Esperimentazioni 1, 2025, 1–3
doi:
Original Article

Analisi dati Esperienza 0: determinazione del periodo del pendolo di Kater

Federico Carabelli*

Dipartimento di Fisica, Università di Torino, Via Pietro Giuria, 1, 10132, Piemonte, Italy

*federico.carabelli@edu.unito.it

Abstract

In questa relazione è mostrato come sono state raccolte, analizzate e interpretate le misure che mi hanno permesso di stimare il periodo di oscillazione di un pendolo di Kater mostratoci in video.

Obiettivo

Lo scopo dell'esperienza è quella di determinare una misura del periodo del Pendolo di Kater (di cui non conosciamo la lunghezza) accurata fino al centesimo di secondo e che sia coerente con la misura presa dai docenti con l'utilizzo di una fotocellula con sensibilità al millesimo di secondo.

Strumentazione utilizzata

Durante l'esperienza sono stati usati diversi strumenti (di cui si ha una descrizione riassuntiva nella tabella 1). Per raccogliere i dati ho utilizzato un cronometro scritto da me in Python (approfondimento nella sezione Procedura di misura) con una sensibilità stimata al decimillesimo di secondo, ma per sicurezza la sensibilità è stata troncata al decimo di secondo e i dati sono restituiti con solo due cifre decimali (adeguatamente arrotondate).

Table 1. Strumentazione

Strumento	utilizzo	sensibilità
Video pendolo	fonte misure	-
QuickSilver	visualizzatore mp4	-
Cronometro*	cronometro (a lap)	0.01 s
Selezione tempi*	cronometro (non lap)	0.01 s
GoogleSheet	analisi dati	-

*Approfondimenti sull'utilizzo e sulle sorgenti di questi codici nella sezione Procedura di misura

Procedura di misura

Dovendo caricare i dati raccolti su un file CSV ho pensato di usare come cronometro un breve codice in Python da me scritto (algoritmo 1) in modo da prendere le misure e registrarle direttamente su un foglio in formato CSV. Questo codice registra ogni tempo come intervallo temporale trascorso tra una pressione del tasto enter del computer e un'altra. In questo modo le misure non sono indipendenti fra di loro. Per ovviare a questo problema ho scritto un altro breve codice (algoritmo 2) che elimini tutte le misure pari. In questo modo prendendo 200 lap mi ricavo 100 misure indipendenti fra loro.
Operativamente le misure le ho prese aspettando che la massa inferiore del pendolo raggiungesse l'estremo destro (e quindi avesse velocità nulla) e ricaricando il video ogni 2 minuti circa.

Algorithm 1 Cronometro

```
import time
file = open("dataPendolo1.csv", 'w')
file.write('"Indice","Tempo (s)"')
prec = 0
inp = input("Premi enter per avviare")
curr = time.time()
i=0
while inp == "":
    prec=curr
    curr = time.time()
    delta = curr-prec
    print(i)
    file.write(f"{i},{delta}\n")
    i+=1
    inp = input("Premi enter per stampare")
```

Analisi dati

I risultati dell'analisi delle 100 misure sono riportati nella tabella 2. Durante la raccolta dati non sono stati riscontrati problemi. Infatti solo uno dei 100 valori registrati risultava non appartenente ad un intervallo di confidenza di 3σ ($\sim 99.7\%$). Ho deciso di applicare il criterio con questo intervallo di confidenza poiché essendo le misure

Algorithm 2 Selezione tempi

```
X = []
Y = []
with open("dataPendolo1.csv", 'r') as f:
    for line in f.readlines()[2::2]:
        line = line.split(',')
       X.append(round(int(line[0])))
       Y.append(round(float(line[-1])*100)/100)
```

Table 2. Risultati preliminari

Grandezza	Simbolo	Prima del 3σ	Dopo il 3σ	Dati raggruppati
Media*	$< T >$	2.161 s	2.164 s	2.165 s
Varianza*	σ^2	0.0048 s^2	0.0042 s^2	0.0043 s^2
Dev std*	σ	0.069 s	0.065 s	0.064 s
Errore media*[1]	$\sigma_{\bar{T}}$	0.0069 s	0.0065 s	0.0064 s
Mediana	-	2.165 s	2.17 s	
Moda	-	2.16 s	2.16 s	2.20 s

*Sono state riportate più cifre rispetto alle cifre significative dovute per sottolineare eventuali differenze fra stime diverse.

