



## INSTITUTT FOR MATEMATISKE FAG

IMAG2024 - MATEMATIKK FOR INGENIØRFAG 2D

---

# Prosjektrapport - Bildemodellering

---

## Gruppe 9

*Forfattere:*

Simon Snildal,  
Theodor Sjetnan Utvik,  
Halvard Nordberg,  
Mikal Øverland,  
Sigurd Riseth

---

# Innholdsfortegnelse

<b>Liste over figurer</b>	<b>ii</b>
<b>1 Introduksjon</b>	<b>1</b>
<b>2 Teori</b>	<b>1</b>
2.1 Digital representasjon av bilder . . . . .	1
2.2 Kantdeteksjon . . . . .	2
2.2.1 Utregning av retningsderiverte . . . . .	3
2.2.2 feilkilder . . . . .	3
2.3 Diffusjon . . . . .	3
2.3.1 Ficks lover . . . . .	4
2.3.2 Andre typer fluks . . . . .	4
2.3.3 Bevaringslov . . . . .	5
2.3.4 Enkel diffusjon . . . . .	5
2.3.5 Perona-Malik ligningen . . . . .	6
<b>3 Mattematiske Analyser og Utregninger</b>	<b>7</b>
3.1 Kantdeteksjon på bildet . . . . .	7
3.2 Optimering med diffusjon . . . . .	7
3.2.1 Diffusjon på bildet . . . . .	7
3.2.2 Perona-Malik-ligningen . . . . .	8
<b>4 Avsluttende Refleksjoner</b>	<b>9</b>
<b>Referanser</b>	<b>10</b>
<b>Vedlegg</b>	<b>11</b>
A Utregning av bevaringsloven . . . . .	12
B Ytterligere kantdeteksjoner . . . . .	13

---

## Liste over figurer

1	Originalbilde . . . . .	1
2	Bilde og dets lysstyrkeprofil. . . . .	2
3	Perona-Malik funksjon for forskjellige lambda ( $\lambda$ ) verdier . . . . .	6
4	Kantforbedring i én dimensjon . . . . .	6
5	Bildets gradientstyrke. . . . .	7
6	Resultat ved enkel diffusjon . . . . .	8
7	Resultat ved Perona-Malik diffusjon . . . . .	8
8	Rektangel . . . . .	12
9	Kantdeteksjon Einstein . . . . .	13
10	Kantdeteksjon Marlyn Monroe . . . . .	14
11	Kantdeteksjon New-York-City . . . . .	15

---

# 1 Introduksjon

Bildebehandling er en grunnleggende del av moderne teknologi og finnes i en rekke applikasjoner, fra medisinsk diagnostikk til bildeanalyse i astronomi. Denne rapporten dykker inn i kantdeteksjon, en sentral teknikk innen bildebehandling, med fokus på matematiske tilnærmingar som involverer flere nøkkelprinsipper innen kalkulus.

Kantdeteksjon er avgjørende for bildeanalyse, da det muliggjør identifikasjon av overganger mellom ulike deler av et bilde, noe som gjør det lettere å ekstrahere essensielle egenskaper og segmentere bildet i forskjellige interesseområder. Gradientvektoren måler intensitetsendringer i forskjellige retninger, og diffusjonsteknikker kan glatte ut et bilde før kantdeteksjon, og dermed fjerne støy og unødvendige detaljer som ellers kunne forstyrre prosessen. Perona-Malik-ligningen tilbyr en spesiell form for diffusjon som glatter ut bildet samtidig som det bevarer skarpe kanter, noe som øker anvendeligheten for bildebehandling.



Figur 1: Originalbilde

Hovedmålet med dette prosjektet er å utforske hvordan matematiske metoder kan utføre og forbedre bildebehandlingsteknikker, spesielt kantdeteksjon og glattning. Ved å undersøke og implementere gradientvektorer, retningsderiverte, diffusjon og Perona-Malik-ligningen, håper vi å bidra til bedre forståelse og anvendelse av disse teknikkene i ulike bildebehandlingsapplikasjoner.

Rapporten starter med en oversikt over de teoretiske konseptene bak kantdeteksjon og de matematiske verktøyene som brukes. Deretter presenterer vi eksperimentelle resultater og evaluerer ytelsen til de implementerte teknikkene. Til slutt oppsummerer vi våre funn og peker på mulige veier for videre forskning. I Figur 1 kan du se bildet vi fikk tildelt i oppgaven, og utførte bildebehandlingen på.

## 2 Teori

### 2.1 Digital representasjon av bilder

Når man representerer et bilde digitalt, gjøres det vanligvis ved hjelp av piksler. Hver piksel representerer et lite område av bildet, og hver piksel har tilordnet en fargeverdi.

For et RGB-bilde, som vanligvis brukes for å representere farger, har hver piksel tre komponenter: rød (R), grønn (G) og blå (B). Disse komponentene bestemmer den endelige fargen til pikselen. Hver komponent har en verdi mellom 0 og 255, der 0 indikerer ingen farge og 255 indikerer full fargeintensitet. Dermed kan hver farge representeres som en kombinasjon av de tre komponentene i RGB-området.

Når det gjelder å representeret et bilde i sort-hvitt (gråskala), trenger man bare en enkelt verdi

per piksel, som representerer intensiteten av lys. Dette kan for eksempel være en verdi mellom 0 og 255, der 0 representerer svart og 255 representerer hvitt. Denne enkle representasjonen reduserer mengden data som trengs for å lagre bildet, og det kan være nyttig i situasjoner der fargeinformasjonen ikke er nødvendig.

