2021 年春季学期/数理统计/第十二周/课后作业解答

龚梓阳

更新：2021 年 6 月 4 日

3 **证明.** (a). 参数 θ 的先验分布为

$$\pi(\theta) = \mathrm{I}_{0<\theta<1}$$

总体 X 的条件分布为

$$P(X = k \mid \theta) = \theta(1-\theta)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的联合条件分布为

$$p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta\right) = \prod_{i=1}^{n} \theta(1-\theta)^{x_i} = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}$$

则 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 和 θ 的联合分布为

$$h\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta\right) = \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot \mathrm{I}_{0<\theta<1}$$

可得样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的边际分布为

$$m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot \mathrm{I}_{0<\theta<1} \,\mathrm{d}\theta = B\left(n+1, \sum_{i=1}^{n} x_i + 1\right)$$

因此 θ 的后验分布为

$$\pi\left(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \frac{\theta^n (1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}}{B\left(n+1, \sum_{i=1}^n x_i + 1\right)}, \quad 0 < \theta < 1$$

即，

$$\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \sim \text{Be}\left(n+1, \sum_{i=1}^{n} x_i + 1\right)$$

(b). 在给定样本 $4, 3, 1, 6$ 的条件下，θ 的后验分布为

$$\theta \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \sim \text{Be}\,(5, 15)$$

若采用后验期望估计，则 θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_B = \frac{5}{5+15} = 0.25$$

4 **证明.** 参数 λ 的先验分布为

$$\pi(\lambda)=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta\lambda}\cdot \mathrm{I}_{\lambda>0}$$

总体 X 的条件分布为

$$P(X=x\mid\lambda)=\frac{\lambda^{x}}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad x=0,1,2,\ldots$$

样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的联合条件分布为

$$p\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\mid\lambda\right)=\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!\ldots x_n!}\mathrm{e}^{-n\lambda}$$

则 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 和 λ 的联合分布为

$$\begin{aligned}h\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda\right)=&\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!\ldots x_n!}\mathrm{e}^{-n\lambda}\cdot\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\beta\lambda}\cdot \mathrm{I}_{\lambda>0}\\=&\frac{\beta^{\alpha}\cdot\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\cdot x_1!\ldots x_n!}\mathrm{e}^{-\lambda(\beta+n)}\cdot \mathrm{I}_{\lambda>0}\end{aligned}$$

可得样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的边际分布为

$$\begin{aligned}m(x_1,x_2,\ldots,x_n)=&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta^{\alpha}\cdot\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\cdot x_1!\ldots x_n!}\mathrm{e}^{-\lambda(\beta+n)}\cdot \mathrm{I}_{\lambda>0}\,\mathrm{d}\lambda\\=&\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\cdot x_1!\ldots x_n!}\cdot\int_{0}^{+\infty}\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda(\beta+n)}\,\mathrm{d}\lambda\\=&\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\cdot x_1!\ldots x_n!}\cdot\frac{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha\right)}{(\beta+n)^{\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha}}\end{aligned}$$

因此 λ 的后验分布为

$$\pi\left(\lambda\mid x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\frac{(\beta+n)^{\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha}}{\Gamma\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha\right)}\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha-1}\mathrm{e}^{-(n+\beta)\lambda},\quad\lambda>0$$

即,

$$\lambda\mid x_1,x_2,\ldots,x_n\sim\mathrm{Ga}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i+\alpha,\beta+n\right)$$

故，伽玛分布是泊松分布的均值 λ 的共轭先验分布。

5 **证明.** 设参数 σ^2 的先验分布是倒伽玛分布 $IGa(\alpha,\lambda)$，密度函数为

$$\pi\left(\sigma^2\right)=\frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\alpha+1}\exp\left\{-\frac{\lambda}{\sigma^2}\right\}$$

设总体 X 分布为 $N\left(\mu_0,\sigma^2\right)$, 其中 μ_0 已知，密度函数为

$$p\left(x\mid\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的联合条件分布为

$$\begin{aligned}p\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\mid\sigma^2\right)=&\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\}\\=&\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\sigma\right)^{n}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2\right\}\end{aligned}$$

则样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 和 σ^2 的联合分布为

$$h\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,\sigma^2\right)=\frac{\lambda^\alpha}{(\sqrt{2\pi})^n\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}+\alpha+1}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2}\left[\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\mu_0\right)^2\right]\right\}$$

