

Лекция 3

Стохастические задачи о разладке для случайных процессов.

Основные статистики в задачах скорейшего обнаружения разладки

Артемов А. В.
мФТиАД ФКН ВШЭ

9 февраля 2018 г.

1 Обнаружение аномалий. Задачи о разладке

1.1 Мотивация

Как известно, многие реальные процессы (трафик, доходность акций, атмосферное давление, ЭЭГ и так далее) можно описать многомерными временными рядами. В этих временных рядах обычно выделяют различные компоненты:

- Тренды. Например, когда временной ряд на каком-то участке линейно растёт.
- Циклы, то есть наблюдается периодичность временного ряда на каком-то участке.
- Корреляции.

Для описание, оценивания и создания каких-либо разумных выводов о наблюдаемых временных рядах была разработана теория случайных процессов. В ней были разработаны такие методы, как фильтрация, сегментация, шумоподавление, анализ трендов, различные виды анализов: корреляционный, дисперсионный, регрессионный, морфологический и так далее.

Одной из компонент временного ряда является так называемая *разладка*, то есть изменение статистических свойств ряда. Вариантов разладок бывает много: например, разрывы, изломы, рост разброса и нарушения цикла. На практике это может соответствовать, например, поломке агрегата. Из этого и появилась *задача о разладке*: как обнаружить возникающее изменение?

Теперь рассмотрим несколько примеров разладок:

- Пузырь доткомов.
- Посещаемость интернет-ресурса. Тут стоит различить два варианта: краткосрочные и долгосрочные разладки. Первые могут возникнуть, например, из-за неполадок с серверами или же из-за того, что кто-то известный прорекламентировал ресурс. Долгосрочные же, например, вызываются некачественным контентом.

Вообще, задача о разладке — это весьма актуальная проблема, и она возникает в самых разных областях. Перечислим лишь несколько из них:

- Обнаружение внедрений в компьютерные сети (атак, ведущих к изменению объема передаваемого трафика),
- Обнаружение аномалий в сетях передачи данных (видеопотоки в системах видеонаблюдения, сетевой трафик и так далее),
- Обнаружение и изоляция отказов узлов систем управления транспортными средствами,
- Мониторинг целостности системы геопозиционирования,
- Обнаружение изменений структуры породы при бурении скважин,
- Обнаружение начала рецессии или экономического роста,
- Обнаружение изменений волатильности индекса Dow Jones,
- Обнаружение сигнала при наблюдении подводных целей,
- Автоматическое обнаружение аномального человеческого поведения при видеонаблюдении,
- Автоматический контроль качества выпускаемой продукции,
- Мониторинг и анализ смертности и заболеваемости раком легких,
- Обнаружение возникновения эпидемий,
- Обнаружение аритмии (внезапных изменений ритма биения) сердца,
- Предсказание транзиторных ишемических атак (преходящих нарушений мозгового кровообращения),
- Диагностика задержки внутриутробного роста,
- Анализ несчастных случаев на угольных шахтах,
- Мониторинг уровня хлора в питьевой воде.

На самом деле первые работы по разладкам появились очень давно: Уолтер Шухарт написал свою статью про контроль качества выпускаемой продукции в 1931-м году. На данный же момент работ по разладкам огромное количество: поиск в системе индексации Google Scholar выдает, что на период с 2000 по 2017 год было написано статей с ключевыми словами

- change point detection — 10 200 статей
- anomaly detection — 53 900 статей
- break detection — 3 980 статей
- обнаружение разладок, обнаружение аномалий, обнаружение изменений — 765 статей

1.2 Математическая задача о разладке

Пусть $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ — последовательность независимых случайных величин таких, что в моменты времени $k = 1, 2, \dots, \theta - 1$ они имеют распределение P_∞ с плотностью $f_\infty(x)$, а в моменты $k = \theta, \theta + 1, \dots$ — распределение P_0 с плотностью $f_0(x)$. Далее, над ними проводится наблюдение, что даёт последовательность чисел $\{x_k\}_{k \geq 1}$.