Bilder kan representeres både som en funksjon  $f(x, y)$  og som en matrise, som vist i ligning (1). I denne sammenheng vil hvert element i matrisen representer et piksel hvor  $x$  og  $y$  indikerer dens posisjon. For et gråskalert bilde vil elementets verdi fortelle oss pikselens lysintensitet.

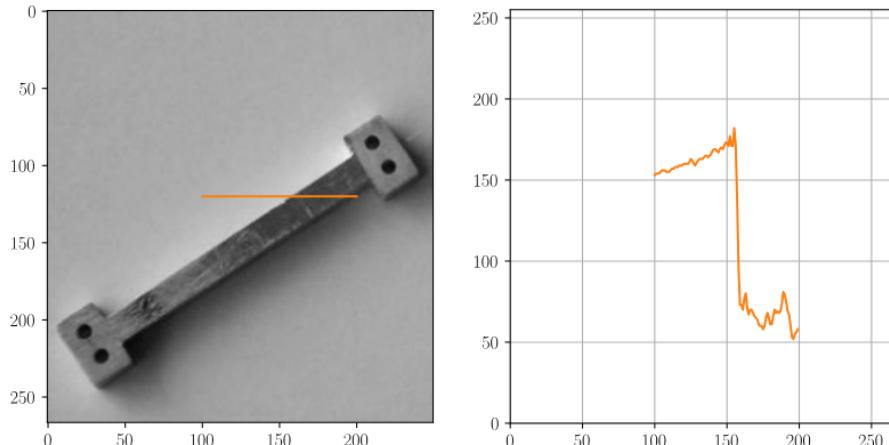
Denne enkle, men fundamental representasjonen av bildedata tillater en rekke matematiske og algoritmiske manipulasjoner, som er grunnleggende for bildebehandling og analyse.

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} f(0, 0) & f(0, 1) & \cdots & f(0, n-1) \\ f(1, 0) & f(1, 1) & \cdots & f(1, n-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(m-1, 0) & f(m-1, 1) & \cdots & f(m-1, n-1) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Eksempelvis har Figur 1 verdiene  $m = 375$  og  $n = 500$ . Dette gir en matrise med 187500 elementer (piksler).

## 2.2 Kantdeteksjon

Som tidligere nevnt er kanter karakterisert ved raske endringer av intensiteten til piksler. Fra Figur 2 ser man at man tydelig kan finne kantene i bilder ved hjelp av den førstederiverte. Størrelsen på den førstederiverte forteller oss hvor stor endringen i pikselenes intensitet er i en gitt posisjon og dermed hvor kantene befinner seg.



Figur 2: Bilde og dets lysstyrkeprofil.

Kilde: Mazet, V. (2020). Basics of Image Processing. Université de Strasbourg.

Ettersom bilder er avhengige av to dimensjoner må den deriverte regnes ut for begge aksene. Den førstederiverte av et bilde  $f$  består av de to termene (retningsderiverte)  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$  og  $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$  (også skrevet som henholdsvis  $f_x$  og  $f_y$ ). Den førstederiverte til bildet - kalt gradientvektoren - defineres derfor ved:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Gradientvektoren peker i retningen med størst endring i lysintensitet i et bilde, mens lengden, beregnet med Pythagoras-setningen, representerer størrelsen på denne endringen. Ved å identifisere

---

de største gradientvektorene, kan vi lokalisere bratte overganger i lysintensitet, typisk assosiert med kantene i bildet.

### 2.2.1 Utregning av retningsderiverte

De retningsderiverte kan tilnærmes numerisk ved hjelp av ulike differansemetoder, som spiller en avgjørende rolle i numerisk analyse og beregninger. Disse metodene involverer vanligvis valg av to punkter på funksjonens graf og beregner stigningen mellom dem for å estimere den deriverte verdien. Et sentralt aspekt ved slike metoder er valget av avstanden  $h$  mellom punktene. Typisk vil en mindre verdi for  $h$  føre til mer nøyaktige tilnærmingar.

Den sentrale differansemetoden for den partielle deriverte med hensyn til  $x$  er definert ved formelen

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x+h, y) - f(x-h, y)}{2h}. \quad (3)$$

Denne formelen tar hensyn til funksjonsverdier både til høyre og venstre for punktet  $x$ , og deretter beregner gjennomsnittsstigningen mellom disse punktene. Den retningsderiverte i  $y$ -retning finnes ved å gjøre tilsvarende utregning med  $y$ -leddet.

På samme måte kan vi utlede den andreordens partiellderiverte med hensyn til  $x$  ved å bruke følgende formel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_x(x+h, y) - f_x(x-h, y)}{2h}. \quad (4)$$

Også her kan du derivere med hensyn til  $y$  ved å gjøre det tilsvarende med  $y$ -leddet istedet.

### 2.2.2 feilkilder

Ettersom  $f(x, y)$  kun er definert for *ikke-negative* heltallige verdier av  $x$  og  $y$ , vil også distansen  $h$  måtte være et heltall. Det nærmeste estimatet av de retningsderiverte vil da være for  $h = 1$ . De retningsderiverte vil da kunne regnes ut ved å ta gjennomsnittsstigningen imellom de to sideliggende pikslene til pikselen du ønsker å derivere.

Det er viktig å merke seg at selv om differansemetodene gir et nyttig estimat av de retningsderiverte, kan de ha begrensninger, spesielt når funksjonen ikke er tilstrekkelig glatt, eller når punktene  $(x \pm h, y)$  eller  $(x, y \pm h)$  faller utenfor definisjonsområdet til  $f(x, y)$ . Ved sentraldifferanse vil dette skje for de ytterste punktene i bildet (måo. når  $x$  eller  $y$  er lik 0). I slike tilfeller kan alternative metoder for beregning av retningsderiverte eller graderinger være mer passende, avhengig av konteksten.

