数学II（少年班）期末复习笔记

少年班94 自动化钱2101 高思涵

2021 年 9 月 20 日

Day 1 3月1日

$z=a+bi$ $ib,\ b\neq 0$ 纯虚数

$a=\mathrm{Re}\,z$ 实数

$b=\mathrm{Im}\,z$ 虚数

该定义本身包含了 ① $\left.\begin{array}{l} z_1=a_1+ib_1 \\ z_2=a_2+ib_2 \\ z_1=z_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_1=a_2 \\ b_1=b_2 \end{array}$

有序数对不能比大小 $\longrightarrow$ ② $z=a+ib \longleftrightarrow (a,b)$ 与坐标对应

代数表示法：$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=a_1a_2-b_1b_2+i(a_2b_1+a_1b_2)$

复数的几何意义：（两种）

$z=a+ib$ 复数 $\longleftrightarrow$ 直角坐标系上的点 $Z(a,b)$

平面向量 $\overrightarrow{OZ}$

两个根本量： θ：幅角 $\mathrm{Arg}\,z=\theta+2k\pi$

$|z|=r$（模长）$=\sqrt{a^2+b^2}$

$z=0 \Longleftrightarrow (0,0)$ 没有幅角（无法定义）

任意非0复数都有幅角

三角不等式 $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

$|z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|$

$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

为共扼复数 （$b\neq 0$时，又叫共轭虚数）

$z=a+ib$，则 $\bar{z}=a-ib$ $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}\,z$

$z\bar{z}=|z|^2=|\sqrt{a^2+b^2}|^2$ $z-\bar{z}=2i\,\mathrm{Im}\,z$

$\overline{\bar{z}}=z$ $|z|=|\bar{z}|$

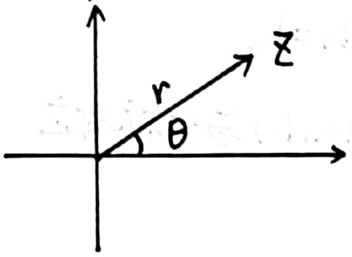
规定复数的除法是乘法的逆运算

$(c+di)(x+yi)=a+bi \qquad (c+di)\neq 0$

$x+yi$ 记作 $\dfrac{a+bi}{c+di}$ 分母实数化 $=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2}$

$z^m \cdot z^n = z^{m+n} \quad (z^m)^n = z^{mn} \quad (z_1 \cdot z_2)^n = z_1^n \cdot z_2^n$

几何表示法



复数的三角形式

$z=a+ib$

$=r\cos\theta + ir\sin\theta$

$=r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\downarrow$

(指数表示) 欧拉公式 $=re^{i\theta}$

复数乘法 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1 e^{i\theta_1}$ 乘除法选用

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2 e^{i\theta_2}$ $\cos\alpha + i\sin\alpha$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)]$

$= r_1 r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

即得 $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| \qquad r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} = r_1 e^{i\theta_1} \cdot r_2 e^{i\theta_2}$

$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) \qquad z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ 化简工具

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$

$|z_1+z_2| \geq ||z_1|-|z_2||$

$|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|$

$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ (4) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

(2) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$ (5) $z+\bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \quad (z_2 \neq 0)$ $z-\bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$

技巧总结

复数部分

1. $1-\cos\theta+i\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\pi-\theta}{2}}$　化简过程中保持 $r\in R$

2. 复数相等：模长相等，幅角相差 $2k\pi$

3. $z_1\bar{z}_2$ 与 $\bar{z}_1 z_2$ 互为共轭，$|z_1 z_2|>|Re(z_1 z_2)|$

4. 共轭问题中 $a+ib$ 更好用，高次问题中用 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$

5. 条件有类似 $|z|=1$，$z^n+z+a=0$，可以化为 $z^n=-z-a$
两边取模，用 $\sqrt{a^2+b^2}$ 算模长（注意去除取模产生的增根）。
亦可将待求式用 $a、b$ 表示出来，利用 $a^2+b^2=1$ 消去一元，再利用不等式处理求值。

6. 等式两边分别是 z 与 $\bar{z}$，且在模内，如 $|2z+15|=\sqrt{3}|\bar{z}+10|$
可以分别平方，利用 $|z|^2=z\bar{z}$ 使两边一致

