2018 年全国大学生数学建模竞赛暨美赛培训

变分法与最优控制

厦门大学2016 级各学院

数学建模团队：谭忠教授 ；助教：陈小伟，姜小蒙，姚瑶，余娇妍

要 求：（1）必 须 用TEX输 入 编 辑 后 将$TEXPDF$以 及 图 表 一 并 发 邮 件 提 交 给$ztan85@163.com$及$sxjm004@163.com$，压 缩 包 及 邮 件 主 题 名 为“编 号+姓 名+专 业+第*次作业”；

（2）必须抄题，以免判错。

1．求自原点$(0,0)$到直线$x+y-1=0$的最速降线。

2．求泛函$J[y(x)]=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y''^2-4y'^2)dx$满足条件$y(0)=y(\frac{\pi}{4})=0$，$y'(0)=-1$，$y'(\frac{\pi}{4})=1$ 的极值曲线。

3．求泛函$J[y(x),z(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2+z'^2+2yz)dx$满足条件$y(0)=0$, $y(\frac{\pi}{2})=-1$，$z(0)=0$，$z(\frac{\pi}{2})=1$ 的极值曲线。

4．设质点以速度$\nu = x$从$A(x_0,y_0)$沿曲线$y = y(x)$移动到$B(x_1,y_1)$，求曲线$y=y(x)$为何形状时质点移动时间最少？

5．求过边界为两定点的曲线，使之绕横轴旋转而得面积为最小的旋转曲面。

6．对于生产与贮存的控制问题，用条件极值和哈密尔顿函数方法直接求(2.3.1)、(2.3.2)与(2.3.4)的解（仍假设）。

7．求概率密度函数$\varphi(x)$,使得信息量

$$J=-\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)ln[\varphi(x)]dx$$

取最大值，且满足等周条件$\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)dx=1,\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\varphi(x)dx=\sigma^2$（常数）

8．设受控系统为

$$\dot{x}(t)=u(t),\qquad x(0)=1$$

性能指标为

$$J(u)=ax^2(t_f)+\int_0^{t_f}[u^2(t)+1]dt$$

其中，$a>1$为常数，求当t_f自由时的最优控制$u^*(t)$及最优轨线$x^*(t)$

9．在生产设备或科学仪器中长期运行的零部件，如滚珠、轴承、电器元件等会突然发生故障或损坏，即使是及时更换也已经造成了一定的经济损失。如果在零部件运行一定时期后，就对尚属正常的零件做预防性更换，以避免一旦发生故障带来的损失，从经济上看是否更为合算？如果合算，做这种预防性更换的时间如何确定呢？

10．渔场中的鱼的数量由鱼的自然增长和捕捞量决定。设鱼的自然增长服从logistic模型，而单位时间的捕捞量是当时鱼的总数的一个确定的函数。设1t 鱼的价格为p，捕捞1t 鱼的费用是鱼总数的一个已知函数，鱼越多费用越省。试建立数学模型求使渔场长期效益最好的捕捞策略。

11．(反应器控制问题)考虑在反应器重如何控制反应温度，使某一目标达到最优.

设有一连续反应$x \to y \to z$,物料x的浓度记为$x(t)$,物料y的浓度记为$y(t)$,时刻t的反应温度为$\theta(t)$,时间区间为$[0,T]$,反应方程式为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -a(\theta)F(x), \\ \dot{y}(t) = na(\theta)F(x) - b(\theta)G(y) \end{cases}$$

其中,n为常数,a,b,F,G为已知函数，$x(0)=x_0, y(0)=y_0$,目标是指在$[0,T]$时间内，控制反应温度，使物料y的浓度$y(t)$最大（产量最高）,另外，反应温度要求在一定范围内.$|\theta(t)| \le k$试建立模型并求解.

12．在生产设备或科学仪器唱起运行的零部件，如滚珠、轴承、电器元件等会突然发生故障或损坏，即使是即使更换也已经造成了一定的经济损失。如果在零部件运行一定时期后，就对尚属正常的零件做预防性更换，以避免一旦发生故障带来的损失，从经济上看，是否更为合算？如果合算，做这种预防性更换的时间如何确定呢？

13．渔场中鱼的数量由鱼的自然增长和捕捞量决定。设鱼的增长服从logistic模型，而单位时间的捕捞量是当时鱼的总数的一个确定的函数。设1吨鱼的价格为p,捕捞1 吨鱼的费用是鱼总数的一个已知函数，鱼越多费用越省。试建立数学模型求使渔场长期效益最好的捕捞策略。

14．设$x(t)$为t时库存量，$u(t)$为t时生产率，$s(t)$为t时销售率，三者满足关系

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(t) - s(t), x(0) = x_0 \\ x(t) \ge 0 \end{cases}$$

(1)求管理决策变量——生产率$u(t)$,使生产费用和库存费用总的总和最小。

(2)求$u(t)$,使$u(t)$接近于理想的生产率$\hat{u}(t)$,$x(t)$接近于理想的库存量$\hat{x}(t)$。

15．生产-库存管理系统

设$u(i)$表示某厂第i季度(或月)生产产品的数量,$x(i)$表示该厂第i季度(或月)的库存量，$S(i)$ 表示该厂第i季度(或月)的销售量(已知).列出控制变量$u(i)$,状态变量$x(i)$与外生变量$S(i)$之间应满足的状态方程并在满足该状态方程的条件下，求每个季度(或月)的最优生产量$u^*(i)$和相应的最优库存量$x^*(i)$,使生产费用与库存费用之和为最小.

16．月球精确软着陆三维球体动力学模型

月心惯性坐标系$OXYZ$:原点位于月球中心,OZ轴指向动力下降起始点，OX轴位于环月轨道平面内切指向前进方向，OY轴按照右手定则确定，着陆器在$OXYZ$系下的位置，用极坐标(r,α,β)来表示,r为月心到着陆器的距离矢量（rb表示大小），α和β 表示经度和纬度。

轨道坐标系$O'xyz$:原点位于着陆器的质心，$O'z$轴为月心指向着

陆器方向，$O'x$轴位于当地水平面内指向着陆器运动方向，$O'y$ 轴按照右手定则确定。制动推力F的方向与着陆器本体轴重合，着陆器相对于轨道坐标系的姿态角分别为偏航角ψ和俯仰角θ。ψ绕正$O'z$轴逆时针旋转为正，θ绕正$O'y$轴顺时针旋转为正。忽略月球的非球形摄动和自转影响，列出着陆器的质心运动方程为,并探讨使得着陆燃料最省的路线.

17. 考虑一个简单的经济机构，其资金储备$K(t)$为唯一的生产因素.令$F(K)$为该经济机构的产出速率（当K为资本储备时）.假定$F(0)=0, F(K)>0, F'(K)>0,$ 以及当$K>0$时$F''(K)<0$.后一条件（即$F''(K)<0$）是指减少的边际资金生产率。这个产出既可以被消费也可以用来再投资，作为进一步的资金积累,令(t)为分配给消费者的产出量,$I(t)=F(K(t))-C(t)$为投资量,δ为定常的资本贬值率令$u(c(t))$为消费的社会收益,ρ表示社会回扣率,T表示有限时间范围，并假定$u'(0)=\infty$

(1)建立资本储备状态方程

(2)建立一个选举任期T年的政府最优资金积累模型。