мФТиАД ФКН ВШЭ, 1 курс, 4 модуль

Задание 6. Гауссовские системы. Фильтр Калмана. Скрытые марковские модели

Прогнозирование временных данных и случайных процессов, весна 2018

Время выдачи задания: 31 мая (четверг).

Срок сдачи: **17 июня (четверг), 23:59.**

Среда для выполнения практического задания – PYTHON 2.x.

Правила сдачи

Выполнение работы в команде

1. Домашнее задание допускается выполнять в команде от 1 до 4 человек.

2. Командное решение достаточно загрузить в AnyTask только один раз. При этом в посылке следует указать состав команды.

3. Баллы, набранные командой, выставляются всем членам команды одинаковыми. Бонусные баллы выставляются всем членам команды одинаковыми. Это означает, что каждый член команды получает баллы, набранные его командой, независимо от его вклада в решение работы.

Инструкция по отправке:

1. Решения задач следует присылать единым файлом формата .pdf, набранным в LaTeX. Допускается отправка отдельных практических задач в виде отдельных файлов (ipython-тетрадок или исходных файлов с кодом на языке `python`).

Оценивание и штрафы:

1. Максимально допустимая оценка за работу – 10 баллов. Баллы, набранные сверх максимальной оценки, считаются бонусными и влияют на освобождение от задач на экзамене.

2. Дедлайн жесткий. Сдавать задание после указанного срока сдачи нельзя.

3. Задание выполняется командой независимо от других команд. «Похожие» решения считаются плагиатом и все студенты обеих команд (в том числе те, у кого списали) не могут получить за него больше 0 баллов (подробнее о плагиате см. на странице курса). Если вы нашли решение какого-то из заданий (или его часть) в открытом источнике, необходимо указать ссылку на этот источник в отдельном блоке в конце вашей работы (скорее всего вы будете не единственным, кто это нашел, поэтому чтобы исключить подозрение в плагиате, необходима ссылка на источник).

Вариант 1

1. (2 балла) Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\intercal$ – гауссовский случайный вектор с математическим ожиданием $\mathrm{E}\,\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^\intercal$ и ковариационной матрицей
$$\mathrm{E}[(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})^\intercal] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$
Выписать явное аналитическое выражение для двумерной плотности распределения случайного вектора $\boldsymbol{\xi}$.

2. (4 балла) Реализация фильтра Калмана. Рассматривается система, управляемая моделью Гаусса-Маркова
$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{w}_t, \qquad \boldsymbol{y}_t = \mathbf{C}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{v}_t,$$
где вектора состояний $\boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{w}_t \in \mathbb{R}^{10}; \boldsymbol{y}_t, \boldsymbol{v}_t \in \mathbb{R}^3$, а матрицы $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{10\times 10}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{3\times 10}$. Система – с заданным начальным условием $\boldsymbol{x}_0 \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{I})$ и характеристиками $\boldsymbol{w}_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{W}), \boldsymbol{v}_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{V})$.

   (a) (1 балл) Смоделируйте динамическую систему, сгенерировав случайные матрицы $\mathbf{A}$ (со спектральным радиусом 0.95) и $\mathbf{C}$ (произвольную), а также случайные положительно полуопределенные матрицы $\mathbf{W}$ и $\mathbf{V}$. В отчет включите распечатки этих матриц (до 4 знаков после запятой) и алгоритмы их получения.

   (b) (1 балл) Найдите фильтр Калмана для системы. В отчет включите уравнения фильтрации и подсчитанные параметры (матрицы), используемые в фильтре (до 4 знаков после запятой).

   (c) (1 балл) Подсчитайте и приведите в виде графика величины $\sqrt{\mathrm{E}\,||\boldsymbol{x}_t||_2^2}$ и $\sqrt{\mathrm{E}\,||\boldsymbol{x}_t - \widehat{\boldsymbol{x}}_t||_2^2}$, где $\widehat{\boldsymbol{x}}_t$ — фильтр.

(d) (1 балл) Смоделируйте реализацию $\boldsymbol{x}_t$ длиной 50. Подсчитайте фильтр $\widehat{\boldsymbol{x}}_t$ и приведите в виде графика величины $||\boldsymbol{x}_t||_2$ и $||\boldsymbol{x}_t - \widehat{\boldsymbol{x}}_t||_2$.

3. (4 балла) Рассмотрим процесс

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{t+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{w}_t, \\ \boldsymbol{y}_t &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{v}_t, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{w}_t$ и $\boldsymbol{v}_t$ – процессы белого шума с корреляционными матрицами

$$\boldsymbol{W} = \mathrm{E}[\boldsymbol{w}_t \boldsymbol{w}_t^\intercal] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{и} \qquad \boldsymbol{V} = [r].$$

(a) (1 балл) Подсчитайте фильтр Калмана для оценивания вектора состояний $\boldsymbol{x}_t$ по измерениям $\boldsymbol{y}_t$ (r – параметр). В отчет включите уравнения фильтрации (без подстановки значения r) и подсчитанные параметры (матрицы), используемые в фильтре (до 4 знаков после запятой, с подстановкой $r = 1$).

(b) (1 балл) Рассмотрим оценку $\widehat{\boldsymbol{x}}_t = 0$. Подсчитайте среднеквадратичную погрешность оценивания $\mathrm{E}\,||\boldsymbol{x}_t - \widehat{\boldsymbol{x}}_t||_2^2$.

(c) (1 балл) Предположим, что датчик, выдающий значения $\boldsymbol{y}_t$, заменили на более точный (с меньшей дисперсией погрешности r). Как изменится точность оценивания? Оцените предельную ковариационную матрицу $\boldsymbol{P}$ оценки $\widehat{\boldsymbol{x}}_t$: $\boldsymbol{P}^{(0)} = \lim\limits_{r \to 0} \boldsymbol{P}$.

