lambda)=\alpha\ln\lambda-\ln\Gamma(\alpha)+(\alpha-1)\ln x-\lambda x$$

于是，

$$\frac{\partial\ln p(x;\lambda)}{\partial\lambda}=\frac{\alpha}{\lambda}-x,\quad \frac{\partial^2\ln p(x;\lambda)}{\partial\lambda^2}=-\frac{\alpha}{\lambda^2}$$

因此，λ 的费舍尔信息量为

$$I(\lambda)=-E\left[\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\ln p(x;\lambda)\right]=\frac{\alpha}{\lambda^2}$$

故，$g(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$ 的任一无偏估计的 C-R 下界为

$$\frac{[g'(\lambda)]^2}{nI(\lambda)}=\frac{1}{n\alpha\lambda^2}$$

同时，

$$\frac{\bar{x}}{\alpha}=\frac{1}{n\alpha}\sum_{i=1}^n x_i\sim\mathrm{Ga}(n\alpha,n\alpha\lambda)$$

因此，

$$E\left(\frac{\bar{x}}{\alpha}\right)=\frac{n\alpha}{n\alpha\lambda}=\frac{1}{\lambda}=g(\lambda),\quad \mathrm{Var}\left(\frac{\bar{x}}{\alpha}\right)=\frac{n\alpha}{(n\alpha\lambda)^2}=\frac{1}{n\alpha\lambda^2}$$

故，$\frac{\bar{x}}{\alpha}$ 是 $g(\lambda)=\frac{1}{\lambda}$ 的有效估计，从而也是 UMVUE。

12 **证明.** 设 $\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n)$ 是 0 的任一无偏估计，则

$$
\begin{aligned}
E(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\cdot\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}\right\}\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi\cdot(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\bar{x}\mu-\frac{n\mu^2}{2}\right\}\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n=0
\end{aligned}
$$

上式两端对 μ 求导，有

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}(n\bar{x}-n\mu)\,\varphi\cdot(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\bar{x}\mu-\frac{n\mu^2}{2}\right\}\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n=0
$$

同时，由于 $E(\varphi)=0$，有

$$
\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}n\bar{x}\varphi\cdot(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\bar{x}\mu-\frac{n\mu^2}{2}\right\}\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n=0
$$

上式两端对 μ 求导，有

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}(n\bar{x})^2\,\varphi\cdot(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\bar{x}\mu-\frac{n\mu^2}{2}\right\}\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n \\
-&\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}n\bar{x}\cdot n\mu\varphi\cdot(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2+n\bar{x}\mu-\frac{n\mu^2}{2}\right\}\mathrm{d}x_1\dots\mathrm{d}x_n=0
\end{aligned}
$$

结合前两式，有

$$
E\left(\bar{x}^2\varphi\right)=0
$$

同时，

$$
E\left(\bar{x}^2\right)=\operatorname{Var}(\bar{x})+[E(\bar{x})]^2=\frac{1}{n}+\mu^2,\quad E\left(\bar{x}^2-\frac{1}{n}\right)=\mu^2
$$

记

$$
T=\bar{x}^2-\frac{1}{n}
$$

则

$$
\operatorname{Cov}(T,\varphi)=E(T\varphi)-E(T)\,E(\varphi)=0,\quad E(T)=\mu^2
$$

因此，$T=\bar{x}^2-\frac{1}{n}$ 为 μ^2 的 UMVUE。
由于 $\bar{x}\sim N(\mu,1)$，有

$$
E(\bar{x})=\mu,\quad \operatorname{Var}(\bar{x})=E\left[(\bar{x}-\mu)^2\right]=\frac{1}{n},\quad E\left[(\bar{x}-\mu)^3\right]=0,\quad E\left[(\bar{x}-\mu)^4\right]=\frac{3}{n^2}
$$

则，

$$
\begin{aligned}
E\left(\bar{x}^4\right)&=E\left[(\bar{x}-\mu+\mu)^4\right] \\
&=E\left[(\bar{x}-\mu)^4\right]+4\mu E\left[(\bar{x}-\mu)^3\right] \\
&\quad+6\mu^2E\left[(\bar{x}-\mu)^2\right]+4\mu^3E(\bar{x}-\mu)+\mu^4 \\
&=\frac{3}{n^2}+\frac{6\mu^2}{n}+\mu^4
\end{aligned}
$$

可得，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Var}(T) = & \operatorname{Var}\left(\bar{x}^2\right) \\
= & E\left(\bar{x}^4\right) - \left[E\left(\bar{x}^2\right)\right]^2 \\
= & \frac{3}{n^2} + \frac{6\mu^2}{n} + \mu^4 - \left(\frac{1}{n} + \mu^2\right)^2 \\
= & \frac{2}{n^2} + \frac{4\mu^2}{n}
\end{aligned}
$$

总体 $N(\mu, 1)$ 的密度函数为

$$
p(x; \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2}\right\}
$$

对数密度函数为

$$
\ln p(x; \mu) == -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{(x-\mu)^2}{2}
$$

于是

$$
\frac{\partial}{\partial\mu} \ln p(x; \mu) = x - \mu
$$

因此，μ 的费舍尔信息量为

$$
I(\mu) = E\left[\frac{\partial}{\partial\mu} \ln p(x; \mu)\right]^2 = E(x-\mu)^2 = 1
$$

故，$g(\mu) = \mu^2$ 的任一无偏估计的 C-R 下界为

$$
\frac{\left[g'(\mu)\right]^2}{nI(\mu)} = \frac{(2\mu)^2}{n} = \frac{4\mu^2}{n}
$$

因此，$\operatorname{Var}(T) = \frac{2}{n^2} + \frac{4\mu^2}{n} > \frac{4\mu^2}{n}$，故 $T = \bar{x}^2 - \frac{1}{n}$ 不是 μ^2 的有效估计。