

2018 年全国大学生数学建模竞赛暨美赛培训

偏微分方程方法

厦门大学2016 级各学院

数学建模团队：谭忠教授；助教：陈小伟，姜小蒙，姚瑶，余娇妍

要求：(1) 必须用TEX输入编辑后将TEXPDF以及图表一并发邮件提交给ztan85@163.com及sxjm004@163.com，压缩包及邮件主题名为“编号+姓名+专业+第*次作业”；

(2) 必须抄题，以免判错。

1. 阅读下面建模过程，回答后面的问题

物理背景：考虑一根具有固定横截面积 A 的杆，其方向为 x 轴的方向(由 $x = 0$ 至 $x = L$)，称单位体积的热能量为热能密度，记为： $E(x, t)$ 。

基本假设：假设杆是一维的，将杆的侧面完全绝热，这样热能就不能通过杆的侧面扩散出去，即通过截面的热量是恒定的。

热能：考察杆介于 x 和 $x + \Delta x$ 之间的薄片，如图1

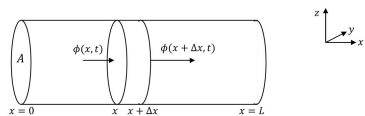


图 1: 热能由薄片流入和流出的一维杆

若热能密度在薄片内是常数，则薄片内的总能量是热能密度和薄片体积的乘积。一般来说，能量密度不是常数。不过 Δx 非常小时，

$E(x, t)$ 在薄片内可以近似为常数，这样由薄片体积为 $A\Delta x$ ，则

$$\text{热能} = E(x, t)A\Delta x.$$

热能守恒：在 x 和 $x + \Delta x$ 之间的热能随时间的变化都是由流过薄片两端(x 和 $x + \Delta x$)的热能和内部(正的或负的热源)产生的热能所引起的。由于假设侧面是绝热的，所以在侧面上没有热能变化。基本的热流过程可由文字方程表述为

热能瞬时变化率=单位时间流过边界的热能+单位时间内部产生的热能。

对小薄片，热能的变化率是热能对时间的偏导数。

在一维杆中，热能的流向向右或向左。热通量是单位时间内热能流向单位表面积右边的热能量，记为 $\psi(x, t)$ 。

如果 $\psi(x, t) < 0$ ，这意味着热能流向左边。单位时间内流过薄片边界的热能是 $\psi(x, t)A - \psi(x + \Delta x, t)A$ ，由于热通量是单位表面积的流量，因此它必须与表面积相乘。如果 $\psi(x, t) > 0$ 和 $\psi(x + \Delta x, t) > 0$ ，则单位时间内流过 x 点的热流增加切片内的热能，而在 $x + \Delta x$ 点的热流减少热能。

热源是考虑热能的内部来源：

$$Q(x, t) = \text{单位时间在单位体积内产生的热能.}$$

这或许是由于化学反应或电加热造成的。对于薄片， $Q(x, t)$ 在空间上近似为常数，故该薄片单位时间内产生的热能近似

为 $Q(x, t)A\Delta x$.

热能守恒(薄片): 热能变化率是由流过边界的热能和内部热源产生的热能造成的:

$$\frac{\partial}{\partial t}[E(x, t)A\Delta x, t] = \psi(x, t)A - \psi(x + \Delta x, t)A + Q(x, t)A\Delta x.$$

用 $A\Delta x$ 除上式两端, 再取当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限, 就得到

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\psi(x, t)A - \psi(x + \Delta x, t)A}{\Delta x} + Q(x, t)$$

因此, 由偏导数的定义

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} + Q(x, t).$$

问答下列问题:

(1)如果 $Q(x, t) = 0$, 简要解释负号的意义.

(2)对上述具有固定横截面积 A 的杆, 假设侧面是绝热的, 所以在侧面上没有热能变化. 其方向为 x 轴的方向(由 $x = 0$ 至 $x = L$). 试应用定积分的思想和热能守恒建立热能在杆上传播的数学模型.

(3)不限制在小薄片上, 考虑一维杆上的有限段(由 $x = a$ 至 $x = b$), 要研究热能在此中的守恒. 其热能是 $\int_a^b e(x, t)A dx$, 即各无穷小薄片上热能贡献的总和, 它的变化是由流过两端($x = a$ 和 $x = b$)的热能和在该段内产生的热能所造成的. 利用这一点, 试建立数学模型.

