530 陈斯杰 电子信息工程 第9次作业

一、排队论

1.

解：$\lambda = 4, \mu = \frac{1}{3}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4}$

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}}$$

即

$$L_s = 3 - \frac{(N+1)\frac{3}{4}^{N+1}}{1-\frac{3}{4}^{N+1}}$$

$$L_q = L_s - 1 + P_0 = L_s - 1 + \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}^{N+1}}$$

令：$\frac{L_q}{L_s} = 7\%$，解得：N = 1.67

2.

本题模型：M/M/1

ρ=$\frac{\lambda}{\mu}$=0.9

L$_q$=$\frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda}$=8.1

8.

本题模型：M/M/1/6

ρ=$\frac{\lambda}{\mu}$=0.6

L$_q$=$\frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda}$=0.9

因此合适。

3.该题为M/M/1系统，分析得$\lambda = 3, \mu = 6,$

(1)空闲时间概率:$P_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 0.5;$

(2)四个顾客概率：$P_4 = \rho^4 P_0 = (\frac{1}{2}^5)$

(3)至少一个顾客概率：$P = 1 - P_0 = 0.5$

(4)店内顾客平均数：$L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} = 1$(人)

(5)等待顾客平均数：$L_q = L_s - \rho = \frac{1}{2}$(人)

(6)平均逗留时间：$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{3}$(小时)

(7)平均等待时间：$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{6}$(小时)

(8)店内消耗时间T服从指数分布，均值为$\frac{1}{\mu-\lambda}$;

所以$P(T > 0.25) = \int_{0.25}^{\infty}(\mu-\lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}dt = 0.4723$

4、解：由题可得，$S = 2, m = 5, \lambda = 0.5, \rho = 2$

加油站空闲的概率：

$$P_0 = [1 + 2 * 2 + \frac{1}{2} * 16 + 2 * (-56)]^{-1} = 0.008$$

系统损失率：

$$P_m = \frac{2^2}{2} * 2^5 * 0.008 = 0.512$$

排队汽车的平均数：

$$L_q = 2.176$$

整个加油站的平均车辆数：

$$L_q = 4.128$$

汽车平均排队时间：

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda(1 - P_m)} = 2.23min$$

汽车在整个加油过程中所花费的时间：

$$W_s = W_q + \mu = 4.23min$$

5、解：若雇佣工人A，需要花费$\frac{3}{1.2} = 2.5$元/台；若雇佣工人B，需要花费3.33元/台。所以选择录用A工人比较合算。

6、依题意,$\lambda = 3$人/h，$\mu = 4$人/h，$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.75 < 1$

所以这是一个稳定系统

(1) $P_0 = 1 - \rho = 0.25$

(2) $L_s = \frac{\rho}{1-\rho} = 3$

(3) $W_s = \frac{L_s}{\lambda} = 1$小时

(4)当$W_s = 1.25$h，$L_s = 3.75$人。

由$L_s=\frac{\rho}{1-\rho}$，$\rho=\frac{\lambda}{\mu}$得，

$\lambda=\frac{60}{19}$,即为平均到达率。

7.

解：由题可知，$\lambda=300,\ \mu=\frac{1}{9},\ s=400$

服务强度：$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=0.75$

系统中的平均车辆数：$n=3$

平均排队长度：$q=\frac{\rho^3}{1-\rho}=2.25$

系统中的平均消耗时间：$d=\frac{n}{\lambda}=36s$

系统中的平均等待时间：$w=\frac{q}{\lambda}=27s$

8.

