编号:530 姓名:陈斯杰 专业:电子信息工程 第3次作业

- 应用积分思想建模

1. 1.1

2. 1.2

3. 1.3

4. 1.4 按期望的增长率，10年后的利润为：

$$\begin{aligned}\int_0^{10}[1+t^{\frac{2}{3}}]dt &= [t+\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}]_0^{10}=10+6\sqrt[3]{100} \\ &\approx 37.85(*10^5)\end{aligned}$$

   按实际的增长率，10年后的利润为：

$$\begin{aligned}\int_0^{10}[t-2\sqrt{t}+4]dt &= [\frac{1}{2}t^2-\frac{4}{3}t\sqrt{t}+4t]_0^{10} \\ &= 50-\frac{40}{3}\sqrt{10}+40 \\ &\approx 47.84(*10^5)\end{aligned}$$

   所以十年得到的利润比期望增加：

$$(47.84-37.85)*10^5=99.9(\text{万美元})$$

5. 1.5(指数增长问题)解

   (1)假设需要n年。k=2.6%;则

$$y=y_0e^{kn}=2y_0;n=\frac{ln2}{k}=26.659$$

   所以n取27，即需要27年世界人口将翻番。

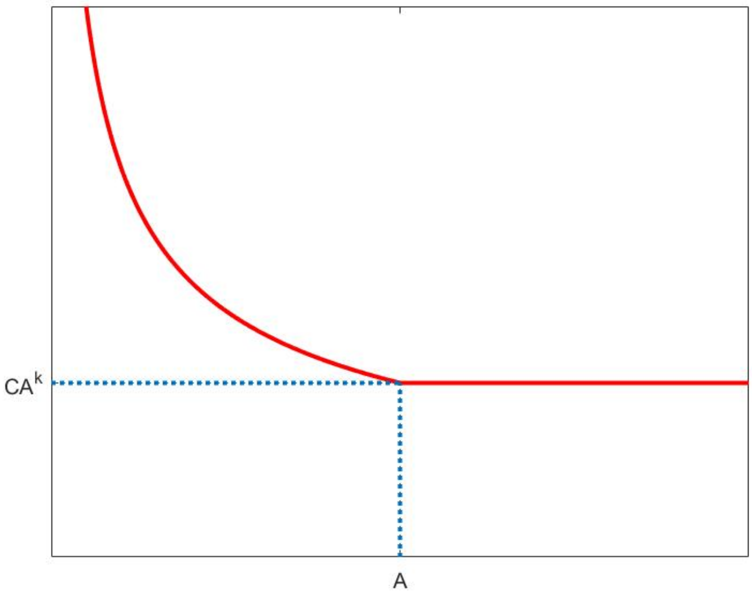
   (2)$k=0.8\%$,运用matlab,可算出1991-2000年间各年的人口数量。代码如下：

```
for i=1:10
Q(i)=6766.9*exp(0.008*i)
end
```

```
ave=(sum(Q)+6766.9)/11输出结果：
%ave = 7.0453e+03
```

所以江苏省1990-2000年的平均人口数为7045.3万人。

6. 1.6 解：



生产x件产品所需时间为:

$$\begin{cases} int_0^x Cx^k dx = \frac{C}{k+1}x^{k+1}(x \leq A) \\ int_0^A Cx^k dx + (x-A)CA^k = \frac{C}{k+1}A^{k+1} + (x-A)CA^k \end{cases}$$

7. 1.8 解：设F_i为第i周的客流量，则

$$\begin{cases} F_1 = A = Af(0) \\ F_2 = Af(1) + A = A(f(1) + f(0)) \\ F_3 = Af(2) + Af(1) + A = A(f(2) + f(1) + f(0)) \\ ... \\ F_{21} = A(f(20) + f(19) + ... + f(2) + f(1) + f(0)) \\ f(t) = e^{-\frac{t}{10}}, A = 2000 \end{cases}$$

即求解$F_{21}=2000(e^{-\frac{0}{10}}+e^{-\frac{1}{10}}+...+e^{-\frac{20}{10}})=2000\frac{1-e^{-\frac{21}{10}}}{1-e^{-\frac{1}{10}}}$

解得$F_{21}=18443$人

8. 1.9

(1) 不平等面积A大小为：

$$\begin{aligned}\int_0^1[p-p^{5/3}]dp &= [\frac{1}{2}p^2-\frac{3}{8}p^{8/3}]_0^1\\ &= 0.125\end{aligned}$$

下三角面积为1/2,所以，基尼系数为：

$$\begin{aligned}G &= \frac{A}{1/2}\\ &= 0.25\end{aligned}$$

(2) 基尼系数为0.25,属社会收入分配比较平均的范围.

(3)

$$L^{'}(p_0)=\frac{5}{3}p_0^{2/3}=1$$

$$p_0\approx 0.465=46.5\%$$

所以，有46.5%的人的收入在社会平均之下.