2. 考虑一维杆(见图7.14上的有限段(由 $x = a$ 至 $x = b$))

试推导

(1)其热能是 $\int_a^b e(x, t)A dx$, 即各无穷小薄片上热能贡献的总和.

(2)它的变化是由流过两端($x = a$ 和 $x = b$)的热能和在该段内产生的热能所造成的, 推导热能守恒

$$\frac{d}{dt} \int_a^b e dx = \phi(a, t) - \phi(b, t) + \int_a^b Q dx.$$

(3) 什么保证如下等式成立:

$$\phi(a, t) - \phi(b, t) = - \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial x} dx$$

(4)由此有

$$\int_a^b \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} - Q \right) dx = 0$$

试推导

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} + Q.$$

如果 $Q = 0$, 对负号作简要解释.

3. 傅里叶(1768—1830)认识到了热流定性性质:

①若在某个区域内温度是常数, 则没有热能流动.

①若存在温差, 则热能从较热的区域流向较冷的区域.

①(对同一物质)温差越大, 热能的流动越大.

①即使是在相同的温差下, 不同物质热能的流动是不同的.

傅里叶(1768-1830)认识到了这四条性质, 并把它们总结为傅里叶热传导定律

$$\phi = -K_0 \frac{\partial u}{\partial x}$$

其中 $\partial u / \partial x$ 是温度的导数, 试对负号作简要解释.

4. 化学污染物的扩散. 设 $u(x, t)$ 为单位体积中化学物的密度或浓度. 考虑具有常数横截面面积 A 在 $x = a$ 和 $x = b$ 之间的一个一维区域(图2). 试推导:

(1)该区域内化学物的总量是 $\int_a^b u(x, t) A dx$.

(2)引入化学物的通量 $\phi(x, t)$, 单位面积单位时间流向右边的化学物的量. 关于该区域化学物总量的时间的变化率, 等于单位时间化学物的流入量减去单位时间化学物的流出量. 推导化学浓度的积分守恒定律:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = \phi(a, t) - \phi(b, t).$$

(3)试导出化学浓度的微分守恒定律:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0.$$

并对负号作简要解释.

(4)在固体物质中, 化学物从高浓度的区域向低浓度的区域扩展.

根据Fick 扩散定律, 流量与化学物的空间导数 $\partial u / \partial x$ 成比例:

$$\phi = -k \frac{\partial u}{\partial x}.$$

试对负号作简要解释.

5. 在恒定条件和无热源的情况下, 推导杆的热传导方程.

(a) 考虑在 x 和 $x + \Delta x$ 之间的热能.

(b) 考虑在 $x = a$ 和 $x = b$ 之间的热能.

6. 在恒定热条件、横截面积为 $A(x)$ 、无热源的情况下, 通过考虑在 $x = a$ 和 $x = b$ 之间的热能, 推导杆的热传导方程.

7. 推导化学污染物的扩散过程.

(a) 考虑在 x 和 $x + \Delta x$ 之间的微小区域内的化学物的总量.

(b) 考虑在 $x = a$ 和 $x = b$ 之间的化学物的总量.

8. 如果化学物是由于化学反应在单位体积内以 $\alpha u(\beta - u)$ 的速率而产生, 推导化学污染浓度 $u(x, t)$ 所满足的方程.

9. 假设比热容是位置和温度的函数 $c(x, u)$.

(a) 证明: 厚度为 Δx 的薄片从 0°C 升高到 $u(x, t)$ 单位质量所需要的热能不是 $c(x)u(x, t)$, 而是 $\int_a^b c(x, \bar{u}) d\bar{u}$.

(b) 在上述情形下, 重新推导热传导方程. 证明基本保持不变.

10. 对一维杆的任一段 $a \leq x \leq b$ 考虑热能守恒

$$\frac{d}{dt} \int_a^b e dx = \phi(a, t) - \phi(b, t) + \int_a^b Q dx.$$

利用微积分基本定理,

$$\frac{\partial}{\partial b} \int_a^b f(x) = f(b),$$

推导热传导方程

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (K_0 \frac{\partial u}{\partial x}) + Q.$$

11. 如果 $u(x, t)$ 是未知的, 给出一根杆($0 < x < L$) 所含全部热能的表达式.

12. 考虑一根无热源、侧面未绝热的细一维杆.

(a) 假设单位侧面面积单位时间内流出侧边的热能是 $w(x, t)$. 推导温度 $u(x, t)$ 满足的偏微分方程.