(d) (1 балл) Почему в предыдущем пункте предел $\lim\limits_{r \to 0} \boldsymbol{P}$ не нулевой, как можно было бы предположить? Приведите содержательное обоснование этому неравенству.

4. (2 балла) x_t – стационарная гауссовская последовательность, $\mathrm{E}\, x_t = 0$, $\mathrm{cov}(x_t, x_{t+k}) = 2^{-|k|}$. Подсчитайте плотность случайного вектора $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^\intercal$.

Вариант 2

1. (2 балла) Пусть $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)^\intercal$ – гауссовский случайный вектор с математическим ожиданием $\mathrm{E}\,\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^\intercal$ и ковариационной матрицей
$$\mathrm{E}[(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\mu})^\intercal] = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}.$$
Подсчитать явное аналитическое выражение для условной плотности $f_{\xi_2|\xi_1}(x_2|x_1)$ распределения случайного вектора ξ_2 при условии $\xi_1 = x_1$.

2. (2 балла) Моделирование системы Гаусса-Маркова в состоянии статистического равновесия. Рассмотрим систему Гаусса-Маркова
$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \mathbf{A}\boldsymbol{x}_t + \boldsymbol{w}_t,$$
в которой матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является *стабильной* (т.е. все собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ по модулю меньше единицы), $\boldsymbol{w}_t \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{W})$ – последовательность н.о.р. случайных векторов, и $\boldsymbol{x}_0 \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{\Sigma}_0)$, причем $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{w}_t$ – независимы. Пусть $\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{x}}$ – асимптотическая ковариационная матрица $\boldsymbol{x}$. Если, например, выполнено, что $\boldsymbol{x}_0 \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{x}})$ (то есть если $\mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{x}} = \mathbf{\Sigma}_0$), то для любого момента $t \geqslant 0$ выполнены равенства $\mathrm{E}\,\boldsymbol{x}_t = 0$ и $\mathrm{E}[\boldsymbol{x}_t\boldsymbol{x}_t^\intercal] = \mathbf{\Sigma}_{\boldsymbol{x}}$. Будем называть такое состояние состоянием статистического равновесия, или статистически стационарным состоянием.

   (a) (1 балл) Смоделируйте динамическую систему, сгенерировав случайную матрицу $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ (со спектральным радиусом 0.95), а также случайную положительно полуопределенную матрицу $\mathbf{W}$. В отчет включите распечатки этих матриц (до 4 знаков после запятой) и алгоритмы их получения.

(b) (1 балл) Смоделируйте два множества реализаций $\boldsymbol{x}_t$ длиной 100, по 50 реализаций в каждом множестве. Первое множество инициализируйте состоянием $\boldsymbol{x}_0 = 0$, а второе – $\boldsymbol{x}_0 \sim \mathcal{N}(0, \boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}})$. Отобразите два множества траекторий с наложением друг на друга на двух графиках (лучше всего – с 25% полупрозрачностью). Дайте комментарий увиденному.

3. (4 балла) Прогнозирование значения авторегрессионного процесса на один шаг вперед. Рассмотрим следующую систему

$$p_{t+1} = \alpha p_t + \beta p_{t-1} + \gamma p_{t-2} + w_t, \qquad y = x_t + v_t.$$

Здесь p_t – скалярный временной ряд, в прогнозировании значения которого мы заинтересованы, и y_t – доступное нам измерение. Процесс w_t – последовательность н. о. р. стандартных гауссовских случайных величин. Погрешность измерения v_t – последовательность н. о. р. гауссовских случайных величин с нулевым средним и дисперсией $\mathrm{E}[v_t^2] = 0.01$. Задача заключается в прогнозе p_{t+1} по данным $y_0, \ldots, y_t$. Будем использовать для моделирования значения параметров

$$\alpha = 2.4, \qquad \beta = -2.17, \qquad \gamma = 0.712.$$

(a) (1 балл) Подсчитайте ковариационную матрицу $\boldsymbol{\Sigma}_{\boldsymbol{x}}$ состояния

$$\boldsymbol{x}_t = (p_t, p_{t-1}, p_{i-2})^{\mathsf{T}}$$

в режиме статистического равновесия.

(b) (1 балл) Смоделируйте три реализации системы (p_t, y_t) в состоянии статистического равновесия. Отобразите траектории реализаций y_t на графиках.

(c) (1 балл) Подсчитайте фильтр Калмана для задачи оценивания. Проведите вычисление фильтра Калмана для трех смоделированных траекторий в предыдущем пункте и отобразите погрешность $(\widehat{p}_t - p_t)^2$ прогнозирования значения p_t на один шаг вперед.

(d) (1 балл) Подсчитайте аналитически дисперсию ошибки оценивания $\mathrm{E}[\widehat{p}_t - p_t]^2$. Проверьте, что эта величина близка к эмпирической характеристике, подсчитанной в предыдущем пункте.

4. (4 балла) x_t – последовательность независимых случайных величин таких, что $x_n = 0$, если $n < 0$, и $x_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$, если $n \geqslant 0$. Последовательность y_n строится по x_n следующим образом:

$$y_n = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i x_{n-i}, \qquad \boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 \end{bmatrix}^\mathsf{T}, = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}.$$

Подсчитайте плотность распределения многомерного вектора:

(a) (2 балла) $\boldsymbol{y}_3 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$,

(b) (2 балла) $\boldsymbol{y}_2 = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$.