

530 陈斯杰 电子信息工程 第8次作业

1.

使用 *Dijkstra* 算法得到:

$$1. a \rightarrow v_1 = 2$$

$$2. a \rightarrow v_2 = 7$$

$$3. a \rightarrow v_3 = 1$$

$$4. a \rightarrow v_4 = 3$$

$$5. a \rightarrow v_5 = 6$$

$$6. a \rightarrow v_6 = 10$$

$$7. a \rightarrow b = 12$$

2.

Kruskal即贪心（按边权升序排序）+并查（依次判断边的两端点是否在同一连通分量内）.

代码方面网上模板过多,在此不加赘述.

手动运算结果如下:

times	add_edge	cost
1	(B,D)	5
2	(D,F)	6
3	(B,C)	7
4	(A,B)	10
5	(E,F)	10

最小生成树的权为38.

3.

中国邮路可以理解为连通途中所有顶点的一个闭连通有向图，图中的边我们可以理解为双向的弧，以 v_1 为起点的中国邮路为： $v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_7 \longrightarrow v_3 \longrightarrow v_4 \longrightarrow v_5 \longrightarrow v_6 \longrightarrow v_1$

4.

任取初始匹配 $M_1 = (x_1, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_5), (x_5, y_4)$

过未饱和点 x_4 可得一条 M_1 增广路 $x_4y_3x_2y_2x_1y_1$

改进后得到

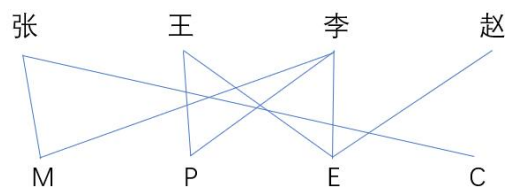
$$M_2 = (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_5), (x_4, y_3), (x_5, y_4)$$

此时X中均为饱和点， M_2 即为一个最大匹配

5.

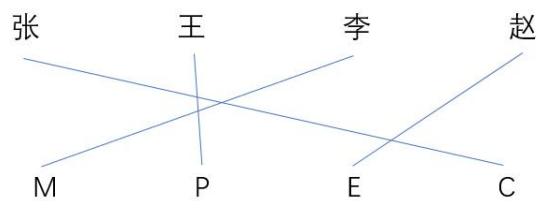
画图如下：

设数学为m，物理为p，电工为e，计算机为c



求完美匹配得下图：

设数学为m，物理为p，电工为e，计算机为c



6.

增广弧：得到的最大流为11

$$1. s \rightarrow a \rightarrow t$$

$$2. s \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow t$$

$$3. s \rightarrow b \rightarrow a \rightarrow t$$

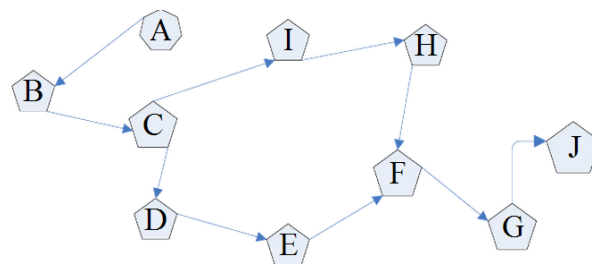
7.

将两岸状态抽象为点，将状态的转移抽象为边，模型即可转化为求最短路问题。

将状态抽象为点（下表标1的表示单位在左岸，表0的表示单位在右岸）：

状态点 名字	人	狼	羊	菜
A	1	1	1	1
B	0	1	0	1
C	1	1	0	1
D	0	1	0	0
E	1	1	1	0
F	0	0	1	0
G	1	0	1	0
H	1	0	1	1
I	0	0	0	1
J	0	0	0	0

将状态的转移抽象为边：



代码方面网上模板过多,在此不加赘述.