[1]Anche detto *Deviazione standard della media.*

100 non ci dovrebbero essere dati al di fuori di questo intervallo. Infatti $100 \cdot 0.3\% = 0.3 \approx 0$.
Rigettato questo dato (come si può osservare nella tabella 2) la media rimane consistente, tanto che per osservare una differenza dobbiamo osservare i millesimi di secondo (quindi sotto la sensibilità del nostro strumento). Anche dopo aver studiato i dati raggruppati per classi (rappresentate nell'istogramma a figura 1) la stima della media rimane consistente. Discorso analogo vale per la varianza, la deviazione standard e la deviazione standard della media. Al contrario non vale per moda e mediana. Infatti esse non mostrano una differenza apprezzabile nella sensibilità dello strumento prima e dopo l'applicazione del criterio del 3σ; ma la mostrano quanto studiamo il campione con i dati raccolti in classi. Questo probabilmente è dovuto al fatto che per fare in modo che la media si trovasse nella classe centrale ho dovuto modificare gli estremi delle classi (diminuendo di un centesimo l'estremo inferiore del primo bin). La mia miglior stima per l'errore della media, cioè la stima dopo lo studio dei dati raggruppati per classi, è di 0.006480 s. Questo è un valore minore della sensibilità del mio strumento (che è di un centesimo). Quindi in definitiva il mio risultato è il seguente:

$$< T >= (2.16 \pm 0.01) \text{ s} \tag{1}$$

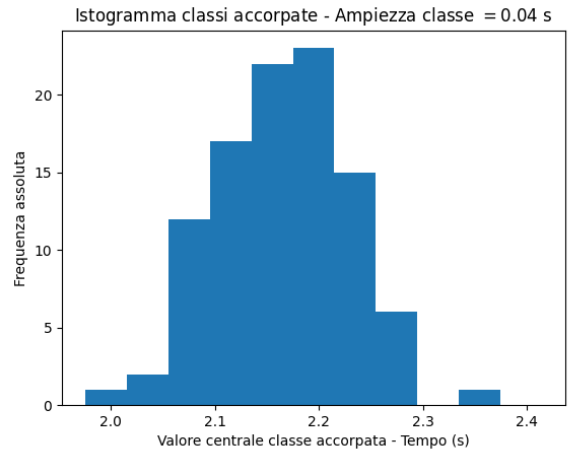

Fig. 1: Istogramma dei dati accorpati in classi di ampiezza 0.04 s, valore calcolato dividendo la differenza fra misura maggiore e minore per il numero di misure più un fattore correttivo di -0.01 s

Test del χ^2

La distribuzione limite del mio campione mi aspetto che sia una Gaussiana (distribuzione normale) poiché il numero di misure (99 dopo il rigetto) è abbastanza grande (è maggiore di 30) così che si possa approssimare il numero di misure N a $N-1$, il periodo è una grandezza continua e le misure sono indipendenti fra di loro.
Possiamo verificare questa mia ipotesi sottoponendo la Gaussiana di media 2.16 s e deviazione standard 0.064 s al test del χ^2.
L'ipotesi zero del test (H_0) è che la Gaussiana sopra descritta mi descriva la distribuzione dei miei dati con un livello di significatività del 5% ($\alpha = 0.05$). I gradi di libertà della distribuzione sono 4 perché le classi che stiamo considerando per il test sono 7 (diverse da quelle mostrate nelle figure perché le classi con frequenza aspettata complessiva inferiore a 5 sono state accorpate) e i gradi di dipendenza della curva Gaussiana dalle misure sono 3 (gradi di libertà $= 7-3 = 4$). Con questi dati grazie alle tabelle relativi ai valori della distribuzione del χ^2 distribuiteci ho potuto calcolare un χ^2 critico di 9.488 e un χ^2 osservato di 6.160. Dato che il χ^2 osservato è maggiore del χ^2 critico il test ha esito positivo, e ciò significa che la Gaussiana descritta dalle grandezza in tabella 2 descrive bene i miei dati. Dove bene significa che se ripetessi l'esperimento ci sarebbe una probabilità almeno del 5% che io ottenga una distribuzione più distante dalla distribuzione limite ipotizzata per via dei soli errori casuali.

Test di Gauss

Il valore del periodo misurato dalla fotocellula è di 2.168 s che assumiamo essere il valore *vero* (essendo che lo strumento utilizzato ha una sensibilità 10 volte maggiore del nostro). La nostra stima invece è di 2.16 ± 0.01 s. Si può subito notare che i due valori sono compatibili poiché il valore vero cade nell'intervallo di confidenza dato dalla sensibilità intorno alla media osservata. Per essere più rigorosi possiamo matematicamente determinare se queste due stime del periodo del pendolo di Kater siano compatibili grazie al Test di Gauss (o Test Z). Grazie a questo test infatti possiamo capire se la differenza fra due stime sia spiegabile grazie

