2021 年春季学期/数理统计/第八周/课后作业解答

龚梓阳

更新：2021 年 5 月 3 日

2 **证明.** (a). 样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的似然函数为

$$
\begin{aligned}
L(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} c\theta^c x_i^{-(c+1)} \mathrm{I}_{x_i > \theta} \\
&= c^n \theta^{nc} \Pi_{i=1}^n x_i^{-(c+1)} \mathrm{I}_{x_1, x_2, \ldots, x_n > \theta}
\end{aligned}
$$

$c^n \theta^{nc} \Pi_{i=1}^n x_i^{-(c+1)}$ 关于 θ 单调递增，且由于示性函数的限制，仅当 $x_1, x_2, \ldots, x_n > \theta$ 时，$L(\theta) > 0$。因此，$\theta = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_{(1)}$ 时，$L(\theta)$ 达到最大。

故 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = X_{(1)}$。

(b). 样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的似然函数为

$$
\begin{aligned}
L(\theta, \mu) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{x_i - \mu}{\theta}} \mathrm{I}_{x_i > \mu} \\
&= \frac{1}{\theta^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^n x_i - n\mu\right)} \mathrm{I}_{x_1, x_2, \ldots, x_n > \mu}
\end{aligned}
$$

当 $x_1, x_2, \ldots, x_n > \mu$ 时，

$$
\ln L(\theta, \mu) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right)
$$

对于给定的 θ_0，

$$
\frac{\partial \ln L(\theta_0, \mu)}{\partial \mu} = \frac{n}{\theta_0} > 0
$$

$\ln L(\theta_0, \mu)$ 关于 μ 单调递增，且由于示性函数的限制，仅当 $x_1, x_2, \ldots, x_n > \mu$ 时，$\ln L(\theta_0, \mu) > 0$，因此，$\mu = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_{(1)}$ 时，$\ln L(\theta_0, \mu)$ 达到最大。

因此，令

$$
\frac{\partial \ln L(\theta, \hat{\mu})}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\hat{\mu}\right) = 0
$$

解得 $\theta = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i - n\hat{\mu}\right) = \bar{x} - \hat{\mu} = \bar{x} - x_{(1)}$。

故 μ 的极大似然估计为 $\hat{\mu} = X_{(1)}$，θ 的极大似然估计为 $\bar{X} - X_{(1)}$。

(c). 样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的似然函数为

$$
\begin{aligned}
L(\theta) &= \prod_{i=1}^{n} (k\theta)^{-1} \mathrm{I}_{\theta < x_i < (k+1)\theta} \\
&= (k\theta)^{-n} \mathrm{I}_{\theta < x_1, x_2, \ldots, x_n < (k+1)\theta}
\end{aligned}
$$

$(k\theta)^{-n}$ 关于 θ 单调递减，且由于示性函数的限制，仅当 $\theta < x_1, x_2, \ldots, x_n < (k+1)\theta$ 时，$L(\theta) > 0$。因此，$\theta = \frac{1}{k+1}\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \frac{x_{(n)}}{k+1}$ 时，$L(\theta)$ 达到最大。
故 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = \frac{X_{(n)}}{k+1}$。

3 **证明.** (a). 样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\theta} \mathrm{e}^{-\frac{|x_i|}{\theta}} = \frac{1}{2^n\theta^n} \mathrm{e}^{\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$$

其对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = -n\ln 2 - n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

令

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = -n\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i| = 0$$

解得 $\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$。
同时，由于，

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|} &= \left.\left(\frac{n}{\theta^2} - \frac{2\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\theta^3}\right)\right|_{\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|} \\ &= -\frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2} < 0\end{aligned}$$

故 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$。
(b). 样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的似然函数为

$$L(\theta) = \prod^{n} \mathrm{I}_{\theta-\frac{1}{2}<x_i<\theta+\frac{1}{2}} = \mathrm{I}_{\theta-\frac{1}{2}<x_1,x_2,\ldots,x_n<\theta+\frac{1}{2}}$$

$L(\theta)$ 仅存在两个取值 0 和 1，且当 $x_{(n)} - \frac{1}{2} < \theta < x_{(1)} + \frac{1}{2}$ 时，有 $L(\theta) = 1$。
故 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}$ 是 $\left(X_{(n)} - \frac{1}{2}, X_{(1)} + \frac{1}{2}\right)$ 中任何一个值。
(c). 样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的似然函数为

$$\begin{aligned}L(\theta_1, \theta_2) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}\mathrm{I}_{\theta_1<x_i<\theta_2} \\ &= \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}\mathrm{I}_{\theta_1<x_1,x_2,\ldots,x_n<\theta_2}\end{aligned}$$

