2021 年春季学期/数理统计/第七周/课后作业解答

龚梓阳

更新：2021 年 4 月 24 日

3 **证明.** (a). 由于，

$$E(X)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1}k=\frac{N-1}{2}$$

即 $N=2E(X)+1$，故 N 的矩估计为 $\hat{N}=2\bar{X}+1$

(b). 由于，

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=2}^{+\infty}k\cdot(k-1)\theta^2(1-\theta)^{k-2}\\&=\theta^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(1-\theta)^k\\&=\theta^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[\sum_{k=2}^{+\infty}(1-\theta)^k\right]\\&=\theta^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left\{\lim_{t\to+\infty}\frac{(1-\theta)^2\left[1-(1-\theta)^t\right]}{1-(1-\theta)}\right\}\\&=\theta^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[\frac{(1-\theta)^2}{1-(1-\theta)}\right]\\&=\theta^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\frac{1}{\theta}-2+\theta\right)\\&=\theta^2\cdot\frac{2}{\theta^3}=\frac{2}{\theta}\end{aligned}$$

即 $\theta=\frac{2}{E(X)}$，故 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\frac{2}{\bar{X}}$。

4 **证明.** (a). 由于，

$$E(X)=\int_0^{\theta}x\cdot\frac{2}{\theta^2}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\theta^2}\left(\theta\cdot\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^{\theta}=\frac{\theta}{3}$$

即 $\theta=3E(X)$，故 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=3\bar{X}$。

(b). 由于，

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot(\theta+1)x^{\theta}\mathrm{d}x=(\theta+1)\cdot\frac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\bigg|_0^1=\frac{\theta+1}{\theta+2}$$

即 $\theta=\frac{2E(X)-1}{1-E(X)}$，故 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$。

(c). 由于，

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}\mathrm{d}x=\sqrt{\theta}\cdot\frac{x^{\sqrt{\theta}+1}}{\sqrt{\theta}+1}\bigg|_0^1=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$$

即 $\theta=\left[\frac{E(X)}{1-E(X)}\right]^2$，故 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\left(\frac{\bar{X}}{1-\bar{X}}\right)^2$。

(d). 由于，

$$\begin{aligned}
E(X)&=\int_{\mu}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\theta}e^{\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x\\
&=\int_{\mu}^{+\infty} x\cdot(-1)\mathrm{d}e^{\frac{x-\mu}{\theta}}\\
&=-\left.xe^{\frac{x-\mu}{\theta}}\right|_{\mu}^{+\infty}+\int_{\mu}^{+\infty} e^{\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x\\
&=\mu-\left.\theta e^{\frac{x-\mu}{\theta}}\right|_{\mu}^{+\infty}\\
&=\mu+\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\left(X^2\right)&=\int_{\mu}^{+\infty} x^2\cdot\frac{1}{\theta}e^{\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x\\
&=\int_{\mu}^{+\infty} x^2\cdot(-1)\mathrm{d}e^{\frac{x-\mu}{\theta}}\\
&=-\left.x^2e^{\frac{x-\mu}{\theta}}\right|_{\mu}^{+\infty}+\int_{\mu}^{+\infty} 2xe^{\frac{x-\mu}{\theta}}\mathrm{d}x\\
&=\mu^2+2\theta E(X)\\
&=\mu^2+2\mu\theta+2\theta^2
\end{aligned}$$

因此，

$$E(X)=\mu+\theta,\quad \mathrm{Var}(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2=\theta^2$$

即

$$\theta=\sqrt{\mathrm{Var}(X)},\quad \mu=E(X)-\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

故 θ,μ 的矩估计为

$$\hat{\theta}=\sqrt{S^2},\quad \hat{\mu}=\bar{X}-\sqrt{S^2}$$

5 **证明.** 由于，

$$p=P\{X>0\}=P\{X-\mu>-\mu\}=1-\Phi(-\mu)=\Phi(\mu)$$

即 $\mu=\Phi^{-1}(p)$，故 μ 的矩估计为 $\hat{\mu}=\Phi^{-1}(\hat{p})=\Phi^{-1}\left(\frac{k}{n}\right)$。

7 **证明.** 由于，

$$E(X)=mp,\quad \mathrm{Var}(X)=mp(1-p)$$

即

$$p=1-\frac{\mathrm{Var}(X)}{E(X)},\quad m=\frac{E(X)}{p}=\frac{[E(X)]^2}{E(X)-\mathrm{Var}(X)}$$

故 m,p 的矩估计为

$$\hat{m}=\frac{\bar{X}^2}{\bar{X}-S^2},\quad \hat{p}=1-\frac{S^2}{\bar{X}}$$