(b) 假设 $w(x, t)$ 与杆温度 $u(x, t)$ 和已知的外界温度 $\gamma(x, t)$ 间的温差成比例. 推导方程

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (K_0 \frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{P}{A} [u(x, t) - \gamma(x, t)] h(x),$$

其中 $h(x)$ 是与 x 相关的正比例系数, P 是侧周长, A 是横截面积.

(c) 把(b)中方程与一维杆方程作比较, 该杆的侧面是绝热的, 但有热源.

(d) 对一根圆横截面的杆, 在恒定热条件和外部温度为 0°C 的条件下, 研究(b)中的方程.

(e) 在(d)的假设下, 假设杆的恒定温度是均匀的[即 $u(x, t) = u(t)$]. 如果初始条件 $u(0) = u_0$, 确定 $u(t)$.

13. 考虑一维杆, $0 \leq x \leq L$. 假设杆在 $x = L$ 点流出的热能与杆的末端温度和已知的外部温度的温差成比例. 推导出方程

$$-K_0(L) \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = H[u(L, t) - u_B(t)],$$

其中, $u_B(t)$ 是在 $x = L$ 点的外部温度. 并简要地给出 $H > 0$ 的物理解释.

14. 两根不同质地的一维杆在 $x = x_0$ 点的连接称为是完全热接触的, 如果在 $x = x_0$ 点, 温度是连续的:

$$u(x_0-, t) = u(x_0+, t),$$

并且在 $x = x_0$ 点没有热能损失(即从一根杆流出的热能流入另一根). 那么表示这后一个条件的数学方程是什么? 在什么特定的条件下, $\partial u / \partial x$ 在 $x = x_0$ 点连续?

15. 考虑一个液体槽, 其中液体比热容为 c_f , 质量密度为 ρ_f , 一维杆的末端 $x = L$ 浸在液体槽内. 假设以某种方式快速搅动槽内的液体, 使得液体槽的温度各处近似相同, 等于在 $x = L$ 点的温度 $u(L, t)$. 并假设槽除了与杆的完全热接触外, 在其他地方都是绝热的. 而在完全热接触点槽可能被杆加热也可能被杆冷却. 试确定槽内的温度方程. (这将在在端点 $x = L$ 处的一个边界条件)(提示: 见习题14).

16. 确定一维杆的平衡温度分布, 该杆具有恒定热性质和下列的热源及边界条件:

$$(a) Q = 0, \quad u(0) = 0, \quad u(L) = T$$

$$(b) Q = 0, \quad u(0) = T, \quad u(L) = 0$$

$$(c) Q = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0) = 0, \quad u(L) = T$$

$$(d) Q = 0, \quad u(0) = T, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L) = \alpha$$

$$(e) \frac{Q}{K_0} = 1, \quad u(0) = T_1, \quad u(L) = T_2$$

$$(f) \frac{Q}{K_0} = x^2, \quad u(0) = T, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L) = 0$$

$$(g) Q = 0, \quad u(0) = T, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L) + u(L) = 0$$

$$(h) Q = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0) - [u(0) - T] = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L) = \alpha$$

在这些题目中, 假设 $u(x, 0) = f(x)$.

17. 考虑均匀一维杆的平衡温度分布, 杆有热源 $Q/K_0 = x$, 以及边界条件 $u(0) = 0$ 和 $u(L) = 0$.

(a) 确定整个杆内单位时间内产生的热能.

(b) 确定单位时间内杆由 $x = 0$ 点和 $x = L$ 点流出的热能.

(c) (a) 和 (b) 的结果之间应当存在什么关系?

18. 确定一维杆的平衡温度分布, 杆由在 $x = 1$ 点处于完全热接触的两种不同物质组成. 对于 $0 < x < 1$, 是一种带有不变源 ($Q = 1$) 的物质 ($c\rho = 1, K_0 = 1$), 而对 $1 < x < 2$, 没有热

源 ($Q = 0, c\rho = 2, K_0 = 2$) (见习题14), $u(0) = 0$ 和 $u(2) = 0$.

19. 如果一根杆的两端都绝热, 由偏微分方程导出杆内总热量是常量.

20. 考虑一维杆 $0 \leq x \leq L$, 杆长度已知, 具有恒定热性质且无热源. 假设在 $x = L$ 点, 温度是未知常数 T . 如果在 $x = 0$ 点, (在稳态中) 知道温度和热流, 试确定 T .

