**Introdução à Análise de dados em FAE** **(Data: 08/12/2020)**

# Relatório -Resolução da lista de Cinemática das partículas

*Professores:* Sandro Fonseca, Sheila Amaral, Eliza Melo *Nome:* Silas Santos de Jesus

Esse relatório contem as respotas dos exercícios de cinemática relativistíca do curso de Analise de Dados FAE 2020.1

Os exercícios estão numerados e as respostas serão de acordo com cada um.

**Exercício 0:**

Quando um píon decai um dois fótons, qual a energia do fóton?

Sabemos que massa do fóton ($m_\gamma = 0$).

Podemos escrever a conservação do momento e da energia sabendo que os fótons podem ir em qualquer direção segundo um ângulo $\theta$ com o eixo principal do píon. Pela conservação de momento:

$$P_\pi = p_{\gamma_1} cos\theta_1 + p_{\gamma_2} cos\theta_2, \quad p_{\gamma_1} sen\theta_1 = p_{\gamma_2} sen\theta_2$$

Isolando $p_{\gamma_2} cos\theta_2$ e elevando ambos os lados das equações ao quadrado, temos:

$$p^2_{\gamma_2} cos^2\theta_2 = p^2_{\gamma_1} cos^2\theta_1 + P^2_\pi - 2P_\pi p_{\gamma_1} cos\theta_1, \quad p^2_{\gamma_1} sen^2\theta_1 = p^2_{\gamma_2} sen^2\theta_2$$

Sabendo que $cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$, temos:

$$p^2_{\gamma_2}(1 - sen^2\theta_2) = p^2_{\gamma_1} cos^2\theta_1 + P^2_\pi - 2P_\pi p_{\gamma_1} cos\theta_1$$

Sabendo que $cos^2\theta = 1 - sen^2\theta$, temos:

$$p^2_{\gamma_2} - p^2_{\gamma_2} sen^2\theta_2 = p^2_{\gamma_1} cos^2\theta_1 + P^2_\pi - 2P_\pi p_{\gamma_1} cos\theta_1$$

Onde, $p^2_{\gamma_1} sen^2\theta_1 = p^2_{\gamma_2} sen^2\theta_2$. Logo,

$$p^2_{\gamma_2} - p^2_{\gamma_1} sen^2\theta_1 = p^2_{\gamma_1} cos^2\theta_1 + P^2_\pi - 2P_\pi p_{\gamma_1} cos\theta_1$$

Lembrando que $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$, temos:

$$p^2_{\gamma_2} = p^2_{\gamma_1} + P^2_\pi - 2P_\pi p_{\gamma_1} cos\theta_1$$

Agora pela conservação de energia:

$$E_\pi = E_{\gamma_1} + E_{\gamma_2}$$

Como as massas dos fóton são zero, $p_{\gamma_1} = E_{\gamma_1} = h\nu_{\gamma_1}$, $p_{\gamma_2} = E_{\gamma_2} = h\nu_{\gamma_2}$ e $E_\pi = \gamma M_\pi c^2$. Onde $\gamma$ é o fator de Lorentz.

Assim, temos:

$$\gamma M_\pi c^2 = h\nu_{\gamma_1} + h\nu_{\gamma_2} \ \rightarrow h\nu_{\gamma_2} = \gamma M_\pi c^2 - h\nu_{\gamma_1}$$

Substituindo na equação do memento anterior e sabendo que $P_\pi = \gamma M_\pi v$, temos:

$$\gamma M_\pi v^2 - \frac{2h\nu_{\gamma_1}.v.cos\theta_1}{c} = \gamma M_\pi c^2 - \frac{2h\nu_{\gamma_1}.c.cos\theta_1}{c}$$

Isolando $h\nu_{\gamma_1}$, que é $E_{\gamma_1}$, temos:

$$E_{\gamma_1} = \frac{M_\pi c^2}{2\gamma(1 - \frac{v.cos\theta_1}{c})}$$

Para saber a energia do outro fóton, basta substituir o valor encontrado para $E_{\gamma_1}$ na equação: $E_{\gamma_2} = \gamma M_\pi c^2 - E_{\gamma_1}$ Substituindo vamos achar:

$$E_{\gamma_2} = \frac{\gamma M_\pi v^2(1 - \frac{c.cos_1}{v})}{(1 - \frac{v.cos\theta_1}{c})}$$

**Exercício: 1**

Prove a equação: $E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{lab} m_2}$

Para demonstrar isso devemos saber que s corresponde as variáveis de Mandelstam:

$$s = (p_1 + p_2)^2$$

$$s = p_1^2 + p_2^2 + 2(p_1 p_2)$$

Sabemos que pela relação dos quadrivetores: $a.b = a^0 b^0 - \vec{a}\vec{b}$. Assim temos:

$$s = p_1^2 + p_2^2 + 2(p_1^0 p_2^0 - \vec{p_1}\vec{p_2})$$

Sabemos que o vetor quadrimomento: $p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, p_x, p_y, p_z)$. Sabemos também que $p^0 = E$. Sendo assim, $p_1^0 = E_1^{lab}$, $p_2^0 = E_2^{lab} = m_2$, $\vec{p_2} = 0$ e $p_1^2 = m_1^2$, $p_2^2 = m_2^2$.

