мФТиАД ВШЭ, 1 курс, 3 модуль

Задание 1. Основы теории случайных процессов

Прогнозирование временных данных и случайных процессов, весна 2018

Время выдачи задания: 31 января (среда).

Срок сдачи: **14 февраля (среда), 23:30.**

Среда для выполнения практического задания – PYTHON 2.x.

Правила сдачи

Инструкция по отправке:

1. Решения задач следует присылать единым файлом формата .pdf, набранным в LaTeX. Последняя задача в виде отдельной ipython-тетрадки.

2. Решения задач следует присылать единым файлом формата .pdf, набранным в LaTeX. Допускается отправка последней задачи в виде отдельной ipython-тетрадки.

Оценивание и штрафы:

1. **Каждая из задач имеет стоимость 2 балла**, при этом за задачу можно получить 0, 1 или 2 балла. Максимально допустимая оценка за работу – 10 баллов. Баллы, набранные сверх максимальной оценки, считаются бонусными и влияют на освобождение от задач на экзамене.

2. Дедлайн жесткий. Сдавать задание после указанного срока сдачи нельзя.

3. Задание выполняется самостоятельно. «Похожие» решения считаются плагиатом и все задействованные студенты (в том числе те, у кого списали) не могут получить за него больше 0 баллов (подробнее о плагиате см. на странице курса). Если вы нашли решение какого-то из заданий (или его часть) в открытом источнике, необходимо указать ссылку на этот источник в отдельном блоке в конце Вашей работы (скорее всего вы будете не единственным, кто это нашел, поэтому чтобы исключить подозрение в плагиате, необходима ссылка на источник).

Необходимые теоретические сведения

1. Ковариационной функцией $R_X(t_1, t_2)$ случайного процесса $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ называется неслучайная функция

$$R_X(t_1, t_2) = \operatorname{cov}(X_{t_1} - \operatorname{E} X_{t_1})(X_{t_2} - \operatorname{E} X_{t_2}).$$

Корреляционной функцией $r_X(t_1, t_2)$ случайного процесса X называется неслучайная функция

$$r_X(t_1, t_2) = \frac{R_X(t_1, t_2)}{\sqrt{\operatorname{V} X_{t_1} \operatorname{V} X_{t_2}}},$$

где $\operatorname{V} X_t = \operatorname{E}(X_t - \operatorname{E} X_t)^2$ – функция дисперсии случайного процесса X. Взаимной ковариационной функцией $R_{XY}(t_1, t_2)$ пары случайных процессов $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ и $Y = (Y_t)_{t \geqslant 0}$ называется неслучайная функция

$$R_{XY}(t_1, t_2) = \operatorname{cov}(X_{t_1} - \operatorname{E} X_{t_1})(Y_{t_2} - \operatorname{E} Y_{t_2}).$$

Взаимная корреляционная функция $r_{XY}(t_1, t_2)$ определяется аналогично равенству для $r_X(t_1, t_2)$ выше.

2. Случайный процесс $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ называется процессом с независимыми приращениями, если для любых $t_0, t_1, \ldots, t_n$, таких, что $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ случайные величины $X_1 - X_0, \ldots, X_n - X_{n-1}$ независимы в совокупности.

3. Вектор $X = (X_1, \ldots, X_n)$ называется гауссовским, если для любого набора коэффициентов $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ случайная величина $Y \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^n \lambda_k X_k$ имеет нормальное распределение.

4. Процесс $W = (W_t)_{t \geqslant 0}$ на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ называется винеровским (или броуновским движением), если

- $W_0 = 0$ P-п.н.,
- W_t имеет независимые приращения $\forall t$,
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$ $\forall t > s \geq 0$.

Вариант 1

1. Доказать, что данная функция может или не может являться ковариационной функцией случайного процесса:

   (a) $R_1(t,s) = \min\{t,s\} - ts$,

   (b) $R_2(t,s) = \min\{t,s\} - t(s+1)$.

2. Заданы случайные величины v_1, v_2, u_1, u_2 такие, что $\mathrm{E}\, v_i = \mathrm{E}\, u_i = 0$, $\mathrm{E}\, v_i^2 = 1, \mathrm{E}\, u_i^2 = 4, i = 1, 2$, а нормированная корреляционная матрица системы (v_1, v_2, u_1, u_2) равна

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Для случайных процессов

$$X_t = v_1 \cos \omega_1 t + v_2 \sin \omega_1 t,$$
$$Y_t = u_1 \cos \omega_2 t + u_2 \sin \omega_2 t$$

   найти взаимные корреляционные функции $r_{XY}(t_1, t_2) = \mathrm{corr}(X_{t_1}, Y_{t_2})$ и $r_{YX}(t_1, t_2) = \mathrm{corr}(Y_{t_1}, X_{t_2})$ и вычислить их значения при $t_1 = 0, t_2 = 1$.

3. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n)$ – случайный вектор. Докажите эквивалентность следующих утверждений (в обе стороны):

   (a) характеристическая функция вектора X допускает представление

$$\varphi_X(\mathbf{u}) = \exp\left\{i\mathbf{u}^\intercal \mu - \frac{1}{2}\mathbf{u}^\intercal \Sigma \mathbf{u}\right\},$$

   где μ – неслучайный вектор из $\mathbb{R}^n$, а Σ – симметричная неотрицательно определенная неслучайная матрица размера $n \times n$,

(b) вектор X допускает представление

$$X = \mu + AZ,$$

где μ – неслучайный вектор из $\mathbb{R}^n$, A – неслучайная матрица размера $n \times n$, а $Z \in \mathbb{R}^n$ – вектор, все координаты которого независимы в совокупности и имеют нормальное $\mathcal{N}(0,1)$ распределение.

