Stærðfræði og reiknifræði – Skilaverkefni 11

Þetta verkefni er tvískipt. Hluta A og B skal leysa í Jupyter og skila PDF-skjali sem búið er til í vafra undir S11AB í Canvas, en hluta C skal leysa með blaði og blýanti, taka mynd og hlaða upp sérstaklega undir S11C. Eins og síðast verða lausnir á undirbúningsdæmum birtar á fimmtudag en S-dæmunum á að skila á þriðjudag í næstu viku.

A. Tvívíð tölvugrafík

Í þetta verkefni snýst um tvívíðra tölvugrafík, sbr. kafla 5.2 í fyrirlestrarnótum. Við hugsum okkur að flatarmynd sé lýst með $2 \times n$ fylki; efri röðin með x-hnitum og sú neðri með y-hnitum á punktum sem á að tengja saman með línustrikum. Auk þess er hægt að "lyfta pennanum" og hoppa á nýjan stað með því að hafa dálk af svokölluðum *ekki-tölum* (*not-a-number*) sem má búa til með `nan` í Python eftir innflutning `from math import nan`. Hér er dæmi um fylki sem lýsir rétthyrningi með striki inni í sér:
$$ M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & \text{nan} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & \text{nan} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

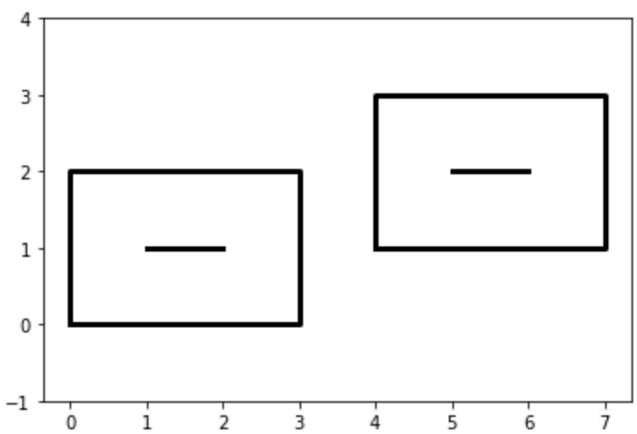
Nú er hægt að snúa myndinni, spegla hana, og toga til með því að margfalda með viðeigandi snúnings-, skölunar-, skekkingar- og speglunarfylkjum, sbr. grein [4.9.4 (https://cs.hi.is/strei/kafli04.html#linulegar-varpanir-a-bbb-r-2)](https://cs.hi.is/strei/kafli04.html#linulegar-varpanir-a-bbb-r-2) í fyrirlestranótum. Ef við skilgreinum til dæmis snúnings- og skölunarfylkin:
$$ R = \begin{pmatrix} \cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30° \end{pmatrix}\; \text{ og }\; S = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} $$

þá verður SRM 2×8 fylki sem lýsir myndinni sem fæst með því að snúa 30° rangsælis um $(0,0)$ og skala svo um 2 í x-stefnu.

Með því að leggja hliðrunarvigur við alla dálka í fylki áður en teiknað er má svo færa myndina til í hnitakerfinu. Næsti reitur skilgreinir fall til að teikna flatarmynd sem ræður líka við hliðrun. Reiturinn sýnir líka dæmi um notkun.

In [16]:
```
## FALL FYRIR TVÍVÍÐA TEIKNINGU
import matplotlib.pyplot as plt, numpy as np
from math import nan
def teiknaFylki(A, hliðrun = 0):
    """Teiknar 2 x n flatarmyndarfylki A óhliðrað (líka má nota 'teiknaFylki(A)' ti
l þess).
    Teiknafylki(A, hliðrun = hx) teiknar A hliðrað um hx í x-stefnu.
    Teiknafylki(A, hliðrun = (hx, hy)) teiknar A hliðrað um hx í x-stefnu og hy í y
-stefnu.
    """
    if isinstance(hliðrun, tuple): x,y = hliðrun
    else:                          x,y = hliðrun,0
    plt.plot(*(A + [[x],[y]]), lw=3, color='k')

help(teiknaFylki)

A = np.array([[0,3,3,0,0,nan,1,2],[0,0,2,2,0,nan,1,1]]);
plt.axis('equal')
teiknaFylki(A)
teiknaFylki(A, hliðrun = (4,1))
```

