2021 年春季学期/数理统计/第十三周/课后作业解答

龚梓阳

更新：2021 年 6 月 26 日

2 **证明.** 由题设条件（σ^2 已知），μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{x}-\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

其长度为 $2\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$。给定置信度 $1-\alpha=0.95$，有 $\mu_{1-\alpha/2}=\mu_{0.975}=1.96$。若使置信区间的长度

$$2\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq k$$

故

$$\sqrt{n}\geq3.92\times\frac{\sigma}{k}\Rightarrow n\geq\frac{15.3664\sigma^2}{k^2}$$

3 **证明.** (a). 由题设条件（σ^2 已知），μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{y}-\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{y}+\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

给定置信度 $1-\alpha=0.95$，有 $\mu_{1-\alpha/2}=\mu_{0.975}=1.96$，且有

$$\sigma=1,\quad n=4,\quad \bar{y}=\frac{1}{4}(\ln0.50+\ln1.25+\ln0.80+\ln2.00)=0$$

故 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[0\pm1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}}\right]=[-0.98,0.98]$$

(b). 因 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$，有 $X=\mathrm{e}^Y$。且 Y 的密度函数为

$$p(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}$$

则

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^y\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu)^2}{2}}\,\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2-2\mu y+\mu^2-2}{2}}\,\mathrm{d}y\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2-2(\mu+1)y+(\mu+1)^2-2\mu-1}{2}}\,\mathrm{d}y\\&=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu-1)^2}{2}}\,\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

由于 $E(X)=\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}$ 为 μ 的严格单调增函数，因此，$E(X)$ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[\mathrm{e}^{-0.98+0.5},\mathrm{e}^{0.98+0.5}\right]=[0.6188,4.3929]$$

5 **证明.** (a). 由题设条件（σ^2 未知），μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{x}-t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}=t_{1-\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right]$$

给定置信度 $1-\alpha=0.95$，对于 $n=10$，有 $t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(9)=2.2622$，且有

$$\bar{x}=457.5,\quad s=35.2176$$

故 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[457.5\pm 2.2622\times\frac{35.2176}{\sqrt{10}}\right]=[432.3064,482.6936]$$

(b). 由题设条件（σ^2 已知），μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\bar{x}-\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\bar{x}+\mu_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

给定置信度 $1-\alpha=0.95$ 有 $\mu_{1-\alpha/2}=u_{0.975}=1.96$ 且有

$$n=10,\bar{x}=457.5,\quad \sigma=30$$

故 μ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[457.5\pm 1.96\times\frac{30}{\sqrt{10}}\right]=[438.9058,476.0942]$$

(c). 由题设条件（μ 未知），σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)},\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right]$$

给定置信度 $1-\alpha=0.95$，对于 $n=10$，有

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.025}(9)=2.7004,\quad \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.975}(9)=19.0228$$

且有 $s=35.2176$。故 σ^2 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[\frac{9\times 35.2176^2}{19.0228},\frac{9\times 35.2176^2}{2.7004}\right]=[586.7958,4133.6469]$$

因此，σ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$[\sqrt{586.7958},\sqrt{4133.6469}]=[24.2239,64.2934]$$

9 **证明.** (a). 由题设条件（σ_1^2, σ_2^2 已知），$\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[(\bar{x}-\bar{y}) - \mu_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, (\bar{x}-\bar{y}) + \mu_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right]$$

给定置信度 $1-\alpha = 0.95$，有 $\mu_{1-\alpha/2} = \mu_{0.975} = 1.96$，且有

$$\bar{x} = 82, \quad \bar{y} = 76, \quad \sigma_1^2 = 64, \quad \sigma_2^2 = 49, \quad n_1 = 10, \quad n_2 = 15$$

故 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[(82-76) \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{64}{10} + \frac{49}{15}}\right] = [-0.0939, 12.0939]$$

(b). 由题设条件（$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$），$\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[(\bar{x}-\bar{y}) \pm \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} s_w \cdot t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right]$$

