

2018 年全国大学生数学建模竞赛暨美赛培训

对策论

厦门大学2016 级各学院

数学建模团队：谭忠教授；助教：陈小伟，姜小蒙，姚瑶，余娇妍

要求：(1) 必须用TEX输入编辑后将TEXPDF以及图表一并发邮件提交给ztan85@163.com及sxjm004@163.com，压缩包及邮件主题名为“编号+姓名+专业+第*次作业”；

(2) 必须抄题，以免判错。

1. 今有甲、乙两厂生产同一种产品，它们都想通过内部改革挖潜，获得更多的市场份额已知两厂分别都有三个策略措施，据预测，当双方采取不同的策略措施后两厂的市场占有份额变动情况如表所示：

甲厂产品市场份额变动 甲厂策略	乙厂策略		
	β_1	β_2	β_3
α_1	10	-1	3
α_2	12	10	-5
α_3	6	8	5

2. 某企业决定由职工代表大会选举行政负责人，经提名产生候选人甲和乙。他们根据企业的发展战略和群众关心的事业各自提出了企业改革的方案。甲提出了四种： $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ；乙提出了三种： $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 。他们的参谋人员为使竞争对奔放有利，预先作了个民意抽样

测验。因各方提供的不同策略对选票吸引力不同。测验选票经比较后差额如下表（单位：十张）所示：

a_{ij} 乙	β_1	β_2	β_3
甲			
α_1	-4	0	-6
α_2	3	2	4
α_3	16	1	-9
α_4	-1	1	7

3. (猜花色游戏问题)设有两个小孩玩扑克牌花色游戏，游戏规定：由小孩甲每次从4种花色的牌中拿出一张牌给小孩乙猜，如果猜对花色，则甲付给乙三个小石子；否则，即小孩乙猜不对，则乙付给甲一个石子，试求解这个对策问题，即这两个小孩各应该采取什么对策。

4. (餐馆的经营问题)设有两个相邻的餐馆都能做甜早点和咸早点，如果它们做的早点是一样的，则可能卖不出去而各亏本100元，如果两个餐馆做的早点不同，则做咸早餐的餐馆可以赚到400元，而做甜早餐的餐馆可以赚到200元。如果他们不协商，试问这两个餐馆各自的最优策略为何？

5. (猜硬币问题)甲、乙两人玩猜硬币的游戏，要求二人各出一枚硬币，如果两个硬币都呈正面，或者反面，则甲得1分，同时乙付

出1分；反之，甲付出1分，乙得1分。试问甲和乙各自的最优策略是什么？

6. (智猪争食问题)猪圈里有一大一小两头猪，猪圈的一边有个踏板，每踩一下踏板，在远离踏板的猪圈另一边的投食口就会落下少量的食物。如果有一头猪去踩踏板，另一头猪就有机会抢先吃到另一边落下的食物。当小猪踩动踏板时，大猪会在小猪跑到食槽之前吃光所有的食物；若是大猪踩动了踏板，则还有机会在小猪吃完落下的食物之前跑到食槽，争吃一点残羹。在这种情况下，两头猪各会采取什么策略呢？

7. (扩军与裁军问题)敌对的两个国家都面临着两种选择：扩充军备或裁减军备。如果双方进行军备竞赛(扩军)，都将为此付出3000亿美元的代价；如果双方都裁军，则可以省下这笔钱。但是倘若有一方裁军，另一方扩军，则扩军一方发动侵略战争，占领对方领土，从而可获益1万亿美元。裁军一方由于军事失败而又丧失国土则可以认为损失无限。试建立该问题的对策模型，并求该问题的纳什平衡解。

8. (足球问题)选手R踢罚球点球，选手C防守。R可以踢向球门左方也可以踢向右方；为了扑出点球，C可以扑向左方也可以扑向右方。我们以期望得分（期望进球机率或期望扑出机率）表示这些策略的收益。试建立该问题的对策模型。