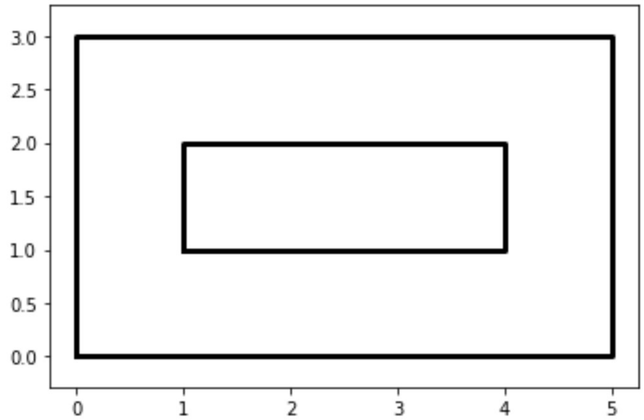
```
Help on function teiknaFylki in module __main__:

teiknaFylki(A, hliðrun=0)
    Teiknar 2 x n flatarmyndarfylki A óhliðrað (líka má nota 'teiknaFylki(A)' ti
l þess).
    Teiknafylki(A, hliðrun = hx) teiknar A hliðrað um hx í x-stefnu.
    Teiknafylki(A, hliðrun = (hx, hy)) teiknar A hliðrað um hx í x-stefnu og hy
í y-stefnu.
```



U11-a. Sammiðja rétthyrningar

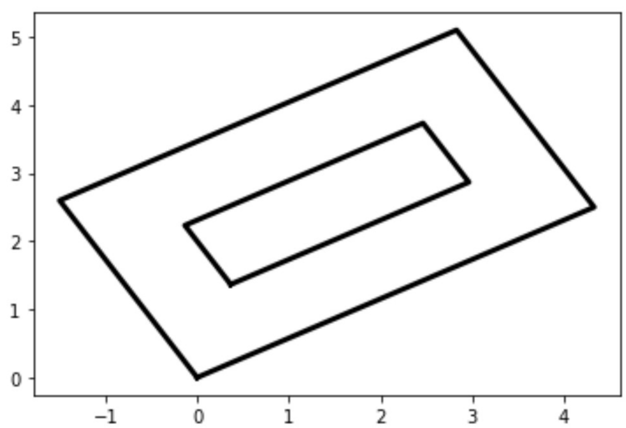
1. Keyrið reitinn að ofan. Búið svo til fylki fyrir rétthyrning sem er 5 x 3 að stærð með minni rétthyrning sem er 3 x 1 að stærð í miðjunni (stærri rétthyrningurinn hefur neðra vinstra horn í $(0,0)$ en sá minni í $(1,1)$). Teiknið myndina sem kemur út með `teiknaFylki`.

In [30]:
```
#ua1
R = np.array([[0,5,5,0,0,nan,1,4,4,1,1],[0,0,3,3,0,nan,1,1,2,2,1]]);
plt.axis('equal')
teiknaFylki(B)
```



1. Skrifið fall `snúa(x)` sem skilar snúningsfylki sem snýr um 30° rangsælis (munið eftir m.radians). Prófið fallið með því að teikna myndina í lið 1 snúna um +30°.

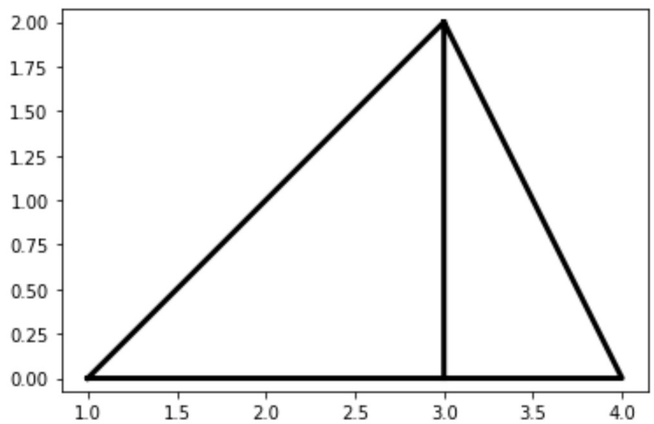
In [32]:
```
#ua2
from math import sin, cos, radians
def snua(x):
    r = radians(x)
    S = np.array([[cos(r),-sin(r)],[sin(r),cos(r)]])
    return(S)



S30 = snua(30)
R30 = S30 @ R
teiknaFylki(R30)
```