本题模型：M/M/1/6

ρ=$\frac{\lambda}{\mu}$=0.6

L$_q$=$\frac{\rho\lambda}{\mu-\lambda}$=0.9

因此合适。

9.该题为M/M/1/c模型，其中$\lambda=3,\mu=4,c=6$；

其状态：$P_i=(\frac{\lambda}{\mu})^iP_0$

$$P_i=\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^i(1-\frac{\lambda}{\mu})}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{c+1}}=\frac{(\frac{3}{4})^i(1-\frac{3}{4})}{1-(\frac{3}{4})^7}$$

店内顾客平均数：$L_s=\frac{(\lambda/\mu)}{1-\lambda/\mu}-\frac{(c+1)(\lambda/\mu)^{c+1}}{1-(\lambda/\mu)^{c+1}}=\frac{(3/4)}{1-3/4}-\frac{7(3/4)^7}{1-(3/4)^7}$

10、解：该题中$S=5,\ \lambda=4,\ \mu=2,\ \rho=0.4$

所有服务台均空闲的概率：

$$P_0=[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{1}{n!}\frac{\lambda}{\mu}^s]^{-1}=0.134$$

修理站前不出现排队的概率：

$$P_n=n!\frac{\lambda}{\mu}^n=\frac{2}{n}P_{n-1}$$

$$P(n<5)=0.937$$

出现排队的概率：

$$P(n>5)=0.027$$

修理站的平均排队长度：

$$L_q=\frac{(S\rho)^s\rho P_0}{S!(1-\rho)^2}=0.04$$

整个系统的车辆平均数：

$$L_s=L_q+\frac{\lambda}{\mu}=2.04$$

汽车排队等候修理所需花费的时间：

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=0.01h$$

汽车在整个修理过程所花费的时间：

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda}=0.51h$$

11.

解：

$m=5,\lambda=1/15,\mu=1/12,\rho=0.8$

(1)

$$P_0=\frac{1}{\sum_{i=0}^{m}\frac{m!}{(m-i)!}(\frac{\lambda}{\mu}^i)}=0.0073$$

(2)

$$P_5=\frac{m!}{(m-5)!}(\frac{\lambda}{\mu})^5P_0=0.287$$

(3)

$$L_s=m-\frac{\mu}{\lambda}(1-P_0)=3.76$$

(4)

$$L_q=L_s-(1-P_0)=2.77$$

(5)

$$W_s = \frac{m}{\mu(1-P_0)} - \frac{1}{\lambda} = 46$$

(6)

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = 34$$

(7)应减少修理时间或增加修理工人

12、依题意，$\lambda = 5$次/h，$\mu = 4$次/h，$\rho = \frac{\lambda}{n\mu} = 0.625 < 1$。$P_0 = [1 + \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \times (\frac{5}{4})^2 \times \frac{8}{3}]^{-1} = \frac{3}{13}$

(1)等待修理的机器平均数为$L_q = \frac{125}{156}$

(2)需要修理的机器平均数为$L_s = L_q + n\rho = \frac{80}{39}$

(3)有效损坏数即为需要修理的机器平均数$\frac{80}{39}$

(4)等待修理时间为$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.16h$ (5)已知$P_0 = \frac{3}{13}$，所以平均每小时的停工时间为$\frac{3}{13}$h。

13.

解：在该系统中，$\lambda = 350,\ \mu = 360,\ \rho = 0.972$

交叉路口没有车辆的概率：

$$P_0 = 1 - \rho = 0.028$$

交叉口前排车辆超过50辆的概率：

$$P(>50) = 1 - (1-\rho)\sum_{n=0}^{5} 0\rho^{\mu} = 0.238$$

交叉口前的平均排队车辆数：

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = 35$$

车辆到达交叉口所需的平均时间：

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = 6min$$

14.