$R \mid C$	左	右
左	0.5	0.8
右	0.9	0.2

9. (两军的攻防问题)蓝军有两架飞机攻击红军的重要目标，红军有4个连的兵力防护通向该目标的4条路线。如果飞机沿一条线路进攻，则防护该条线路的连队必定击落一架飞机，但由于装弹时间较长，所以仅能击落一架飞机。如果有飞机突防进而摧毁目标，蓝军赢得为1，否则赢得为0。将蓝军和红军的攻防视为二人对策，试建立这个问题的对策模型，求对策的解，并说明双方的最优攻防策略。

10. (公司广告问题)A，B两家公司的产品竞争性推销，它们各控制市场的50%。最近这两家公司都改进了各自的产品，现在都准备发动新的广告宣传。如果这两家公司都不做广告，那么平分市场的局面将保持不变，但如果有一家公司发动一次强大的广告宣传，那么另一家公司将按比例地失去其一定数量的顾客。市场调查表明，潜在顾客的50%可以通过电视广告争取到，30%通过报纸，其余的20%可通过无线电广播争取到，现每一家公司的目标是要选择最有利的宣传手段。

(1)把这个问题表达成一个两人零和的对策，写出局中人A的赢得矩阵。

(2)这个对策有鞍点吗?两公司的最优策略各是什么? 对策值为多少?

11. (市场垄断问题)设想一个垄断企业已占领市场(称为“在位者”), 另一个企业很想进入市场(称为“进入者”), 在位者想保持其垄断地位, 就要阻挠进入者进入. 假定进入者进入之前在位者的垄断利润为300万元, 进入后两者的利润合为100万元(各得50万元), 进入成本为10万元. 在位者必须将其经济利润降为零, 才能实现阻挠进入者的目的. 试建立这个问题的对策模型, 并分析求解两者的最优策略。

12. (溜冰场建设问题)三河城由汇合的三条河分割为三个区.城市居民40%住在A区, 30%住在B区, 30%住在C区。目前, 三个区没有溜冰场, 两个公司甲和乙都计划要在城中修建溜冰场, 公司甲打算修建两个, 公司乙只打算修建一个。每个公司都知道, 如果在城市的某一个区内设有两个溜冰场, 那么这两个溜冰场将把该区的业务平分; 如果某一区只有一个溜冰场, 则该场独揽该区的全部业务, 如果在一个区内没有修建溜冰场, 则该区的业务将平均分散在城市的三个溜冰场中。每个公司都想把溜冰场设在营业额最多的地方。

(1)试建立这个问题的对策模型。

(2)这个对策有鞍点吗? 如果有, 将有几个鞍点? 甲、乙公司的最优策略各是什么? 在双方都取最优策略

13. (夫妻争执问题)一对夫妻为晚上到哪里玩, 争执不下, 妻子想去剧院, 丈夫想去看足球他们相亲相爱, 一定要两人同去一个地方。假定若夫妻同去看足球, 则妻子的满意程度为1, 丈夫为4; 若同去剧院则妻子的满意程度为4, 丈夫为1; 若不同去, 则夫妻的满意程度均为0。试求此对策问题的纳什均衡解。

14. (战略问题)考虑科洛奈的对策。对策中的科洛奈和他的敌人都企图夺取两个战略位置。科洛奈和敌人可利用的兵团分别是2个和3个。双方都将把他们的兵团分布在两个位置附近。设 n_1 和 n_2 是科洛奈分配到位置1和2处的兵团数, m_1 和 m_2 是敌人分配到位置1和2处的兵团数.科洛奈的规则如下: 如果 $n_1 < m_1$, 则他将失去 $n_1 + 1$, 同样, 如果 $n_2 < m_2$, 则失去 $n_2 + 1$ 反之, 如果 $n_1 > m_1$, 他则赢得 $m_1 + 1$, 如果 $n_2 > m_2$, 则赢得 $m_2 + 1$, 如果双方在某位置处的兵团数相等, 则在该处为平局。

