

2018 年全国大学生数学建模竞赛暨美赛培训

初等数据处理方法

厦门大学2016 级各学院

数学建模团队：谭忠教授；助教：陈小伟，姜小蒙，姚瑶，余娇妍

要求：(1) 必须用TEX输入编辑后将TEXPDF以及图表一并发邮件提交给ztan85@163.com及sxjm004@163.com，压缩包及邮件主题为“编号+姓名+专业+第*次作业”；

(2) 必须抄题，以免判错。

一、观察法与初等函数方法

1. 等成本线(iso-cost curve)也叫企业预算线是在既定的成本和生产要素价格条件下生产者可以购买到的两种生产要素的各种不同数量组合的轨迹。等成本线表明了厂商进行生产的限制，即它所购买生产要素所花的钱不能大于或小于所拥有的货币成本。

假设既定的成本为 E ，已知的劳动(L)的价格即工资率为 P_L ，已知的资本(K)的价格即利息率为 P_K 。据此，我们可以得到等成本线，可得成本方程为：

$$P_L L + P_K K = E$$

试化为直线截距式标准方法并分析。

2. (成本函数与平均函数)生产某产品的固定成本是1万元，可变成本与产量（单位：吨）的立方成正比，已知产量为20时，总成本为1.004万元，求总成本函数和平均成本函数。

3. (需求函数)某市场鸡蛋的售价为5.2元/kg时，销量为每天3000kg，若提价0.1元，则少销200kg,试求鸡蛋的线性需求函数。

4. (均衡价格)生产者向某市场提供一种商品的供给函数为 $S = -96 + \frac{p}{2}$ ，而该商品的需求函数为 $Q = 204 - p$ ，求该商品的市场均衡价格。

5. (成本和平均成本)某厂年生产车床，总成本函数为 $C(q) = q^2 + 10q$ (千元)，求当生产200个该产品时的总成本和平均成本。

6. (成本、收益和利润)某厂生产某种产品，固定成本为160元,每生产一件产品需增加8元，又知产品的单价为15元，试写出：

(1)总成本 $C(q)$ 与产量 q 的函数关系；

(2)总收益 $R(q)$ 与产量 q 的函数关系；

(3)利润 $L(q)$ 与产量 q 的函数关系。

7. (收入函数)某厂生产某种产品，年产量为 q 台，每台售价为250元，当年产量在600台以内时，可以全部售出。经广告宣传后又可再多售出200台，每台平均广告费在20元。若再生产，本年就卖不出去了。试建立本年度销售总收入 R 与年产量之间 q 的函数关系。

8. 推出一种新的电子游戏程序时，在短期内销售量会迅速增加，然后开始下降，其函数关系为 $s(t) = \frac{220t}{t^2+100}$ (t 为月份)

(1)求计算游戏退出后第6个月,第12个月和第3年的销售量。

(2)如果要对该产品的长期销售做出预测,请建立相应的表达式。

9. (利润函数)某企业生产A,B两种产品,产量分别为 q_1, q_2 , 该企业的总成本函数为 $C = 2q_1^2 + q_1q_2 + 2q_2^2 + 200$, 下列各种情形下, 求该企业的总利润函数:

(1)A,B两种产品为不同品牌的同类产品, 其需求函数为 $q = 60 - p$,其中 p 为两种产品的共同的价格, q 为两种产品的总需求 $q = q_1 + q_2$.

(2)A,B两种产品为不同类型的产品,有各自的市场, 需求函数分别为 $q_1 = 50 - 0.5p_1$, $q_2 = 75 - p_2$;其中 p_1, p_2 分别为两种产品的价格.

(3)A,B两种产品为市场上相关联的产品, 需求函数为 $q_1 = 28 - 0.45p_1 + 0.2p_2$, $q_2 = 26 + 0.2p_1 - 0.6p_2$, 其中 p_1, p_2 分别为两种产品的价格.

