2022 年春季学期/数理统计/第十一周/课后作业解答

龚梓阳

更新：2022 年 5 月 17 日

1 **证明.** 总体 X 表示一页书上的错别字个数，且

$$X \sim P(\lambda)$$

样本为 $x_1 = 3$，有

$$P\left(X_1 = k\right) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \cdots$$

则

$$\begin{aligned} P\left(X_1 = 3\right) =& P(\lambda = 1.5) P\left(X_1 = 3 \mid \lambda = 1.5\right) + P(\lambda = 1.8) P\left(X_1 = 3 \mid \lambda = 1.8\right) \\ =& 0.45 \times \frac{1.5^3}{6} \cdot \mathrm{e}^{-1.5} + 0.55 \times \frac{1.8^3}{6} \cdot \mathrm{e}^{-1.8} = 0.0565 + 0.0884 = 0.1449 \end{aligned}$$

故参数 λ 的后验分布为

$$\begin{aligned} P\left(\lambda = 1.5 \mid X_1 = 3\right) &= \frac{P(\lambda = 1.5) P\left(X_1 = 3 \mid \lambda = 1.5\right)}{P\left(X_1 = 3\right)} = \frac{0.0565}{0.1449} = 0.3899 \\ P\left(\lambda = 1.8 \mid X_1 = 3\right) &= \frac{P(\lambda = 1.8) P\left(X_1 = 3 \mid \lambda = 1.8\right)}{P\left(X_1 = 3\right)} = \frac{0.0884}{0.1449} = 0.6101 \end{aligned}$$

3 **证明.** (a). 参数 θ 的先验分布为

$$\pi(\theta) = \mathrm{I}_{0<\theta<1}$$

总体 X 的条件分布为

$$P(X = k \mid \theta) = \theta(1-\theta)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的联合条件分布为

$$p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta\right) = \prod_{i=1}^n \theta(1-\theta)^{x_i} = \theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}$$

则 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 和 θ 的联合分布为

$$h\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta\right) = \theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot \mathrm{I}_{0<\theta<1}$$

可得样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的边际分布为

$$m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot \mathrm{I}_{0<\theta<1} \, \mathrm{d}\theta = B\left(n+1, \sum_{i=1}^n x_i + 1\right)$$

因此 θ 的后验分布为

$$\pi\left(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=\frac{\theta^n(1-\theta)^{\sum_{i=1}^n x_i}}{B\left(n+1, \sum_{i=1}^n x_i+1\right)}, \quad 0<\theta<1$$

即，

$$\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \sim \operatorname{Be}\left(n+1, \sum_{i=1}^n x_i+1\right)$$

(b). 在给定样本 $4,3,1,6$ 的条件下，θ 的后验分布为

$$\theta \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \sim \operatorname{Be}(5,15)$$

若采用后验期望估计，则 θ 的贝叶斯估计为

$$\hat{\theta}_B=\frac{5}{5+15}=0.25$$

6 **证明.** 样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的联合条件分布为

$$p\left(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \theta\right)=\prod_{i=1}^n \frac{2 x_i}{\theta^2} \mathrm{I}_{0<x_i<\theta}=\frac{2^n}{\theta^{2 n}} \prod_{i=1}^n x_i \cdot \mathrm{I}_{x_{(n)}<\theta}$$

(a). 参数 θ 的先验分布为

$$\pi(\theta)=\mathrm{I}_{0<\theta<1}$$

则样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 和 θ 的联合分布为

$$h\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta\right)=\frac{2^n}{\theta^{2 n}} \prod_{i=1}^n x_i \cdot \mathrm{I}_{x_{(n)}<\theta<1}$$

可得样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的边际分布为

$$m\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=\int_{x_{(n)}}^1 \frac{2^n}{\theta^{2 n}} \prod_{i=1}^n x_i \,\mathrm{d} \theta=\frac{2^n}{2 n-1} \prod_{i=1}^n x_i \cdot\left[x_{(n)}^{-(2 n-1)}-1\right]$$

因此 θ 的后验分布为

$$\pi\left(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=\frac{2 n-1}{\theta^{2 n}\left[x_{(n)}^{-(2 n-1)}-1\right]}, \quad x_{(n)}<\theta<1$$

(b). 参数 θ 的先验分布为

$$\pi(\theta)=3 \theta^2 \cdot \mathrm{I}_{0<\theta<1}$$

则样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 和 θ 的联合分布为

$$h\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta\right)=\frac{3 \cdot 2^n}{\theta^{2 n-2}} \prod_{i=1}^n x_i \cdot I_{x_{(n)}<\theta<1}=\frac{3 \cdot 2^n}{\theta^{2 n-2}} \prod_{i=1}^n x_i \cdot I_{x_{(n)}<\theta<1}$$

可得样本 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的边际分布为

$$m\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=\int_{x(n)}^1 \frac{3 \cdot 2^n}{\theta^{2 n-2}} \prod_{i=1}^n x_i \,\mathrm{d} \theta=\frac{3 \cdot 2^n}{2 n-3} \prod_{i=1}^n x_i\left[x_{(n)}^{-(2 n-3)}-1\right]$$

因此 θ 的后验分布为

$$\pi\left(\theta \mid x_1, x_2, \ldots, x_n\right)=\frac{2 n-3}{\theta^{2 n-2}\left[x_{(n)}^{-(2 n-3)}-1\right]}, \quad x_{(n)}<\theta<1$$