样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的边际分布为

$$\begin{aligned}
m\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)&=\int_0^{+\infty}\frac{\lambda^\alpha}{(\sqrt{2\pi})^n\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}+\alpha+1}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2}\left[\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\mu_0\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}\left(\sigma^2\right)\\
&=\frac{\lambda^\alpha}{(\sqrt{2\pi})^n\Gamma(\alpha)}\cdot\int_{+\infty}^0 t^{\frac{n}{2}+\alpha+1}\exp\left\{-t\left[\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\mu_0\right)^2\right]\right\}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{\lambda^\alpha}{(\sqrt{2\pi})^n\Gamma(\alpha)}\cdot\int_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}+\alpha-1}\exp\left\{-t\left[\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\mu_0\right)^2\right]\right\}\mathrm{d}t\\
&=\frac{\lambda^\alpha}{(\sqrt{2\pi})^n\Gamma(\alpha)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}{\left[\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\mu_0\right)^2\right]^{\frac{n}{2}+\alpha}}
\end{aligned}$$

因此 σ^2 的后验分布为

$$\pi\left(\sigma^2\mid x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\frac{\left[\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\mu_0\right)^2\right]^{\frac{n}{2}+\alpha}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)}\left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}+\alpha+1}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma^2}\left[\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\mu_0\right)^2\right]\right\}$$

后验分布仍为倒伽玛分布 $IGa\left(\frac{n}{2}+\alpha,\lambda+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(x_i-\mu_0\right)^2\right)$，故倒伽玛分布是参数 σ^2 的共轭先验分布。

6 **证明.** 样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的联合条件分布为

$$p\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\mid\theta\right)=\prod_{i=1}^n\frac{2x_i}{\theta^2}\mathrm{I}_{0<x_i<\theta}=\frac{2^n}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^n x_i\cdot\mathrm{I}_{x_{(n)}<\theta}$$

(a). 参数 θ 的先验分布为

$$\pi(\theta)=\mathrm{I}_{0<\theta<1}$$

则样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 和 θ 的联合分布为

$$h\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta\right)=\frac{2^n}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^n x_i\cdot\mathrm{I}_{x_{(n)}<\theta<1}$$

可得样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的边际分布为

$$m\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\int_{x_{(n)}}^1\frac{2^n}{\theta^{2n}}\prod_{i=1}^n x_i\,\mathrm{d}\theta=\frac{2^n}{2n-1}\prod_{i=1}^n x_i\left[x_{(n)}^{-(2n-1)}-1\right]$$

因此 θ 的后验分布为

$$\pi\left(\theta\mid x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\frac{2n-1}{\theta^{2n}\left[x_{(n)}^{-(2n-1)}-1\right]},\quad x_{(n)}<\theta<1$$

(b). 参数 θ 的先验分布为

$$\pi(\theta)=3\theta^2\cdot \mathrm{I}_{0<\theta<1}$$

则样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 和 θ 的联合分布为

$$h\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta\right)=\frac{3\cdot 2^n}{\theta^{2n-2}}\prod_{i=1}^n x_i\cdot I_{x_{(n)}<\theta<1}=\frac{3\cdot 2^n}{\theta^{2n-2}}\prod_{i=1}^n x_i\cdot I_{x_{(n)}<\theta<1}$$

可得样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的边际分布为

$$m\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\int_{x(n)}^1\frac{3\cdot 2^n}{\theta^{2n-2}}\prod_{i=1}^n x_i\,\mathrm{d}\theta=\frac{3\cdot 2^n}{2n-3}\prod_{i=1}^n x_i\left[x_{(n)}^{-(2n-3)}-1\right]$$

因此 θ 的后验分布为

$$\pi\left(\theta\mid x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\frac{2n-3}{\theta^{2n-2}\left[x_{(n)}^{-(2n-3)}-1\right]},\quad x_{(n)}<\theta<1$$

7 **证明.** 参数 θ 的先验分布为

$$\pi(\theta)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda\theta}\cdot \mathrm{I}_{\theta>0}$$

总体 X 的条件分布为

$$p\left(x\mid\theta\right)=\theta x^{\theta-1}$$

样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的联合条件分布为

$$\begin{aligned}p\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\mid\theta\right)=&\prod_{i=1}^n\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\theta-1}\\=&\theta^n\exp\left[(\theta-1)\ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)\right]\\=&\theta^n\exp\left[(\theta-1)\sum_{i=1}^n\ln x_i\right]\end{aligned}$$