7. 实数 $R=\bar{R}$，可以产生等式来求系数，亦可用虚部为0产生等式

8. $|z|^2=r^2=z\bar{z}$，则 $z=\frac{r^2}{\bar{z}}$　$\frac{1}{z}=\frac{\bar{z}}{r^2}$，有时有隐含条件 $r=1$

9. 将复数模长信息代入待求式的常数部分

10. 纯虚数 $a=0$，则 $z+\bar{z}=0$

11. 求 $\frac{z_1}{z_2}$ 等价于求 $\frac{r_1}{r_2}$ 与 $\alpha_1-\alpha_2$，将等式两边用三角变形靠近
$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 形式，注意 $r\in R^+$

12. 和不小于 $\sqrt{n}$ => 凑出 n 个部分相加（b.a 分开）
再利用 $|z|\geq|Re z|$，$|z|\geq|Im z|$ 证明必有一部分 $>\sqrt{n}$.
此外 $|z|\leq|Re z|+|Im z|$　$|z_1+z_2|\geq|z_1|-|z_2|$

13. 高次代数式 + 虚根方程 ⟶ 复数三角形式化简

14. 复数 ⟶ 复平面　代数式 ⟶ 平面几何，用参数方程

15. 将 $\arg(\bar{z}_1 z_2)=\frac{\pi}{2}$ 化为 $\arg(\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2})=\frac{\pi}{2}$，可得 $z_1=iz_2$，又可用上 $z_1、z_2$ 的表达式

16. $z_2、z_1$ 幅角相差 θ，则 $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\cos\theta+i\sin\theta}{\cos 0+i\sin 0}$，$\theta$ 为特殊角时可以很方便地代换

17. $\frac{1}{\cos\alpha}(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ 中 $\cos\alpha<0$，可转换为 $-\frac{1}{\cos\alpha}(\cos(\alpha+\pi)+i\sin(\alpha+\pi))$

18. $1-\sin\theta\pm i\cos\theta$ 无法用①分解，必须利用
$\sin\theta=\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$ 交换 sin 与 cos 的虚实.

19. $3z_1-2z_2=\frac{3}{2}-i$ 仍可以用在三角表示法中，列出实数部分与虚部分别的等式：$\cdots\cos\theta+\cdots\cos\varphi=\cdots$，用和差化积，亦可有 $\frac{\theta+\varphi}{2}$

此时作商得 $\tan\frac{\theta+\varphi}{2}=\cdots\cdots$，还需用万能公式

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\qquad \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\qquad \csc=\frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{2\tan\frac{\alpha}{2}}\qquad \sec\alpha=\frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

20. $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$，求复数的实部与虚部

21. 证 z 的实部与虚部均为0，只需证 $z=0$

22. $\mu_1\mu_2+\mu_2\mu_3+\mu_1\mu_3=\mu_1\mu_2\mu_3\left(\frac{1}{\mu_1}+\frac{1}{\mu_2}+\frac{1}{\mu_3}\right)$

23. $y^7+1=0 \longrightarrow (y+1)(y^6-y^5+y^4-y^3+y^2-y+1)=0$

注意有些根的值相等

24. $3\sin2\alpha-2\sin2\beta$，$3\cos2\alpha+2\cos2\beta$

设 $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha$ $\quad z_2=\cos(-\beta)+i\sin(-\beta)$

25. 求辐角主值，仅需保留复数因式

$\frac{\pi}{2}\longrightarrow i$，$\frac{-1}{i}=i$

26. $i^2=-1 \qquad i^4=1$

27. 韦达定理 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ 有n个根(重根按重数计).

$$=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i=-\frac{a_{n-1}}{a_n}\qquad \sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j=\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\sum_{1\le i<j<k\le n}x_ix_jx_k=-\frac{a_{n-3}}{a_n}\qquad \prod_{i=1}^{n}x_i=\frac{(-1)^na_0}{a_n}$$

28. 绝妙变形

$$\frac{1}{2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\sin\frac{k\pi}{n}-i\cos\frac{k\pi}{n}\right)}=\frac{1}{2\sin\frac{k\pi}{n}}\left(\sin\frac{k\pi}{n}+i\cos\frac{k\pi}{n}\right)$$ (即 $|z|=1$ $\bar{z}=\frac{1}{z}$

$=\frac{1}{2}(1-i\cot\frac{k\pi}{n})$，累加后 cot部分为0.