给定置信度 $1-\alpha = 0.95$，对于 $n_1 = 10, n_2 = 15$，有 $t_{1-\alpha/2}(n_1+n_2-2) = t_{0.975}(23) = 2.0687$，且有

$$\bar{x} = 82, \quad s_x^2 = 56.5, \quad \bar{y} = 76, \quad s_y^2 = 52.4, \quad s_w = \sqrt{\frac{9 \times 56.5 + 14 \times 52.4}{23}} = 7.3488$$

故 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[(82-76) \pm 2.0687 \times 7.3488 \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{15}}\right] = [-0.2063, 12.2063]$$

(c). 由题设条件（σ_1^2, σ_2^2 未知），$\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[(\bar{x}-\bar{y}) \pm t_{1-\alpha/2}(l_0) \cdot \sqrt{\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}}\right]$$

其中，

$$l_0 \left[\frac{\left(\frac{s_x^2}{n_1} + \frac{s_y^2}{n_2}\right)^2}{\frac{s_x^4}{n_1^2(n_1-1)} + \frac{s_y^4}{n_2^2(n_2-1)}}\right]$$

对于 $n_1 = 10, n_2 = 15, s_x^2 = 56.5, s_y^2 = 52.4$，有

$$\frac{\left(\frac{56.5}{10} + \frac{52.4}{15}\right)^2}{\frac{56.5^2}{10^2 \times 9} + \frac{52.4^2}{15^2 \times 14}} = 18.9201$$

取 $l_0 = 19$。给定置信度为 $1-\alpha = 0.95$，有 $t_{1-\alpha/2}(l_0) = t_{0.975}(19) = 2.0930$，且有

$$\bar{x} = 82, \quad s_x^2 = 56.5, \quad \bar{y} = 76, \quad s_y^2 = 52.4$$

故 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[(82-76) \pm 2.0930 \times \sqrt{\frac{56.5}{10} + \frac{52.4}{15}}\right] = [-0.3288, 12.3288]$$

(d). σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{s_x^2}{s_y^2}\cdot\frac{1}{F_{1-\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)},\frac{s_x^2}{s_y^2}\cdot\frac{1}{F_{\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)}\right]$$

给定置信度 $1-\alpha=0.95$，对于 $n_1=10,n_2=15$，有

$$F_{1-\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)=F_{0.975}(9,14)=3.21$$
$$F_{\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)=F_{0.025}(9,14)=\frac{1}{F_{0.975}(14,9)}=\frac{1}{3.80}$$

且有 $s_x^2=56.5,\quad s_y^2=52.4$。故 σ_1^2/σ_2^2 的置信水平为 95% 的置信区间为

$$\left[\frac{56.50}{52.4}\times\frac{1}{3.21},\frac{56.50}{52.4}\times 3.80\right]=[0.3359,4.0973]$$

11 **证明.** 总体 X 服从指数分布 $\mathrm{Exp}(\lambda)$, 有

$$Y=2\lambda X\sim \mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)=\mathrm{Ga}\left(1,\frac{1}{2}\right)=\chi^2(2)$$

因此,

$$n\bar{Y}=Y_1+\ldots+Y_n\sim\chi^2(2n)$$

选取枢轴量

$$\chi^2=2n\lambda\bar{x}\sim\chi^2(2n)$$

给定置信度 $1-\alpha$, 即

$$P\left\{\chi^2_{\alpha/2}(2n)\leq 2n\lambda\bar{x}\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)\right\}=1-\alpha$$

则

$$\chi^2_{\alpha/2}(2n)\leq 2n\lambda\bar{x}\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)$$

即

$$\frac{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2n\bar{x}}\leq\lambda\leq\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2n\bar{x}}$$

故 λ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{\chi^2_{\alpha/2}(2n)}{2n\bar{x}},\frac{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)}{2n\bar{x}}\right]$$

17 **证明.** 总体 X 的密度函数与分布函数分别为

$$p(x)=\frac{1}{\theta_2-\theta_1}\mathrm{I}_{\theta_1<x<\theta_2},\quad F(x)=\begin{cases}0,x<\theta_1\\ \dfrac{x-\theta_1}{\theta_2-\theta_1},\theta_1\leq x<\theta_2\\ 1,x\geq\theta_2\end{cases}$$