Assim, temos:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{lab} m_2$$

Como a energia total ($E_T$) está relacionada com s por: $E_T = \sqrt{s}$. Assim temos a energia total:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{lab} m_2}$$

**Exercício 2:**

Prove esta aproximação: $E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2E_1^{lab} m_2}$

Considerando a aproximação: $E_1^{lab} >> m_1, m_2$. temos que a soma $m_1^2 + m_2^2$ torna-se desprezível quando somado com $E_1^{lab}$. Logo, $2E_1^{lab} m_2 >> m_1^2 + m_2^2$. Sendo assim, podemos aproximar:

$$E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2E_1^{lab} m_2}$$

**Exercício 3:**

Prove a equação: $E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1 E_2(1 - \beta_1 \beta_2 cos\theta)}$

Em relação ao centro de massa, sabemos que o momento inicial total das partículas é dado por:

$$s = (p_1 + p_2)^2$$

Abrindo os termo ao quadrado temos:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 p_2$$

Sabemos que $p_1^2 = m_1^2$ e $p_2^2 = m_2^2$. Podemos usar a relação de momento escalar de dois quadrivetores: $a.b = a^0 b^0 - \vec{a}.\vec{b}$.

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2(p_1^0 p_2^0 - \vec{p_1}\vec{p_2})$$

Onde $p_1^0 = E_1$ e $p_2^0 = E_2$. Podemos usar a relação $\vec{p_1}\vec{p_2} = \|\vec{p_1}\|\|\vec{p_2}\| cos\theta$. Substituindo os termos acima, temos:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1 E_2 - \|\vec{p_1}\|\|\vec{p_2}\| cos\theta)$$

Sabemos que $\beta = \frac{\|p\|}{E}$. Logo, $\|p_1\| = \beta_1 E_1$ e $\|p_2\| = \beta_2 E_2$. Substituindo, temos:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1E_2 - \beta_1 E_1 \beta_2 E_2 cos\theta)$$

Colocando em evidência o termo comum dos parênteses:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2 cos\theta)$$

Como a energia total é dada por: $E_T = \sqrt{s}$, temos que a energia total é expressa por:

$$E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1E_2(1 - \beta_1\beta_2 cos\theta)}$$

**Exercício 4:**

Considerando a aproximação: $\vec{p_1} = -\vec{p_2}$ e $m_1 = m_2$. Prove a equação: $E_T = \sqrt{s} = 2E_1$

Podemos partir da equação:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2(p_1^0 p_2^0 - \vec{p_1}\vec{p_2})$$

Sabemos que $\vec{p_1}\vec{p_2} = \|\vec{p_1}\|\|\vec{p_2}\| cos\theta$, como $\vec{p_1} = -\vec{p_2} \rightarrow -\vec{p_1}\vec{p_2} = -\|\vec{p_1}\|^2$. Substituindo, temos:

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2(p_1^0 p_2^0 + \|\vec{p_1}\|^2)$$

Considerando que $p_1^0 = E_1 e p_2^0 = E_2$ e $E_1 = E_2$. E lembrando que a relação entre energia e momento é dada por $p^2 = E^2 - \|\vec{p}\|$. Isolando o módulo de p para $p_1$ temos que: $\|p_1\|^2 = E_1^2 - m_1^2$. Substituindo na equação de s, temos:

$$s = 2m_1^2 + 2(E_1^2 + E_1^2 - m_1^2)$$

$$s = 2m_1^2 + 4E_1^2 - 2m_1^2$$

Cortando os termos com $m_1$, temos

$$s = 4E_1^2$$

Sabendo que a energia total ($E_T$) é: $E_T = \sqrt{s}$. Assim temos que a energia total é dada por:

$$E_T = \sqrt{s} = 2E_1$$

**Exercício 5:**

Um feixe de prótons com momento de 100 GeV atinge um alvo fixo de hidrogênio.

a) Qual é a energia de centro de massa para essa interação?

b) Qual seria a energia do feixe necessária para atingir a mesma energia do LHC?

c) Quais os colisores assimétricos usados atualmente e por que não usar um colisor mais potente?

