# Série d'exercices ( 2 Sc )

## CALCUL DANS IR

### Exercice n°1

On rappelle que : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

Soient $a$, $b$ et $c$ trois réels tels que $a+b+c=0$.

1) $a$/ Montrer que : $a^2+b^2=c^2-2ab$ .

   $b$/ En déduire que : $a^3+b^3+c^3=3abc$.

2) Résoudre dans $IR$ l'équation : $(-2x+5)^3+(3x-7)^3+(2-x)^3=0$.

### Exercice n°2

1) On donne $x=\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $y=\sqrt{2-\sqrt{3}}$ .

   Calculer $(x-y)^2$, en déduire $x-y$, puis calculer $x^3-y^3$.

2) Soit $a$ un réel, factoriser $a^6+8$, en déduire que $a^4>2a^2-4$.

### Exercice n°3

1) $a$/ Développer $(1-\sqrt{3})^2$.

   $b$/ Factoriser les expressions : $A=x^2-4+2\sqrt{3}$ et $B=(x-1)^2-2(1-\sqrt{3})(x-1)+4-2\sqrt{3}$.

2) Montrer que le nombre $\dfrac{-3+3\sqrt{5}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$ est un entier.

### Exercice n°4

1) Soit $x$ un réel strictement positif.

   $a$/ Développer $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$.

   $b$/ En déduire que $x+\dfrac{1}{x}\geq 2$.

2) Soient $a$, $b$ et $c$ trois réels strictement positifs.

   $a$/ Vérifier que : $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=3+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}$.

$b/$ En déduire que : $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$.

$c/$ Montrer alors que : $\frac{1}{2\sqrt{3}-1}+\frac{1}{4-\sqrt{3}}+\frac{1}{6-\sqrt{3}}\geq 1$.

## Exercice n°5

Soient $x$, $y$ et $z$ trois réels strictement positifs. Montrer que :

1) $x+y\geq 2\sqrt{xy}$ et $x+\frac{1}{x}\geq 2$.

2) $x+y+z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geq 6$.

3) $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4$.

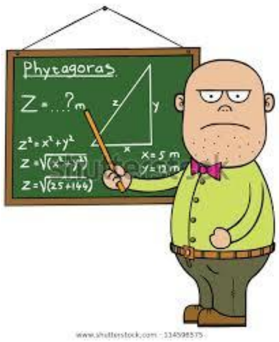
4) $(x+1)(y+1)\geq 4\sqrt{xy}$.

5) Si $x+y=1$ alors $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\geq 9$.

## Exercice n°6

Soient $a$ et $b$ deux réels positifs tels que $a+b=1$.

On se propose de montrer que : $\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\left(1+\frac{1}{b^n}\right)\geq\left(1+2^n\right)^2$.




1) Montrer que : $\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}\geq\frac{2}{\sqrt{a^nb^n}}$.

2) $a/$ Montrer que : $(a+b)^2\geq 4ab$.

$b/$ En déduire que : $\frac{1}{ab}\geq 4$.

$c/$ Montrer alors que : $\frac{1}{\sqrt{a^nb^n}}\geq 2^n$.

3) Déduire de ce qui précède que : $\left(1+\frac{1}{a^n}\right)\left(1+\frac{1}{b^n}\right)\geq\left(1+2^n\right)^2$.

## Exercice n°7

1) Soient $x$ , $y$ et $z$ trois réels positifs tels que $\sqrt{y+z}+\sqrt{x}\leq\sqrt{x+z}+\sqrt{y}$.

Comparer $x$ et $y$.

2) Soient $a$ , $b$ et $c$ trois réels positifs.

   Montrer que $a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\geq 6abc$.

3) Soient $a$, $b$ et $c$ trois réels positifs tels que $abc=1$.

   Montrer que : $\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}=1$.

4) Ecrire sous la forme d'un produit de six facteurs l'expression :

$$A=\left(x\left(x^2+3x+1\right)+1\right)^2-\left(x+\left(x^2+3x+1\right)\right)^2.$$

5) Soient $a$, $b$ et $c$ trois réels tels que : $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}=1$.

   Montrer que : $\dfrac{a^2}{b+c}+\dfrac{b^2}{a+c}+\dfrac{c^2}{a+b}=0$.

## Exercice n°8

1) $a$/ Montrer que, pour tout réel $x$ on a : $x^2-x-1=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}$.

   $b$/ Résoudre dans $IR$ l'équation : $x^2-x-1=0$.

2) Soit $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. ($\varphi$ est appelé : le nombre d'or)

   $a$/ Vérifier que : $\varphi^2=\varphi+1$.

   $b$/ En déduire que $\varphi^3=2\varphi+1$ et que $\varphi^4=3\varphi+2$, puis calculer $\varphi^3$ et $\varphi^4$.

3) Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs tels que : $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a+b}$.

   Calculer $\dfrac{b}{a}$.