2022 年春季学期/数理统计/第八周/课后作业解答

龚梓阳

更新：2022 年 4 月 21 日

2 **证明.** (a). 样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的似然函数为

$$
\begin{aligned}
L(\theta) = & \prod_{i=1}^{n} c\theta^c x_i^{-(c+1)} \mathrm{I}_{x_i>\theta} \\
= & c^n \theta^{nc} \Pi_{i=1}^n x_i^{-(c+1)} \mathrm{I}_{x_1, x_2, \ldots, x_n > \theta}
\end{aligned}
$$

$c^n \theta^{nc} \Pi_{i=1}^n x_i^{-(c+1)}$ 关于 θ 单调递增，且由于示性函数的限制，仅当 $x_1, x_2, \ldots, x_n > \theta$ 时，$L(\theta) > 0$。因此，$\theta = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_{(1)}$ 时，$L(\theta)$ 达到最大。

故 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = X_{(1)}$。

(b). 样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的似然函数为

$$
\begin{aligned}
L(\theta, \mu) = & \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{x_i - \mu}{\theta}} \mathrm{I}_{x_i > \mu} \\
= & \frac{1}{\theta^n} \mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^n x_i - n\mu\right)} \mathrm{I}_{x_1, x_2, \ldots, x_n > \mu}
\end{aligned}
$$

当 $x_1, x_2, \ldots, x_n > \mu$ 时，

$$
\ln L(\theta, \mu) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right)
$$

对于给定的 θ_0，

$$
\frac{\partial \ln L(\theta_0, \mu)}{\partial \mu} = \frac{n}{\theta_0} > 0
$$

$\ln L(\theta_0, \mu)$ 关于 μ 单调递增，且由于示性函数的限制，仅当 $x_1, x_2, \ldots, x_n > \mu$ 时，$\ln L(\theta_0, \mu) > 0$，因此，$\mu = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_{(1)}$ 时，$\ln L(\theta_0, \mu)$ 达到最大。

因此，令

$$
\frac{\partial \ln L(\theta, \hat{\mu})}{\partial \theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\hat{\mu}\right) = 0
$$

解得 $\theta = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i - n\hat{\mu}\right) = \bar{x} - \hat{\mu} = \bar{x} - x_{(1)}$。

故 μ 的极大似然估计为 $\hat{\mu} = X_{(1)}$，θ 的极大似然估计为 $\bar{X} - X_{(1)}$。

(c). 样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的似然函数为

$$
\begin{aligned}
L(\theta) = & \prod_{i=1}^{n} (k\theta)^{-1} \mathrm{I}_{\theta < x_i < (k+1)\theta} \\
= & (k\theta)^{-n} \mathrm{I}_{\theta < x_1, x_2, \ldots, x_n < (k+1)\theta}
\end{aligned}
$$

$(k\theta)^{-n}$ 关于 θ 单调递减，且由于示性函数的限制，仅当 $\theta < x_1, x_2, \ldots, x_n < (k+1)\theta$ 时，$L(\theta) > 0$。因此，$\theta = \frac{1}{k+1}\max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \frac{x_{(n)}}{k+1}$ 时，$L(\theta)$ 达到最大。
故 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = \frac{X_{(n)}}{k+1}$。

3 **证明.** (a). 样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\theta} \mathrm{e}^{-\frac{|x_i|}{\theta}} = \frac{1}{2^n \theta^n} \mathrm{e}^{\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$$

其对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = -n\ln 2 - n\ln\theta - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

令

$$\frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial\theta} = -n\frac{1}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i| = 0$$

解得 $\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$。
同时，由于，

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 \ln L(\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|} &= \left.\left(\frac{n}{\theta^2} - \frac{2\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{\theta^3}\right)\right|_{\theta=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|} \\ &= -\frac{n^3}{\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2} < 0\end{aligned}$$

故 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_i|$。

(b). 样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的似然函数为

$$L(\theta) = \prod^{n} \mathrm{I}_{\theta-\frac{1}{2}<x_i<\theta+\frac{1}{2}} = \mathrm{I}_{\theta-\frac{1}{2}<x_1,x_2,\ldots,x_n<\theta+\frac{1}{2}}$$

$L(\theta)$ 仅存在两个取值 0 和 1，且当 $x_{(n)} - \frac{1}{2} < \theta < x_{(1)} + \frac{1}{2}$ 时，有 $L(\theta) = 1$。
故 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}$ 是 $\left(X_{(n)} - \frac{1}{2}, X_{(1)} + \frac{1}{2}\right)$ 中任何一个值。

(c). 样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的似然函数为

$$\begin{aligned}L(\theta_1, \theta_2) =& \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \mathrm{I}_{\theta_1 < x_i < \theta_2} \\ =& \frac{1}{(\theta_2 - \theta_1)^n} \mathrm{I}_{\theta_1 < x_1, x_2, \ldots, x_n < \theta_2}\end{aligned}$$

显然 θ_1 越大且 θ_2 越小时，$\frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}$ 越大，且由于示性函数的限制，仅当 $\theta_1 < x_1, x_2, \ldots, x_n < \theta_2$ 时，$L(\theta_1, \theta_2) > 0$。因此，$\theta_1 = \min\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_{(1)}, \theta_2 = \max\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = x_{(n)}$ 时，$L(\theta_1, \theta_2)$ 达到最大。
故 θ_1 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_1 = X_{(1)}$，θ_2 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$。

5 **证明.** 当 $m = 2$ 时，X 只能取值 1 或 2，且

$$P(X = 1) = \frac{2p(1-p)}{1-(1-p)^2} = \frac{2-2p}{2-p}$$

$$P(X = 2) = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$$

因此，

$$P\left(X=x;p\right)=\left(\frac{2-2p}{2-p}\right)^{2-x}\left(\frac{p}{2-p}\right)^{x-1}=\frac{(2-2p)^{2-x}p^{x-1}}{2-p},\quad x=1,2$$

样本 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 的似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}\frac{(2-2p)^{2-x_i}p^{x_i-1}}{2-p}=\frac{(2-2p)^{2n-\sum_{i=1}^{n}x_i}p^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}}{(2-p)^n}$$

其对数似然函数为

$$\ln L(p)=\left(2n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\ln(2-2p)+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\right)\cdot\ln p-n\ln(2-p)$$

令

$$\frac{\partial\ln L(p)}{\partial p}=\left(2n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\cdot\frac{-2}{2-2p}+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\right)\cdot\frac{1}{p}-n\cdot\frac{-1}{2-p}=0$$

解得

$$p=2-\frac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=2-\frac{2}{\bar{x}}$$

故 p 的最大似然估计为 $\hat{p}=2-\frac{2}{\bar{X}}$。