则 $\left(x_{(1)},x_{(n)}\right)$ 的联合密度函数为

$$\begin{aligned}p_{1n}\left(x_{(1)},x_{(n)}\right)=&n(n-1)\left[F\left(x_{(n)}\right)-F\left(x_{(1)}\right)\right]^{n-2}p\left(x_{(1)}\right)p\left(x_{(n)}\right)\\ =&\frac{n(n-1)\left(x_{(n)}-x_{(1)}\right)^{n-2}}{\left(\theta_2-\theta_1\right)^n},\quad\theta_1\leq x_{(1)}\leq x_{(n)}<\theta_2\end{aligned}$$

(a). 令

$$u=x_{(n)}-x_{(1)}$$

当 $0<u<\theta_2-\theta_1$ 时，

$$p_u(u)=\int_{\theta_1}^{\theta_2-u}\frac{n(n-1)\left[\left(u+x_{(1)}\right)-x_{(1)}\right]^{n-2}}{\left(\theta_2-\theta_1\right)^n}\mathrm{d}x_{(1)}=\frac{n(n-1)u^{n-2}\left(\theta_2-\theta_1-u\right)}{\left(\theta_2-\theta_1\right)^n}$$

当 $u\leq 0$ 或 $u\geq\theta_2-\theta_1$ 时，

$$p_u(u)=0$$

令

$$Y=\frac{u}{\theta_2-\theta_1}=\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\theta_2-\theta_1}$$

因此，Y 的密度函数与分布函数分别为

$$p_Y(y)=\left(\theta_2-\theta_1\right)p_u\left(\left(\theta_2-\theta_1\right)y\right)=\begin{cases}n(n-1)y^{n-2}(1-y), & 0<y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ ny^{n-1}-(n-1)y^n, & 0\leq y<1\\ 1, & y\geq 1\end{cases}$$

可得 Y 服从贝塔分布 $\mathrm{Be}(n-1,2)$，其分布与未知参数 θ_1,θ_2 无关。

选取枢轴量

$$Y=\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\theta_2-\theta_1}$$

令其 p 分位数为

$$y_p=\mathrm{Be}_p(n-1,2)$$

满足方程

$$F_Y\left(y_p\right)=ny_p^{n-1}-(n-1)y_p^n=p$$

给定置信度为 $1-\alpha$，即

$$P\left\{\mathrm{Be}_{\alpha/2}(n-1,2)\leq\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\theta_2-\theta_1}\leq\mathrm{Be}_{1-\alpha/2}(n-1,2)\right\}=1-\alpha$$

则

$$\mathrm{Be}_{\alpha/2}(n-1,2)\leq\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\theta_2-\theta_1}\leq\mathrm{Be}_{1-\alpha/2}(n-1,2)$$

即

$$\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\mathrm{Be}_{1-\alpha/2}(n-1,2)}\leq\theta_2-\theta_1\leq\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\mathrm{Be}_{\alpha/2}(n-1,2)}$$

故 $\theta_2-\theta_1$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\mathrm{Be}_{1-\alpha/2}(n-1,2)},\frac{x_{(n)}-x_{(1)}}{\mathrm{Be}_{\alpha/2}(n-1,2)}\right]$$

(b). 令

$$\begin{cases} u = x_{(n)} - x_{(1)} \\ v = x_{(n)} + x_{(1)} \end{cases}, \quad \begin{cases} x_{(1)} = \frac{v-u}{2} \\ x_{(n)} = \frac{u+v}{2} \end{cases}$$

则

$$J = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

根据 $\theta_1 < x_{(1)} < x_{(n)} < \theta_2$，可得 $2\theta_1 < v - u < v + u < 2\theta_2$，即

$$0 < u < \theta_2 - \theta_1, \quad 2\theta_1 + u < v < 2\theta_2 - u$$

有

$$p_{uv}(u, v) = p_{1n}\left(\frac{v-u}{2}, \frac{v+u}{2}\right) \cdot |J| = \frac{n(n-1)u^{n-2}}{2\left(\theta_2 - \theta_1\right)^n}$$

令 $v^* = v - (\theta_2 + \theta_1)$，$(u, v^*)$ 的联合密度函数为

$$p_{uv^*}\left(u, v^*\right) = p_{uv}\left(u, v^* + (\theta_2 + \theta_1)\right) = \frac{n(n-1)u^{n-2}}{2\left(\theta_2 - \theta_1\right)^n}$$

$$0 < u < \theta_2 - \theta_1, u - (\theta_2 - \theta_1) < v < (\theta_2 - \theta_1) - u$$