显然 θ_1 越大且 θ_2 越小时，$\frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}$ 越大，且由于示性函数的限制，仅当 $\theta_1 < x_1, x_2, \ldots, x_n < \theta_2$ 时，$L(\theta_1, \theta_2) > 0$。因此，$\theta_1 = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_{(1)}$，$\theta_2 = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_{(n)}$ 时，$L(\theta_1, \theta_2)$ 达到最大。
故 θ_1 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_1 = X_{(1)}$，θ_2 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$。

5 **证明.** 当 $m = 2$ 时，X 只能取值 1 或 2，且

$$P(X=1) = \frac{2p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{2-2p}{2-p}$$

$$P(X=2) = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$

因此，

$$P\left(X=x;p\right)=\left(\frac{2-2p}{2-p}\right)^{2-x}\left(\frac{p}{2-p}\right)^{x-1}=\frac{(2-2p)^{2-x}p^{x-1}}{2-p},\quad x=1,2$$

样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}\frac{(2-2p)^{2-x_i}p^{x_i-1}}{2-p}=\frac{(2-2p)^{2n-\sum_{i=1}^{n}x_i}p^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}}{(2-p)^n}$$

其对数似然函数为

$$\ln L(p)=\left(2n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\ln(2-2p)+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\right)\cdot\ln p-n\ln(2-p)$$

令

$$\frac{\partial\ln L(p)}{\partial p}=\left(2n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\frac{-2}{2-2p}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\right)\cdot\frac{1}{p}-n\cdot\frac{-1}{2-p}=0$$

解得

$$p=2-\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=2-\frac{2}{\bar{x}}$$

故 p 的最大似然估计为 $\hat{p}=2-\frac{2}{\bar{X}}$。

7 **证明.** (a). 因为 $X\sim U(\theta,2\theta)$，有，

$$E(X)=\frac{\theta+2\theta}{2}=\frac{3}{2}\theta,\quad \mathrm{Var}(X)=\frac{(2\theta-\theta)^2}{12}=\frac{1}{12}\theta^2$$

故，

$$E(\hat{\theta})=\frac{2}{3}E(\bar{X})=\frac{2}{3}E(X)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\theta=\theta$$

即 $\hat{\theta}=\frac{2}{3}\bar{X}$ 是参数 θ 的无偏估计；

同时，因

$$\mathrm{Var}(\hat{\theta})=\frac{4}{9}\mathrm{Var}(\bar{X})=\frac{4}{9n}\mathrm{Var}(X)=\frac{4}{9n}\cdot\frac{1}{12}\theta^2=\frac{\theta^2}{27n}$$

有，

$$\lim_{n\to\infty}E(\hat{\theta})=\theta,\quad \lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}(\hat{\theta})=0$$

故 $\hat{\theta}=\frac{2}{3}\bar{X}$ 是参数 θ 的相合估计。

(b). 样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}\mathrm{I}_{\theta<x_i<2\theta}=\frac{1}{\theta^n}\mathrm{I}_{\theta<x_1,x_2,\ldots,x_n<2\theta}$$

$\frac{1}{\theta^n}$ 关于 θ 单调递减，且由于示性函数的限制，仅当 $\theta<x_1,x_2,\ldots,x_n<2\theta$ 时，$L(\theta)>0$。

因此，$\theta=\frac{1}{2}\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}=\frac{1}{2}x_{(n)}$ 时，$L(\theta)$ 达到最大。

故 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}=\frac{1}{2}X_{(n)}$。

由于 X 的密度函数与分布函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & \theta<x<2\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0, & x<\theta\\ \frac{x-\theta}{\theta}, & \theta\le x<2\theta;\\ 1, & x\ge 2\theta.\end{cases}$$

则 $X_{(n)}$ 的密度函数为

$$p_n(x)=n[F(x)]^{n-1}p(x)=\begin{cases}\frac{n(x-\theta)^{n-1}}{\theta^n}, & \theta<x<2\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

所以，

$$E\left(X_{(n)}-\theta\right)=\int_\theta^{2\theta}(x-\theta)\cdot\frac{n(x-\theta)^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}x=\frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{(x-\theta)^{n+1}}{n+1}\bigg|_\theta^{2\theta}=\frac{n}{n+1}\theta$$

有，

$$E\left(X_{(n)}\right)=\frac{2n+1}{n+1}\theta$$

$$E\left[\left(X_{(n)}-\theta\right)^2\right]=\int_\theta^{2\theta}(x-\theta)^2\cdot\frac{n(x-\theta)^{n-1}}{\theta^n}\mathrm{d}x=\frac{n}{\theta^n}\cdot\frac{(x-\theta)^{n+2}}{n+2}\bigg|_\theta^{2\theta}=\frac{n}{n+2}\theta^2$$

