# 2021 年春季学期/数理统计/第三周/课后作业解答

龚梓阳

更新：2021 年 4 月 19 日

2 **证明.** 因为 $X \sim N(\mu, 16)$，所以 $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{16}{n}\right)$。因此，

$$\begin{aligned}
P(|\bar{X}-\mu|<1) =& P\left(\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sqrt{16/n}}\right| < \frac{1}{\sqrt{16/n}}\right) \\
=& \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}}{4}\right) \\
=& 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - 1 \geq 0.95
\end{aligned}$$

所以，$\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) \geq 0.975$，$\frac{\sqrt{n}}{4} \geq 1.96$，即 $n \geq 61.47$。因此，当 $n$ 至少为 62 时，上述概率不等式才成立。

5 **证明.** 因为，$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{s} \sim t(n-1)$，所以，

$$\begin{aligned}
P(|\bar{X}-\mu|<0.6) =& P\left(\left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{s}\right| < \frac{\sqrt{n}\times 0.6}{s}\right) \\
=& 2t_{15}(\frac{4\times 0.6}{\sqrt{5.32}}) - 1 \approx 2\times 0.8427 - 1 = 0.6854
\end{aligned}.$$

8 **证明.** 因为 $X \sim F(n, m)$，其密度函数为

$$p_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1}\left(1+\frac{n}{m}x\right)^{-\frac{n+m}{2}}, \quad x>0,$$

由于 $z = \frac{n}{m}x/\left(1+\frac{n}{m}x\right)$ 在 $(0,\infty)$ 上严格单调递增，其反函数为 $x = \frac{m}{n}\cdot\frac{z}{1-z}$，导数为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} = \frac{m}{n}\cdot\frac{1}{(1-z)^2}$，因此，$Z$ 的密度函数为

$$\begin{aligned}
p_Z(z) =& \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{n}{2}-1}\left(1+\frac{z}{1-z}\right)^{-\frac{n+m}{2}}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{(1-z)^2} \\
=& \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{1}{1-z}\right)^{-\frac{n+m}{2}}\cdot\frac{1}{(1-z)^2} \\
=& \frac{\Gamma\left(\frac{n+m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} z^{\frac{n}{2}-1}(1-z)^{\frac{m}{2}-1}, \quad 0<z<1
\end{aligned}$$

所以，$Z$ 服从贝塔分布 Be$\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$。

9 **证明.** 因为，

$$X_1 \sim N(0,\sigma^2), \quad X_2 \sim N(0,\sigma^2),$$

$$X_1+X_2 \sim N(0,2\sigma^2), \quad X_1-X_2 \sim N(0,2\sigma^2),$$

因此，根据卡方分布定义有

$$\left(\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1), \quad \left(\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(1).$$

因为，

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X_1+X_2, X_1-X_2) =& 2\operatorname{Cov}(X_1,X_2)+\operatorname{Var}(X_1)-\operatorname{Var}(X_2) \\ =& 0+\sigma^2-\sigma^2=0\end{aligned}$$

所以，由性质 3.4.13 有，对于二维正态分布 $(X_1+X_2, X_1-X_2)$，不相关与独立是等价的。于是，根据 F 分布的定义有

$$Y=\left(\frac{X_1+X_2}{X_1-X_2}\right)^2=\frac{\frac{(X_1+X_2)^2}{2\sigma^2}}{\frac{(X_1-X_2)^2}{2\sigma^2}} \sim F(1,1)$$

13 **证明.** 假设正态总体的方差为 $\sigma^2$，则由定理 5.4.1 有，

$$\frac{(n_1-1)\,s_1^2}{\sigma^2}=\frac{14s_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(14), \quad \frac{(n_2-1)\,s_2^2}{\sigma^2}=\frac{19s_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(19),$$

由 $F$ 分布的定义有

$$\frac{\frac{14s_1^2}{\sigma^2}/14}{\frac{19s_2^2}{\sigma^2}/19}=\frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(14,19),$$

因此，

$$P\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}>2\right)=P(F>2)=1-P(F\le 2)\approx 0.0798.$$

18 **证明.** 对于 $F \sim F(k,m)$，其密度函数为

$$p(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}\left(1+\frac{k}{m}x\right)^{-\frac{k+m}{2}}, \quad x>0.$$

因此，

$$\begin{aligned}E\left(F^r\right)=&\frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_0^{+\infty} x^r\cdot x^{\frac{k}{2}-1}\left(1+\frac{k}{m}x\right)^{\frac{k+m}{2}}\mathrm{d}x \\ =&\frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_0^{+\infty} x^{\frac{k}{2}+r-1}\left(1+\frac{k}{m}x\right)^{-\frac{k+m}{2}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