29. 凑组合数时，拆 $3\to(\sqrt{3})^2$，注意 $m=2k$ 时前面正负(负→有i)

可能只是实/虚数部分，用三角形式求实/虚部的值.

30. 题干只有 z, z_1, z_2，求幅角 $\longrightarrow$ 向纯虚数/实数靠近，

如 $|z|^2$ 等模长平方形式，（$|z|^2 = z\bar{z}$，尽量找共轭相乘）。

31. 求值：$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$，$\tan^2\theta = \dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = (1+\sqrt{2})^2 \Longrightarrow \tan\theta = 1+\sqrt{2}$

同时，$\tan 2\theta = -1$，$2\theta = \frac{3}{4}\pi \longrightarrow \theta = \frac{3}{8}\pi$.

使用平方、倍角等策略找可算出的形式。

32. $\arctan\frac{1}{3}$ 可设为 $z_1 = 3+i$，z 相乘即可达到 arctan 相加

用于求幅角主值

单位根 $x^n = 1$ $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ $k = 0, 1 \cdots n-1$

记 $\xi = \cos\frac{2}{n}\pi + i\sin\frac{2}{n}\pi = e^{i\frac{2}{n}\pi}$

则 $x^n = 1$ 的 n 个根为 $1, \xi, \xi^2 \cdots \xi^{n-1}$

任意两个 n 次单位根的乘积 / n 次单位根的倒数

亦为 n 次单位根。

33. 设成 $\varepsilon = \cos\sim + i\sin\sim$ 的 ε 模长为 1. $\varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$

34. 只留下 sin，除了用虚部以外，亦可用 $1-\cos\theta+\sin\theta$ 化简中

提出 sin 的特征，取模保留。

不等式思想总结

1. 均值不等式 $\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

$$\geq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$$

2. 若 $b_1b_2\cdots b_n=1$，则 $b_1+b_2+\cdots+b_n \geq n$

3. 不等式证明可用：使得分子/分母为 Σa_i 或 Πa_i，即利用 $b_1+b_2+\cdots b_n=1$ 或 $b_1b_2b_3\cdots b_n=1$，便于化简

4. 数学归纳法：因式分解分析新增部分正负情况
（将 >1 的 1 也代入不等式）

5. 证明 $\longrightarrow$ 1. 已有 $a>1$ 部分的证明时，可直接代入 $\frac{1}{a}$ 到 $a<1$ 的部分（即左右情形不同）

6. 证明极限，利用不等式时，拆分 n（如拆成 $\sqrt{n}\times\sqrt{n}$）以达到得不同常数的目的。

7. 利用 $x+\frac{1}{x}$ 增减性（配凑出 $x+\frac{1}{x}$，如 $abc+\frac{1}{abc}$）

8. $x^{2n}+y^{2n} \geq \frac{1}{2^{2n-1}}$，($x+y=1$)

9. $x+y=1 \Rightarrow$ 设 $x=\frac{1}{2}(1-t)$ $y=\frac{1}{2}(1+t)$，利用组合数

10. $x,y,z\in R^+$，$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3}{2}\sqrt{3}$

证明：$\frac{x}{1-x}=\frac{x^2}{x(1-x)}$，令 $t=x(1-x^2)$，则 $t^2=2x^2(1-x^2)(1-x^2)\times\frac{1}{2}$

$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{2x^2+1-x^2+1-x^2}{3}\right)^3=\frac{4}{27}$

则 $0<t<\frac{2}{9}\sqrt{3}$，于是 $\frac{x}{1-x^2}=\frac{x^2}{x(1-x^2)} \geq \frac{x^2}{\frac{2}{9}\sqrt{3}}=x^2\frac{3}{2}\sqrt{3}$