10. (寻找盈亏平衡点)里昂混凝土公司是阿肯色州北部唯一供应混凝土的垄断企业, 企业的混凝土需求函数为 $p = 110 - 4q$, 公司的固定成本为400, 每生产一个单位的混凝土需增加10个单位的成本, 该公司的最大生产能力是18, 请问该公司盈亏平衡点处的产量是多少?价格是多少?盈亏情况如何?

11. (洗衣问题)洗衣服时, 衣服已打好了肥皂并揉搓得很充分了, 再拧一拧, 衣服中还残留着水分. 设衣服上还残留含有污物的水1 千克, 现在设衣服上还残留含有污物的水1 千克, 现在用20千克清水来漂洗, 而且在每次洗涤中, 污物都能充分均匀地溶于水, 问怎样漂

洗才能洗得更干净?

12. (双层玻璃窗功效)在北方城市的某些建筑中, 玻璃窗是用双层玻璃构成的, 并且两层玻璃之间还留有一定的空隙. 其作用是减少热量的流失. 假定玻璃窗的厚度为 d , 今建立一个相应的数学模型来讨论这个问题, 并与一个厚度为 $2d$ 的玻璃窗进行热量流失的比较.

13. 最近中国移动出了什么“套餐”以吸引顾客? 建立数学模型, 指出消费者如何使用最省话费?

14. 银行都有“理财部”, 获取他们的一种理财产品, 通过建立数学建模, 精确计算银行获取的利润.

15. 获取保险公司的一种保险产品, 通过建立数学建模, 精确计算保险公司获取的利润.

16. 如果的士司机允许顾客随时可以重新打表, 请建立数学模型, 指导顾客省钱. 从“某大学南校门”到走“成功大道”前往机场, 最便宜车费是多少?

17. 一家人(父亲、母亲、孩子)去某地旅游, 有两个旅行社同时发出邀请, 且有各自的优惠政策. 甲旅行社承诺, 如果父亲买一张全票, 则其家庭成员均可享受半价, 乙旅行社承诺, 家庭旅行算团体票, 按原价的 $\frac{2}{3}$ 计算, 这两家旅行社的原价是一样的, 若家庭中孩子数不同, 试分别列出两家旅行社优惠政策实施后的孩子个数为变量的收费表达式, 比较选择哪家更优惠?

18. 某酒厂有批新酿的好酒, 如果现在就出售, 可得总收入 R_0 万元(RMB), 如果窖藏起来待来日(第 n 年)按陈酒价格出售, 第 n 年末可得总收入为: $R = R_0 e^{\frac{1}{6}\sqrt{n}}$ (万元). 而银行利率为 r . 试分析这批好酒窖藏多少年后出售可使总收入的现值最大.

19. 为了在夏季降温和冬季供暖时减少能源损耗, 房屋的屋顶和外墙需要建造隔热层, 某幢建筑物要建造可使用20年的隔热层, 每厘米厚的隔热层建造成本为6 万元. 该建筑物每年的能源消耗费用 C (单位: 万元)与隔热层厚度 x (单位: cm)满足关系 $C(x) = \frac{k}{3x+5}$ ($0 \leq x \leq 10$), 若不建隔热层, 每年能源消耗费用为8万元. 设 $f(x)$ 为隔热层建造费用与20年的能源消耗费用之和.

(1)求 k 的值及 $f(x)$ 的表达式;

(2)隔热层修建多厚时, 总费用 $f(x)$ 达到最小? 并求最小值.

20. 某地建一座桥, 两端的桥墩已建好, 这两墩相距 m 米, 余下工程只需建两端桥墩之间的桥面和桥墩. 经测算, 一个桥墩的工程费用为256 万元, 距离为 x 米的相邻两墩之间的桥面工程费用为 $(2 + \sqrt{x})x$ 万元, 假设桥墩等距离分布, 所有桥墩都视为点, 且不考虑其他因素. 记余下工程的费用为 y 万元.

(1)试写出 y 关于 x 的函数关系式;

(2)当 $m = 640$ 米时, 需新建多少个桥墩才能使 y 最小?

