2021 年春季学期/数理统计/第六周/课后作业解答

龚梓阳

更新：2021 年 4 月 24 日

2 **证明.** 因 $X_1, X_2, \ldots, X_n \sim_{i.i.d} \mathrm{Exp}(\lambda) = \mathrm{Ga}(1, \lambda)$，由伽玛分布的可加性知 $Y = \sum_{i=1}^n X_i \sim \mathrm{Ga}(n, \lambda)$，其密度函数为

$$p_Y(y) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda y}, \quad y > 0$$

则，

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{\bar{X}}\right) &= E\left(\frac{n}{Y}\right) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{n}{y} \cdot \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} \mathrm{e}^{-\lambda y} \mathrm{d}y \\ &= \frac{n\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} y^{n-2} \mathrm{e}^{-\lambda y} \mathrm{d}y \\ &= \frac{n\lambda^n}{\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(n-1)}{\lambda^{n-1}} \\ &= \frac{n\lambda}{n-1} \end{aligned}$$

故，$1/\bar{X}$ 不是 λ 的无偏估计。

3 **证明.** 由于 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计，即 $E(\hat{\theta}) = \theta$，因此，

$$E\left[(\hat{\theta})^2\right] = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta})]^2 = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + \theta^2 > \theta^2$$

故，$(\hat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计。

4 **证明.**

$$\begin{aligned} E\left[(X_{i+1} - X_i)^2\right] &= \mathrm{Var}\left(X_{i+1} - X_i\right) + \left[E\left(X_{i+1} - X_i\right)\right]^2 \\ &= \mathrm{Var}\left(X_{i+1}\right) + \mathrm{Var}\left(X_i\right) + \left[E\left(X_{i+1}\right) - E\left(X_i\right)\right]^2 \\ &= 2\sigma^2 \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} E\left[c\sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2\right] &= c\sum_{i=1}^{n-1} E\left[(X_{i+1} - X_i)^2\right] \\ &= c \cdot (n-1) \cdot 2\sigma^2 = 2c(n-1)\sigma^2 \end{aligned}$$

所以，当 $c = \frac{1}{2(n-1)}$ 时，

$$E\left[c\sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2\right] = \sigma^2$$

故，$c\sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计。

6 **证明.** 由 $X \sim U(0,\theta)$，可知 $x_{(1)}, x_{(3)}$ 的密度函数分别为

$$p_1(x) = 3[1-F(x)]^2 p(x) = \frac{3(\theta-x)^2}{\theta^3}, \quad 0<x<\theta$$
$$p_3(x) = 3[F(x)]^2 p(x) = \frac{3x^2}{\theta^3}, \quad 0<x<\theta$$

则，

$$E\left(X_{(1)}\right) = \int_0^\theta x \cdot \frac{3(\theta-x)^2}{\theta^3}\mathrm{d}x = \frac{3}{\theta^3}\left(\theta^2 \cdot \frac{x^2}{2} - 2\theta \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^\theta = \frac{\theta}{4}$$
$$E\left(X_{(1)}^2\right) = \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{3(\theta-x)^2}{\theta^3}\mathrm{d}x = \frac{3}{\theta^3}\left(\theta^2 \cdot \frac{x^3}{3} - 2\theta \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^\theta = \frac{\theta^2}{10}$$
$$E\left(X_{(3)}\right) = \int_0^\theta x \cdot \frac{3x^2}{\theta^3}dy = \frac{3}{\theta^3} \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^\theta = \frac{3\theta}{4}$$
$$E\left(X_{(3)}^2\right) = \int_0^\theta x^2 \cdot \frac{3x^2}{\theta^3}dy = \frac{3}{\theta^3} \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^\theta = \frac{3\theta^2}{5}$$

因此，

$$E\left(4X_{(1)}\right) = 4 \cdot \frac{\theta}{4} = \theta, \quad E\left(\frac{4}{3}X_{(3)}\right) = \frac{4}{3} \cdot \frac{3\theta}{4} = \theta$$