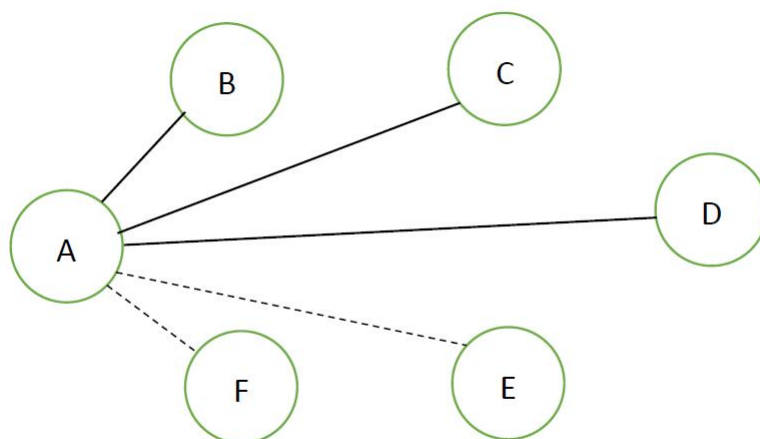
答案为ABCIHFGJ或ABCDEFGJ. 即（羊空菜羊狼空羊）或（羊空狼羊菜空羊）.

8.

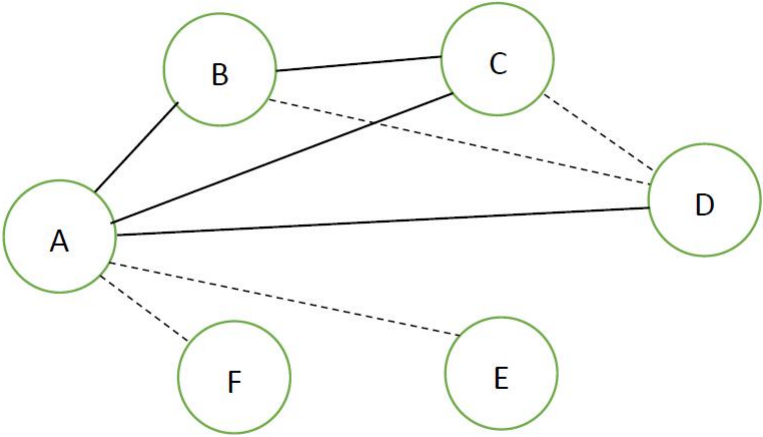
总有3人相互认识与总有3人相互不认识是等价的，我们考虑前一种。

我们用A、B、C、D、E、F来表示这六个人，若两人相互认识，我们用实线将两个顶点连接起来，若两人不认识，则用虚线。对于顶点A，与其相连的边有(A,B),(A,C),(A,D),(A,E),(A,F).五条边中，至少有三条为实线或至少三条虚线，不妨设为三条实线，不妨设为(A,B),(A,C),(A,D)。

如图：



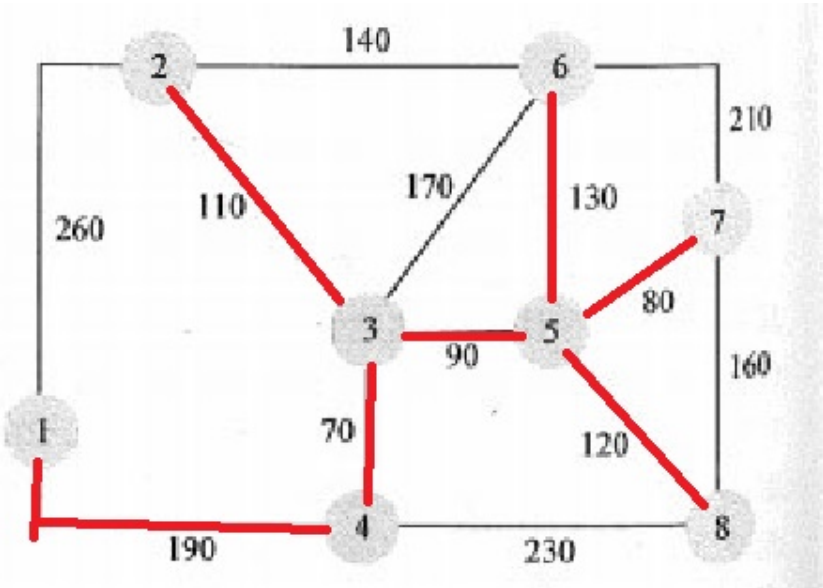
我们再考虑BCD三个顶点，若三点之间的连线均为虚线，则三条虚线构成三角形，即BCD三人互相不认识，矛盾！所以，BC、BD、CD三条边中至少有一条实线，不妨设为BC，如图：