21. 经市场调查, 某城市的一种小商品在过去的近20天内的

销售量(件)与价格(元)均为时间 t (天)的函数, 且销售量近似满足 $g(t) = 80 - 2t$ (件), 价格近似满足 $f(t) = 20 - \frac{1}{2}|t - 10|$ (元).

(1)试写出该种商品的日销售额 y 与时间 t ($0 \leq t \leq 20$)的函数表达式;

(2)求该种商品的日销售额 y 的最大值与最小值.

22. 某企业实行裁员增效, 已知现有员工 a 人, 每人每年可创纯利润1万元, 据评估在生产条件不变的条件下, 每裁员一人, 则留岗员工每人每年可多创收0.01 万元, 但每年需付给下岗工人0.4万元生活费, 并且企业正常运行所需人数不得少于现有员工的 $\frac{3}{4}$, 设该企业裁员 x 人后纯收益为 y 万元.

(1)写出 y 关于 x 的函数关系式, 并指出 x 的取值范围;

(2)当 $140 < a \leq 280$ 时, 问该企业应裁员多少人, 才能获得最大的经济效益? (注: 在保证能获得最大经济效益的情况下, 能少裁员, 应尽量少裁)

23. 某企业想购买一台设备, 该设备成本为5000元, t 年后该设备的报废价值为 $S(t) = 5000 - 400t$ (元), 使用该设备 t 年时可使企业增加收入 $850 - 40t$ (元), 若年利率为5%, 计算连续复利, 企业应该在什么时候报废设备? 此时总利润的现值是多少?

24. (水电投资项目的投资回收期)有一家大型水电投资项目, 投资总成本为 10^5 万元, 竣工后每年可得收入 5.5×10^4 万元, 若年利率为5%, 计

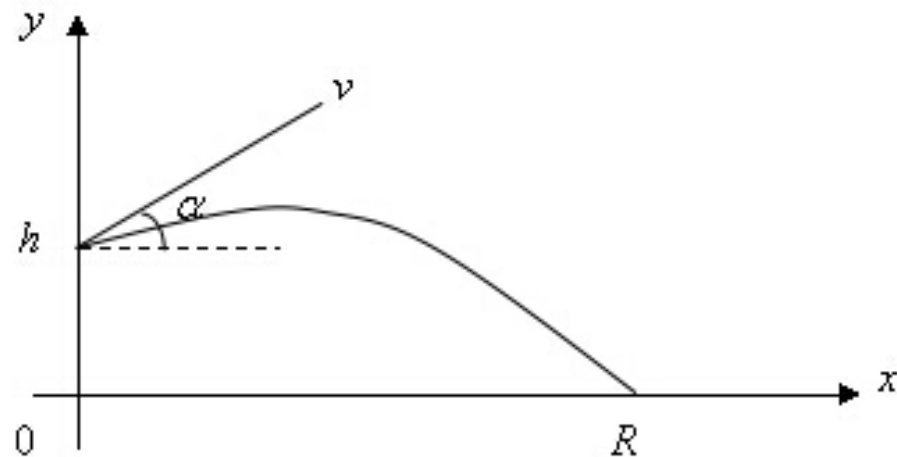
算连续复利, 求投资回收期及该投资为无限期时纯收入的贴现值.

25. (完成订单所需成本的现值)某公司在2002年底接到一份将于2003年10月交付的订单,公司在2003年初开始生产。公司的成本由生产成本和存储成本构成,设在2003 年第 t 个月底公司的累积生产量(即存货量,单位:吨)为: $Q(t) = 1200(e^{0.005t} - 1) - t$ ($0 \leq t \leq 10$), 公司在时刻单位时间内的生产成本为 $500[Q'(t)]^2$ 元,其中 $Q'(t)$ 为生产率,即单位时间内的产量,存储成本为每月每吨货物50元,折现率为0.005,并计算连续复利,求公司总成本的现值。

26. 现有一个椭圆柱油罐, 其长度为 l , 两底面是长轴 $2a$, 短轴 $2b$ 的椭圆, 问当油罐中油面高度为 h 时, 油量是多少?