En av de største utfordringene i bildeanalyse, spesielt ved kantdeteksjon, er den tilstedeværende støyen. Støyen kan forårsake falske positiver i kantdeteksjon ved å introdusere skarpe, men irrelevante endringer i intensitet, som kan forveksles med faktiske kanter. Forbehandling av bildet ved bruk av ulike støyreduksjonsteknikker, som diffusjon, kan delvis løse dette problemet, men disse metodene kan også uheldigvis glatte ut ekte kanter hvis de ikke brukes med forsiktighet. Støy som forblir etter diffusjon skyldes ofte variasjoner i gradientvektorene på grunn av den ujevne bakgrunnen i motivet. Disse variasjonene bidrar til at støy blir oppfattet under bildebehandlingen, noe som igjen fører til feiltolkninger mellom kanter og støy.

## 2.3 Diffusjon

Diffusjon er i kjemien den naturlige bevegelsen av partikler fra områder med høy konsentrasjon til områder med lavere konsentrasjon. Diffusjon spiller en sentral rolle for å forklare mange naturlige

---

fenomener, fra spredning av gasser til varmespredning i et materiale. Innenfor bildebehandling kan diffusjon brukes til å glatte ut bilder og dermed fjerne uønsket støy.

### 2.3.1 Ficks lover

Ficks diffusjonslover er to grunnleggende matematiske lover som brukes for å beskrive diffusjon.

#### Ficks første lov

Ficks første lov beskriver diffusjonsstrømningen som proporsjonal med konsentrasjonsgradienten. Den beskriver hvordan sterke konsentrasjonsregioner strømmer til svake konsentrasjonsregioner, med en proporsjonal størrelse til konsentrasjonsgradienten.

Ficks første lov i en dimensjon er gitt ved

$$J = -D \frac{dF}{dx}, \quad (5)$$

og

$$J = -D \nabla F \quad (6)$$

i to dimensjoner.

hvor  $F$  representerer konsentrasjonen i et punkt, og diffusjonkoeffisienten  $D$  bestemmer hvor raskt diffusjonen foregår, altså hastigheten til spredningen.

#### Ficks andre lov

Ficks andre lov er et fundamentalt prinsipp i studiet av diffusjonsprosesser og er en forutsigelse av hvordan diffusjon får konsentrasjonen til å endres med hensyn til tid.

Ficks andre lov i en dimensjon er gitt ved

$$\frac{\partial F}{\partial t} = D \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad (7)$$

og

$$\frac{\partial F}{\partial t} = D \Delta F \quad (8)$$

for to dimensjoner.

### 2.3.2 Andre typer fluks

Fluks kan ta flere former enn den gitt ved Ficks første lov. Noen eksempler er:

1.  $J = aF$
2.  $J = aF^2$
3.  $J = a_1F + a_2F^2 + a_3 \frac{\partial F}{\partial x}$

Fluks av type 1 kan forekomme i systemer med lineær transport, for eksempel væsketransport i en foss der vannet faller med konstant hastighet. Fluksen på en bestemt høyde vil være direkte

---

proporsjonal med mengden vann på den høyden. Konstanten  $a$  kan representerer faktorer som farten til vannet.

Type 2 fluks kan være reaksjonshastigheten for en kjemisk reaksjon. La oss si at vi har en reaksjon der stoffet A reagerer med stoffet B for å danne produktet C, og hastighetsuttrykket for reaksjonen er gitt ved:

$$a * [A]^2$$

Hvor  $a$  er reaksjonskonstanten, og  $[A]$  er konsentrasjonen av stoffet A.

I dette tilfellet vil fluksen av dannelsen av produktet C være proporsjonal med kvadratet av konsentrasjonen av stoffet A. Jo høyere konsentrasjonen av A, desto raskere blir reaksjonshastigheten og dermed fluksen av produktet C dannet.

Type 3 er en blanding av alle tidligere oppgitte typer for fluks. Denne ligningen kan brukes for å beskrive komplekse transportfenomener der flere mekanismer bidrar til fluksen. Systemets oppførsel varierer etter de relative størrelsene på konstantene  $a_1$ ,  $a_2$  og  $a_3$ . For eksempel, hvis  $a_1$  er mye større enn  $a_2$  og  $a_3$ , vil lineær transport dominere, og systemet vil oppføre seg hovedsakelig som et lineært transportsystem.

### 2.3.3 Bevaringslov

En bevaringslov for et stoff  $F(x, y, t)$  i to dimensjoner tar formen

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

hvor fluksen  $\vec{J} = (I, J)$  i henholdsvis  $x$ - og  $y$ -retningene. Utregningen for dette ligger i vedlegg A.

Dette skyldes den direkte sammenhengen mellom endringen i konsentrasjonen over tid og fluksen. Konsentrasjonen i et hvert punkt vil avta i samsvar med fluksen.

Dette tilsvarer kontinuitetsligningen

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad (10)$$

som beskriver hvordan en bevart størrelse hverken kan oppstå eller forsvinne. Mengden på et sted kan bare forandres ved at det enten strømmer til eller fra.