21. 长度为 L 的一根均匀杆的两端都绝热. 有常值热源 $Q_0 \neq 0$, 初始温度为 $u(x, 0) = f(x)$.

(a) 从数学上证明, 不存在任何平衡温度分布. 并作简要的物理解释.

(b) 计算整杆的总热能.

22. 对下列问题, 确定一个平衡温度分布(如果存在的话). 并回答对 β 的哪些值有解? 请从物理上作解释.

$$(a) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 1, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \beta$$

$$(b) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \beta$$

$$(c) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x - \beta, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$$

23. 设杆具有恒定热性质, 写出整杆的积分守恒定律表达式. 假设已知热流在两端点是不同的函数. 通过关于时间的积分, 确定关于

杆的总热能. (提示: 利用初始条件.)

- (a) 假设无热源. (b) 假设热源是常值.

24. 通过对热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(假设无热源)积分, 推导具有恒定热性质的整根杆的积分守恒定律. 并证明此结果与

$$\frac{d}{dt} \int_a^b e dx = \phi(a, t) - \phi(b, t) + \int_a^b Q dx$$

等价.

25. 假设 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4$, $u(x, 0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 5$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 6$. 计算一维杆的总热能(作为时间的函数).

26. 假设 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x$, $u(x, 0) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \beta$, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 7$.

(a) 计算一维杆的总热能(作为时间的函数).

(b) 由(a), 确定 β 的一个值, 使得有平衡解存在. 并对 β 的这个值, 确定 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t)$.

27. 假设一种化学物的浓度 $u(x, t)$ 满足 *Fick* 定律(1.2.13), 其初始浓度给定为 $u(x, 0) = f(x)$. 考虑区域 $0 < x < L$, 其中两端热流指定为 $-k \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha$ 和 $-k \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \beta$. 假设 α 和 β 是常数.

(a) 写出整个区域守恒定律的表达式.

(b) 求在该区域内作为时间函数的化学物的总量(利用初始条件).

(c) 在什么条件下, 存在一个平衡的化学浓度? 它又为何?

28. 设 $c(x, y, z, t)$ 表示一种污染物的浓度(单位体积内的含量)

(a) 在区域 R 内污染物总量的表达式是什么?

(b) 假设污染物的流 J 与浓度的梯度成比例. (这有道理吗?) 写出污染物守恒的表达式.

(c) 推导出支配污染物扩散的偏微分方程.

29. 对热能传导而言, 热通量向量是 $\phi = -K_0 \nabla u$. 另外, 分子以平均速度 V 运动, 这个过程称为对流. 简要解释 $\phi = -K_0 \nabla u + c \rho u V$ 的原因. 并推导出包括热能传导和对流热流的对应方程(假设无热源, 具有恒定热性质).

30. 考虑极坐标

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta.$$

(a) 因为 $r^2 = x^2 + y^2$, 证明

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta, \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r}, \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}.$$

(b) 证明 $\hat{r} = \cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j}$ 和 $\hat{\theta} = -\sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j}$.

(c) 利用链式法则, 证明

$$\nabla = \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

所以

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \hat{\theta}.$$

(d) 如果 $A = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta}$, 证明

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta)$$

因为 $\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = \hat{\theta}$ 和 $\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -\hat{r}$ 是从(b)得出的.

(e) 证明

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

31. 利用习题30(a)和偏导数的链式法则, 推导习题30(e)的特殊情形, 如果 u 仅与 r 有关.

32. 假设温度是圆对称的: $u = u(r, t)$, 其中 $r^2 = x^2 + y^2$. 我们要推导这个问题的热传导方程. 考虑圆环 $a \leq r \leq b$.

(a) 证明总热能是 $2\pi \int_a^b c \rho u r dr$.

(b) 证明在 $r = b$ 处, 单位时间内流出的圆环的热能是 $-2\pi b K_0 \frac{\partial u}{\partial r} \big|_{r=b}$. 并在 $r = a$ 处类似结果成立.

(c) 利用(a)和(b), 推导无热源의圆对称热传导方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

33. 如果导热性质与 r 有关, 重做习题32.

34. 利用格林定理

$$\iint_R \nabla \cdot A dS = \oint A \cdot \hat{n} d\tau,$$

即二维散度定理, 推导二维的热传导方程.