令 $t=\left(1+\frac{k}{m}x\right)^{-1}$，则 $x=\frac{m}{k}\left(\frac{1}{t}-1\right)$，$\mathrm{d}x=\frac{m}{k}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$，因此，

$$
\begin{aligned}
&=\frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\int_1^0\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{k}{2}+r-1}\left(\frac{1-t}{t}\right)^{\frac{k}{2}+r-1}\cdot t^{\frac{k+m}{2}}\cdot\frac{m}{k}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{k}{2}+r}\int_0^1 t^{\frac{m}{2}-r-1}(1-t)^{\frac{k}{2}+r-1}\mathrm{d}t\\
&=\frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{k}{2}+r}B\left(\frac{m}{2}-r,\frac{k}{2}+r\right)\\
&=\frac{\Gamma\left(\frac{k+m}{2}\right)\left(\frac{k}{m}\right)^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{m}{k}\right)^{\frac{k}{2}+r}\frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}-r\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}+r\right)}{\Gamma\left(\frac{m+k}{2}\right)}\\
&=\frac{m^r\Gamma\left(\frac{k}{2}+r\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-r\right)}{k^r\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

当 $r=1$ 时，由于 $k>0$，只要 $m>2$，就有

$$
E(F)=\frac{m\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right)}{k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}=\frac{m\cdot\frac{k}{2}}{k\left(\frac{m}{2}-1\right)}=\frac{m}{m-2}
$$

当 $r=2$ 时，由于 $k>0$，只要 $m>4$，就有

$$
E\left(F^2\right)=\frac{m^2\Gamma\left(\frac{k}{2}+2\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-2\right)}{k^2\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}=\frac{m^2(k+2)}{k(m-2)(m-4)}
$$

因此，

$$
\operatorname{Var}(F)=E\left(F^2\right)-[E(F)]^2=\frac{m^2(k+2)}{k(m-2)(m-4)}-\left(\frac{m}{m-2}\right)^2=\frac{2m^2(m+k-2)}{k(m-2)^2(m-4)}
$$

（另一种思路）

由 $F$ 变量的构造知

$$
F=\frac{v/k}{w/m}=\frac{m}{k}v\cdot w^{-1}
$$

，其中 $v\sim\chi^2(k)$，$w\sim\chi^2(m)$。由于 $v$ 与 $w$ 相互独立，因此 $F$ 变量的 $r$ 阶矩有，

$$
E\left(F^r\right)=\frac{m^r}{k^r}E\left(v^r\right)\cdot E\left(w^{-r}\right)
$$

由于 $\chi^2(k)=\mathrm{Ga}\left(\frac{k}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$$
\begin{aligned}
E\left(v^r\right)&=\int_0^{+\infty}x^r\cdot p_v(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}x^r\cdot\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{k}{2}-1}\mathrm{d}x\\
&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{k}{2}+r-1}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x}{2}}x^{\frac{k}{2}+r-1}\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

令 $t=\frac{x}{2}$，则 $x=2t$，$\mathrm{d}x=2\mathrm{d}t$，因此

$$
\begin{aligned}
&=\frac{2^{\frac{k}{2}+r}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{k}{2}+r-1}\mathrm{d}t\\
&=\frac{2^r\Gamma\left(\frac{k}{2}+r\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

同理，由于 $\chi^2(m)=\mathrm{Ga}\left(\frac{m}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$$
\begin{aligned}
E\left(w^{-r}\right)=&\int_0^{+\infty} x^{-r}\cdot p_w(x)\mathrm{d}x\\
=&\frac{2^{-r}\Gamma\left(\frac{m}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
E\left(F^r\right)=&\frac{m^r}{k^r}E\left(v^r\right)\cdot E\left(w^{-r}\right)\\
=&\frac{m^r\Gamma\left(\frac{k}{2}+r\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}-r\right)}{k^r\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

19 **证明.** $Y_i=-2\ln F\left(X_i\right)$ 的分布函数为

$$
\begin{aligned}
F_Y(y)=&P\left(-2\ln F\left(X_i\right)\leq y\right)\\
=&P\left(X_i\geq F^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\right)\right)\\
=&1-F\left[F^{-1}\left(\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}\right)\right]\\
=&1-\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}},\quad y>0
\end{aligned}
$$

因此，

$$
Y_i\sim\mathrm{Exp}\left(\frac{1}{2}\right)=\chi^2(2).
$$

因 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 相互独立，有 $Y_1,Y_2,\ldots,Y_n$ 相互独立，由 $\chi^2$ 分布的可加性，可知

$$
T=-2\sum_{i=1}^n\ln F\left(X_i\right)\sim\chi^2(2n).
$$