Параметр θ считается заранее не известным и принимающим значения $0, 1, \dots, \infty$. Значения $x_{\theta-1}$ при $\theta = 0$ и $\theta = 1$ будем считать равными нулю. Такое искусственное введение этих моментов будет оправдано рассмотрением переходов от дискретных схем к соответствующим непрерывным (во времени) схемам.

Несложно понять, что случаи $\theta = 0$ и $\theta = 1$ отвечают наблюдениям с плотностью $f_0(x)$. Если же $\theta = \infty$, то все наблюдения имеют плотность распределения вероятностей $f_\infty(x)$.

Пусть $p_\theta(x_1, \dots, x_n)$ — это плотность распределения случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n при условии, что «переход» выполняется в момент $\theta \in [0, +\infty]$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$p_\theta(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f_\infty(x_1) \dots f_\infty(x_n), & \theta = 0, 1, \\ f_\infty(x_1) \dots f_\infty(x_{\theta-1}) f_0(x_\theta) \dots f_0(x_n), & 1 < \theta \leq n, \\ f_0(x_1) \dots f_0(x_n), & \theta > n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Далее, введём следующую статистику:

$$\gamma_n = \sup_{\theta \geq 0} \left(\frac{p_\theta(x_1, \dots, x_n)}{p_\infty(x_1, \dots, x_n)} \right).$$

Заметим, что её можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \max \left(\frac{p_0(x_1, \dots, x_n)}{p_\infty(x_1, \dots, x_n)}, \frac{p_1(x_1, \dots, x_n)}{p_\infty(x_1, \dots, x_n)}, \dots, \frac{p_n(x_1, \dots, x_n)}{p_\infty(x_1, \dots, x_n)}, \frac{p_\infty(x_1, \dots, x_n)}{p_\infty(x_1, \dots, x_n)} \right) \\ &= \max \left(\frac{p_0(x_1, \dots, x_n)}{p_\infty(x_1, \dots, x_n)}, \frac{p_0(x_2, \dots, x_n)}{p_\infty(x_2, \dots, x_n)}, \dots, \frac{p_0(x_n)}{p_\infty(x_n)}, 1 \right) \\ &= \max \left(1, \max_{1 \leq \theta \leq n} \prod_{k=\theta}^n \frac{f_0(x_k)}{f_\infty(x_k)} \right). \end{aligned}$$

Далее, введём ещё одну статистику, пользуясь обозначением $\zeta_k = \ln f_0(x_k) - \ln f_\infty(x_k)$:

$$T_n = \ln \gamma_n = \max \left(0, \max_{1 \leq \theta \leq n} \sum_{k=\theta}^n \ln \frac{f_0(x_k)}{f_\infty(x_k)} \right) = \max \left(0, \max_{1 \leq \theta \leq n} \sum_{k=\theta}^n \zeta_k \right).$$

Далее, если ввести обозначение $Z_n = \zeta_1 + \dots + \zeta_n$, то её можно переписать следующим образом:

$$T_n = \max \left(0, \max_{1 \leq \theta \leq n} [Z_n - Z_{\theta-1}] \right) = \max \left(0, Z_n - \min_{0 \leq \theta \leq n-1} Z_\theta \right) = Z_n - \min_{0 \leq \theta \leq n} Z_\theta.$$

Статистики T_n и γ_n играют в задачах скорейшего обнаружения исключительно важную роль. Напомним, что в задаче различения двух гипотез (H_0 и H_∞) ключевую роль играет отношение правдоподобия

$$L_n = \frac{f_0(x_1) \dots f_0(x_n)}{f_\infty(x_1) \dots f_\infty(x_n)}, \quad L_0 = 1.$$

Заметим, что

$$\gamma_n = \max \left(1, \max_{1 \leq \theta \leq n} \prod_{k=\theta}^n \frac{f_0(x_k)}{f_\infty(x_k)} \right) = \max \left(\frac{L_n}{L_n}, \max_{1 \leq \theta \leq n} \frac{L_n}{L_{\theta-1}} \right) = \max_{0 \leq \theta \leq n} \frac{L_n}{L_\theta}.$$