令

$$z = \frac{v^*}{2u} = \frac{\left(x_{(n)} + x_{(1)}\right) - (\theta_2 + \theta_1)}{2\left(x_{(n)} - x_{(1)}\right)}$$

当 $z < 0$ 时，

$$p_z(z) = \int_0^{\theta_2 - \theta_1} 1 - 2z \frac{n(n-1)u^{n-2}}{2\left(\theta_2 - \theta_1\right)^n} \cdot 2u \, \mathrm{d}u = \left.\frac{(n-1)u^n}{\left(\theta_2 - \theta_1\right)^n}\right|_0^{\frac{\theta_2 - \theta_1}{1-2z}} = \frac{n-1}{(1-2z)^n}$$

当 $z \geq 0$ 时，

$$p_z(z) = \int_0^{\frac{\theta_2 - \theta_1}{1+2z}} \frac{n(n-1)u^{n-2}}{2\left(\theta_2 - \theta_1\right)^n} \cdot 2u \, \mathrm{d}u = \left.\frac{(n-1)u^n}{\left(\theta_2 - \theta_1\right)^n}\right|_0^{\frac{\theta_2 - \theta_1}{1+2z}} = \frac{n-1}{(1+2z)^n}$$

则 Z 的分布函数为

$$F_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-2z)^{1-n}, & z < 0; \\ 1 - \frac{1}{2}(1+2z)^{1-n}, & z \geq 0. \end{cases}$$

其分布与未知参数 θ_1, θ_2 无关。
令枢轴量为

$$z = \frac{\left(x_{(n)} + x_{(1)}\right) - (\theta_2 + \theta_1)}{2\left(x_{(n)} - x_{(1)}\right)}$$

当 $p < 0.5$ 时，其 p 分位数 z_p 满足

$$F_z\left(z_p\right) = \frac{1}{2}\left(1 - 2z_p\right)^{1-n} = p$$

即

$$z_p = \frac{1 - (2p)^{\frac{1}{1-n}}}{2}$$

当 $p \geq 0.5$ 时，其 p 分位数 z_p 满足

$$F_z\left(z_p\right)=1-\frac{1}{2}\left(1+2 z_p\right)^{1-n}=p$$

即

$$z_p=\frac{[2(1-p)]^{\frac{1}{1-n}}-1}{2}$$

给定置信度为 $1-\alpha$，即

$$P\left\{z_{\alpha/2} \leq \frac{\left(x_{(n)}+x_{(1)}\right)-\left(\theta_2+\theta_1\right)}{2\left(x_{(n)}-x_{(1)}\right)} \leq z_{1-\alpha/2}\right\}=1-\alpha$$

即

$$z_{\alpha/2}=-\frac{\alpha^{\frac{1}{1-n}}-1}{2} \leq \frac{\left(x_{(n)}+x_{(1)}\right)-\left(\theta_2+\theta_1\right)}{2\left(x_{(n)}-x_{(1)}\right)} \leq z_{1-\alpha/2}=\frac{\alpha^{\frac{1}{1-n}}-1}{2}$$

即

$$\frac{x_{(n)}+x_{(1)}}{2}-\frac{\alpha^{\frac{1}{1-n}}-1}{2}\left(x_{(n)}-x_{(1)}\right) \leq \frac{\theta_2+\theta_1}{2} \leq \frac{x_{(n)}+x_{(1)}}{2}+\frac{\alpha^{\frac{1}{1-n}}-1}{2}\left(x_{(n)}-x_{(1)}\right)$$

故 $\frac{\theta_2+\theta_1}{2}$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left[\frac{x_{(n)}+x_{(1)}}{2}-\frac{\alpha^{\frac{1}{1-n}}-1}{2}\left(x_{(n)}-x_{(1)}\right), \frac{x_{(n)}+x_{(1)}}{2}+\frac{\alpha^{\frac{1}{1-n}}-1}{2}\left(x_{(n)}-x_{(1)}\right)\right]$$