2022 年春季学期/数理统计/第十二周/课后作业解答

龚梓阳

更新：2022 年 5 月 17 日

2 **证明.** 由题设条件（σ^2 已知），μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{x}-\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

其长度为 $2\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$。给定置信度 $1-\alpha=0.95$，有 $\mu_{1-\alpha/2}=\mu_{0.975}=1.96$。若使置信区间的长度

$$2\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq k$$

故

$$\sqrt{n}\geq 3.92\times\frac{\sigma}{k}\Rightarrow n\geq\frac{15.3664\sigma^2}{k^2}$$

3 **证明.** (a). 由题设条件（σ^2 已知），μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{y}-\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{y}+\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

给定置信度 $1-\alpha=0.95$，有 $\mu_{1-\alpha/2}=\mu_{0.975}=1.96$，且有

$$\sigma=1,\quad n=4,\quad \bar{y}=\frac{1}{4}(\ln 0.50+\ln 1.25+\ln 0.80+\ln 2.00)=0$$

故 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[0\pm 1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}}\right]=[-0.98,0.98]$$

(b). 因 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$，有 $X=\mathrm{e}^Y$。且 Y 的密度函数为

$$p(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}$$

则

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}\,\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2-2\mu y+\mu^2-2}{2}}\,\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2-2(\mu+1)y+(\mu+1)^2-2\mu-1}{2}}\,\mathrm{d}y\\&=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu-1)^2}{2}}\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

由于 $E(X)=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}$ 为 μ 的严格单调增函数，因此，$E(X)$ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[\mathrm{e}^{-0.98+0.5},\mathrm{e}^{0.98+0.5}\right]=[0.6188,4.3929]$$

5 **证明.** (a). 由题设条件（σ^2 未知），μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{x}-t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}=t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

给定置信度 $1-\alpha=0.95$，对于 $n=10$，有 $t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(9)=2.2622$，且有

$$\bar{x}=457.5,\quad s=35.2176$$

故 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[457.5\pm2.2622\times\frac{35.2176}{\sqrt{10}}\right]=[432.3064,482.6936]$$

(b). 由题设条件（σ^2 已知），μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{x}-\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

给定置信度 $1-\alpha=0.95$ 有 $\mu_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96$ 且有

$$n=10,\bar{x}=457.5,\quad\sigma=30$$

故 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[457.5\pm1.96\times\frac{30}{\sqrt{10}}\right]=[438.9058,476.0942]$$

(c). 由题设条件（μ 未知），σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right]$$

给定置信度 $1-\alpha=0.95$，对于 $n=10$，有

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(9)=2.7004,\quad\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(9)=19.0228$$

且有 $s=35.2176$。故 σ^2 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[\frac{9\times35.2176^2}{19.0228},\frac{9\times35.2176^2}{2.7004}\right]=[586.7958,4133.6469]$$

因此，σ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$[\sqrt{586.7958},\sqrt{4133.6469}]=[24.2239,64.2934]$$

9 **证明.** (a). 由题设条件（σ_1^2,σ_2^2 已知），$\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[(\bar{x}-\bar{y})-\mu_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},(\bar{x}-\bar{y})+\mu_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

给定置信度 $1-\alpha=0.95$，有 $\mu_{1-\alpha/2}=\mu_{0.975}=1.96$，且有

$$\bar{x}=82,\quad \bar{y}=76,\quad \sigma_1^2=64,\quad \sigma_2^2=49,\quad n_1=10,\quad n_2=15$$

故 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[(82-76)\pm 1.96\times\sqrt{\frac{64}{10}+\frac{49}{15}}\right]=[-0.0939,12.0939]$$

(b). 由题设条件（$\sigma_1^2=\sigma_2^2$），$\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[(\bar{x}-\bar{y})\pm\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}s_w\cdot t_{1-\alpha/2}\left(n_1+n_2-2\right)\right]$$

给定置信度 $1-\alpha=0.95$, 对于 $n_1=10,n_2=15$, 有 $t_{1-\alpha/2}\left(n_1+n_2-2\right)=t_{0.975}(23)=2.0687$，且有

$$\bar{x}=82,\quad s_x^2=56.5,\quad \bar{y}=76,\quad s_y^2=52.4,\quad s_w=\sqrt{\frac{9\times 56.5+14\times 52.4}{23}}=7.3488$$

故 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[(82-76)\pm 2.0687\times 7.3488\times\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}\right]=[-0.2063,12.2063]$$

(c). 由题设条件（σ_1^2,σ_2^2 未知），$\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[(\bar{x}-\bar{y})\pm t_{1-\alpha/2}\left(l_0\right)\cdot\sqrt{\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2}}\right]$$

其中,

$$l_0\left[\frac{\left(\frac{s_x^2}{n_1}+\frac{s_y^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_x^4}{n_1^2(n_1-1)}+\frac{s_y^4}{n_2^2(n_2-1)}}\right]$$

对于 $n_1=10,n_2=15,s_x^2=56.5,s_y^2=52.4$, 有

$$\frac{\left(\frac{56.5}{10}+\frac{52.4}{15}\right)^2}{\frac{56.5^2}{10^2\times 9}+\frac{52.4^2}{15^2\times 14}}=18.9201$$

取 $l_0=19$。给定置信度为 $1-\alpha=0.95$，有 $t_{1-\alpha/2}\left(l_0\right)=t_{0.975}(19)=2.0930$，且有

$$\bar{x}=82,\quad s_x^2=56.5,\quad \bar{y}=76,\quad s_y^2=52.4$$

故 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[(82-76)\pm 2.0930\times\sqrt{\frac{56.5}{10}+\frac{52.4}{15}}\right]=[-0.3288,12.3288]$$

(d). σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{s_x^2}{s_y^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)},\frac{s_x^2}{s_y^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)}\right]$$

给定置信度 $1-\alpha=0.95$，对于 $n_1=10,n_2=15$，有

$$F_{1-\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)=F_{0.975}(9,14)=3.21$$
$$F_{\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)=F_{0.025}(9,14)=\frac{1}{F_{0.975}(14,9)}=\frac{1}{3.80}$$

且有 $s_x^2=56.5,\quad s_y^2=52.4$。故 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[\frac{56.50}{52.4}\times\frac{1}{3.21},\frac{56.50}{52.4}\times 3.80\right]=[0.3359,4.0973]$$