Для статистики T_n выполняется достаточно важное рекуррентное соотношение.

$$\begin{aligned} T_n &= Z_{n-1} + \zeta_n - \min_{0 \leq \theta \leq n} Z_\theta = \zeta_n + \max_{0 \leq \theta \leq n} (Z_{n-1} - Z_\theta) \\ &= \zeta_n + \max(Z_{n-1} - Z_n, \max_{0 \leq \theta \leq n-1} (Z_{n-1} - Z_\theta)) \\ &= \zeta_n + \max(Z_{n-1} - Z_n, Z_n - \min_{0 \leq \theta \leq n-1} Z_\theta) \\ &= \zeta_n + \max(-\zeta_n, T_{n-1}) = \max(0, T_{n-1} + \zeta_n). \end{aligned}$$

Из этого свойства, в частности, видно, что в рассматриваемом случае независимых наблюдений статистики $(T_n)_{n \geq 1}$, образуют марковскую цепь (по каждой из мер P_0 и P_∞ в пространстве последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots)$). Аналогичное верно и для статистик $(L_n)_{n \geq 1}$, так как $L_n = L_{n-1} e^{\zeta_n}$.

Теперь можно дать названия введённым статистикам.

- Статистики $\gamma = (\gamma_n)_{n \geq 1}$ принято называть *обобщёнными отношениями правдоподобия*. В определенных постановках задач скорейшего обнаружения на этих статистиках основаны оптимальные или асимптотически оптимальные решения.
- Статистики $T = (T_n)_{n \geq 1}$ называют *статистиками кумулятивных сумм* (или же CUSUM — от CUmulative SUMs). Это название объясняется тем, что там, где $T_k > 0$, $k \leq n$, статистика T_n просто равна сумме ζ_k , то есть является кумулятивной суммой. Если же $T_{n-1} + \zeta_n < 0$, то согласно рекуррентному соотношению T_n просто полагается равной нулю, а не $T_{n-1} + \zeta_n$.

К слову об истории. «Первопроходец» в теории решения задач о разладке, Уолтер Шухарт, предложил следующую статистику, которую называют *контрольными картами Шухарта*. Её суть состоит в следующем: последовательность наблюдений (x_1, x_2, \dots) разбивают на группы (батчи) одинаковой длины n , после чего для каждого батча строится логарифм отношения правдоподобия:

$$S_m^n = \ln \frac{p_0(x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)}{p_\infty(x_m, x_{m+1}, \dots, x_n)}.$$

Если все ξ_k независимы и одинаково распределены, то $S_m^n = \zeta_m + \zeta_{m+1} + \dots + \zeta_n$. Ещё вводится так называемая *статистика Ширяева-Робертса* (SR-статистика):

$$R_n = \sum_{k=1}^n \frac{p_\theta(x_1, \dots, x_n)}{p_\infty(x_1, \dots, x_n)}.$$

В случае независимых и одинаково распределённых случайных величин SR-статистику можно записать следующим образом:

$$R_n = \sum_{\theta=1}^n \prod_{k=\theta}^n \frac{f_0(x_k)}{f_\infty(x_k)}.$$

Теперь вспомним, что

$$\prod_{k=\theta}^n \frac{f_0(x_k)}{f_\infty(x_k)} = \frac{L_n}{L_{\theta-1}} \implies R_n = \sum_{\theta=1}^n \frac{L_n}{L_{\theta-1}} = \sum_{\theta=1}^n \exp\{Z_n - Z_{\theta-1}\}.$$

Для статистики R_n верно следующее рекуррентное соотношение (при $R_0 = 0$):

