2022 年春季学期/数理统计/第四周/课后作业解答

龚梓阳

更新：2022 年 3 月 29 日

2 **证明.** 因为 $X \sim N(\mu, 16)$，所以 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{16}{n}\right)$。因此，

$$
\begin{aligned}
P(|\bar{X}-\mu|<1) &= P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{16/n}}\right| < \frac{1}{\sqrt{16/n}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - 1 \geq 0.95
\end{aligned}
$$

所以，$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) \geq 0.975$，$\frac{\sqrt{n}}{4} \geq 1.96$，即 $n \geq 61.47$。因此，当 n 至少为 62 时，上述概率不等式才成立。

9 **证明.** 因为，

$$
X_1 \sim N(0, \sigma^2), \quad X_2 \sim N(0, \sigma^2),
$$

$$
X_1 + X_2 \sim N(0, 2\sigma^2), \quad X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2),
$$

因此，根据卡方分布定义有

$$
\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1), \quad \left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1).
$$

因为，

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X_1+X_2, X_1-X_2) &= 2\operatorname{Cov}(X_1, X_2) + \operatorname{Var}(X_1) - \operatorname{Var}(X_2) \\
&= 0 + \sigma^2 - \sigma^2 = 0
\end{aligned}
$$

所以，由性质 3.4.13 有，对于二维正态分布 (X_1+X_2, X_1-X_2)，不相关与独立是等价的。于是，根据 F 分布的定义有

$$
Y = \left(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2 = \frac{\frac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2}}{\frac{(X_1-X_2)^2}{2\sigma^2}} \sim F(1,1)
$$

11 **证明.** 因为，

$$
\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma^2}{n}\right), \quad \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma^2}{m}\right)
$$

有，

$$
c\left(\bar{X}-\mu_1\right) + d\left(\bar{Y}-\mu_2\right) \sim N\left(0, \frac{c^2\sigma^2}{n} + \frac{d^2\sigma^2}{m}\right)
$$

则，

$$\frac{c\left(\bar{X}-\mu_1\right)+d\left(\bar{Y}-\mu_2\right)}{\sigma\sqrt{\frac{c^2}{n}+\frac{d^2}{m}}} \sim N(0,1)$$

又因为，

$$\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$
$$\frac{(m-1)S_y^2}{\sigma^2}=\frac{\sum_{j=1}^{m}\left(Y_j-\bar{Y}\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m-1)$$

由于 $\frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2}$ 和 $\frac{(m-1)S_y^2}{\sigma^2}$ 相互独立，则，

$$\frac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n+m-2)$$

且 $\frac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{\sigma^2}$ 与 $c\left(\bar{X}-\mu_1\right)+d\left(\bar{Y}-\mu_2\right)$ 相互独立，故由 t 分布定义知

$$\frac{\frac{c\left(\bar{X}-\mu_1\right)+d\left(\bar{Y}-\mu_2\right)}{\sigma\sqrt{\frac{c^2}{n}+\frac{d^2}{m}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_x^2+(m-1)S_y^2}{\sigma^2}/(n+m-2)}}=\frac{c\left(\bar{X}-\mu_1\right)+d\left(\bar{Y}-\mu_2\right)}{S_w\sqrt{\frac{c^2}{n}+\frac{d^2}{m}}} \sim t(n+m-2)$$

12 **证明.** 因为，

$$\bar{X}_n \sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right),\quad X_{n+1} \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$$

有，

$$X_{n+1}-\bar{X}_n \sim N\left(0,\sigma^2+\frac{\sigma^2}{n}\right)$$

即，

$$\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}} \sim N(0,1)$$

又因为，

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

且 $\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}$ 与 $X_{n+1}-\bar{X}_n$ 相互独立，则由 t 分布定义知，

$$\frac{\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}}{\sqrt{\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2}/(n-1)}}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{S_n} \sim t(n-1)$$

故当 $c=\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ 时，$c\frac{X_{n+1}-\bar{X}_n}{S_n}$ 服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布。