则 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 和 θ 的联合分布为

$$h\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,\theta\right)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)\cdot\prod_{i=1}^n x_i}\theta^{n+\alpha-1}\exp\left\{-\left[\lambda-\sum i=1^n\ln x_i\right]\theta\right\}\cdot \mathrm{I}_{\theta>0}$$

可得样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的边际分布为

$$\begin{aligned}m(x_1,x_2,\ldots,x_n)=&\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)\cdot\prod_{i=1}^n x_i}\int_0^{+\infty}\theta^{n+\alpha-1}\exp\left\{-\left[\lambda-\sum_{i=1}^n\ln x_i\right]\theta\right\}\mathrm{d}\theta\\=&\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)\cdot\prod_{i=1}^n x_i}\cdot\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\left[\lambda-\sum_{i=1}^n\ln x_i\right]^{n+\alpha}},\end{aligned}$$

因此 λ 的后验分布为

$$\pi\left(\theta\mid x_1,x_2,\ldots,x_n\right)=\frac{\left[\lambda-\sum_{i=1}^n\ln x_i\right]^{n+\alpha}}{\Gamma(n+\alpha)}\theta^{n+\alpha-1}\exp\left\{-\left[\lambda-\sum_{i=1}^n\ln x_i\right]\theta\right\}$$

后验分布仍为伽玛分布 $Ga\left(n+\alpha, \lambda-\sum_{i=1}^{n} \ln x_i\right)$，所以 θ 的后验期望估计为

$$\hat{\theta}_B=\frac{n+\alpha}{\lambda-\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$$

8 **证明.** (a). 参数 θ 的先验分布为

$$\pi(\theta)=\frac{\beta \theta_0^{\beta}}{\theta^{\beta+1}} \cdot \mathrm{I}_{\theta>\theta_0}$$

样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的联合条件分布为

$$p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta\right)=\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathrm{I}_{0<x_i<\theta}=\frac{1}{\theta^n} \mathrm{I}_{0<x_1, x_2, \ldots, x_n<\theta}$$

则 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 和 θ 的联合分布为

$$h\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta\right)=\frac{\beta \theta_0^{\beta}}{\theta^{n+\beta+1}} \mathrm{I}_{0<x_1, x_2, \ldots, x_n<\theta, \theta>\theta_0}=\frac{\beta \theta_0^{\beta}}{\theta^{n+\beta+1}} \cdot \mathrm{I}_{\theta>\max \left\{x_{(n)}, \theta_0\right\}}$$

样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的边际分布为

$$m\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=\int_{\max \left\{x_{(n)}, \theta_0\right\}}^{+\infty} \frac{\beta \theta_0^{\beta}}{\theta^{n+\beta+1}} \mathrm{d} \theta=\beta \theta_0^{\beta} \cdot \frac{1}{(n+\beta)\left[\max \left\{x_{(n)}, \theta_0\right\}\right]^{n+\beta}}$$

因此 θ 的后验分布为

$$\pi\left(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=\frac{(n+\beta)\left[\max \left\{x_{(n)}, \theta_0\right\}\right]^{n+\beta}}{\theta^{n+\beta+1}}, \quad \theta>\max \left\{x_{(n)}, \theta_0\right\}$$

后验分布仍为帕雷托分布，其参数为 $n+\beta$ 和 $\max \left\{x_{(n)}, \theta_0\right\}$，故帕雷托分布是参数 θ 的共轭先验分布。

(b). 若采用后验期望估计，则 θ 的贝叶斯估计为

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_B & =\int_{\max \left\{x_{(n)}, \theta_0\right\}}^{+\infty} \theta \cdot \pi\left(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n\right) d \theta \\
& =\int_{\max \left\{x_{(n)}, \theta_0\right\}}^{+\infty} \frac{(n+\beta)\left[\max \left\{x_{(n)}, \theta_0\right\}\right]^{n+\beta}}{\theta^{n+\beta}} d \theta \\
& =(n+\beta)\left[\max \left\{x_{(n)}, \theta_0\right\}\right]^{n+\beta} \cdot \frac{\left[\max \left\{x_{(n)}, \theta_0\right\}\right]^{-(n+\beta)+1}}{n+\beta-1} \\
& =\frac{n+\beta}{n+\beta-1} \max \left\{x_{(n)}, \theta_0\right\}
\end{aligned}$$