### 2.3.4 Enkel diffusjon

Fra bevaringsloven kan vi utlede en enkel algoritme for å modellere diffusjonen av et bilde. Denne algoritmen er gitt ved følgende formel:

$$F(x, y, t + \Delta t) = F(x, y, t) + \Delta t \cdot \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (11)$$

Her representerer  $F(x, y, t)$  pikselverdien på posisjon  $(x, y)$  til tidspunktet  $t$ , og  $\Delta t$  representerer steplengden på iterasjonene.

Vi kan uttrykke  $F_t$  som  $g \cdot \Delta F$  ved hjelp av Ficks andre lov for to dimensjoner, der  $g$  er diffusjonskoeffisienten som styrer hastigheten på diffusjonen. Dermed blir formelen for diffusjon av bilde gitt ved:

$$F(x, y, t + \Delta t) = F(x, y, t) + g \cdot \Delta t \cdot \Delta F. \quad (12)$$

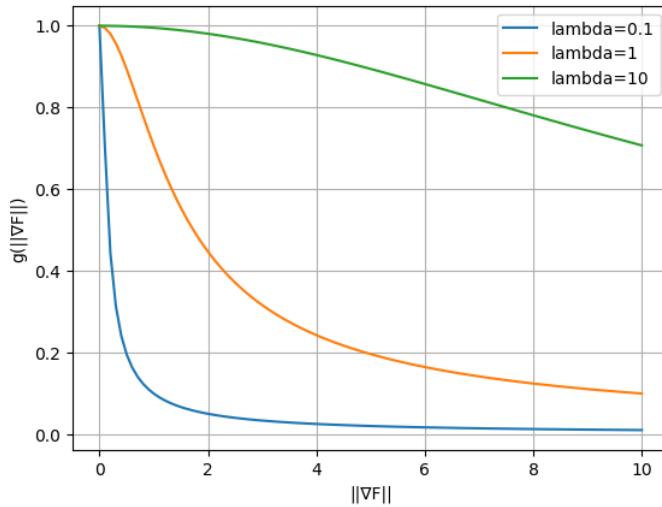
For enklere implementasjon kan vi velge å ignorere diffusjonskoeffisienten  $g$  ved å sette den lik 1. I delkapittel 2.3.5 utforsker vi hvordan vi kan bruke  $g$  til å forbedre diffusjonsalgoritmen for kantdeteksjon.

### 2.3.5 Perona-Malik ligningen

Perona-Malik-ligningen, vist i ligning (13), representerer en fundamental tilnærming innen bildebehandling, spesielt for å utføre kantbevarende utjevning, kjent som anisotropisk diffusjon. Ved å anvende denne metoden kan man redusere støy i bildet samtidig som viktige egenskaper, som kanter, bevares. Dette gjøres ved at diffusjonskoeffisienten  $g$  kontinuerlig justeres utifra bildets egenskaper.

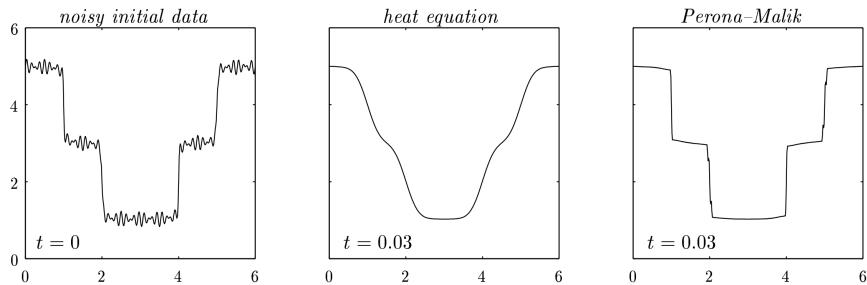
$$g(||\nabla F||) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{||\nabla F||^2}{\lambda^2}}} \quad (13)$$

Her kontrollerer konstanten lambda, sensitiviteten til kanter. En økning i lambdavertden vil resultere i bevaring av  $g$  for større  $||\Delta F||$ -verdier, som vist i Figur 3. Siden  $g$  kontrollerer hastigheten til diffusjonen, styrer lambdavertden hvilke piksler som blir diffundert. Dermed fører høyere verdier av lambda til utjevning av høyere verdier av  $F$ , da  $g \approx 1$  indikerer fluks ut av posisjonen, mens  $g \approx 0$  indikerer at verdien blir bevart.



Figur 3: Perona-Malik funksjon for forskjellige lambda ( $\lambda$ ) verdier

For å implementere Perona-Malik-ligningen numerisk, brukes diskrete tilnæringer for gradienten og divergensen. Denne prosessen involverer ofte iterativ anvendelse av ligningen over et sett med diskrete tidssteg. Dette resulterer i en sekvens av bilder hvor hvert etterfølgende bilde er en mer utjevnet versjon av det forrige. Under denne iterasjonen fremstår kanter tydeligere, mens støyen i områdene mellom kanter dempes gradvis.



Figur 4: Kantforbedring i én dimensjon

Kilde: Embree, K. (2001). Perona-Malik equation. University of Oxford.

---

I figur 4 ser man tydelig at de bratteste ”bakkene” i dataen blir bedre bevart ved Perona-Malik ligningen enn ved enklere diffusjonsmetoder som *varmelingningen*, samtidig som støyet i dataen fjernes.