所以ABC三人互相认识，同理，我们可以证明至少三人互相不认识。
所以，六人集会上，总有三人互相认识或者三人互相不认识。

9.

由避圈法得，下图为最短路径，最短长度为790。



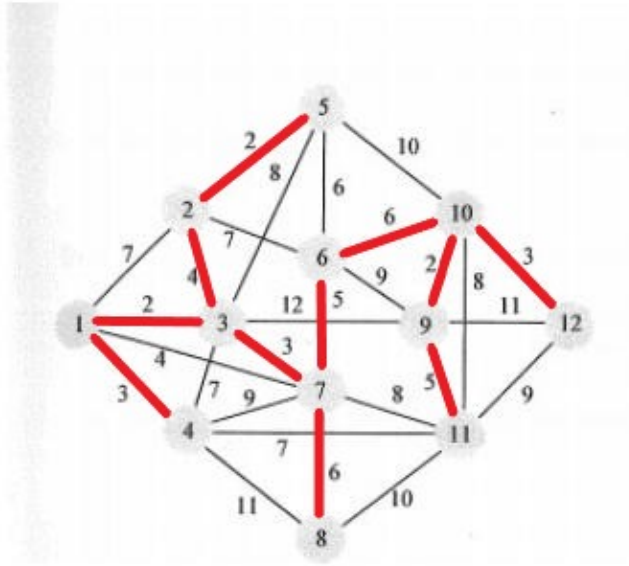
10.

以城镇各地区为点、两两连接为边画图，地区之间的距离设为对应边的权重，求最小支撑

树，该树的权重即为总的最小车道长度。

11.

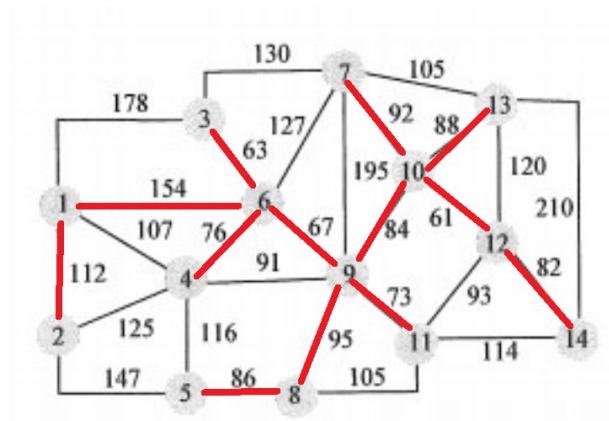
最小生成树如下图：



12.

手动运算结果如下：

times	add_edge	cost
1	(10,12)	61
2	(3,6)	63
3	(6,9)	67
4	(9,11)	73
5	(4,6)	76
6	(12,14)	82
7	(9,10)	84
8	(5,8)	86
9	(10,13)	88
10	(7,10)	92
11	(8,9)	95
12	(1,4)	107
13	(1,2)	112



最小生成树的权为1086.