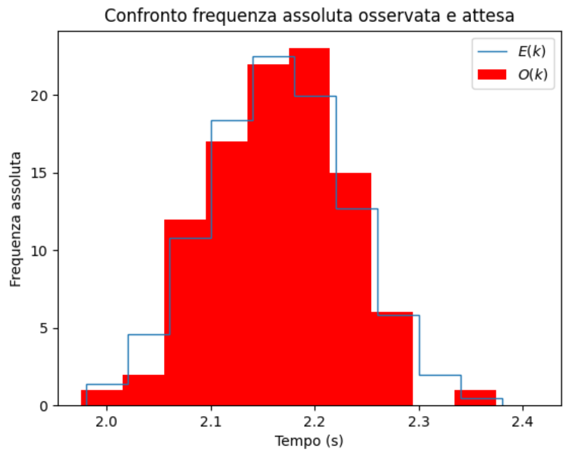

Fig. 2: Confronto tra la distribuzione dei dati osservata ($O(k)$) e la distribuzione stimata ($E(k)$)

ai solo errori casuali oppure no (e quindi la presenza di errori sistematici). Per farlo calcoliamo la probabilità di trovare una media più lontana dal valore vero se ripetessimo la raccolta dati. In particolare scegliamo di considerare compatibili stime con livello di significatività (α) del 5%, cioè con probabilità del 5% di trovare una stima peggiore rifacendo l'esperimento, percentuale che corrisponde ad un intervallo intorno alla media di 2σ.
L'ipotesi zero del test Z (H_0) è quindi che la nostra stima del periodo del pendolo sia compatibile con la misura della fotocellula entro un intervallo di 2σ, cioè un livello di significatività del 5%.
Adesso procediamo calcolando lo z critico (z_c), cioè la la media a cui corrisponde una probabilità che solo per via degli errori casuali un successivo esperimento misura una media meno compatibile del 5%, che nel nostro caso è 1.96. Successivamente calcoliamo, grazie alla tabella fornitaci, lo z osservato (z_{oss}) che equivale a 0.80. Questi dati ci bastano per dire che l'ipotesi H_0 è accettata essendo $z_{oss} < z_c$. Per essere più rigorosi possiamo anche calcolarci, sempre grazie alla tabella fornitaci, la probabilità che un prossimo esperimento stimi una media del periodo peggiore della nostra (p-value) che in questo caso è 0.4238.
La nostra stima ha quindi passato il test di Gauss (essendo il p-value maggiore di α), ciò significa le due stime sono compatibile fra loro e che eventuali errori sistematici, se presenti, sono trascurabili.

Riflessioni sui risultati

L'intervallo $< T > \pm\sigma_{\bar{T}}$ è tale che se ricalcolassimo la media rifacendo l'esperimento questa nuova cadrebbe in esso con una probabilità del $\sim$ 68%. Oppure, al contrario, è l'intorno della media da me stimata in cui siamo confidenti al $\sim$ 68% cada il valore vero del periodo del pendolo.
L'intervallo $< T > \pm\sigma$, invece, è l'intorno centrato nella media delle nostre misure in cui ricadono il $\sim$ 68% delle misure prese. Oppure, al contrario, è l'intervallo per cui, presa casualmente una nostra misura, al $\sim$ 68% contiene anche la media calcolata.
Dopo la conclusione della mia esperienza posso affermare con certezza che il numero di misure che ho acquisito erano troppe. Infatti ho ottenuto un errore sulla media inferiore a quello dell'incertezza dello strumento (vedi tabella 2). Quindi è sicuramente di interesse capire il numero di misure che dovrei prendere per ottenere (in un possibile esperimento futuro) un errore sulla media uguale all'incertezza. Per fare ciò mi basta sfruttare l'equazione 6 del formulario:

$$\sigma_{\bar{T}} = \frac{\sigma}{\sqrt{T}}$$

da cui

$$N = \frac{\sigma}{\sigma_{\bar{T}}} \qquad (2)$$

sostituendo in quest'ultima $\sigma_{\bar{T}} = 0.01$ e $\sigma = 0.064$ (in accordo con i risultati esposti nella tabella 2) troviamo $N = 41$. Quindi sarebbero servita 41 misure per trovare una media con un errore pari all'incertezza.

Conclusioni

L'esperienza è stata svolta senza particolari criticità. I risultati ottenuti (citati nella tabella 2 e nell'equazione 1) sono coerenti con i valori aspettati. Infatti l'errore sulla stima del periodo del pendolo (periodo di 2.16 s) è ridotto alla sensibilità dello strumento (0.01 s) e in questo intervallo ricade anche il valore misurato con la fotocellula (2.168 s) che assumiamo essere vero. Ad avvalorare tale tesi ci sono i risultati del Test di Gauss e del Test del χ^2, entrambi passati con esito positivo.
In conclusione possiamo stimare il periodo del pendolo registrato a 2.16 ± 0.01 s e possiamo escludere l'esistenza di errori sistematici o casuali non trascurabili.