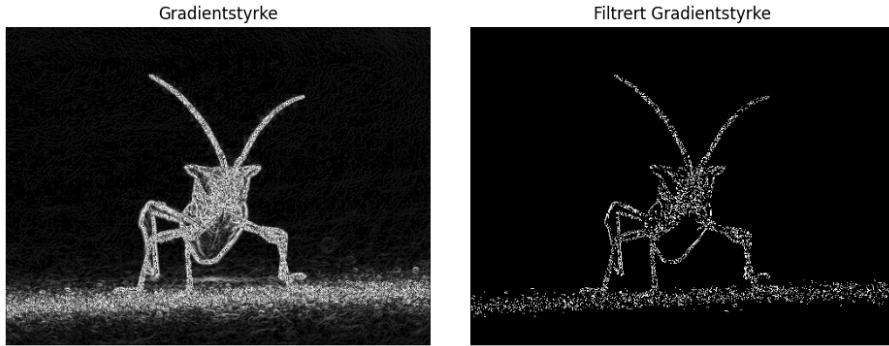
### 3 Mattematiske Analyser og Utregninger

#### 3.1 Kantdeteksjon på bildet

For å beregne de retningsderiverte i  $x$  og  $y$  retning ble sentral differansemetoden - beskrevet i likning (3) - benyttet, med  $\Delta x = 1$ . Ettersom de retningsderiverte ikke kan regnes ut ytterst (langs ”rammen”) i bildet, ble  $f_x$  og  $f_y$  satt lik 0 her.

Etter å ha beregnet de retningsderiverte i  $x$ - og  $y$ -retning, opprettet vi et nytt bilde der lengden av gradientvektoren ble brukt som elementer. Dette resulterte i bildet til venstre i Figur 5, der høye gradientvektorverdier er vist med hvit farge og svakere verdier er skalert ned til sort.

For å forbedre visualiseringen ytterligere og redusere støy, gjennomførte vi en filtreringsprosess. Vi justerte skalaen til gradientstyrkene slik at den høyeste verdien ble normalisert til 1, og deretter anvendte vi en terskelverdi. Dette gjorde det mulig å effektivt fremheve de mest fremtredende kantene i bildet.



Figur 5: Bildets gradientstyrke.

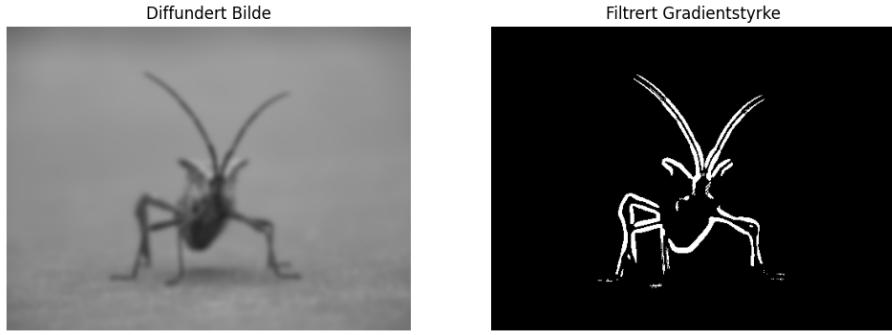
Den optimale terskelverdien varierer fra bilde til bilde, men for det gitte bildet fant vi at verdien 0.8 fungerte godt. Valget av terskelverdi ble avgjort gjennom en iterativ prosess der ulike verdier ble prøvd og resultatene analysert for å velge den mest passende verdien. Piksler med gradientverdier under terskelverdien ble satt til 0 (sort), mens de over ble satt til 1 (hvit).

Selv om vi klarte å redusere støyen i bildet betydelig, var det fortsatt synlig støy i bakken under insektet. Ved å bruke terskelverdien 0.8 kunne vi likevel filtrere ut store deler av støyen fra bildet og samtidig bevare kantene til insektet.

#### 3.2 Optimering med diffusjon

##### 3.2.1 Diffusjon på bildet

For å redusere støyen i bildet benyttet vi diffusjonsalgoritmen, presentert i ligning (12). Dette ble gjennomført ved å iterere gjennom pikslene i bildet for å beregne endringen  $\Delta F$ , etterfulgt av oppdatering av bildet. Denne oppdateringen ble utført over totalt fem iterasjoner, med tidssteg  $\Delta t = 0.8$ . Deretter utførte vi kantdeteksjon, som beskrevet i delkapittel 3.1, med en terskelverdi på 0.4. Dette resulterte i bildene i Figur 6 som viser en tilnærming av  $F$  ved  $t = 4$  og den tilhørende kantdeteksjonen.



Figur 6: Resultat ved enkel diffusjon

Observasjonen av disse bildene avslører en betydelig glattningseffekt, der skarpe kanter i bildet er blitt myket opp. I det filtrerte bildet for gradientstyrken er det verdt å merke seg at bakken ikke lenger oppfattes som en kant. Dette skyldes at bakken er diffundert såpass svakt at den nå ligger under den angitte terskelverdien.

Et identifisert problem er at visse deler av insektet - som toppen av hodet og deler av føttene - også har blitt diffundert under denne terskelen. Dette kan skyldes enten overdreven diffusjon, der disse delene ikke lenger skiller seg ut fra omgivelsene, eller at terskelverdien er satt for høyt.

Videre observasjon av det diffunderte bildet avslører at visse deler av insektet er vanskelig å skille fra bakgrunnen, for eksempel nakkepartiet og bakgrunnen, eller høyre framfot og skyggen. Dette tyder på mulig overdreven diffusjon. På samme tid viser det seg at de venstre føttene er filtrert ut, men likevel er lette å skille fra omgivelsene. Dette kan indikere at terskelverdien også kan være satt for høyt.

### 3.2.2 Perona-Malik-ligningen

I et forsøk på å forbedre diffusjonen benyttet vi Perona-Malik til å styre diffusjonshastigheten for hver piksel. Vi benyttet da algoritmen gitt i ligning (12), med diffusjonskoeffisienten  $g$  beregnet med algoritmen i ligning (13).