27. 由于化工生产过程中, 经常要排出一些不利于环境的物质, 为保持车间内的环境卫生, 必须通入大量的新鲜空气, 这就是通风问题。记 y 为时刻 CO_2 的浓度; v 为车间的体积(M^3); a 为通入的空气量(m^3/min); y_0 为 CO_2 的初始浓度; g 为新鲜空气中 CO_2 的浓度。试求出 a 的表达式。

28. 设铅球初速为 v , 出手高度为 h , 建立投掷距离与 v, h, α 的关系式, 其中 α 为出手角度, 并在 v, h 一定的条件下求最佳出手角度。



29. 由实验知, 细菌繁殖的速度在培养基充足等条件满足时与当时已有的数量 A_0 成正比, 即 $V = kA_0$ ($k > 0$ 为比例常数), 问经过时间 t 以后细菌的数量是多少

30. 每天的饮食可产生热量 A , 用于新陈代谢消耗热量 B , 活动消耗热量 $C \times$ 体重, 增重、减重的热量主要由脂肪提供, 每公斤脂肪转化的热量为 D , 记 $W(t)$ 为体重, 若 W_0 为初始体重, 试求出 $W(t)$ 解析表达式。

31. 一颗地球同步轨道通信卫星的轨道位于地球的赤道平面内, 且可近似认为是圆。通信卫星运行的角速率与地球自转的角速率相同, 即人们看到它在天空不动。若地球半径 $R=6400$ 公里, 问卫星距

地面的高度 h 应为多少？计算通信卫星的覆盖面积。

32. 药物在体内血液中的浓度称为**血药浓度**。血药浓度随时间变化的函数称为药时曲线。如口服药后，体内血药浓度的变化关系是

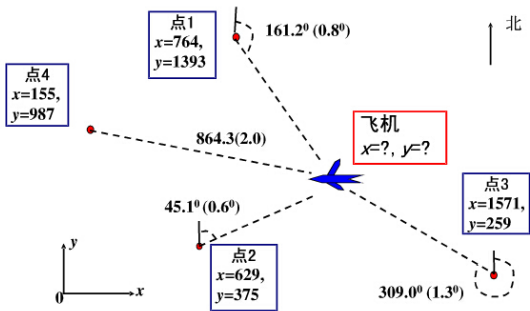
$$C = C(t) = A(e^{-k_e t} - e^{-k_a t})$$

这里 A, k_e, k_a 为参数，试对该药时进行分析。

33. (飞机精确定位问题)为了确定飞机在某一时刻的具体位置，已知四个监控台的检测数据如下：

	x_i	y_i	原始观测角度(或 d_4)	误差
点1	746	1393	161.2°	0.8°
点2	629	375	45.1°	0.6°
点3	1571	259	309.0°	1.3°
点4	155	987	$d_4 = 864.3(km)$	$2.0(km)$

示意图如下：



要求计算飞机此刻的位置坐标。

二、数据拟合方法与插值方法

1. 下表给出了在一根钢丝上施加拉力 S (单位:磅/平方英寸)后每英寸的伸长量(单位:英寸/英寸). 试画出数据, 并检验模型 $e = c_1 S$, 从图上估计 c_1 .

$S(\times 10^{-3})$	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$e(\times 10^5)$	0	19	57	94	134	173	216	256	297	343	390

2. 下面的数据中, x 是美国黄松在树身中部测得的直径(单位英寸), y 是体积的度量, 即用10除后的板英尺数。变换数据画图, 检验模型 $y = ax^b$. 如果模型看似合适, 从图上估计模型的参数 a 和 b

x	17	19	20	22	23	25	28	31	32	33	36	37	38	39	41
y	19	25	32	51	57	71	113	141	123	187	192	205	252	259	294

3. 下面的数据, V 代表一个平均的步行速率, P 代表人群总体的人数. 我们希望知道是否能够通过观测人们的步行速度来预测总体的人数. 画出数据图, 猜测有何种关系?画出适当的变换数据, 检验下列模型.

$$(1) P = aV^b;$$

$$(2) P = a \ln V$$

V	2.27	2.76	3.27	3.31	3.70	3.85	4.31	4.39
P	2500	365	23700	5491	14000	78200	70700	138000

V	4.42	4.81	4.90	5.05	5.21	5.62	5.88
P	304500	341948	49375	260200	867023	1340000	1092759

4. 下面的数据表示以1900年为基准的(假设的)能源消费, 画出数据图, 画出变换数据. 检验模型 $Q = ae^{bx}$, 用图形估出模型的参数.