S11-A. Þríhyrningur með hæð

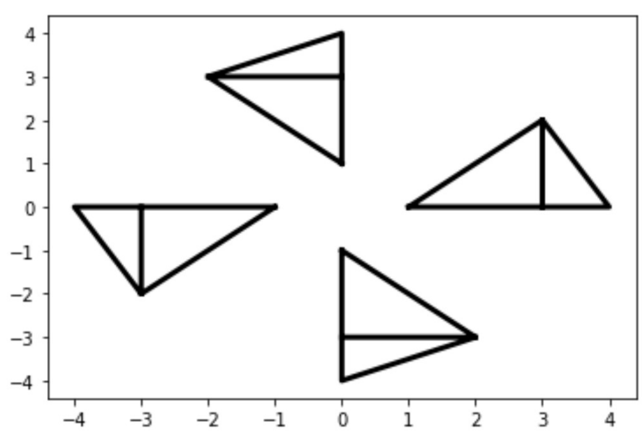
1. Búið til fylki T sem lýsir þríhyrningi með hornpunkta $A = (1,0)$, $B = (3,2)$ og $C = (4,0)$ með lóðréttu striki (hæð) frá B niður á hliðina AC. Teiknið.

In [37]:
```
#A1
A = np.array([[1,3,4,1,nan,3,3],[0,2,0,0,nan,2,0]]);
plt.axis('equal')
teiknaFylki(A)
```



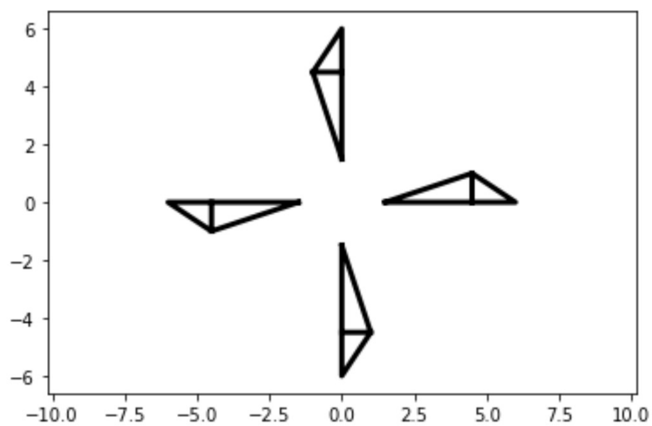
1. Teiknið samsetta mynd með fjórum eintökum af þessum þríhyrningi, snúnum um 0°, 90°, 180° og 270°.

In [40]:
```
#A2
teiknaFylki(A)

S90 = snua(90)
A90 = S90 @ A
teiknaFylki(A90)

S180 = snua(180)
A180 = S180 @ A
teiknaFylki(A180)

S270 = snua(270)
A270 = S270 @ A
teiknaFylki(A270)
```



1. Skrifið fall `skala(sx,sy)` sem skilar skölunarfylki sem skalar með `sx` í x-stefnu og `sy` í y-stefnu. Bætið við lið 2 áhrifum skölunar um 1.5 í x-stefnu og 0.5 í y-stefnu.