I gjennom iterativ testing og evaluering kom vi fram til følgende verdier for konstanter;  $\Delta t = 0.14$ ,  $\lambda = 15$  og 30 antall iterasjoner. Da endte vi opp med tilnærmingen for  $F$  ved  $t = 4.2$ , vist i Figur 7, og den tilhørende kantdeteksjonen funnet med 0.16 i terskelverdi.



Figur 7: Resultat ved Perona-Malik diffusjon

Når vi betrakter bildet etter diffusjon, observerer vi at detaljene i bildet blir jevnet ut på en lignende måte som *Perona-Malik* grafen i Figur 4, hvor kantene blir tydelig bevart, mens resten av bildet blir diffundert. Dette resulterte i at kantdeteksjonen kunne benytte en lavere terskelverdi og bevare mer av insektet uten at bakgrunnen hadde en innvirkning.

---

Vi ser fortsatt problemet med at nakke og toppen av hodet på insektet forsvinner i det filtrerte bildet. Dette kan delvis skyldes at det tildelte bildet er utfordrende i disse partiene, ettersom insektet skiller seg lite ut fra bakgrunnen der. Vi kunne eksperimentert med en lavere lambda verdi, for å forsøke å bevare disse mindre ”bratte” bakkene i disse partiene, eller færre iterasjoner for å diffundere bildet mindre.

## 4 Avsluttende Refleksjoner

I løpet av dette prosjektet har vi dykket inn i ulike aspekter av bildebehandling, med spesielt fokus på kantdeteksjon og optimalisering ved hjelp av diffusjon. Ved å anvende metoder som gradientvektoren, retningsderiverte og Perona-Malik-ligningen, har vi oppnådd innsikt i hvordan bildebehandling kan forbedres gjennom nøyaktig deteksjon av kanter og reduksjon av bildestøy.

Resultatene fra prosjektet har tydelig demonstrert at Perona-Malik-modellen er en effektiv måte å redusere støy på, samtidig som viktige kantdetaljer bevarer. Ved iterativ testing av ulike verdier har vi oppnådd svært presis diffusjon, noe som har resultert i god visuell bildeanalyse.

Vi har observert at terskelverdien for filtrering kunne senkes etter hvert som diffusjonsprosessen forbedret bildet. Fra det originale bildet med mye støy, hvor en terskel på 0.8 ble benyttet, til det diffunderte bildet - generert med Perona-Malik diffusjon - med betydelig mindre støy, hvor vi kunne benytte en terskel på 0.16. Dette skyldes at fjerning av støy fra bildet tillater oss å akseptere lavere lengder på gradientvektorene som representerer kanter.

Videre utforskning av metodene vi har anvendt, på ulike typer bilder, kan gi oss et mer helhetlig perspektiv på hvordan ulike parametere og tilnærminger påvirker bildebehandlingen. Dette vil bidra til å oppnå en dypere forståelse av styrkene og begrensningene ved hver metode under varierte scenarier og innholdstyper. I vedlegg B finner du kantdeteksjon utført på 3 bilder til.

Utforsking av hybridmetoder som kombinerer flere av de teknikkene vi har brukt, kan være særlig lovende. Ved å kombinere det beste fra forskjellige tilnærninger, kan vi potensielt oppnå bedre resultater enn ved å bruke hver metode separat. Dette kan være spesielt nyttig når vi står overfor komplekse bilder med forskjellige egenskaper og utfordringer. I tillegg kunne det vært interessant å utforske nye metoder som *slowed anisotropic diffusion*. Disse tilnærmingene kan gi nye perspektiver og muligheter for å forbedre bildebehandlingen, spesielt når det gjelder å håndtere støy, forbedre kantdeteksjon og oppnå mer nøyaktige resultater.

---

## Referanser

- [1] K. Embree. *Perona-Malik equation*. 2001. URL: <https://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/pdectb/perona2.pdf> (visited on 20th Mar. 2024).
- [2] V. Mazet. *Basics of Image Processing*. 2020. URL: <https://vincmazet.github.io/bip/detection/edges.html> (visited on 20th Mar. 2024).

---

## Vedlegg

## A Utregning av bevaringsloven

La  $F$  være mengden som befinner seg i et rektangel  $\Delta x \times \Delta y$  rundt punktet  $(x, y)$ . Vi kan uttrykke denne mengden som  $F\Delta x\Delta y$ .

Endringen i mengden over et tidsintervall  $\Delta t$  kan skrives som

$$(F(x, y, t + \Delta t) - F(x, y, t))\Delta x\Delta y.$$

Denne endringen skjer på grunn av fluks inn og ut av rektangelet.

Fluksen inn og ut i  $x$ -retning (som forlater rektangelet over en side med lengde  $\Delta y$  i tidsintervall  $\Delta t$ ) kan uttrykkes som

$$(I(x, y, t) - I(x + \Delta x, y, t))\Delta y\Delta t.$$

Her representerer  $I(x, y, t)$  fluksen inn i rektangelet, mens  $I(x + \Delta x, y, t)$  representerer fluksen ut av rektangelet.