年份	1900	1910	1920	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990	2000
x	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
消费量	1.00	2.01	4.06	8.17	16.44	33.21	66.69	134.29	270.43	544.57	1096.63

5. 用最小二乘法求一形如 $y = ae^{bx}$ 的经验公式来拟合下表的数据

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	15.3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.87	117.6

6. 某种机器零件的加工需经两道工序, x 表示零件在第一道工序中出现的疵点数(疵点指气泡、砂眼、裂痕等), y 表示在第二道工序中出现的疵点数. 某日测得8个零件的 x 与 y 如下:

x	0	1	3	6	8	5	4	2
y	1	2	2	4	4	3	3	2

画出这些数据的散点图, 找出它们之间关系的经验公式 $y = ax + b$, 并画出拟合曲线.

7. 某品种大豆的脂肪含量 $x(\%)$ 与蛋白质含量 $y(\%)$ 的测定结果如下表所示:

x	16.5	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5	24.5
y	43.5	42.6	41.8	40.6	40.3	38.7	37.2	36.0	34.0

画出这些数据的散点图, 找出它们之间关系的经验公式, 并画出拟合曲线.

8. 某种产品加工前的含水率(%)与加工后含水率(%)的测试结果如下表:

测试编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
加工前的含水率	16.7	18.2	18.0	17.9	17.4	16.6	17.2	17.7	15.7	17.1
加工后含水率	17.5	18.7	18.6	18.5	18.2	17.5	18.0	18.2	16.9	17.8

试确定加工后的含水率 y 与加工前含水率 x 的关系.

9. 盛钢水的钢包, 在使用过程中由于钢水对耐火材料的浸蚀, 容积会不断增大. 在生产过程中, 积累了使用次数与钢包容积增大之间的以下16组数据. 画出这些数据的散点图, 找出使用次数 x 与钢包容积增大 y 之间的关系, 并画出拟合曲线.

x	2	3	4	5	6	7	8	9
y	6.42	8.20	9.58	9.50	9.70	10.00	9.93	9.99
x	10	11	12	13	14	15	16	17
y	10.50	10.59	10.60	10.63	10.60	10.90	10.76	10.80

(提示: 假设 $y = ax^2 + bx + c$).

10. 在研究化学反应速度时, 得到下列数据. 找出实验开始后的时间 t 与反应物的量之间的关系, 并画出拟合曲线.

x	3	6	9	12	15	18	21	24
y	57.6	41.5	31.2	22.9	15.4	12.1	8.9	6.4

11. 对于函数 $g(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-6, 6]$, 请用分段线性插值分别在 $[-6, 6]$ 中平均选取11个点, 21 个点, 41个点做插值, 并请观察相应的误差变化.

12. 对于函数 $g(x) = \frac{1}{1+x^2}, x \in [-6, 6]$, 请用三次样条插值分别在 $[-6, 6]$ 中平均选取11个点, 21 个点, 41个点做插值, 并请观察相应的误差变化.

13. 测得平板表面 3×5 网格点处的温度分别为:

82、81、80、82、84

79、63、61、65、81

84、84、82、85、86

试作出平板表面的温度分布曲面 $z = f(x, y)$ 的图形.

14. 在一丘陵地带测量高程, x 和 y 方向每隔100米测一个点, 得高程如下表所示, 试插值一曲面, 确定合适的模型, 并由此找出最高点和该点的高程.

$y \backslash x$	100	200	300	400	500
100	636	697	624	478	450
200	698	712	630	478	420
300	680	674	598	412	400
400	662	626	552	334	310