同理 y.z，则原式 $\geq \frac{3}{2}\sqrt{3}(x^2+y^2+z^2)=\frac{3}{2}\sqrt{3}$

11. $\sqrt[3]{\frac{ab}{(a+b+c)(b+c+d)}}+\sqrt[3]{\frac{cd}{(a+b+c)(b+c+d)}}$

设 $x_1=\frac{a}{a+b+c}$　$y_1=\frac{b+c}{b+c+d}$　$z_1=\frac{b}{b+c}$

$x_2=\frac{b+c}{a+b+c}$　$y_2=\frac{d}{b+c+d}$　$z=\frac{c}{b+c}$

12. $a_i\ (i=1,2,\cdots n)\in R^+$，$\sum\limits_{i=1} a_i=1$

$(a_1+\frac{1}{a_1})(a_2+\frac{1}{a_2})\cdots(a_n+\frac{1}{a_n})\geqslant(n+\frac{1}{n})^n$

13. 取等条件！

14. $a.b.c\in R^+$，非负整数 $p+q+r=n$

$a^n+b^n+c^n\geqslant a^pb^qc^r+a^qb^rc^p+a^rb^pc^q$

15. 三角函数类最值问题，先用不等式取等条件求出θ取值，利用三角函数代回求值.

16. $a_1+a_2+\cdots+a_n<1$，则设 $a_{n+1}=1-a_1-a_2-\cdots-a_n$

17. $\sin^4x+\cos^4x-\cos^2x\sin^2x=1-3\cos^2x\sin^2x$

$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$

18. $(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}+(b_1b_2\cdots b_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant[(a_1+b_1)(a_2+b_2)\cdots(a_n+b_n)]^{\frac{1}{n}}$

19. $a_1+a_2+\cdots+a_n=0 \Rightarrow \frac{a_1^2-a_2^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2-a_3^2}{a_2+a_3}+\cdots+\frac{a_n^2-a_1^2}{a_n+a_1}=0.$

20. $$(a_1+1)^m=(a_1+\underbrace{\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m-1}+\cdots+\frac{1}{m-1}}_{m-1\text{个}})^m$$

$$\geqslant(m\cdot\sqrt[m]{a_1(\frac{1}{m-1})^{m-1}})^m=m^m(\frac{1}{m-1})^{m-1}a_1$$

柯西不等式 $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\geqslant(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2$

取等条件：$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$

① $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i}\geqslant\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i}$　　② $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{b_i}\geqslant\frac{(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i}$

21 $1-\sin^{2n}x=(1-\sin^2x)(1+\sin^2x+\sin^4x+\cdots\sin^{2n-2}x)$

$\cos x\sin x=\frac{\sin2x}{2}\leqslant\frac{1}{2}$

将高次三角函数拆分，类运算后再利用 $(2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+1)^2$ $=(2^n-1)^2$ 代回

22. $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\rightarrow\sum\frac{1+a_i}{a_i}\rightarrow\sum\frac{1+a_i}{a_i}\times\sum\frac{a_i}{1+a_i}\geqslant n^2$

$\frac{1}{1+a_i}\rightarrow1-\frac{a_i}{1+a_i}$　　$\Rightarrow\sum\frac{a_i}{1+a_i}$

23. 柯西变形：$x_i\in R^+$，$\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ 则 $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}}\geq\frac{1}{\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x_i}$

24. $a_i>0$，$\sum_{i=1}^{n}a_i=k$，求证：$\sum_{i=1}^{n}(a_i+\frac{1}{a_i})^2\geq\frac{1}{n}(\frac{n^2+k^2}{k})^2$

25. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1 \Rightarrow a+b=ab \Rightarrow \begin{cases} ab\geq 4 \\ ab-a-b+1=1=(a-1)(b-1) \end{cases}$

26. $(a+b)^n-a^n-b^n=C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}$

27. 权方和不等式（适用于分子比分母高1次）

$a_i, b_i>0\ (i=1,2\cdots n)$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+1}}{b_i^{m}}\geq(m+1)\sum_{i=1}^{n}a_i-m\sum_{i=1}^{n}b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^{m+1}}{b_i^{m}}\geq\frac{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^{m+1}}{(\sum_{i=1}^{n}b_i)^{m}}$$

$x_i>0,\ y_i>0\ (1\leq i\leq n)$ 则有

$$(\sum_{i=1}^{n}x_i^{m+1})(\sum_{i=1}^{n}y^{\frac{m+1}{m}})^m\geq(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i)^{m+1}$$