35. 如果三维拉普拉斯方程成立, 证明对任意闭曲面,

$$\oint \nabla u \cdot \hat{n} dS = 0.$$

(提示: 利用散度定理.) 给出这个结果(在热流情形下)的物理解释.

36. 在圆环($r_1 \leq r \leq r_2$)内, 求平衡温度分布: (a) 如果外半径处温度为 T_2 , 内半径处温度为 T_1 .

(b) 如果外半径处绝热, 而内半径处于温度 T_1 .

37. 确定圆内部($r \leq r_0$) 的平衡温度分布, 如果边界的温度固定为 T_0 .

38. 考虑

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad a < r < b.$$

假定

$$u(r, 0) = f(r), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(a, t) = \beta, \quad \frac{\partial u}{\partial r}(b, t) = 1$$

利用物理概念推断, β 取什么值时, 存在平衡温度分布?

39. 假设温度是球对称的, $u = u(r, t)$, 其中 r 是到一个固定点的

距离($r^2 = x^2 + y^2 + z^2$). 考虑介于两个半径为 a 和 b 的同心球之间的(无源)热流.

(a) 证明总热能是 $4\pi \int_a^b c\rho ur^2 dr$.

(b) 证明在 $r = b$ 处, 单位时间内流出的球壳的热能是 $-4\pi b^2 K_0 \frac{\partial u}{\partial r}|_{r=b}$. 并在 $r = a$ 处类似结果成立.

(c) 利用(a)和(b), 推导出球对称热传导方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}).$$

40. 求在半径分别为1和4的同心球面间的稳态温度分布, 如果外球面温度保持在 80° , 内球面温度为 0° (见习题39).

41. 等温线是其上温度为常数的线. 证明等温线与绝热边界处处垂直.

42. 假设具有恒定热性质, 并且无热源, 推导三维热传导方程.

43. 写出任意三维物体的积分守恒定律表达式. 假设无热源, 在整个边界上指定热流, $\nabla u \cdot \hat{n} = g(x, y, z)$, 它与时间无关. 通过关于时间的积分, 确定总热能. (提示: 利用初始条件)

44. 通过积分热传导方程(见38题)(假设无热源), 推导任意三维物体(具有恒定热性质)的积分守恒定律. 并证明结果与

$$\frac{d}{dt} \iiint_R c\rho u dV = - \oint \phi \cdot \hat{n} dS + \iiint_R Q dV.$$

等价.

正交曲线坐标. 引入一个坐标系 (u, v, w) , 定义 $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$ 和 $z = z(u, v, w)$. 径向向量 $r \equiv x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$. r 关于某个坐标的偏导数就在这个坐标的方向上. 例如, u 方向的向量 $\partial r / \partial u$ 可以通过其长度 $h_u = |\partial r / \partial u|$ 去除得到 u 方向的一个单位向量 \hat{e}_u , h_u 称为尺度因子: $\hat{e}_u = \frac{1}{h_u} \partial r / \partial u$.

1. 设一均匀导线处于周围为常温 u_0 的介质中, 试证在通以常电流情况下, 导线的温度满足微分方程

$$u_c = \frac{K}{C\rho} u_{xx} - \frac{K_1 P}{C\rho\omega} (u - u_0) + \frac{0.24 i^2 r}{C\rho\omega^2}$$

其中 i 是电流强度, r 是导线的电阻系数, P 表示横截面周长, ω 表示横截面面积, K 是热传导系数, K_1 是导线对介质的热交换系数.

2. 导出一维的热方程

$$u_t = K u_{xx},$$

其中 K 是常数. 如果热量也因物质的放射性指数衰减而流失, 证明上面的方程变为

$$u_t = K u_{xx} + h e^{-\alpha x},$$

其中 h 和 α 都是常数.

3. 导出流体动力学中的连续性方程

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho u) = 0,$$

和Euler 运动方程

$$\rho[u_t + (u \cdot \nabla)u] + \nabla p = 0.$$

4. 推导弦的具有阻尼的波动方程

$$u_{tt} + au_t = c^2 u_{xx},$$

这里阻尼与速度成比例, a 是常数. 考虑恢复力与弦的位移成比例. 证明此时导出的方程是

$$u_{tt} + au_t + bu = c^2 u_{xx},$$

这里 b 是常数. 这个方程称为电报方程.