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{\theta=1}^n \exp\{Z_n - Z_{\theta-1}\} = \exp\{Z_n - Z_{n-1}\} + \sum_{\theta=1}^{n-1} \exp\{Z_n - Z_{\theta-1}\} \\ &= e^{\zeta_n} + e^{\zeta_n} \sum_{\theta=1}^{n-1} \exp\{Z_{n-1} - Z_{\theta-1}\} = (1 + R_{n-1})e^{\zeta_n}. \end{aligned}$$

Допустим, что мы рассматриваем случай с нормальным распределением, когда $P_0(x) = \mathcal{N}(\mu_0, \sigma^2)$, а $P_\infty(x) = \mathcal{N}(\mu_\infty, \sigma^2)$. В этом случае плотности равны

$$f_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad f_\infty(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu_\infty)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Следовательно, ζ_n равна

$$\zeta_n = \ln \frac{f_0(x_n)}{f_\infty(x_n)} = \frac{(x - \mu_\infty)^2}{2\sigma^2} - \frac{(x - \mu_0)^2}{2\sigma^2} = \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\sigma^2} \left(x_n - \frac{\mu_0 + \mu_\infty}{2}\right).$$

Теперь несложно выписать рекуррентные формулы для T_n и R_n :

$$\begin{aligned} T_n &= \max\left(0, T_{n-1} + \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\sigma^2} \left(x_n - \frac{\mu_0 + \mu_\infty}{2}\right)\right) \\ R_n &= (1 + R_{n-1}) \exp\left\{\frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\sigma^2} \left(x_n - \frac{\mu_0 + \mu_\infty}{2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

Теперь заменим измерение случайной величины x_n на саму случайную величину ξ_n . Тогда можно посчитать матожидания ζ_n по мерам P_0 и P_∞ :

$$\begin{aligned} E_0[\zeta_n] &= \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\sigma^2} \left(\mu_0 - \frac{\mu_0 + \mu_\infty}{2}\right) = \frac{(\mu_0 - \mu_\infty)^2}{\sigma^2}, \\ E_\infty[\zeta_n] &= \frac{\mu_0 - \mu_\infty}{\sigma^2} \left(\mu_\infty - \frac{\mu_0 + \mu_\infty}{2}\right) = -\frac{(\mu_0 - \mu_\infty)^2}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что при $n < \theta$ статистика T_n близка к нулю, однако при $n \geq \theta$ она начинает (в среднем) возрастать. Это рассуждение наглядно показывает, что статистики T_n и R_n позволяют «ухватывать» момент появления разладки, то есть момент θ . Именно эти наблюдения послужили основанием применения этих статистик к реальным данным. Разумеется, для этой цели надо знать или уметь «хорошо» оценивать величины ζ_n , когда плотности $f_0(x)$ и $f_\infty(x)$ точно не известны.

Среди других методов, в которых не требуется знание плотностей, укажем на «метод экспоненциального сглаживания». Он состоит в следующем: по наблюдениям (x_1, x_2, \dots) строятся статистики $(Y_n)_{n \geq 0}$ по следующему правилу:

$$Y_n = (1 - \beta)Y_{n-1} + \beta x_n,$$

где $Y_0 = 0$ и $\beta \in (0, 1)$ — некоторый (подбираемый) параметр. Здесь несложно развернуть рекурсивную формулу, которая объясняет название метода:

$$\begin{aligned} Y_n &= (1 - \beta)Y_{n-1} + \beta x_n = (1 - \beta)^2 Y_{n-2} + \beta(1 - \beta)x_{n-1} + \beta x_n \\ &= \dots = \beta \sum_{k=1}^n (1 - \beta)^{n-k} x_k. \end{aligned}$$

В случае различения двух гипотез мы рассмотрели две постановки задач. Одна (формулировка Неймана–Пирсона) носила, так сказать, ретроспективный характер, поскольку решение выносилось по заданным наблюдениям (x_1, x_2, \dots, x_n) . Вторая постановка (формулировка А. Вальда) исходила из того, что наблюдения поступают последовательно, шаг за шагом, и решение принимается по поведению текущих данных.