故，$4X_{(1)}$ 及 $\frac{4}{3}X_{(3)}$ 都是 θ 的无偏估计；
同时，

$$\operatorname{Var}\left(4X_{(1)}\right) = 16 \cdot \left[\frac{\theta^2}{10} - \left(\frac{\theta}{4}\right)^2\right] = \frac{3\theta^2}{5}$$
$$\operatorname{Var}\left(\frac{4}{3}X_{(3)}\right) = \frac{16}{9} \cdot \left[\frac{3\theta^2}{5} - \left(\frac{3\theta}{4}\right)^2\right] = \frac{\theta^2}{15}$$

故，$\operatorname{Var}\left(4X_{(1)}\right) > \operatorname{Var}\left(\frac{4}{3}X_{(3)}\right)$，即 $\frac{4}{3}X_{(3)}$ 比 $4X_{(1)}$ 更有效。

7 **证明.** 由于，

$$E(Y) = aE\left(\bar{X}_1\right) + bE\left(\bar{X}_2\right) = a\mu + b\mu = (a+b)\mu = \mu$$

故 Y 是 μ 的无偏估计；
同时，

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(Y) =& a^2 \operatorname{Var}\left(\bar{X}_1\right) + b^2 \operatorname{Var}\left(\bar{X}_2\right) \\ =& a^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n_1} + (1-a)^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n_2} \\ =& \left(\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}a^2 - \frac{2}{n_2}a + \frac{1}{n_2}\right)\sigma^2\end{aligned}$$

对 $\operatorname{Var}(Y)$ 求导，可得

$$\frac{\partial \operatorname{Var}(Y)}{\partial a} = \left(\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2} \cdot 2a - \frac{2}{n_2}\right)\sigma^2$$

令 $\frac{\partial \operatorname{Var}(Y)}{\partial a} = 0$，得 $a = \frac{n_1}{n_1+n_2}$。
同时，

$$\frac{\partial^2 \operatorname{Var}(Y)}{\partial^2 a} = \frac{n_1+n_2}{n_1 n_2} \cdot 2\sigma^2 > 0$$

故当 $a = \frac{n_1}{n_1+n_2}$， $b = 1-a = \frac{n_2}{n_1+n_2}$ 时，$\operatorname{Var}(Y)$ 达到最小，此时 $\frac{1}{n_1+n_2}\sigma^2$。

8 **证明.** 因 $T\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ 为 μ 的任一线性无偏估计量，不妨设

$$T\left(X_1,\ldots,X_n\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

则，

$$E(T)=\sum_{i=1}^{n} a_i E\left(X_i\right)=\mu \sum_{i=1}^{n} a_i=\mu$$

因此 $\sum_{i=1}^{n} a_i=1$。

同时，由于 $X_1,\ldots,X_n$ 相互独立，当 $i \neq j$ 时，有

$$\operatorname{Cov}\left(X_i, X_j\right)=0$$

则，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(\bar{X}, T) & =\operatorname{Cov}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) \\
& =\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Cov}\left(\frac{1}{n} X_i, a_i X_i\right) \\
& =\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n} \operatorname{Cov}\left(X_i, X_i\right) \\
& =\frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i=\frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

因此，

$$\operatorname{Var}(\bar{X})=\frac{1}{n} \operatorname{Var}(X)=\frac{\sigma^2}{n}=\operatorname{Cov}(\bar{X}, T)$$

故 $\bar{X}$ 与 T 的相关系数为

$$\begin{aligned}
\operatorname{Corr}(\bar{X}, T) & =\frac{\operatorname{Cov}(\bar{X}, T)}{\sqrt{\operatorname{Var}(\bar{X})} \sqrt{\operatorname{Var}(T)}} \\
& =\frac{\operatorname{Var}(\bar{X})}{\sqrt{\operatorname{Var}(\bar{X})} \sqrt{\operatorname{Var}(T)}} \\
& =\sqrt{\frac{\operatorname{Var}(\bar{X})}{\operatorname{Var}(T)}}
\end{aligned}$$