5. 考虑横截面为 $A(x)$ 的锥形管内的气体运动, 证明连续性方程和运动方程为

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\xi}{A} \frac{\partial A}{\partial x} \right) = \rho_0 \left[1 - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (A\xi) \right],$$

其中 x 是沿着管长的距离, $\xi(x)$ 是位移函数, $p = p(\rho)$ 是压力密度, ρ_0 是平均密度, ρ 是气体的局部密度. 因此推导出运动方程

$$\xi_{tt} = c^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} (A\xi) \right], \quad c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}$$

A 是常数, 找出一个运动方程. 如果 $A(x) = a_0 \exp(2\alpha x)$ 其中 α_0 和 α 是常数, 证明上面的方程有下面的形式

$$\xi_{tt} = c^2 (\xi_{xx} + 2\alpha \xi_x).$$

6.考虑在点 x 和时间 t 时具有电阻为 R 、感应系数为 L 、容量为 C 、单位长度的漏电导为 G , 具有均匀电力传输线的电流 $I(x, t)$ 和电势 $V(x, t)$.

(a) 证明 I , V 满足方程组

$$LI_t + RI = -V_x,$$

$$CV_t + GV = -I_x.$$

并推导电报方程

$$u_{xx} - c^{-2}u_{tt} - au_t - bu = 0, \text{ for } u = I \text{ or } V,$$

其中 $c^2 = (LC)^{-1}$, $a = RC + LG$, $b = RG$.

(b) 证明电报方程能写成下面的形式

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + (p + q)u_t + pqu = 0,$$

其中 $p = \frac{G}{C}$, $q = \frac{R}{L}$.

(c) 利用变换

$$u = v \exp\left[-\frac{1}{2}(p + q)t\right]$$

把上面的方程转变为

$$v_{tt} - c^2 v_{xx} = \frac{1}{4}(p - q)^2 v.$$

(d) 当 $p = q$ 时, 证明存在在各自方向上传播而互不干扰的波动解

$$u(x, t) = e^{-pt} f(x \pm ct)$$

其中 f 是任意的二阶函数.

如果 $u(x, t) = A \exp[i(kx - \omega t)]$ 是电报方程

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} - \alpha u_t - \beta u = 0, \alpha = p + q, \beta = pq$$

的解. 证明耗散关系有

$$\omega^2 + i\alpha\omega - (c^2 k^2 + \beta^2) = 0.$$

求解耗散关系并证明

$$u(x, t) = \exp\left(-\frac{1}{2}pt\right) \exp\left[i\left(kx - \frac{t}{2}\sqrt{4c^2 k^2 + (4q - p^2)}\right)\right].$$

当 $p^2 = 4q$, 证明解是衰减的非分散波.

(e) 找出下面情况下的 I , V 的方程组:

(i) 无损的传输线 ($R = G = 0$),

(ii) 理想的海底电缆 ($L = G = 0$),

(iii) Heaviside 无畸变线路 ($R/L = G/C = \text{常数} = k$).

7. 对于可变截面 $A(x)$ (x 是从原点沿轴杆测量的) 的自由弹性杆的纵向振动, 假设杆的材料满足胡克定律, 证明位移函数 $u(x, t)$ 满足一般的波动方程

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + \frac{c^2}{A(x)} \left(\frac{dA}{dx} \right) u_x,$$

其中 $c^2 = (\lambda/\rho)$, ρ 是描述弹性材料性质的常数, ρ 是杆的线密度.

当 $A(x)$ 是个常数时, 上述方程简化为一维波动方程.

8. 城市表层土壤重金属污染分析

随着城市经济的快速发展和城市人口的不断增加, 人类活动对城市环境质量的影响日显突出. 对城市土壤地质环境异常的查证, 以及如何应用查证获得的海量数据资料开展城市环境质量评价, 研究人类活动影响下城市地质环境的演变模式, 日益成为人们关注的焦点. 按照功能划分, 城区一般可分为生活区、工业区、山区、主干道路区及公园绿地区等, 分别记为1类区、2类区、……、5类区, 不同的区域环境受人类活动影响的程度不同. 现对某城市城区土壤地质环境进行调查. 为此, 将所考察的城区划分为间距1公里左右的网格子区域, 按照每平方公里1个采样点对表层土 (0~10厘米深度) 进行取样、编号, 并用GPS记录采样点的位置. 应用专门仪器测试分析, 获得了每个样本所含的多种化学元素的浓度数据. 另一方面, 按照2公里的间距在那些远离人群及工业活动的自然区取样,

将其作为该城区表层土壤中元素的背景值. 附件1列出了采样点的位置、海拔高度及其所属功能区等信息, 附件2列出了8种主要重金属元素在采样点处的浓度, 附件3列出了8种主要重金属元素的背景值. 现要求你们通过数学建模来完成以下任务:

(1) 给出8种主要重金属元素在该城区的空间分布, 并分析该城区内不同区域重金属的污染程度.