В задаче о разладке также принято различать две постановки — ретроспективная и последовательная. В первом случае наблюдения (x_1, x_2, \dots, x_n) заданы *полностью* и считается, что $\theta \in \{1, 2, \dots, n, \infty\}$. Во втором случае наблюдения поступают последовательно и, вообще говоря, $\theta \in \mathbb{N}$. Введенные статистики кумулятивных сумм T_n и статистики Ширяева–Робертса R_n пригодятся в обоих сформулированных случаях.

Стоит заметить, что введенные выше статистики предназначены для тех ситуаций, когда относительно параметра θ не делается никаких априорных предположений. А как можно улучшить ситуацию, если такое предположение есть? Рассмотрим на следующем примере. Пусть θ — это случайная величина, принимающая значения из \mathbb{Z}_+ со следующими вероятностями:

$$\begin{aligned} P(\theta = 0) &= \pi, \\ P(\theta = n \mid \theta > 0) &= pq^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

где $\pi \in [0, 1]$, $q \equiv 1 - p$. Сразу же скажем, что $P(\theta = n) = (1 - \pi)pq^{n-1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Как и раньше, считаем, что случайные величины независимы и одинаково распределены с плотностями $f_\infty(x)$ (до момента разладки) и $f_0(x)$ (после). Тогда совместная плотность $p_\theta(x_1, \dots, x_n)$ задаётся формулой (1.1).

Пусть $p^\pi(x_1, \dots, x_n)$ — это плотность набора случайных величин (ξ_1, \dots, ξ_n) в точках (x_1, \dots, x_n) при условии, что θ есть случайная величина с распределением, заданным выше. Тогда по формуле полной вероятности

$$\begin{aligned} p^\pi(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x_1, \dots, x_n) P(\theta = k) \\ &= (\pi + p(1 - \pi)) f_0(x_1) \dots f_0(x_n) \\ &\quad + (1 - \pi)p \sum_{k=1}^n q^k f_\infty(x_1) \dots f_\infty(x_{k-1}) f_0(x_k) \dots f_0(x_n) \\ &\quad + (1 - \pi)q^n f_\infty(x_1) \dots f_\infty(x_n). \end{aligned}$$

Далее, введём статистику $(\pi_n)_{n \geq 1}$ по следующему правилу:

$$\pi_n = P(\theta \leq n \mid x_1, \dots, x_n).$$

Она будет играть исключительно важную роль во многих постановках задач скорейшего обнаружения.

Можно ли считать её рекурсивно? Можно. Для этого введём следующее обозначение:

$$\varphi_n \equiv \frac{\pi_n}{1 - \pi_n}.$$

Теперь докажем одну лемму, связанную с φ_n :

Лемма. Для любого натурального n

$$\varphi_n = (p + \varphi_{n-1}) \frac{f_0(x_n)}{q f_\infty(x_n)}.$$

Доказательство. Для начала вспомним формулу Байеса:

$$P(A | B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B | A).$$

Отсюда получаем, что

$$P(\theta = k | x_1, \dots, x_n) = \frac{P(\theta = k)}{p^\pi(x_1, \dots, x_n)} p_k(x_1, \dots, x_n).$$

Воспользуемся этим и распишем φ_n :

$$\begin{aligned} \varphi_n &= \frac{P(\theta \leq n | x_1, \dots, x_n)}{P(\theta > n | x_1, \dots, x_n)} = \sum_{k=0}^n \frac{p_k(x_1, \dots, x_n) P(\theta = k)}{p_\infty(x_1, \dots, x_n) P(\theta > n)} \\ &= \frac{p_0(x_1, \dots, x_n) P(\theta = 0)}{p_\infty(x_1, \dots, x_n) P(\theta > n)} + \sum_{k=1}^n \frac{p_k(x_1, \dots, x_n) P(\theta = k)}{p_\infty(x_1, \dots, x_n) P(\theta > n)}. \end{aligned}$$

Теперь вспомним, что $P(\theta = 0) = \pi$ и $P(\theta = k) = (1 - \pi)pq^{k-1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$P(\theta > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P(\theta = k) = (1 - \pi)pq^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k = (1 - \pi)q^n.$$

