2022 年春季学期/数理统计/第十四周/课后作业解答

龚梓阳

更新：2022 年 6 月 10 日

6 **证明.** 设这批钢管内直径 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，假设

$$\mathrm{H}_0 : \mu = 100 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_1 : \mu > 100$$

(a). 由于 σ^2 已知，选取统计量

$$U = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

给定显著性水平 $\alpha = 0.05$，有 $u_{1-\alpha} = u_{0.95} = 1.645$，右侧拒绝域为

$$W = \{u \geq 1.645\}$$

且有

$$\bar{x} = 100.104, \quad \mu = 100, \quad \sigma = 0.5, \quad n = 10$$

则

$$u = \frac{100.104 - 100}{0.5/\sqrt{10}} = 0.6578 \notin W$$

故接受原假设，即不能认为 $\mu > 100$。

(b). 由于 σ^2 未知，选取统计量

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

给定显著性水平 $\alpha = 0.05$，对于 $n = 10$，有 $t_{1-\alpha}(n-1) = t_{0.95}(9) = 1.8331$，故右侧拒绝域为

$$W = \{t \geq 1.8331\}$$

且有

$$\bar{x} = 100.104, \quad \mu = 100, \quad s = 0.4760, \quad n = 10$$

则

$$t = \frac{100.104 - 100}{0.4760/\sqrt{10}} = 0.6909 \notin W$$

故接受原假设，即不能认为 $\mu > 100$。

7 **证明.** 设这次考试考生的成绩 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$，假设

$$\mathrm{H}_0: \mu=70 \text{ vs } \mathrm{H}_1: \mu \neq 70,$$

由于末知 σ^2，选取统计量，

$$T=\frac{\bar{X}-\mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

给定显著性水平 $\alpha=0.05$，$t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(35)=2.0301$, 双侧拒绝域 $W=\{|t| \geq 2.0301\}$。因 $\bar{x}=66.5, \mu=70, s=15, n=36$，则

$$t=\frac{66.5-70}{15 / \sqrt{36}}=-1.4 \notin W$$

并且检验的 p 值 $p=2P\{T \leq -1.4\}=0.1703>\alpha=0.05$，故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分。

12 **证明.** 设两种型号的计算器充电以后所能使用的时间分别为

$$X \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right), \quad Y \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right), \quad \sigma_1^2=\sigma_2^2$$

假设

$$\mathrm{H}_0: \mu_1=\mu_2 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_1: \mu_1>\mu_2$$

由于 σ_1^2, σ_2^2 未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$。选取统计量

$$T=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim t\left(n_1+n_2-2\right)$$

给定显著性水平 $\alpha=0.01$，对于 $n_1=11, n_2=12$，有 $t_{1-\alpha}\left(n_1+n_2-2\right)=t_{0.99}(21)=2.5176$，右侧拒绝域为

$$W=\{t \geq 2.5176\}$$

且有

$$\bar{x}=5.5, \quad \bar{y}=4.3667, \quad s_x=0.5235, \quad s_y=0.4677, \quad n_1=11, \quad n_2=12$$
$$s_w=\sqrt{\frac{\left(n_1-1\right) s_x^2+\left(n_2-1\right) s_y^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{10 \times 0.5235^2+11 \times 0.4677^2}{21}}=0.4951$$

则

$$t=\frac{5.5-4.3667}{0.4951 \times \sqrt{\frac{1}{11}+\frac{1}{12}}}=5.4837 \in W$$

故拒绝原假设，即可以认为型号 A 的计算器平均使用时间明显比型号 B 来得长。

13 **证明.** 设东、西两支矿脉的含锌量分别为

$$X_1 \sim N\left(\mu_1, \sigma_1^2\right), \quad X_2 \sim N\left(\mu_2, \sigma_2^2\right), \quad \sigma_1^2=\sigma_2^2$$

假设

$$\mathrm{H}_0: \mu_1=\mu_2 \quad \text{vs} \quad \mathrm{H}_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

由于 σ_1^2,σ_2^2 未知，但 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，选取统计量

$$T=\frac{\bar{x}_1-\bar{x}_2}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t\left(n_1+n_2-2\right)$$

给定显著性水平 $\alpha=0.05$，对于 $n_1=9,n_2=8$，有 $t_{1-\alpha/2}\left(n_1+n_2-2\right)=t_{0.975}(15)=2.1314$，双侧拒绝域为

$$W=\{|t|\geq 2.1314\}$$

且有

$$\bar{x}_1=0.230,\quad s_1^2=0.1337,\quad \bar{x}_2=0.269,\quad s_2^2=0.1736,\quad n_1=9,\quad n_2=8$$

$$s_w=\sqrt{\frac{\left(n_1-1\right)s_1^2+\left(n_2-1\right)s_2^2}{n_1+n_2-2}}=\sqrt{\frac{8\times 0.1337+7\times 0.1736}{15}}=0.3903$$

则

$$t=\frac{0.230-0.269}{0.3903\times\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{8}}}=-0.2056\notin W$$

故接受原假设，即可以认为东、西两支矿脉含锌量的平均值是一样的。

24 **证明.** 设两台车床生产的滚珠直径分别为

$$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),\quad Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$$

假设

$$\mathrm{H}_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \text{ vs } \mathrm{H}_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$$

选取统计量

$$F=\frac{S_x^2}{S_y^2}\sim F\left(n_1-1,n_2-1\right)$$

给定显著性水平 $\alpha=0.05$，则，

$$F_{\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)=F_{0.025}(7,8)=\frac{1}{F_{0.975}(8,7)}=\frac{1}{4.9}=0.2041$$

$$F_{1-\alpha/2}\left(n_1-1,n_2-1\right)=F_{0.975}(7,8)=4.53$$

双侧拒绝域为 $W=\{F\leq 0.2041\text{ 或}F\geq 4.53\}$，且有 $s_x^2=0.3091^2,\quad s_y^2=0.1616^2$，则

$$F=\frac{0.3091^2}{0.1616^2}=3.6590\notin W$$

并且检验的 p 值 $p=2P\{F\geq 3.6591\}=0.0892>\alpha=0.05$，故接受 H_0，拒绝 H_1，即可以认为两台车床生产的滚珠直径的方差没有明显差异。

25 **证明.** 设两台机器生产金属部件质量分别为

$$X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right),\quad Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$$

假设

$$\mathrm{H}_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2\quad \text{vs}\quad \mathrm{H}_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$$

选取统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F(m-1, n-1)$$

给定显著性水平 $\alpha = 0.05$，对于 $m = 14, n = 12$，有 $F_{1-\alpha}(m-1, n-1) = F_{0.95}(13, 11) = 2.7614$，右侧拒绝域为

$$W = \{F \geq 2.7614\}$$

且有 $s_1^2 = 15.46, \quad s_2^2 = 9.66, \quad m = 14, \quad n = 12$ 则

$$F = \frac{15.46}{9.66} = 1.6004 \notin W$$

故接受原假设，即可以认为 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。