有，

$$\operatorname{Var}\left(X_{(n)}\right)=\operatorname{Var}\left(X_{(n)}-\theta\right)=\frac{n}{n+2}\theta^2-\left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2$$

又由于，$\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}=\frac{1}{2}X_{(n)}$

$$E\left(\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}\right)=\frac{1}{2}E\left(X_{(n)}\right)=\frac{2n+1}{2(n+1)}\theta\neq\theta$$
$$\operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}\right)=\frac{1}{4}\operatorname{Var}\left(X_{(n)}\right)=\frac{n}{4(n+1)^2(n+2)}\theta^2$$

故 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}=\frac{1}{2}X_{(n)}$ 不是参数 θ 的无偏估计。
因为，

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2(n+1)}\theta=\theta$$
$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4(n+1)^2(n+2)}\theta^2=0$$

故 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}_{\mathrm{MLE}}=\frac{1}{2}X_{(n)}$ 是参数 θ 的相合估计。

8 **证明.** (a). 样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n\mathrm{e}^{-(x_i-\theta)}\mathrm{I}_{x_i>\theta}=\exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i+n\theta\right)\mathrm{I}_{x_1,x_2,\ldots,x_n>\theta}$$

$\exp\left(-\sum_{i=1}^n x_i+n\theta\right)$ 关于 θ 单调递增，且由于示性函数的限制，仅当 $x_1,x_2,\ldots,x_n>\theta$ 时，$L(\theta)>0$。因此，$\theta=\min\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}=x_{(1)}$ 时，$L(\theta)$ 达到最大。
故 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_1=X_{(1)}$。
由于 X 的密度函数与分布函数为

$$p(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\leq\theta\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\leq\theta\end{cases}$$

则 $X_{(1)}$ 的密度函数为

$$p_1(x)=n[1-F(x)]^{n-1}p(x)=\begin{cases} n\mathrm{e}^{-n(x-\theta)}, & x>\theta \\ 0, & x\leq\theta. \end{cases}$$

可得 $X_{(1)}-\theta$ 服从指数分布 $\operatorname{Exp}(n)$。

所以，

$$E\left(X_{(1)}-\theta\right)=\frac{1}{n},\quad \operatorname{Var}\left(X_{(1)}-\theta\right)=\frac{1}{n^2}$$

则，

$$E\left(\hat{\theta}_1\right)=E\left(X_{(1)}\right)=\theta+\frac{1}{n}\neq\theta$$

$$\operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_1\right)=\operatorname{Var}\left(X_{(1)}\right)=\operatorname{Var}\left(X_{(1)}-\theta\right)=\frac{1}{n^2}$$

故 $\hat{\theta}_1=X_{(1)}$ 不是 θ 的无偏估计。

由于，

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\hat{\theta}_1\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\theta+\frac{1}{n}\right)=\theta,\quad \lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

故 $\hat{\theta}_1=X_{(1)}$ 是 θ 的相合估计;

(b). 总体 X 的密度函数为

$$p(x;\theta)=\mathrm{e}^{-(x-\theta)}, x>\theta$$

有 $X-\theta$ 服从指数分布 $\operatorname{Exp}(1)$。

则 $E(X-\theta)=E(X)-\theta=1$，即 $\theta=E(X)-1$，故 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_2=\bar{X}-1$。

因，

$$E(X)=\theta+1,\quad \operatorname{Var}(X)=\operatorname{Var}(X-\theta)=\theta^2$$

则，

$$E\left(\hat{\theta}_2\right)=E(\bar{X})-1=E(X)-1=\theta,\quad \operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_2\right)=\operatorname{Var}(\bar{X})=\frac{1}{n}\operatorname{Var}(X)=\frac{\theta^2}{n}$$

故 $\hat{\theta}_2=\bar{X}-1$ 是 θ 的无偏估计。

因，

$$\lim_{n\to\infty}E\left(\hat{\theta}_2\right)=\theta,\quad \lim_{n\to\infty}\operatorname{Var}\left(\hat{\theta}_2\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\theta^2}{n}=0$$

故 $\hat{\theta}_2=\bar{X}-1$ 是 θ 的相合估计。

10 **证明.** 若只有一个观测值 x，似然函数为

$$L\left(\mu,\sigma^2\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

对于任一固定的 σ，当 $\mu=x$ 时，$L(\mu)$ 取得最大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$。

由于 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 关于 σ 单调递减，且

$$\lim_{\sigma\to0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}=\infty$$

即 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$ 不存在最大值，故 μ,σ^2 的最大似然估计不存在。