Далее, введём следующее обозначение:

$$L_m^n \equiv \frac{f_0(x_m)f_0(x_{m+1}) \dots f_0(x_n)}{f_\infty(x_m)f_\infty(x_{m+1}) \dots f_\infty(x_n)}.$$

Пользуясь вышесказанным и (1.1), преобразуем φ_n :

$$\varphi_n = \frac{1}{q^n} \left(\frac{\pi}{1 - \pi} L_1^n + pL_1^n + pqL_2^n + \dots + pq^{n-1}L_n^n \right).$$

Далее заметим, что

$$\varphi_n = \frac{f_0(x_n)}{qf_\infty(x_n)} \left(p + \frac{1}{q^{n-1}} \left(\frac{\pi}{1 - \pi} L_1^{n-1} + pL_1^{n-1} + pqL_2^{n-1} + \dots + pq^{n-2}L_{n-1}^{n-1} \right) \right).$$

А это и есть желаемое:

$$\varphi_n = (p + \varphi_{n-1}) \frac{f_0(x_n)}{qf_\infty(x_n)}.$$

□

Отсюда несложно получить рекурсивное выражение для π_{n+1} :

$$\pi_{n+1} = \frac{f_0(x_{n+1})(\pi_n + p(1 - \pi_n))}{f_0(x_{n+1})(\pi_n + p(1 - \pi_n)) + f_\infty(x_{n+1})q(1 - \pi_n)}.$$

Упражнение. Оказывается, что получить рекуррентную формулу для π_{n+1} можно напрямую, пользуясь формулой Байеса. Покажите это.

Пусть

$$\zeta_n(p) = \ln \frac{f_0(x_n)}{(1 - p)f_\infty(x_n)}.$$

Следовательно,

$$\varphi_n = (p + \varphi_{n-1})e^{\zeta_n(p)} \implies \frac{\varphi_n}{p} = \left(1 + \frac{\varphi_{n-1}}{p} \right) e^{\zeta_n(p)}.$$

Тем самым, статистика $R_n(p) \equiv \varphi_n/p$ достаточно похожа на статистику Ширяева-Робертса R_n (в том плане, что их рекуррентные соотношения похожи). Более того, при $p \rightarrow 0$ $\zeta_n(p) \rightarrow \zeta_n$ и $R_n(p) \rightarrow R_n$.

Это показывает, что введенная выше ad-hoc статистика R_n возникает весьма естественным образом из статистики $R_n(p)$ при $p \rightarrow 0$. Стоит заметить, что

$$\mathbb{E}[\theta] = \frac{1 - \pi}{p}.$$

Таким образом, предельный переход $p \rightarrow 0$ означает, что делается предположение, что появление разладки следует ожидать нескоро.

1.3 Основные постановки задачи скорейшего обнаружения для броуновского движения

В статистике случайных процессов хорошо развита та ее часть, в которой исходными предположениями является то, что рассматриваемые процессы являются *стационарными*. В основе теории таких процессов лежат ковариационно-спектральные характеристики (то есть ковариационная функция, так называемая спектральная плотность и иже с ними). Типичной задачей статистики таких процессов является задача определения корреляционной функции и среднего значения наблюдаемого процесса.

Сейчас же мы будем рассматривать сугубо *нестационарные* процессы. Это обстоятельство приводит и к новым постановкам задач и к необходимости развития соответствующей теории их решения. Описанный ниже материал будет посвящён моделям, основанным на броуновском движении, что объясняется и тем, что такие модели представляют практический интерес, и тем, что для них во многих случаях удастся получить прозрачные и точные результаты.¹

Пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ — броуновское движение, заданное на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Построим по нему процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$ по следующему правилу:

$$X_t = \mu I_{\{t \geq \theta\}} + \sigma B_t \implies X_t = \begin{cases} \sigma B_t, & t < \theta, \\ \mu + \sigma B_t, & t \geq \theta, \end{cases}$$

где $\sigma > 0$, $\mu \neq 0$ и $\theta \in [0, \infty]$.