28. $\lambda_i, a_i>0$，$1\leq i\leq n$，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，则 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_ia_i\geq\prod_{i=1}^{n}a_i^{\lambda_i}$

29. Holder 不等式：$a_i>0, b_i>0\ (1\leq i\leq n)$ $p>1, q>0$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ 则 $\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq(\sum_{i=1}^{n}a_i^p)^{\frac{1}{p}}+(\sum_{i=1}^{n}b_i^q)^{\frac{1}{q}}$

30. 改变次数：$\frac{abc}{a^3(b+c)}\rightarrow=\frac{(\frac{1}{a})^2}{\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$ $=A$

$\frac{a^3}{b+c+d}\rightarrow\frac{(a^{\frac{3}{2}})^2}{b+c+d}$ 权方和后 $\rightarrow\frac{(a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}+c^{\frac{3}{2}}+d^{\frac{3}{2}})^2}{3(a+b+c+d)}$

$\geq\frac{1}{4}\frac{(a+b+c+d)^3}{3(a+b+c+d)}$ 因为 $\frac{(a+b+c+d)^3}{A}\leq\frac{a^3}{a^2}+\cdots+\frac{d^3}{d^2}=4$

极坐标与参数方程

1. 极坐标系内一点 → 多个极坐标 (ρ,θ) $(\rho, 2k\pi+\theta)$ $(-\rho, 2k\pi+\pi+\theta)$

2. $A(\rho_1,\theta_1)$ 与 $B(\rho_2,\theta_2)$，$|AB|=\sqrt{\rho_1^2+\rho_2^2-2\rho_1\rho_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$

3. 极坐标系与直角坐标互化 $\rho^2=x^2+y^2$ $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$ $\begin{cases} \rho^2=x^2+y^2 \\ tg\theta=\dfrac{y}{x} \text{（象限！）} \end{cases}$

如 $\rho=\dfrac{2\cos\theta+2}{\sin^2\theta} \Rightarrow \rho^2\sin^2\theta=2\rho\cos\theta+2\rho$

$\Rightarrow y^2=2x+2\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow (y^2-2x)^2=4(x^2+y^2)$

$\rho^2=2\cos2\theta \Rightarrow \rho^4=2\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \Rightarrow (x^2+y^2)^2=2x^2-2y^2$

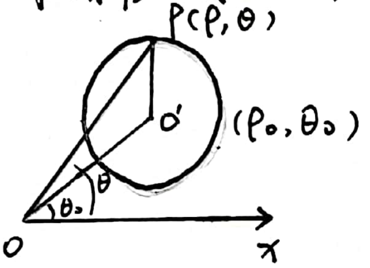
4. 圆的极坐标方程

(1) 圆心为极点：$\rho=r$ $(\theta\in R)$ (2) 圆心为 $(r,0)$ $\rho=2r\cos\theta$

(3) 圆心为 (r,π)：$\rho=-2r\cos\theta$ (4) 圆心为 $(r,\frac{\pi}{2})$ $\rho=2r\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)=2r\sin\theta$

(5) 圆心为 $(r,\frac{3}{2}\pi)$：$\rho=2r\cos(\frac{3}{2}\pi-\theta)=-2r\sin\theta$

一般情形：圆心为 (ρ_0,θ_0)：$\rho^2+\rho_0^2-2\rho_0\rho\cos(\theta-\theta_0)=r^2$



推导极坐标：① 利用三角关系

② 用直角坐标转化

5. 圆锥曲线：到一定点（焦点）和一定直线（准线）距离之比为常数 e 的动点轨迹。

$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$，其中 $p=\dfrac{b^2}{c}$，$ep=\dfrac{b^2}{a}$ $e=\dfrac{c}{a}$

⇓

$(1-e^2)x^2+y^2-2e^2px-e^2p^2=0$

$e\in(0,1)$ 椭圆（极点、原点是左焦点

$e\in(1,+\infty)$ 双曲线（极点、原点是右焦点

$e=1$ 抛物线

圆的参数方程及应用

$\begin{cases} x=a+R\cos\theta \\ y=b+R\sin\theta \end{cases}$

1. 利用三角变形求最值
2. 只知道角的大小关系（圆内接△）
3. 把不等式转换为点到圆上一点的距离

直线的参数方程.

$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\sin\alpha \end{cases}$