2022 年春季学期/数理统计/第五周/课后作业解答

龚梓阳

更新：2022 年 3 月 29 日

2 **证明.** 样本的联合概率函数为

$$p\left(x_1, x_2, \cdots, x_n ; \lambda\right)=\prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i !} \mathrm{e}^{-\lambda}=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{x_1 ! x_2 ! \cdots x_n !} \mathrm{e}^{-n \lambda}=\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i} \mathrm{e}^{-n \lambda} \cdot \frac{1}{x_1 ! x_2 ! \cdots x_n !}$$

因 $T=\sum_{i=1}^n X_i$，有 $t=\sum_{i=1}^n x_i$，即

$$p\left(x_1, x_2, \cdots, x_n ; \lambda\right)=\lambda^t \mathrm{e}^{-n \lambda} \cdot \frac{1}{x_1 ! x_2 ! \cdots x_n !}$$

取

$$g(t ; \lambda)=\lambda^t \mathrm{e}^{-n \lambda}, \quad h\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)=\frac{1}{x_1 ! x_2 ! \cdots x_n !}$$

故根据因子分解定理有，$T=\sum_{i=1}^n X_i$ 是 λ 的充分统计量。

6 **证明.** 样本的联合密度函数为

$$\begin{aligned} p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \theta\right)= & \prod_{i=1}^n m x_i^{m-1} \theta^{-m} \mathrm{e}^{-\left(x_i / \theta\right)^m} \\ = & m^n\left(x_1 x_2 \ldots x_n\right)^{m-1} \theta^{-m n} \mathrm{e}^{-\sum_{i=1}^n\left(x_i / \theta\right)^m} \\ = & =\theta^{-m n} \mathrm{e}^{-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^m}{\theta^m}} \cdot m^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{m-1}\end{aligned}$$

令

$$T=\sum_{i=1}^n X_i^m, \quad g(t ; \theta)=\theta^{-m n} \mathrm{e}^{-\frac{t}{\theta^m}}, \quad h\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=m^n\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{m-1} .$$

故根据因子分解定理有，$T=\sum_{i=1}^n X_i^m$ 为 θ 的充分统计量。

8 **证明.** 样本的联合密度函数为

$$p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \mu\right)=\prod_{i=1}^n \frac{1}{2 \theta} \mathrm{e}^{-\frac{\left|x_i\right|}{\theta}}=\frac{1}{(2 \theta)^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n\left|x_i\right|}$$

令

$$T=\sum_{i=1}^n\left|X_i\right|, \quad g(t ; \theta)=\frac{1}{(2 \theta)^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta} t}, \quad h\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=1 .$$

故根据因子分解定理有，$T=\sum_{i=1}^n\left|X_i\right|$ 为 θ 的充分统计量。

12 **证明.** 样本的联合密度函数为

$$
\begin{aligned}
p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n ; \theta\right) & =\prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} I_{\left\{\theta<x_i<2 \theta\right\}} \\
& =\frac{1}{\theta^n} I_{\left\{\theta<x_1, x_2, \ldots, x_n<2 \theta\right\}} \\
& =\frac{1}{\theta^n} I_{\left\{\theta<x_{(1)} \leq x_{(n)}<2 \theta\right\}}
\end{aligned}
$$

令

$$
\left(T_1, T_2\right)=\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right), \quad g\left(t_1, t_2 ; \theta\right)=\frac{1}{\theta^n} I_{\left\{\theta<t_1 \leq t_2<2 \theta\right\}}, \quad h\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=1 .
$$

故根据因子分解定理有，$\left(T_1, T_2\right)=\left(X_{(1)}, X_{(n)}\right)$ 为 θ 的充分统计量。