4. Пусть $B = (B_t)_{t \geqslant 0}$ – винеровский процесс. Доказать, что следующие процессы также винеровские:

   (a) $B_t^{(1)} = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ tB_{1/t}, & t > 0. \end{cases}$

   (b) $B_t^{(2)} = \sqrt{c} B_{t/c}, \qquad c = \mathrm{const} > 0.$

5. $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые одинаково распределенные показательные случайные величины. Подсчитать (по индукции) плотность распределения суммы $\xi_1 + \ldots + \xi_n$.

6. Пусть $N = (N_t)_{t \geqslant 0}$ – пуассоновский случайный процесс с параметром λ. Доказать, что случайный процесс $M = (M_t)_{t \geqslant 0}$, задаваемый соотношением $M_t = N_{t+1} - N_t$, является стационарным второго порядка процессом, т.е. что его математическое ожидание $\mathrm{E}\, M_t$ не зависит от времени, а его ковариационная функция $R_M(t_1, t_2)$ зависит от t_1 и t_2 через их разность $\tau = t_1 - t_2$.

7. Стандартное фрактальное броуновское движение $B^H = \big(B_t^H\big)_{0 \leqslant t \leqslant T}$ на $[0, T]$ с параметром Хёрста $H \in (0,1)$ — это гауссовский процесс с непрерывными траекториями такой, что

$$B_t^H = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \Big\{ \int\limits_{-\infty}^{0} [(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}}] dB_s + \int\limits_{0}^{t} (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB_s \Big\},$$

где $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ – гамма-функция Эйлера. Смоделируйте реализации фрактального броуновского движения с помощью вычисления стохастического интеграла по броуновскому движению. В качестве результата приведите:

(a) разностную схему, использовавшуюся для моделирования,

(b) исходный код, использовавшийся для моделирования,

(c) примеры траекторий фрактального броуновского движения для различных значений параметра Херста $H \in (0, 1)$.

Вариант 2

1. Доказать положительную определенность следующих функций:

   (a) $R_1(t,s) = \begin{cases} 1-|t-s|, & |t-s|<1, \\ 0, & |t-s|>=1. \end{cases},$

   (b) $R_2(t,s) = e^{-|t-s|}$.

2. Случайный процесс $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ имеет вид

$$X_t = b\sin(\gamma t + \varphi),$$

   где b, γ – известные постоянные, а φ – случайная величина с плотностью $f_\varphi(x)$. Исследовать процесс X на стационарность в узком и широком смысле, а также на эргодичность по математическому ожиданию, если

   (a) $f_\varphi(x) = \cos(x)\mathbb{1}_{[0,\frac{\pi}{2}]}(x)$,

   (b) $f_\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\mathbb{1}_{[0,2\pi]}(x)$.

3. Доказать эквивалентность следующих двух определений винеровского процесса (доказательство провести в обе стороны):

   (a) винеровский процесс – это гауссовский процесс $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ с математическим ожиданием $\mathrm{E}\, B_t \equiv m(t) = 0$ и ковариационной функцией $\mathrm{E}(B_s - \mathrm{E}\, B_s)(B_t - \mathrm{E}\, B_t) \equiv R(s,t) = min\{s,t\}$,

   (b) винеровский процесс – это случайный процесс $B = (B_t)_{t\geqslant 0}$ такой, что

   - $B_0 = 0$ п.н.,
   - B – процесс с независимыми приращениями,
   - $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s) \quad \forall t > s \geqslant 0$.

4. Пусть $W = (W_t)_{t\geqslant 0}$ – винеровский процесс на $[0,t]$. Подсчитать

(a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right)^2$

(b) $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left|W_{t_i}-W_{t_{i-1}}\right|$,

где разбиение отрезка $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ измельчается с ростом n так, что $\max(t_i - t_{i-1}) \to 0$, а сходимость понимается в смысле среднего квадратического.

5. Пусть $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$ – неоднородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda(t)$. Доказать, что

   (a) функция $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s)\,ds$ имеет обратную,

   (b) процесс $M_t = N_{\Lambda^{-1}(t)}$ является однородным пуассоновским процессом.

6. Пользовательские запросы поступают на веб-сервис в соответствии с однородным пуассоновским потоком $N = (N_t)_{t\geqslant 0}$ с интенсивностью λ. Сервис оснащен балансировщиком нагрузки, разделяющим запросы на r подпотоков $\{X^i\}_{i=1}^r$ ($N_t = \sum_{i=1}^r X_t^i$) таким образом, что каждый запрос из N_t относится к подпотоку X_t^i с вероятностью $p_i, i = 1,\dots,r$ (независимо от других событий). Определить тип и параметры случайных процессов $\{X^i\}_{i=1}^r$.

7. Составной пуассоновский поток событий (или пакетный пуассоновский процесс) – это случайный процесс $X = (X_t)_{t\geqslant 0}$ со скачками в моменты скачков пуассоновского потока с заданной интенсивностью λ и являются случайными величинами с заданным распределением G, не зависящими от пуассоновского потока. Он может быть записан в виде:
$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} D_i,$$
где X_t – значение составного потока в момент t, N_t – значение простого потока в момент t (число появлений пакетов), и $D_i, i \geqslant 1$ –

последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих распределение G. Смоделируйте реализации этого процесса, если

- $\lambda = \lambda(t) = 2 + sin(t - 11\pi/16) + sin(2t - 3\pi/8)$, и
- $G(x)$ – распределение Пуассона с параметром $\rho > 0$.

В качестве результата приведите:

(a) исходный код, использовавшийся для моделирования,

(b) примеры траекторий составного пуассоновского потока для различных значений параметра ρ.