(2) 通过数据分析, 说明重金属污染的主要原因.

(3) 分析重金属污染物的传播特征, 由此建立模型, 确定污染源的位置.

(4) 分析你所建立模型的优缺点, 为更好地研究城市地质环境的演变模式, 还应收集什么信息? 有了这些信息, 如何建立模型解决问题?

9. 长江水质的评价和预测

水是人类赖以生存的资源, 保护水资源就是保护我们自己, 对于我国大江大河水资源的保护和治理应是重中之重. 专家们呼吁: “以人为本, 建设文明和谐社会, 改善人与自然环境, 减少污染.” 长江是我国第一、世界第三大河流, 长江水质的污染程度日趋严重, 已引起了相关政府部门和专家们的高度重视. 2004 年10月, 由全国政协与中国发展研究院联合组成“保护长江万里行”考察团, 从长江上游宜宾到下游上海, 对沿线21个重点城市做了实地考察, 揭示了一幅长江污染的真实画面, 其污染程度让人触目惊心. 为此, 专家们提出“若不及时拯救, 长江生态10年内将濒临崩溃”(附件1), 并发出了“拿什么拯救癌变长江”的呼唤(附件2). 附件3给出了长江沿线17个观测站(地区)近两年多主要水质指标的检测数据, 以及干流上7个观测站近一年多的基本数据(站点距离、水流量和水流速).

通常认为一个观测站(地区)的水质污染主要来自于本地区的排污和上游的污水. 一般说来, 江河自身对污染物都有一定的自然净化

能力, 即污染物在水环境中通过物理降解、化学降解和生物降解等使水中污染物的浓度降低. 反映江河自然净化能力的指标称为降解系数.

事实上, 长江干流的自然净化能力可以认为是近似均匀的, 根据检测可知, 主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的降解系数通常介于0.1 0.5之间, 比如可以考虑取0.2 (单位: 1/天).

附件4是“1995 2004年长江流域水质报告”给出的主要统计数据. 下面的附表是国标(GB3838-2002)给出的《地表水环境质量标准》中4个主要项目标准限值, 其中 I、II、III类为可饮用水. 请你们研究下列问题:

(1) 对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价, 并分析各地区水质的污染状况.

(2) 研究、分析长江干流近一年多主要污染物高锰酸盐指数和氨氮的污染源主要在哪些地区?

(3) 假如不采取更有效的治理措施, 依照过去10年的主要统计数据, 对长江未来水质污染的发展趋势做出预测分析, 比如研究未来10年的情况.

(4) 根据你的预测分析, 如果未来10年内每年都要求长江干流的IV类和V类水的比例控制在20%以内, 且没有劣V类水, 那么每年需要处理多少污水?

(5) 你对解决长江水质污染问题有什么切实可行的建议和意

见.

10. 中国人口增长预测

中国是一个人口大国，人口问题始终是制约我国发展的关键因素之一。根据已有数据，运用数学建模的方法，对中国人口做出分析和预测是一个重要问题。近年来中国的人口发展出现了一些新的特点，例如，老龄化进程加速、出生人口性别比持续升高，以及乡村人口城镇化等因素，这些都影响着中国人口的增长。2007年初发布的《国家人口发展战略研究报告》(附录1) 还做出了进一步的分析。关于中国人口问题已有多方面的研究，并积累了大量数据资料。附录2就是从《中国人口统计年鉴》上收集到的部分数据。试从中国的实际情况和人口增长的上述特点出发，参考附录2中的相关数据（也可以搜索相关文献和补充新的数据），建立中国人口增长的数学模型，并由此对中国人口增长的中短期和长期趋势做出预测；特别要指出你们模型中的优点与不足之处。

11. 最佳布朗尼锅

在一个矩形的平锅烘烤时，热量聚集在四个边角并且食物在边角上烘烤过头（或者接近边缘处）。在一个圆形的平底锅中，热量被均匀的分布在全部的外边缘并且食物不会在边角处烘烤过头。但是，由于大多数烤箱的形状是矩形，使用圆形的平底锅并不能有效的完全使用烤箱的空间。