In [46]:
```
#A3
def skala(sx,sy):
    S = np.array([[sx],[sy]])
    return(S)

A = np.array([[1,3,4,1,nan,3,3],[0,2,0,0,nan,2,0]]);
plt.axis('equal')


skal = skala(1.5,0.5)
P = A*skal
teiknaFylki(P)

S90 = snua(90)
A90 = S90 @ P
teiknaFylki(A90)

S180 = snua(180)
A180 = S180 @ P
teiknaFylki(A180)

S270 = snua(270)
A270 = S270 @ P
teiknaFylki(A270)
```



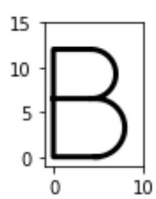
B. Teikning bókstafa

Hér er reitur sem skilgreinir fall `lesaStafahnit` sem les (úr skrá [stafrof.txt (http://cs.hi.is/strei/stafrof.txt)](http://cs.hi.is/strei/stafrof.txt) á cs.hi.is) alls 36 tveggja línu fylki sem hvert um sig lýsir lögun bókstafs í íslenska stafrófinu (þ.m.t. Q og Z; það eru bara stórir stafir). Fallið skilar niðurstöðunni í svonefndu "dictionary" þannig að eftir framkvæmd skipananna:

```
sh = lesaStafahnit()
M1 = sh["A"]
M2 = sh["Á"]
```

þá eru `M1` og `M2` tveggja línu fylki með lögun bókstafanna A og Á; o.s.frv. fyrir aðra bókstafi. Allir stafirnir passa inn í svæðið $[0,8] \times [0,14]$ í teiknihnitakerfinu. Á eftir fallinu er dæmi um notkun.

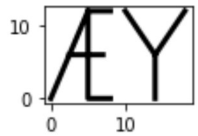
In [104]:
```
import numpy as np, matplotlib.pyplot as plt
from urllib.request import urlopen

def lesaStafahnit():
    """Les skrá með hnitum bókstafa og skilar "dictionary" sh þannig að
    sh[s] er 2 sinnum n fylki sem lýsir bókstafnum s, öll x-hnit eru á
    bilinu 0 til 8 og y-hnit á bilinu 0 til 14. Hver bókstafur hefur þrjár
    línur í skránni, sú fyrsta með stafnum sjálfum, sú næsta með x-hnitum
    og sú þriðja með y-hnitum. Skráin byrjar á:

        A
        0  4 8 nan 2 6
        0 12 0 nan 6 6
        Á
        0  4 8 nan 2 6 nan  3.5  5.5
        0 12 0 nan 6 6 nan 12.0 14.0

    Til að teikna A má nú kalla á teiknaFylki(sh["A"]) og til að teikna B
    þar fyrir aftan má kalla á teiknafylki(sh["B"], 10)
    """
    def lesap(f):
        """Lókal fall sem les línu með tölum úr skrá"""
        a = np.array([float(k) for k in f.readline().decode('utf-8').split()])
        return a
    def næstiStafur(f):
        """Lókal fall sem les þrjár línur með staf og hnitum hans úr f"""
        line = f.readline().decode('utf-8')
        if not line: return None, None
        stafur = line.split()[0]
        punktar = np.array([lesap(f), lesap(f)])
        return stafur, punktar

    sh = dict()
    f = urlopen('http://cs.hi.is/strei/stafrof.txt')
    while True:
        stafur, pkt = næstiStafur(f)
        if stafur is None: break
        sh[stafur] = pkt
    return sh

#Dæmi um notkun:
sh = lesaStafahnit()
MB = sh["B"]
plt.figure(figsize = (1,1.5))
plt.axis((-1,10,-1,15))
teiknaFylki(MB)
```



U11-b. Teikning Æ og Y

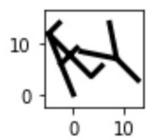
1. Keyrið reitina að ofan og notið í framhaldi `teiknaFylki` til að teikna bókstafinn Æ og svo Y þar fyrir aftan (það nægir það nota 1 x 1 tommu reit: `plt.figure(figsize=(1,1))`).

In [64]:
```
#ub1
MÆ = sh["Æ"]
MY = sh["Y"]
plt.figure(figsize=(1.5,1))
teiknaFylki(MÆ)
teiknaFylki(MY, 10)
```



1. Endurtakið lið 1, en snúið hvorum bókstaf um 45°
   (notið `rot` úr A-lið, og kallið á `plt.gca().axis('equal')` áður en þið teiknið)

In [66]:
```
#ub2
S = snua(45)
plt.figure(figsize=(1,1))
plt.axis('equal')
teiknaFylki(S @ MÆ)
teiknaFylki(S @ MY, 10)
```