本题模型：M/G/1

ρ=λE=0.5

L$_q$=$\frac{\rho^2+\lambda^2 D}{2(1-\rho)}$=1.25

L$_s$=L$_q$+ρ=1.75

W$_q$=$\frac{L_q}{\lambda}$=0.125

W$_s$=W$_q$+E=0.175

15.(1)单个M/M/4系统：

$\lambda = 2400, \mu_0 = 3600/5 = 720, n = 4$

$\frac{\lambda}{\mu_0} = \frac{10}{3} > 1;\ \ \rho = \frac{\lambda}{n\mu_0} = \frac{\lambda}{4\mu_0} = \frac{2400}{4\times720} = \frac{5}{6} < 1;$

$P_0 = [\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu_0})^k + \frac{1}{n!}(\frac{\lambda}{\mu_0})^n \frac{1}{1-\rho}]^{-1}$

$= [\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{k!}(\frac{\lambda}{\mu_0})^k + \frac{1}{4!}(\frac{\lambda}{\mu_0})^4 \frac{1}{1-\rho}]^{-1} = \frac{27}{1267} \approx 0.0213$

$L_q = \frac{(4\times5/6)^4\times5/6P_0}{4!(1-5/6)^2} = 3.289$

$L_s = L_q + n\rho = 6.622$

$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3.289}{2400}h = 4.934s$

$W_s = W_q + \frac{1}{\mu_0} = 3600 \times (\frac{3.289}{2400} + \frac{1}{720}) = 9.934s$

(2)4个M/M/1系统：

可以考虑为一个流量为600辆/h的M/M/1系统：

$\lambda = 600, \mu = 3600/5 = 720, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6}$

$P_0 = 1 - \rho = \frac{1}{6}$

$L_q = \frac{25}{6} \approx 4.166$

$L_s = 5$

$W_q = \frac{5/6}{720-600}h = 25s$

$W_s = 1/120h = 30s$

由此可见，四个单独的M/M/1等待时间更长，效率没有单个M/M/4系统高。

16、

单路排队：$S = 3,\ \lambda = 900,\ \mu = 360,\ \rho = \frac{\lambda}{S\mu} = 0.833$

收费亭空闲的概率：

$$P_0 = [1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\mu}^2 + \frac{1}{3!(1-\rho)}\frac{\lambda}{\mu}^3]^{-1} = 0.045$$

车队必须排队的概率：

$$P(>3) = 0.586$$

排队的平均车辆数：

$$L_q = \frac{(S\rho)^s \rho P_0}{S!(1-\rho)^2} = 3.521$$

整个系统中的平均车辆数：

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 6.012$$

汽车的平均排队时间：

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 14.05s$$

汽车通过收费亭所花的总时间：

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = 24.05s$$

同理，在多路排队中，$\mu = 360, \lambda = 300, \rho = 0.833$

$$P_0 = 1 - \rho = 0.167$$

$$P(>1) = 0.694$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 4.167$$

$$L_s = 5.00$$

$$W_q = 50s$$

$$W_s = 60s$$

依题意得：$\lambda = 2, \mu = 0.5, \rho = 4$

18、假设用户的使用网络时间和进入网络的间隔时间服从负指数分布,单位时间内人数的到达率为λ，每个端口的平均服务率为μ，且每个用户每天可多次上网。所以此模型为M M n模型

(1)依题意，每天的总上网时间为T=1.5m(h)，要使得成本最小，也就是端口满负荷运作，n=$\frac{T}{16}=\frac{1.5m}{16}$,$\frac{n}{m}\approx\frac{1}{10}$

(2)m=150,n=15。由假设可知，用户进入系统服从泊松流，服务时间（即此处上网时间）为负指数分布，每个用户使用时间在[a,b]小时的概率为$e^{-\mu a}-e^{-\mu b}$。
出现线路忙的概率为$1-\sum\limits_{j=1}^{n}P_j$
通信端口平均使用率为$z=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n-1}j\times P_j+(1-\sum\limits_{j=1}^{n-1}5\times P_j)}{n}$

(3)假设每个人上网时间与收费的函数为h=f(x), T=mE(h),在既定人数下，端口的平均使用率越大，成本越小，不考虑人们抱怨产生的成本。

$$\max(z=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n-1}j\times P_j+(1-\sum\limits_{j=1}^{n-1}5\times P_j)}{n})$$

$$s.t.\begin{cases}T=mE(h)\\ m>0,n>0,\mu>0,\lambda>0\\ \text{m、n均为整数}\end{cases}$$