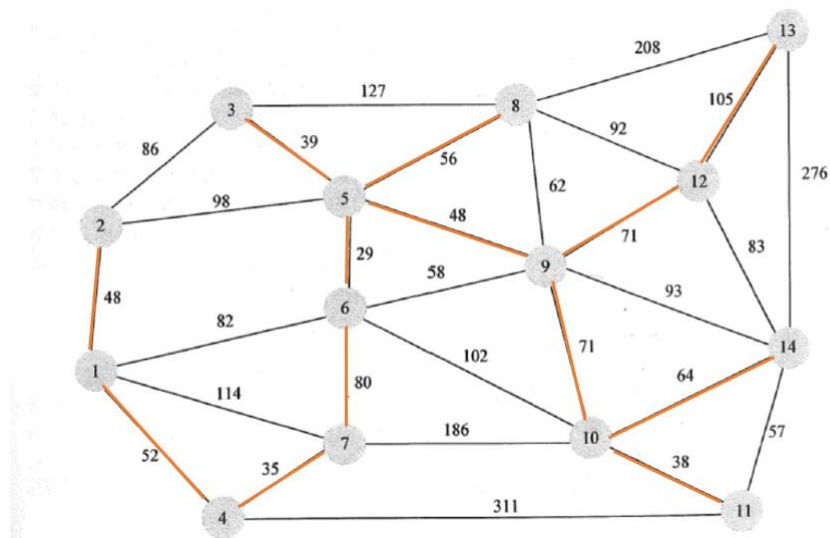
13.

该问题为求该带权无向图的最小生成树，以减小架设管道的距离。

运用Kruskal算法，依次加入边(5, 6), (4, 7), (10, 11), (3, 5), (1, 2),

(5, 9), (1, 4), (5, 8), (10, 14), (9, 12), (9, 10), (12, 13).

如下图：

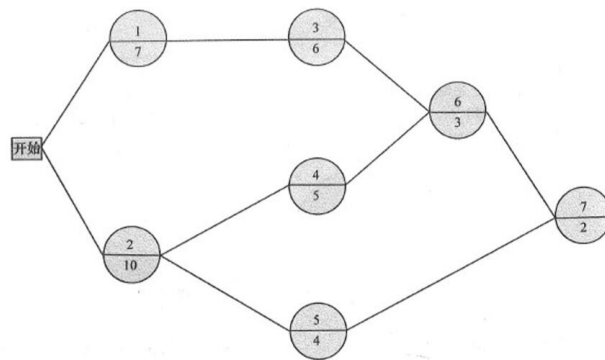


14.

设活动路径长度为从第i个活动开始到第j个活动开始所需时间。路径：1-3-6-8：17, 1-3-7:12, 1-4-8:7, 2-5-8:16, 2-9:7 关键路径：1-3-6-8，2-9

15.

该网络图为：



识别所有路径：

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_1 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7 & \text{长度为17} \\ L_2 : 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7 & \text{长度为19 关键路径为 } L_2. \\ L_3 : 2 \rightarrow 5 \rightarrow 7 & \text{长度为14} \end{array} \right.$$

16.

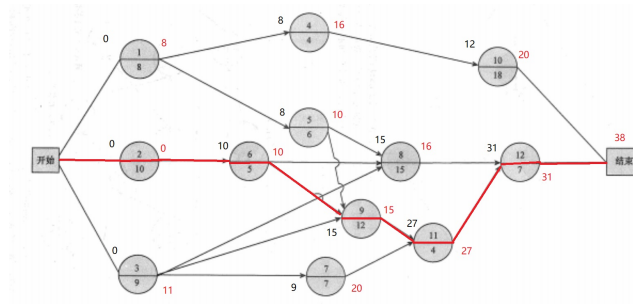
关键路径节点为：开始 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 7

关键路径长度为：20个单位

<i>from</i>	<i>to</i>	<i>first</i>	<i>last</i>	Δt
0	2	0	0	0
0	3	7	9	2
2	5	10	14	4
2	4	10	10	0
3	6	13	15	2
4	6	15	15	0
5	7	14	18	4
6	7	18	18	0

17.

使用最短路模型.



黑色数字为最早开始时间，红色数字为最晚开始时间，红色线路为关键路径，总工期38个月。

18.