S11-B. Nafnið ykkar skáletrað og allt stafrófið

1. Teiknið nafnið ykkar. Þið getið notað t.d. `for (i,s) in enumerate("KRISTJÁN"): ...`

In [155]:
```
#S1
sh = lesaStafahnit()
plt.figure(figsize=(8,1))
nafn = ["S","I","G","R","Í","Ð","U","R"]


for x in range(0, 8):

    MI = sh[nafn[x]]
    teiknaFylki(MI, x*10)
```

1. Teiknið nafnið ykkar með skáletri með því að nota hæfilegt skekkingarfylki eins og lýst er í grein [5.2 (https://cs.hi.is/strei/kafli05.html?highlight=skekkingarfylki#fylkjamargfoldun-og-tolvugrafik)](https://cs.hi.is/strei/kafli05.html?highlight=skekkingarfylki#fylkjamargfoldun-og-tolvugrafik) í fyrirlestranótum.

In [194]:
```
#S2

def skalet(x):
    r = radians(x)
    S = np.array([[1,sin(r)],[0,1]])
    return(S)
S25 = skalet(25)


plt.figure(figsize=(8,1))

for x in range(0, 8):
    MI = sh[nafn[x]]
    teiknaFylki(S25@MI, x*10)
```

1. Teiknið allt íslenska stafrófið í tvær línur. Byrjið á að búa til mynd sem er 18 x 4 tommur og látið x-ás ná frá 0 til 180 og y-ás frá 0 til 40 með:

```
plt.figure(figsize = (18,4)
plt.axis((0,180,0,40))
```

Búið til streng með stafrófinu með

```
stafróf = "AÁBCDÐEÉFGHIÍJKLMNOÓPQRSTUÚVWXYÝZÞÆÖ"
```

Byrjið að teikna A með vinstra neðra horn í $(1,20)$ og þegar búið er að teikna helminginn af stöfunum er byrjað aftur fremst, í $(1,1)$. Hér er reiknirit fyrir teikninguna:

```
(x,y) = (1,20)
n = lengd(stafróf)
fyrir i = 1, ..., n
   teikna stafróf[i]
   ef i = n/2 þá: (x,y) := (1,0)
   annars:        x = x + 10
```

In [223]:
```
#S3

plt.figure(figsize=(18,4))
plt.axis((0,180,0,40))
stafróf = "AÁBCDÐEÉFGHIÍJKLMNOÓPQRSTUÚVWXYÝZÞÆÖ"
(x,y) = (1,20)
n = len(stafróf)

for i in range(0,n):
    MI = sh[stafróf[i]]
    teiknaFylki(MI, (x,y))
    if (i == (n/2)-1):
        (x,y) = (1,0)
    else:
        x+=10
```

S11-C. Ýmis dæmi til að reikna með blaði og blýanti

(þetta dæmi gildir alls 4 stig (hálft stig fyrir hvern lið nema 2b)

1. Finnið hlutafleiðurnar:

   $\begin{align} &\text{a)}\; f_x \text{ ef }f(x,y) = e^{xy} \log(xy)\\[1mm] &\text{b)}\; D_y((x + y^3)^5 - \sin(x-y))\\[1mm] &\text{c)}\; \dfrac{\partial}{\partial z}\dfrac{\log(xz)}{z^2} \end{align}$

   (tækifærið er notað til að sýna mismunandi ritháttt fyrir hlutafleiður)

1. Gefið er fallið $f(x,y) = x^2y + xy + y^3$

   $\begin{align} &\text{a)}\; \text{Ákvarðið }\nabla{f}\\ &\text{b)}\; \text{[1 stig] Finnið fyrsta stigs Taylor-nálgun við }f\text{ í punktinum }(1,2) \end{align}$

1. Látið $u = (1,2,3)$ og búið til vigur v úr fæðingardegi ykkar með því að skipta honum í þrennt: 14. apríl 2001 gæfi $v = (14,4,1)$.

   $\begin{align} &\text{a)}\; \text{Finnið hornið milli }u\text{ og }v\\ &\text{b)}\; \text{Finnið vigur }a\text{ sem er samsíða u }og\text{ hornréttur á }v \end{align}$