(1)把这个问题表示成一个两人零和对策, 写出科洛奈的赢得矩阵。

(2)求此对策问题的对策值。

15. (建厂问题)某企业生产甲、乙两种家用电器据预测, 若在某地建新厂则要投资100万元, 每年可净收益14万元。若将此款存入银行, 则有2万元利息.此外, 还有以下信息可供决策者参考:

(1)在某地建新厂后, 原厂房若不能售出, 则要维修, 每年将花

费3.2万元。因此,在某地建新厂一后每年的净收益只能是1080万元。

(2)据预测,今后10年中,乙产品的需求量将下降5%(与进口无关)在此情况下,未被吸收的固定管理费用为2.3万元,因此,建新厂的净收益只能是11.7万元。

(3)在某地建新厂后,可增加销售额经计算能多得24万元的收益,因此,净收益为16.4万元。反之,若不建新厂将会损失2.4万元,扣除利息2万元,净损失为0.4万元。

(4)竞争者建厂,若该企业不在此地建新厂,则竞争者将在该地建厂,于是该企业在此地的销售份额将被竞争者所占有,将损失3.6万元,扣除利息2万元,净损失为1.6万元。

(5)进口影响。进口产品中对甲产品影响不大,但对乙产品销路的威胁极大。若进口产品成功,将会占去80%的市场。此时在该地建新厂不但无收益,反而损失4.5万元。

根据以上信息,该企业的决策者应如何决策?

16. (市场竞争问题)设有同行业的甲、乙两家工厂竞争A,B两种产品的市场,目前甲厂这两种产品的销量都只是乙厂销量的三分之一.两家工厂都已完成这两种产品更新换代的研制,但要投产上市则还需要一段时间。若同时投产两种新产品上市,每厂都需一年;若只投产一种抢先上市,则甲厂需要10个月,乙厂需要9个月,而另一种产品对每个工厂都再需要9个月才能上市。

对于任一种新产品,若两家工厂的产品同时上市,估计甲厂的该产品市场占有率将增加8个百分点(即由25%增加至33%);若甲厂的产品抢先2、6或8个月上市,则其市场占有率将分别增加20、30或36个百分点;若甲厂的产品落后1、3、7或10个月上市,则其市场占有率将分别下降4、10、12或14个百分点。假设每家工厂都以其这两种产品的市场占有率增加的百分点数之和的一半作为赢得指标,试建立这个问题的对策模型,并求解给出两家工厂的最优策略。

17. (拍卖问题)最常见的拍卖形式是先由拍卖商把拍卖品描述一番,然后提出第一个报价,接下来由买者报价,每一次报价都要比之前的高,最后价高者得。假设有 n 个买主给出了 n 个报价 p_1, p_2, \dots, p_n ,且不妨设 $p_n > \dots > p_1$,则买主 n 只要略高于 p_{n-1} 就可以买到商品,试问各买主之间可能知道他人的估价,也有可能不知道,没人应如何报价才能对自己最有利?结果又将怎样?

18. (施工问题)某分公司主要承建建筑工程,2005年施工任务以多层全装配式壁板结构、内大模外挂板结构为主,混合结构和配套工程次之. 工程多系标准结构,结构类型少。

总公司综合平衡下达的施工任务及计划指标是:本年度完成多层壁板住宅5幢,大模结构住宅3幢(两项竣工面积3.85万 m^2),生活配套完成百分之50左右,其余可由施工企业自行安排。

总公司根据分公司去年实际完成情况,规定达到的指标是:完成工

作量340万元,全员产值9000元/人, 工程成本降低率7.5。按照总公司要求结合具体条件提出一种计划方案, 该方案与总公司下达的主要指标对比见表17.9。但是,由于人力、材料、构件供应、运输及气候因素等存在不同程度的不确定性,对于能否确保实施没有充分把握。

表4.9

项目	工作量 (万元)	竣工面积 (万平方米)	全员人数 (最高)	全员产值 (元/人)	工程成本降低 (百分百)
上级下达的指标	340	5.00	350	9000	7.5
该单位指定指标	416.5	5.78	400	10912.5	8.1