列表解决：

(1)活动最早开始时间：

最早开始时间	1	2	3	4	5	6	7	8	栈
初始状态	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	{1,2}
一{2}	0	0	∞	∞	7	7	∞	∞	{1,5,6}
二{6}	0	0	∞	∞	7	7	∞	19	{1,5}
三{5}	0	0	∞	∞	7	7	13	19	{1}
四{1}	0	0	10	10	7	7	13	19	{3,4}
五{4}	0	0	10	10	7	7	14	19	{3,7}
六{7}	0	0	10	10	7	7	14	21	{3}
七{3}	0	0	10	10	7	7	14	25	{ }

(2)最晚开始时间：

最晚开始时间	1	2	3	4	5	6	7	8
*	0	5	10	14	12	13	18	25

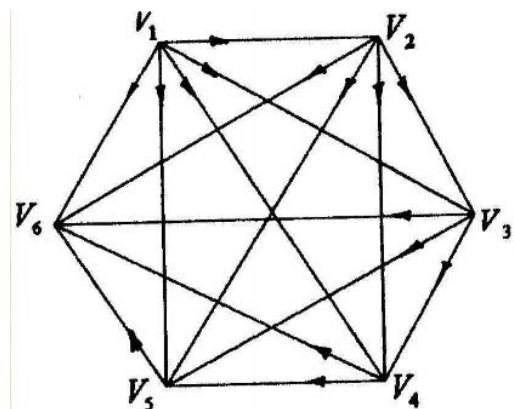
(3)松弛：

松弛	1	2	3	4	5	6	7	8
*	0	5	0	4	5	6	4	0

(4)关键路径：1 \longrightarrow 3 \longrightarrow 8

(5)项目工期：34周。

19.



如上图所示， V_i 表示第*i*年初做出的决策， V_6 表示第五年底。

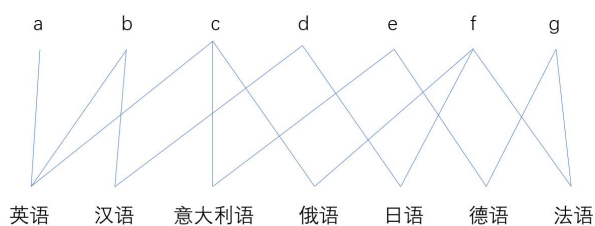
其中 $V_i \rightarrow V_j$ 的赋权表示将第*i*年初购买设备一直使用到第*j*年初所需要的费用。

即转化为由 $V_1 \rightarrow V_6$ 最短路径问题。

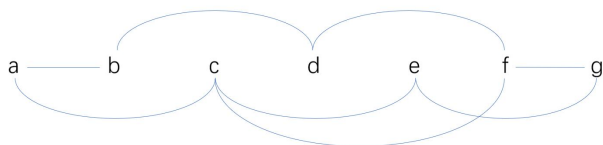
由Dijkstra算法可得，最短路径为 $V_1 - V_4 - V_6$ 或 $V_1 - V_3 - V_6$ ，最短路径为53。

20.