Относительно природы момента θ , то есть того, является ли θ случайной величиной или же просто константным параметром, можно будет делать вполне конкретные предположения. Сейчас же важно лишь то, что момент θ — это тот момент, когда у наблюдаемого процесса X меняется снос у броуновского движения (с 0 на μ). Момент θ называется моментом появления *разладки*. При этом «нормальный» ход процесса X , характеризующийся тем, что $X_t = \sigma B_t$, переходит в «разлаженный»: $X_t = \mu + \sigma B_t$, где снос $\mu \neq 0$.

Несложно понять, что означают крайние случаи $\theta = 0$ и $\theta = \infty$. Случай, когда $\theta = 0$, соответствует тому, что с самого начала (т. е. с момента $t = 0$) идет «разлаженный» процесс. Случай $\theta = \infty$ соответствует тому, что «разладка» не появляется и вовсе, следовательно, у наблюдаемого процесса X все время $X_t = \sigma B_t$.

Пусть $\mathbb{P}_\theta = \text{Law}(X | \theta)$ — распределение вероятностей (по сути, семейство конечномерных функций распределения) процесса $X = (X_t)_{t \geq 0}$ при условии, что разладка происходит в момент времени θ . В частности, \mathbb{P}_∞ есть распределение вероятностей процесса X при условии, что разладка вообще не происходит.

¹ Действительно, для броуновского движения задача различения двух гипотез относительно сноса может быть решена точно, но в общем случае получить что-то лучше приближенных результатов не так уж и просто.

Для дальнейшего повествования понадобится понятие момента остановки, или же марковского момента. Наглядный смысл этого понятия состоит в том, что для каждого $t \geq 0$ решение вопроса о том, прекратить ли наблюдения или же продолжать их, зависит лишь от информации о процессе X , полученной на интервале времени $[0, t]$ и не зависит от «будущего». В данный момент марковские моменты удобно рассматривать, как моменты подачи сигнала тревоги о появлении разладки.

Рассмотрим два события: $\{\tau < \theta\}$ и $\{\tau \geq \theta\}$. Первое событие означает ложную тревогу (так как сигнал подаётся до момента разладки). Во втором же событии нас обычно интересует то, насколько велико запаздывание $\tau - \theta$ при правильной подаче сигнала.

Теперь сформулируем четыре варианта задачи о разладке.

(А) Пусть θ — это случайная величина со следующим распределением:

$$\begin{aligned} P(\theta = 0) &= \pi \\ P(\theta > t \mid \theta > 0) &= e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

где $\pi \in [0, 1]$ и $\lambda > 0$ — какие-то известные константы.

Далее, зафиксируем какую-то константу $\alpha > 0$ и построим для неё следующий класс:

$$\mathcal{M}_\alpha = \{\tau: P(\tau < \theta) \leq \alpha\}.$$

Другими словами, \mathcal{M}_α — это класс тех моментов остановки τ (относительно естественной фильтрации \mathbb{F}^X), для которых вероятность ложной тревоги не превосходит α .

Нужно найти такой момент остановки $\tau_\alpha^* \in \mathcal{M}_\alpha$, для которого время срабатывания минимально:

$$E[\tau_\alpha^* - \theta \mid \tau_\alpha^* \geq \theta] = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_\alpha} E[\tau - \theta \mid \tau \geq \theta].$$

Для решения этой *условно-вариационной* задачи посмотрим на следующую байесовскую постановку задачи о разладке. Пусть

$$\mathbf{A}(c) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}} (P(\tau < \theta) + c E[(\tau - \theta)^+]),$$

где \mathcal{M} — класс всех конечных моментов остановки, $c > 0$ — некоторая константа, а $\xi^+ = \max(0, \xi)$. Тогда

$$E[(\tau - \theta)^+] = E[(\tau - \theta) I_{\{\tau \geq \theta\}}] = E[\tau - \theta \mid \tau \geq \theta] P(\tau \geq \theta).$$

Момент τ_c^* будем называть *оптимальным*, если на нём достигается инфимум:

$$\underbrace{P(\tau_c^* < \theta)}_{\text{вероятность ложного срабатывания}} + \underbrace{c E[(\tau_c^* - \theta)^+]}_{\text{(условное) среднее время срабатывания}} = \mathbf{A}(c).$$

В трёх следующих вариантах — **В**, **С** и **Д** — параметр θ будем считать постоянным и принимающим значения в $[0, \infty]$.