På samme måte er endringen i  $y$ -retning lik

$$(J(x, y, t) - J(x, y + \Delta y, t))\Delta x\Delta t.$$

Så endringen kan uttrykkes som

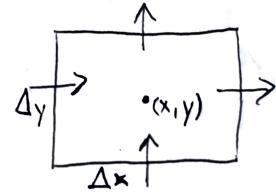
$$F(x, y, t + \Delta t) - F(x, y, t)\Delta x\Delta y = (I(x, y, t) - I(x + \Delta x, y, t))\Delta y\Delta t + (J(x, y, t) - J(x, y + \Delta y, t))\Delta x\Delta t,$$

som gir

$$\frac{F(x, y, t + \Delta t) - F(x, y, t)}{\Delta t} = \frac{I(x, y, t) - I(x + \Delta x, y, t)}{\Delta x} + \frac{J(x, y, t) - J(x, y + \Delta y, t)}{\Delta y},$$

og ved å la  $\Delta x, \Delta y, \Delta t \rightarrow 0$ , ender vi opp med bevaringsloven

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial x} - \frac{\partial J}{\partial y}.$$



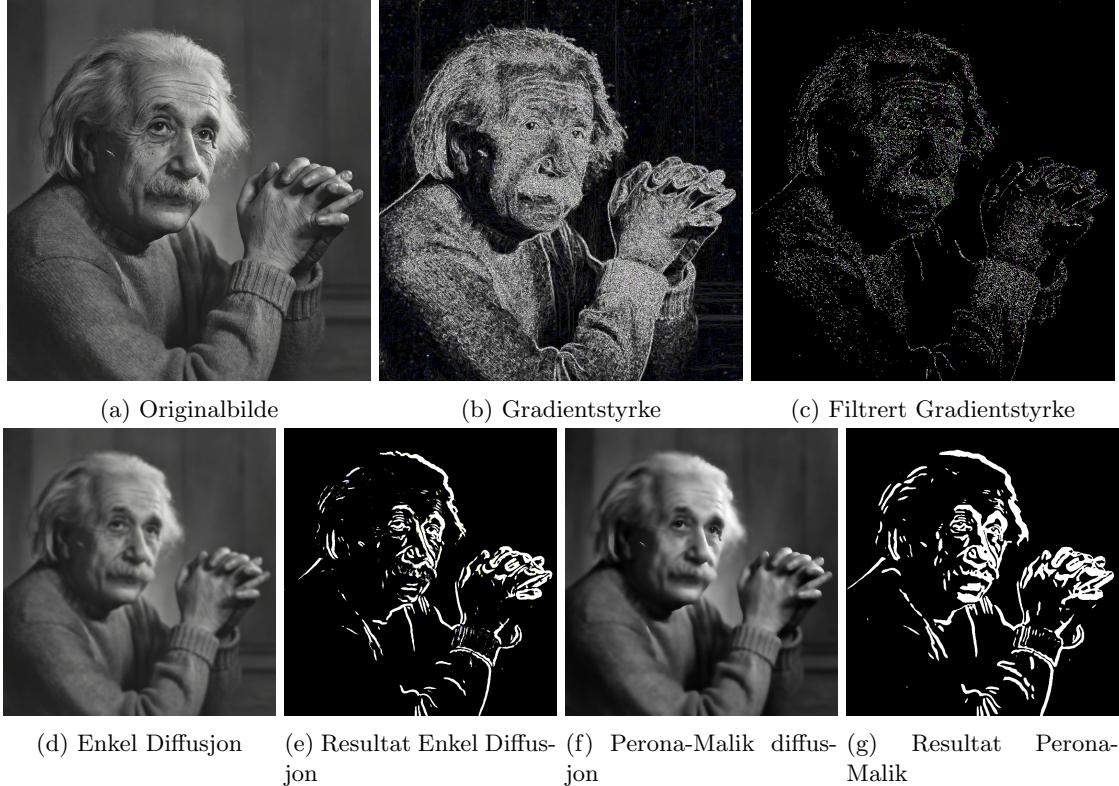
Figur 8: Rektangel

---

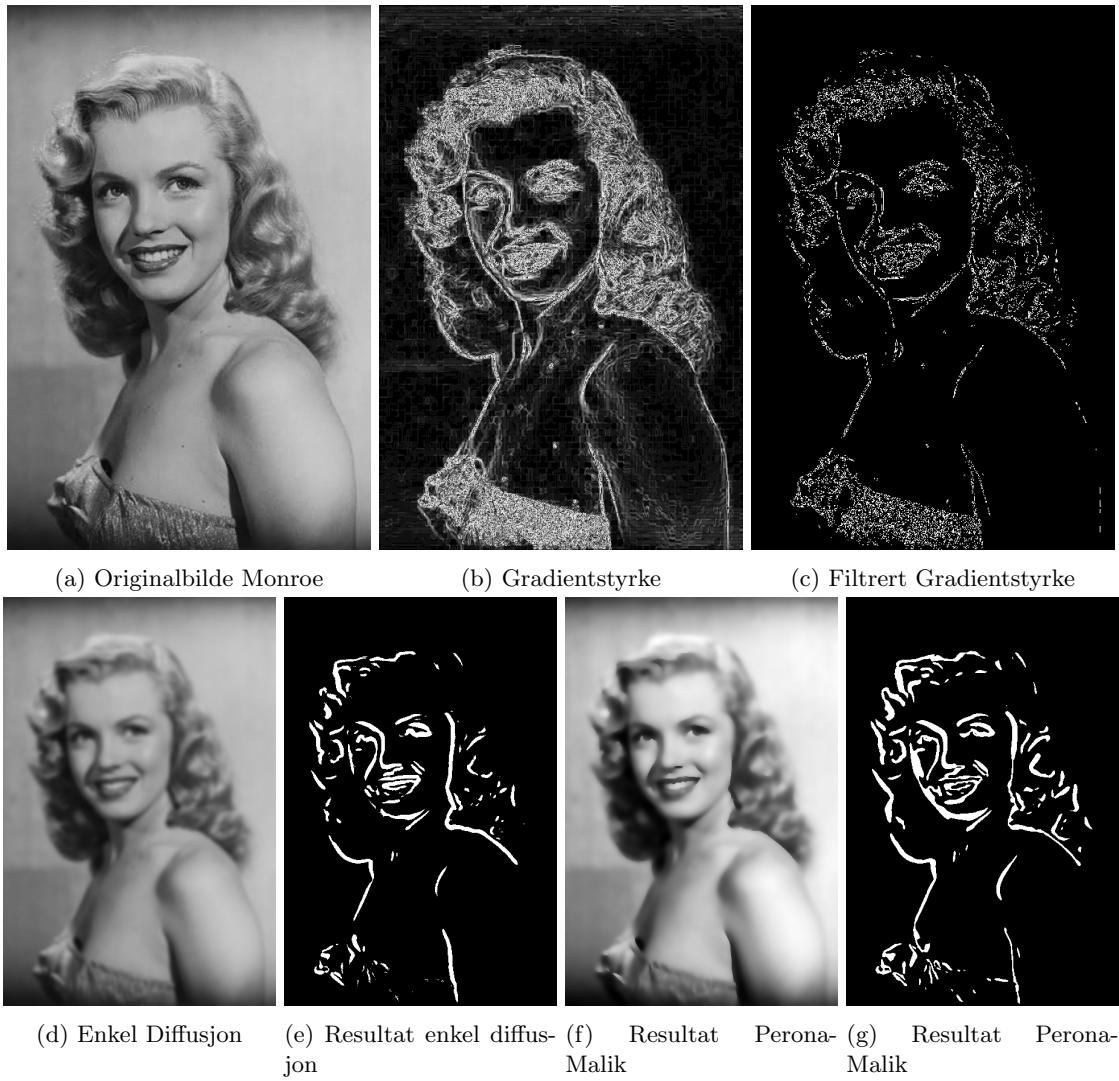
## B Ytterligere kantdeteksjoner

Her har vi lagt ved figurer av kantdeteksjon utført med samme algoritmer (men varierende konstanter, som  $\lambda$ ,  $\Delta t$ , osv.) på forskjellige bilder.

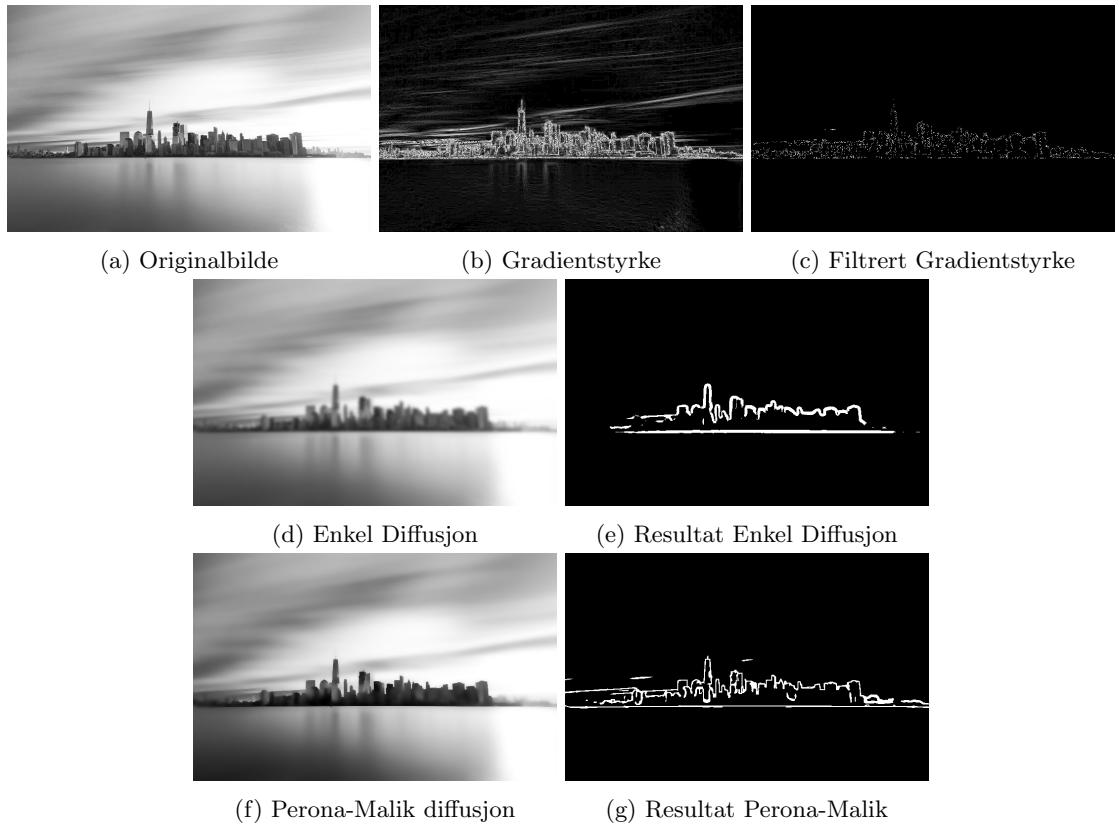
I Figur 9 er det kommet farger til ved bildebehandlingen. Ser at grunnen til dette er at bildet ikke er sort/hvitt, men et RGB-bilde.



Figur 9: Kantdeteksjon Einstein



Figur 10: Kantdeteksjon Marilyn Monroe



Figur 11: Kantdeteksjon New-York-City