№1 Число частиц, падающих на единицу поверхности тела за время T, имеет распр. Пуассона с параметром λT, $\lambda=const$. Каждая частица независимо от других сообщает телу энергию U, равномерно распр. на $[0;C]$, $C=const$. Семинар 10 21.11

Найти $M[E]$ и $D[E]$, E – энергия, получаемая единицей поверхности тела за время T.

Пусть N – число частиц, упавших на ед. поверхности за время T. $N\sim Pois(\lambda T)$

Пусть S – суммарная энергия, получ. этой ед. за время T.

$$S=\sum_{i=1}^{N} U_i \qquad S=0, \text{ если } N=0.$$

Моменты для одного снаряда U:

Плотность $U\sim Uni[0,C]$:

$f_U(u)=1/C$, $0\le u\le C$

$$M[U]=\int_0^C u\frac{1}{C}du=\frac{1}{C}\cdot\frac{C^2}{2}=\frac{C}{2}\ [=\mu]$$

$$M[U^2]=\int_0^C u^2\frac{1}{C}du=\frac{1}{C}\cdot\frac{C^3}{3}=\frac{C^2}{3}$$

$$D[U]=M[U^2]-(M[U])^2=\frac{C^2}{3}-\frac{C^2}{4}=\frac{C^2}{12}\ [=\sigma^2]$$

Мат. ожидание суммы S:

$M[S]=M[M[S|N]]$ – формула полной мат. ожид.

При $N=const$

$M[S|N]=N\cdot\mu=N\cdot\frac{C}{2}$

$$M[S]=M[N\cdot\tfrac{C}{2}]=\frac{C}{2}\cdot M[N]=\frac{C}{2}\cdot(\lambda T)=\frac{\lambda TC}{2}$$

Дисперсия суммы S:

$D[S]=M[D[S|N]]+D[M[S|N]]$ – формула дисперсии через условную дисперсию

При $N=const$

$D[S|N]=N\cdot\sigma^2$, $M[S|N]=N\cdot\mu$

Подставляем:

$D[S]=M[N\sigma^2]+D(N\mu)=\sigma^2M[N]+\mu^2D[N]$

Для пуассоновского N верно: $M[N]=D[N]=\lambda T$ $\Rightarrow D[S]=(\sigma^2+\mu^2)(\lambda T) \ominus$

$$\ominus\left(\frac{C^2}{12}+\frac{C^2}{4}\right)\lambda T=\frac{\lambda TC^2}{3}$$

Ответ: $M[S]=\frac{\lambda TC}{2}$, $D[S]=\frac{\lambda TC^2}{3}$

№2 Пусть X и Y – одинаково распределённые независимые СВ, принимающие только положительные значения.

Определить СВ Z: $Z=\frac{2X}{X+Y}$

Найти $M[Z]$, $D[Z]$.

Пусть $Z'=\frac{2Y}{X+Y}$

Очевидно, что $Z+Z'=2$. Т.к. X и Y одинаково распределены, то Z и Z' имеют одинаковое распределение, значит $M[Z]=M[Z']$.

$2M[Z]=M[Z+Z']=2 \Rightarrow M[Z]=1.$

$D[Z]$ – зависит от распределения x и y

Но в общем случае:

$D[Z] = M[(Z-M[Z])^2] = M[(Z-1)^2]$ – выражение через отклонение от среднего

$$Z-1 = \frac{2x}{x+y} - 1 = \frac{2x-x-y}{x+y} = \frac{x-y}{x+y}$$

$$D = M\left[\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}\right]$$

Ответ: $M[Z]=1$, $D[Z] = M\left[\frac{(x-y)^2}{(x+y)^2}\right]$

№3 Плотность совместного распределения системы СВ $\{x, y\}$ имеет вид

$$f(x,y) = \begin{cases} A(x+y) & \text{при } 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

Найти $P\{x+y \geq 1\}$; $M[x]$; $D[x]$; $Cov(x,y)$; r_{xy}.

1) Найдём нормировочную константу A:

$$1 = \iint_{[0,1]^2} A(x+y)\,dxdy = A\left(\iint_{[0,1]^2} x\,dxdy + \iint_{[0,1]^2} y\,dxdy\right) = A\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = A$$

2) Вероятность $P\{x+y \geq 1\}$

Сначала интеграл по области $x+y<1$

$$\iint_{x+y<1} (x+y)\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x+y)\,dxdy = \int_0^1 \left(x(1-x) + \frac{(1+x)^2}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}\right)dx =$$

$= 1/2 - 1/6 = 1/3$

Полный интеграл по квадрату равен 1, поэтому $P\{x+y \geq 1\} = 1 - 1/3 = \frac{2}{3}$

3) Маргинальная плотность x, $M[x]$ и $D[x]$

$$f_x(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = x + \frac{1}{2}, \quad 0 \le x \le 1$$

$$M[x] = \int_0^1 x(x+1/2)\,dx = \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$M[x^2] = \int_0^1 x^2(x+1/2)\,dx = \int_0^1 x^3 + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$D[x] = M[x^2] - (M[x])^2 = \frac{5}{12} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}$$

По симметрии для y те же значения

4) Ковариация $Cov(x,y)$

$$M[xy] = \iint_{[0,1]^2} xy(x+y)\,dxdy = \iint (x^2y + xy^2)\,dxdy$$

По симметрии:

$$M[xy] = 2\iint_{[0,1]^2} x^2y\,dxdy = 2\int_0^1 \left(x^2 \int_0^1 y\,dy\right)dx = 2\int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{3}$$

Тогда $Cov(x,y) = M[xy] - M[x]M[y] = \frac{1}{3} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{48-49}{144} = -\frac{1}{144}$

5) Коэф. корреляции r_{xy}

$$r_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{D(x)D(y)}} = \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144}\cdot\frac{11}{144}}} = -\frac{1}{11}$$

Ответ: $A=1$, $P\{x+y \geq 1\} = 2/3$, $M[x] = \frac{7}{12}$, $D[x] = \frac{11}{144}$,

$Cov(x,y) = -\frac{1}{144}$, $r_{xy} = -\frac{1}{11}$