(В) Зафиксируем некоторое число $T > 0$ и рассмотрим следующий класс:

$$\mathcal{M}_T = \{\tau: E_\infty[\tau] \geq T\}.$$

Этот класс содержит такие моменты остановки τ , для которых среднее время до ложной тревоги не меньше T . Далее, пусть

$$\mathbf{B}(T) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_T} \frac{1}{T} \int_0^\infty \mathbb{E}_\theta[(\tau - \theta)^+] d\theta.$$

В этом варианте момент остановки τ_T^* будет оптимальным, если на нём достигается инфимум:

$$\inf_{\tau \in \mathcal{M}_T} \frac{1}{T} \int_0^\infty \mathbb{E}_\theta[(\tau_T^* - \theta)^+] d\theta = \mathbf{B}(T).$$

(С) Этот вариант ещё называют *первой минимаксной задачей*. Пусть

$$\mathbf{C}(T) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_T} \sup_{\theta \geq 0} \mathbb{E}_\theta[\tau - \theta \mid \tau \geq \theta].$$

Будем говорить, что момент $\tau_T^* \in \mathcal{M}_T$ является оптимальным (если он существует) в варианте С, если на нём достигается инфимум:

$$\underbrace{\sup_{\theta \geq 0} \underbrace{\mathbb{E}_\theta[\tau_T^* - \theta \mid \tau_T^* \geq \theta]}_{\substack{\text{(условное) среднее} \\ \text{время срабатывания}}}}_{\text{наихудшее по всем } \theta} = \mathbf{C}(T).$$

Для введения варианта D нужно ввести понятие вещественного супремума.

Определение 1. Будем говорить, что a является *вещественным супремумом* функции f , если $f(x) \leq a$ почти везде, то есть мера множества $\{x: f(x) > a\}$ равна нулю.

Обозначение: $a = \text{ess sup } f(x)$.

(D) Этот вариант называют *второй минимаксной задачей*. Пусть

$$\mathbf{D}(T) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_T} \sup_{\theta \geq 0} \text{ess sup}_{\omega} \mathbb{E}_\theta[(\tau - \theta)^+ \mid \mathcal{F}_\theta^X](\omega),$$

где $\mathcal{F}_\theta^X = \sigma(X_{t,T} \leq \theta)$. Момент $\tau_T^* \in \mathcal{M}_T$ называется оптимальным (если он существует) в варианте D, если

$$\underbrace{\sup_{\theta \geq 0} \text{ess sup}_{\omega} \underbrace{\mathbb{E}_\theta[(\tau - \theta)^+ \mid \mathcal{F}_\theta^X](\omega)}_{\substack{\text{среднее время срабатывания}}}}_{\substack{\text{наихудшее по всем траекториям} \\ \text{наихудшее по всем } \theta}} = \mathbf{D}(T).$$

На самом деле есть ещё один вариант, который обычно называют вариантом E. Он кардинально отличается от остальных вариантов тем, что в них мы предполагаем, что после объявления сигнала тревоги наблюдение останавливается. На самом же деле в реальной практике дело обстоит так, что после объявления тревоги системы обнаружения продолжают свое функционирование, ожидая, скажем, появления следующей разладки. Этот же вариант задачи о разладке носит *многократный характер*. При этом целесообразно считать, что сам процесс наблюдения начался «давно», он мог прерываться ложными тревогами и «разладка» появляется на «фоне установившегося режима наблюдения».