- 应用导数思想建模

1. 2.1 解：需求的价格弹性=$\frac{P}{Q^D}\times\frac{dQ^D}{dP}$

   需求的收入弹性=$\frac{Y}{Q}\times\frac{dQ}{dY}$

   收益的价格弹性=$\frac{P}{R}\times\frac{dR}{dP}$

   供给的价格弹性=$\frac{P}{Q^S}\times\frac{dQ^S}{dP}$

2. 2.2 解：(1)由需求价格弹性可知：

   $\frac{\triangle Q}{Q}=E_d\times\frac{\triangle P}{P}=-1.2\times 3\%=-3.6\%$ 即在其他条件不变的情况下，如果价格提高3%，则需求将下降3.6%.

   (2)由需求收入弹性可知：$\frac{\triangle Q}{Q}=E_y\times\frac{\triangle M}{M}=3.0\times 2\%=6\%$ 即在其他条件不变的

情况下，如果收入上升2%，则需求上升6%。

(3)预计销售量：$800 \times [1 + (3.0 \times 10\% - 1.2 \times 8\%)] = 963.2$ 即汽车预计销售量为963.2万辆。

3. 2.3 解：设价格为p，需求为Q(p)，依题意有：

$$\frac{dQ}{dp}\frac{p}{Q} = -0.15$$

微分方程通解为：$Q = Cp^{-0.15}$(C为常数) 设斜率$k_p = (\frac{dQ}{dp})_p$，有：

$$\begin{cases} k_p \frac{500}{Q} = -0.15 \\ k_{p+\Delta p} \frac{500+\Delta p}{Q-0.1Q} = -0.15 \end{cases}$$

可以解出：$\frac{p+\Delta p}{p} = 2.019$，即上涨509.5

4. 2.4 解：弧弹性公式为：

$$E_d = \frac{\Delta Q}{(Q_0 + Q_1)/2} \div \frac{\Delta P}{(P_0 + P_1)/2} \tag{2.4.1}$$

由题干提取出,$\Delta Q = 2000, Q_0 = 8000, Q_1 = 10000, P_0 = 600, P_1 = P_0 + \Delta P$,代入(2.4.1)得：

$$\begin{aligned} -2.0 &= \frac{2000}{9000} \div \frac{\Delta P}{600 + \frac{1}{2}\Delta P} \\ \Delta P &\approx -63 \end{aligned}$$

所以每双要降价到537元

5. 2.5 解：价格弹性：

背景回顾，价格弹性公式：

$$\varepsilon = \frac{dQ}{dP} \times \frac{P}{Q}$$

在$P = 385, Q = 18500$该点，价格弹性$\varepsilon = \frac{dQ}{dP} \times \frac{385}{18500} = -3.8$，得该点斜率$\frac{dQ}{dP} = -b = -\frac{3.8\times18500}{385} = -\frac{14060}{77}$,解得$a = 88800$; 所以需求函数：

$$Q = 88800 - \frac{14060}{77}P$$

由于该公司预计量产销售产品25000件，所以令$Q = 25000$,解得$P = 349.4$; 所以价格应定为349或350元较为合理。

6. 2.6 解:

   (1)生产100吨时总成本为$1000 + 7 \times 100 + 20 \times 100^2 = 501700$ 元。

   (2)产量100吨时平均成本为$\frac{501700}{100} = 5017$元。

   (3)产量为225吨时总成本=2533825元

   平均变化率为$\frac{2533825-501700}{225-100} = 16257$

   (4)$\frac{dc}{dq} = 7 + 100q$

   100吨时的变化率为7+100times100=10007

7. 2.7 解：

   (1)设收入为I，商品销售数量为Q，在对Q进行的关于I和其他解释变量的回归中，I的估计系数是10，即$\frac{\triangle Q}{\triangle I} = 10$. 因此，对于100000院的收入和80000单位的销售量，商品的收入弹性为$E_I = 10 \times \frac{100000}{80000} = 12.5$. (2)销售量从80000增加到90000单位，消费者的收入从100000增加到110000元时，$E_I = 10 \times \frac{100000}{80000} = 12.4$，所以该商品为奢侈品。

- 初等优化方法

1. 3.1

2. 3.2 解：

   损失费通常正比于森林烧毁面积，而烧毁面积与失火、灭火时间有关，灭火时间又取决于消防队员数目，队员越多，灭火时间越短。而救援费既与消防队员人数有关，又与灭火时间长短有关。记失火时刻为t=0，开始救火时刻为$t = t_1$，设在时刻t森林被烧毁面积为S(t)。

   【模型假设】：森林树木分布均匀，且无风，火势可以看作以失火点为中心，以均匀速度向四周呈圆形蔓延，且不会蔓延至森林边界，因而蔓延半径r与时间t成正比，又因烧毁面积S与t^2成正比，从而$\frac{dB}{dt}$成正比，火势蔓延速度设为v_1 损失费与烧毁面积成正比且比例系数为c_1；派出消防队员x名，每个消防队员灭火速度为v_2,每

个消防队员单位时间的费用（薪资与材料耗损）为c_2，灭火时刻为t_2，每个队友一次性支出费用（运费与器材费用）为c_3

【约束条件】：总灭火速度应大约火势蔓延速度，即$xv_2 > v_1$

【模型求解】：求得费用最少时x的解为：$x = \frac{v_1}{v_2} + v_1\sqrt{\frac{c_1 v_2 b^2 + 2c_2 v_1 b}{2c_3 v_2^2}}$