现在，请你设计一个模型，来展示不同形状的（矩形和圆形以及两种形状之间的其他形状）平底锅的穿过外边缘的热量的分布情况。

假设：

1. 烤箱是一个长和宽成 W/L 比例的长方形；
2. 每个平底锅的面积为 A ；
3. 一开始烤箱里的两个架子是完全被隔开的。

建立设计模型能够在以下条件下选择一个最好的平底锅的形状。

12. 动脉粥样硬化

动脉粥样硬化所致心脑血管疾病如脑卒中和冠心病发病率越来越高，已构成国人的头号杀手，而且致残率极高，给家庭和社会卫生资源造成沉重负担。颈动脉最显著的解剖特点是在颈内动脉上存在一个动脉窦，及分叉下游颈内动脉血管直径扩张的部位。通过采用真实的脉动流量和压力波形，对颈动脉窦内局部血流形态，二次流和壁面剪切力的数值模拟发现，在心脏收缩的减速和舒张期的某些时刻，颈动脉窦中部外侧壁面附近会产生流动分离，形成一个低速回流区，导致有 2.6 dyn/cm 的低壁面剪切力振荡，而低壁面剪切应力振荡恰好位于粥样动脉硬化病灶区域（颈动脉窦外侧），同一区域核磁共振速度测量也发现了在心脏收缩的减速期出现了低速回流。进一步，通过对颈动脉分支氧传输特性的有限元分析发现，颈动脉窦的低速回流会使动脉窦入口的氧输送降低，从而使动脉壁产生动脉粥样硬化反应。

近年,研究者在总结了大量关于血流动力学与物质传输的关系后,提出了脂质浓度极化假说:人体血管的半渗透性导致血液循环系统中低密度脂质蛋白(low density lipoprotein, LDL)在血管壁面浓度高于血液循环本体流体中的浓度。LDL在血管几何形状急剧改变的区域长时间滞留,给脂质的渗透和沉积提供很大机会。同时,流场的局部差异也将导致内皮细胞功能障碍,脂质更容易进入内皮下,并在内皮下蓄积,进而引发动脉粥样硬化的发生、发展。脂质极化不仅较好地解释了动脉粥样硬化发生的局灶性外,还能解释动脉粥样硬化为什么不发生于静脉。静脉系统的低压很难使脂质本身进入血管内皮下,同时由于静脉血管壁很薄,进入血管内皮层的脂质很容易就穿透静脉外壁,由淋巴系统带走而不致在静脉壁内沉积。血液动力学数值模拟和体外细胞实验证明了在内皮表面有着与剪切力和半渗透性相关的大分子渗透和沉积。

试建立一个在动脉内膜出现的反应的模型,这个模型的生物解释是较低浓度LDL的情况下,自扩大现象和慢性炎症反应不会发生。在中间浓度扰动的非炎症状态可能导致慢性炎症,但它要突破一个阈值。否则,系统返回无病状态。在大的LDL浓度下,一个小扰动的非炎症都可能导致慢性炎症反应。

13. 假设 $\rho(x, t)$ 是沿马路单位长度上汽车数量密度, x 是沿马路的距离,设是汽车的速度(超车是非法的)。假设没有汽车进入或

离开马路,证明如果 $b(t)$ 是任意两辆车的位置(于是 $da/dt = u(a, t)$, $db/dt = u(b, t)$), 则

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \rho(x, t) dx$$

与时间无关。由此推出,如果 ρ 和 u 充分光滑,则

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$

进一步假设 u 是 ρ 的已知递减函数(为什么这是合理的?). 证明信息通过交通的传播速度 $d(\rho u)/d\rho < u$ 。

14. 沿墙壁流下的油漆厚度 $u((x, t))$ 满足

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ 对 } t > 0$$

证明特征线是直线且在激波 $x = S(t)$ 上的Rankine-Hugoniot条件是

$$\frac{S}{\partial t} + \frac{[\frac{1}{3}u^3]_-^+}{[u]_-^+} = 0,$$

在 $t = 0$ 上应用于油漆带,使得

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } x > 1, \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

证明对充分小的 t

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sqrt{x/t}, & 0 < x < t, \\ 1, & t < x < s(t) \\ 0, & S(t) < x, \end{cases}$$

其中激波是 $x = S(t) = 1 + t/3$. 解释为什么这个解在 $t = 3/2$ 处发生改变, 然后证明

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{S}{3t},$$