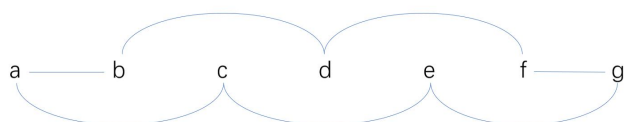
画出图为：



依题意简化图得：



解得：

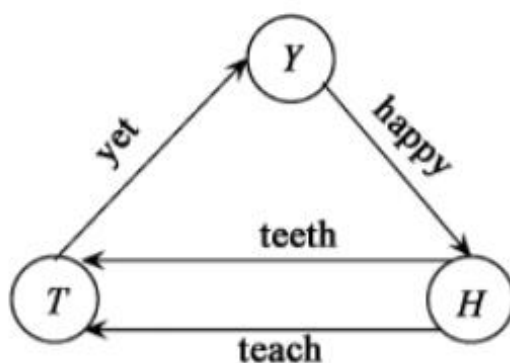


即排座位的方式为：a,b,d,f,g,e,c依次围坐一圈

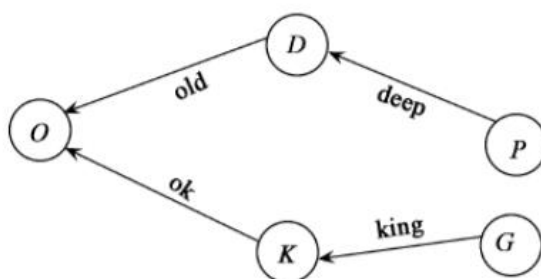
21.

【思路】将26个字母作为节点，每个单词作为一条有向边，弧头为单词首字母，弧尾为单词尾字母。一组单词构成节点数有限的有向图，判断单词能否完成接龙即判断有向图是否存在欧拉回路或者欧拉路。

【例1】 $teeth \rightarrow happy \rightarrow yet \rightarrow teach$



【例2】 $old - ok - king - deep$

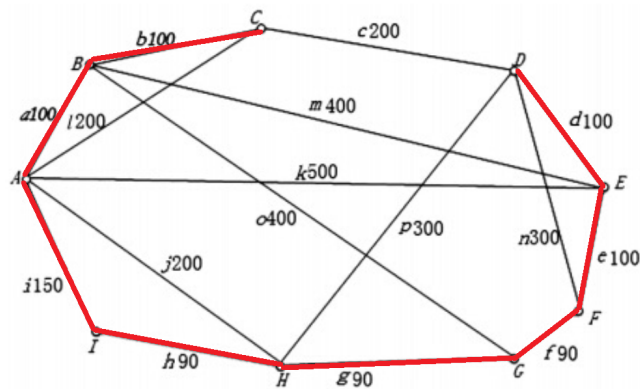


【解】

- 例1满足除两个节点外（一个入度比出度多1，一个入度比出度少1），每个节点入度等于出度，存在欧拉路，可以完成接龙
- 例2没有回路，不存在欧拉路，因此不能完成接龙

22.

题目要求修建管道系统，使得任意两个存储站之间能够连接。修建成本显然需要重点考虑，即成本要最低，因此选择使用最小生成树模型。



如图建造，花费资金830.

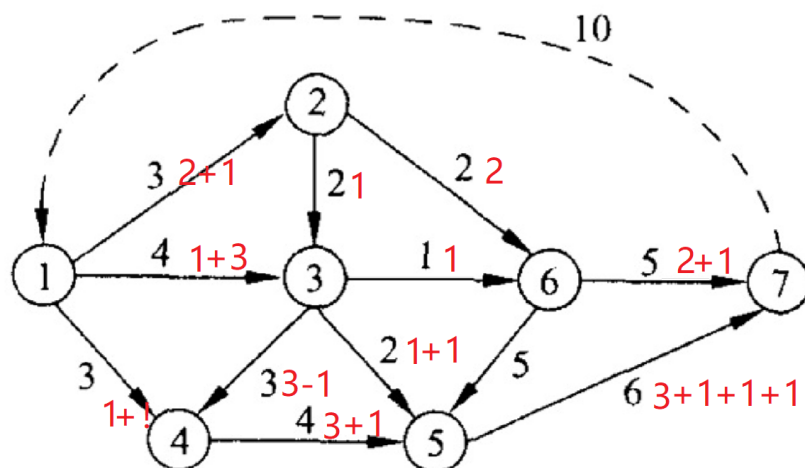
23.

运用图论知识，求算出ABC三地到8个菜市场的最短距离，如下表：

	1	2	3	4	5	6	7	8
A	4	8	8	16	11	6	24	20
B	14	7	7	16	12	16	23	17
C	20	19	11	14	6	15	5	10

再对各集散点运往各菜市场的供应量进行假设，通过线性规划求解。

24.



如上图分析可知，每日最多可增加9万吨供水量。