2021 年春季学期/数理统计/第十五周/课后作业解答

龚梓阳

更新：2021 年 6 月 26 日

3 **证明.** 设技术革新后零件质量 $X \sim N\left(\mu, 0.05^2\right)$，假设

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 15 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_1 : \mu \neq 15$$

由于 σ^2 已知，选取统计量

$$U = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

给定显著性水平 $\alpha = 0.05$，有 $u_{1-\alpha/2} = u_{0.975} = 1.96$，因此，双侧拒绝域为

$$W = \{|u| \geq 1.96\}$$

且有

$$\bar{x} = 14.9, \quad \mu = 15, \quad \sigma = 0.05, \quad n = 6$$

则

$$u = \frac{14.9 - 15}{0.05/\sqrt{6}} = -4.8990 \in W$$

故拒绝原假设，即不能认为平均质量仍为 15g。

6 **证明.** 设这批钢管内直径 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，假设

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 100 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_1 : \mu > 100$$

(a). 由于 σ^2 已知，选取统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

给定显著性水平 $\alpha = 0.05$，有 $u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，右侧拒绝域为

$$W = \{u \geq 1.645\}$$

且有

$$\bar{x} = 100.104, \quad \mu = 100, \quad \sigma = 0.5, \quad n = 10$$

则

$$u = \frac{100.104 - 100}{0.5/\sqrt{10}} = 0.6578 \notin W$$

故接受原假设，即不能认为 $\mu > 100$。

(b). 由于 σ^2 未知，选取统计量

$$t=\frac{\bar{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$$

给定显著性水平 $\alpha=0.05$，对于 $n=10$，有 $t_{1-\alpha}(n-1)=t_{0.95}(9)=1.8331$，故右侧拒绝域为

$$W=\{t\geq 1.8331\}$$

且有

$$\bar{x}=100.104,\quad \mu=100,\quad s=0.4760,\quad n=10$$

则

$$t=\frac{100.104-100}{0.4760/\sqrt{10}}=0.6910\notin W$$

故接受原假设，即不能认为 $\mu>100$。

12 证明. 设两种型号的计算器充电以后所能使用的时间分别为

$$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),\quad Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right),\quad \sigma_1^2=\sigma_2^2$$

假设

$$\mathrm{H}_0:\mu_1=\mu_2\quad \text{vs}\quad \mathrm{H}_1:\mu_1>\mu_2$$

由于 σ_1^2,σ_2^2 未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$。选取统计量

$$T=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t\left(n_1+n_2-2\right)$$

给定显著性水平 $\alpha=0.01$，对于 $n_1=11,n_2=12$，有 $t_{1-\alpha}\left(n_1+n_2-2\right)=t_{0.99}(21)=2.5176$，右侧拒绝域为

$$W=\{t\geq 2.5176\}$$

且有

$$\bar{x}=5.5,\quad \bar{y}=4.3667,\quad s_x=0.5235,\quad s_y=0.4677,\quad n_1=11,\quad n_2=12$$

$$s_w=\sqrt{\frac{\left(n_1-1\right)s_x^2+\left(n_2-1\right)s_y^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{10\times 0.5235^2+11\times 0.4677^2}{21}}=0.4951$$

则

$$t=\frac{5.5-4.3667}{0.4951\times\sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{12}}}=5.4844\in W$$

故拒绝原假设，即可以认为型号 A 的计算器平均使用时间明显比型号 B 来得长。

13 证明. 设东、西两支矿脉的含锌量分别为

$$X_1\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),\quad X_2\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right),\quad \sigma_1^2=\sigma_2^2$$

假设

$$\mathrm{H}_0:\mu_1=\mu_2\quad \text{vs}\quad \mathrm{H}_1:\mu_1\neq\mu_2$$

由于 σ_1^2, σ_2^2 未知，但 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，选取统计量

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t\left(n_1 + n_2 - 2\right)$$

给定显著性水平 $\alpha = 0.05$，对于 $n_1 = 9, n_2 = 8$，有 $t_{1-\alpha/2}\left(n_1 + n_2 - 2\right) = t_{0.975}(15) = 2.1314$，双侧拒绝域为

$$W = \{|t| \geq 2.1314\}$$

且有

$$\bar{x}_1 = 0.230, \quad s_1^2 = 0.1337, \quad \bar{x}_2 = 0.269, \quad s_2^2 = 0.1736, \quad n_1 = 9, \quad n_2 = 8$$
$$s_w = \sqrt{\frac{\left(n_1 - 1\right) s_1^2 + \left(n_2 - 1\right) s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{8 \times 0.1337 + 7 \times 0.1736}{15}} = 0.3903$$

则

$$t = \frac{0.230 - 0.269}{0.3903 \times \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{8}}} = -0.2056 \notin W$$

故接受原假设，即可以认为东、西两支矿脉含锌量的平均值是一样的。

18 **证明.** 设两个化验室测定的含气量数据之差为

$$D = X - Y \sim N\left(\mu_d, \sigma_d^2\right)$$

假设

$$\mathrm{H}_0 : \mu_d = 0 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_1 : \mu_d \neq 0$$

由于 σ_d^2 未知，选取统计量

$$T = \frac{\bar{D}}{S_d / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

给定显著水平 $\alpha = 0.01$，对于 $n = 7$，有 $t_{1-\alpha/2}(n-1) = t_{0.995}(6) = 3.7074$，双侧拒绝域为

$$W = \{|t| \geq 3.7074\}$$

且有

$$\bar{d} = -0.0257, \quad s_d = 0.0922, n = 7$$

则

$$t = \frac{-0.0257}{0.0922/\sqrt{7}} = -0.7375 \notin W$$

故接受原假设，可以认为两化验室测定结果之间没有显著差异。

25 **证明.** 设两台机器生产金属部件质量分别为

$$X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right), \quad Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right)$$

假设

$$\mathrm{H}_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$$

选取统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(m-1, n-1)$$

给定显著性水平 $\alpha = 0.05$，对于 $m = 14, n = 12$，有 $F_{1-\alpha}(m-1, n-1) = F_{0.95}(13, 11) = 2.7614$，右侧拒绝域为

$$W = \{F \geq 2.7614\}$$

且有 $s_1^2 = 15.46, \quad s_2^2 = 9.66, \quad m = 14, \quad n = 12$ 则

$$F = \frac{15.46}{9.66} = 1.6004 \notin W$$

故接受原假设，即可以认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。