a) O feixe de prótons irá colidir com o hidrogênio. Podemos aproximar a massa do hidrogênio ($m_2 \approx 1\ GeV$) para facilitar os cálculos. Como a energia de laboratório é muito maior que a massa dos corpos, podemos usar a equação aproximada do exercício 2:

$$E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2E_1^{lab} m_2}$$

Substituindo os valores, temos:

$$E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2.100.1} \approx \sqrt{200}$$

Assim,

$$E_T \approx \sqrt{s} = 14,14\ GeV$$

b) Atualmente a energia do LHC é de 13 TeV = 13000 GeV. Ou seja, $E_T = 13000\ GeV$. Para atingir a mesma energia do LHC, temos:

$$E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2E_1^{lab} m_2}$$

Isolando a energia de laboratório ($E_1^{lab}$) temos:

$$E_1^{lab} \approx \frac{E_T^2}{2m_2}$$

Substituindo os valores:

$$E_1^{lab} \approx \frac{13000^2}{2.1}$$

Sendo assim a energia do feixe deve ser:

$$E_1^{lab} = 8,45.10^4\ TeV$$

c)

**Exercício 5a:**

Encontre a energia de centro de massa para o experimento de alvo fixo e um colisor de partículas cujo o feixe de prótons tem uma energia de 3,5 TeV.

Podemos utilizar a equação: $E_T = \sqrt{s} = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2E_1^{lab}m_2}$

Como a energia do feixe $3,5\ TeV = 3500\ GeV >> m_1, m_2$ podemos desprezar a soma $m_1^2 + m_2^2$ e considerar a aproximação $m_2 \approx 1\ GeV$ Logo,

$$E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2E_1^{lab}m_2}$$

Substituindo os valores, temos:

$$E_T \approx \sqrt{s} \approx \sqrt{2.3500.1}$$

Logo a energia do centro de massa é:

$$E_T \approx \sqrt{s} \approx 83,67\ GeV$$

**Exercício 6:**

Em espalhamento elástico do tipo: A+A =A+A, quais são as variáveis de Mandelstam?

Como as partículas iniciais são as mesmas que as finais esse é o caso de um espalhamento elástico.

Sabendo que as variáveis de Mandelstam são dadas por:
$s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 + p_3)^2$ e $s = (p_1 - p_4)^2$

Desenvolvendo cada uma:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2$$

como as partículas são as mesmas (A+A = A+A) as suas massas são iguais, ou seja, $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m$. Sabendo que $p^2 = m^2$ e pela relação de momento escalar de dois quadrivetores a e b ($ab = a^0b^0 - \vec{a}\vec{b}$ , temos:

$$s = m^2 + m^2 + 2(p_1^0p_2^0 - \vec{p_1}\vec{p_2})$$

Sabemos que $p_1^0 = p_2^0 = E$, $\vec{p_1} = -\vec{p_2}$ pois estão na mesma direção mas em sentidos opostos, $\|\vec{p_1}\| = \|\vec{p_2}\| = \|p\|$ e $\vec{p_1}\vec{p_2} = \|p_1\|\|p_2\|cos\theta$. Como a colisão ocorre segunda a linha do centro de massa, o ângulo $\theta = \pi$ ($cos\theta = -1$). Assim, temos:

$$s = 2m^2 + 2(E^2 + \|p\|^2)$$

Pela relação entre energia e momento: $E^2 - \|p\|^2 = m^2$, temos:

$$s = 2m^2 + 2(\|p\|^2 + m^2 + \|p\|^2) = 2m^2 + 4\|p\|^2 + 2m^2$$

Logo,

$$s = 4(m^2 + \|p\|^2)$$

Vamos para t:

$t = (p_1 - p_3)^2$, onde $\vec{p_1}$ $e$ $\vec{p_3}$ têm o mesmo sentido mas direções diferentes e $\|p_1\| = \|p_3\|$. E levando em consideração os termos utilizados no item anterior, temos:

$$t = (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1p_3 = m^2 + m^2 - 2(E^2 - \vec{p_1}\vec{p_3})$$

$$t = m^2 + m^2 - 2(E^2 - \vec{p_1}\vec{p_3}) = 2m^2 - 2(E^2 - \|p\|^2 cos\theta) = 2m^2 - 2(\|p\|^2 + m^2 - \|p\|^2 cos\theta)$$
$$t = 2m^2 - 2(\|p\|^2 + m^2 - \|p\|^2 cos\theta) = 2m^2 - 2m^2 - 2(\|p\|^2 - \|p\|^2 cos\theta)$$

Simplificando a equação e colocando o termo do parênteses em evidência, temos:

$$t = -2\|p\|^2(1 - cos\theta)$$

Agora vamos para o termo u:

Sabendo que $u = (p_1 - p_4)^2$ e que $\vec{p_1}$ $e$ $\vec{p_4}$ têm sentidos opostos, ou seja, o cosseno do ângulo entre eles é negativo. E usando os termos descritos anteriormente, temos:

$$u = (p_1 - p_4)^2 = p_1^2 + p_4^2 - 2p_1p_4$$

$$u = p_1^2 + p_4^2 - 2p_1p_4 = m^2 + m^2 - 2(E^2 - \vec{p_1}\vec{p_4})$$
$$u = m^2 + m^2 - 2(E^2 - \vec{p_1}\vec{p_4}) = 2m^2 - 2(E^2 + \|p\|^2 cos\theta)$$
$$u = 2m^2 - 2(\|p\|^2 + m^2 + \|p\|^2 cos\theta)$$
$$u = 2m^2 - 2(\|p\|^2 + m^2 + \|p\|^2 cos\theta) = 2m^2 - 2m^2 - 2(\|p\|^2 + \|p\|^2 cos\theta)$$

Simplificando a equação e colcoando em evidência o termo em parênteses, temos:

$$u = -2\|p\|^2(1 + cos\theta)$$

**Exercício 7:**

Prove a relação: $s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2$

Sabemos que $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$ e $u = (p_1 - p_4)^2$. Assim, temos:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2$$

$$t = (p_1 - p_3)^2 = p_1^2 + p_3^2 - 2p_1p_3$$
$$u = (p_1 - p_4)^2 = p_1^2 + p_4^2 - 2p_1p_4$$

Como $p^2 = m^2$, somando os termos, temos:

$$s + t + u = 3p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + 2p_1p_2 - 2p_1p_3 - 2p_1p_4$$

Sabendo que $p_1^2 = m_1^2$, $p_2^2 = m_2^2$, $p_3^2 = M_1^2$ e $p_4^2 = M_2^2$. Temos:

$$s + t + u = 3m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2 + 2p_1p_2 - 2p_1p_3 - 2p_1p_4$$

$$s + t + u = 3m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2 + 2p_1(p_2 - p_3 - p_4)$$

Como $p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \rightarrow p_2 - p_3 - p_4 = -p_1$. Substituindo, temos:

$$s + t + u = 3m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2 - 2p_1p_1$$

Pela relação de momento escalar de dois quadrivetores a e b ($ab = a^0b^0 - \vec{a}\vec{b}$), temos:

$$s + t + u = 3m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2 - 2(E_1^2 - \vec{p_1}\vec{p_1})$$

Sabemos que $\vec{p_1}\vec{p_1} = \|p_1\|^2$ e que pela relação de momento e energia: $E^2 = m^2 + \|p\|^2$. Assim temos:

$$s+t+u = 3m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2 - 2(m_1^2 - \|p\|^2 + \|p\|^2)$$

Simplificando os temos chegamos na relação:

$$s+t+u = m_1^2 + m_2^2 + M_1^2 + M_2^2$$

**Exercício 8:**

Mostre esta transformação: $\binom{E'}{p'_{\parallel}} = \begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s\beta_s \\ -\gamma_s\beta_s & \gamma_s \end{pmatrix} \binom{E}{p_{\parallel}}, \ p'_{\perp} = p_{\perp}$

Podemos considerar que essa transformação preserve a relação de invariância $E'^2 - p'_{\parallel} = E^2 - p_{\parallel}^2$. Lembrando que $\gamma_s = coshy, \ \beta_s = tanhy = \frac{senhy}{coshy}$. Para isso vamos multiplicar as matrizes:

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} coshy & -senhy \\ -senhy & coshy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \end{pmatrix}$$

$E' = E.coshy - p_{\parallel}.senhy$
$p'_{\parallel} = -E.senhy + p_{\parallel}.coshy$

Elevando ambos os lados ao quadrado temos:
$E'^2 = E^2.cos^2hy + p_{\parallel}^2.sen^2hy - 2Ep_{\parallel}coshy.senhy$
${p'_{\parallel}}^2 = E^2.sen^2hy + p_{\parallel}^2.cos^2hy - 2Ep_{\parallel}coshy.senhy$

Subtraindo a primeira equação pela segunda, temos:

$$E'^2 - {p'_{\parallel}}^2 = E^2.cos^2hy + p_{\parallel}^2.sen^2hy - 2Ep_{\parallel}coshy.senhy - E^2.sen^2hy - p_{\parallel}^2.cos^2hy + 2Ep_{\parallel}coshy.senhy$$

Simplificando a equação e colocando os termos iguais em evidência, temos:

$$E'^2 - {p'_{\parallel}}^2 = E^2(cos^2hy - sen^2hy) - p_{\parallel}^2(cos^2hy - sen^2hy)$$

Como $cos^2hy - sen^2hy = 1$, temos:

$$E'^2 - {p'_{\parallel}}^2 = E^2 - p_{\parallel}^2$$

Devemos lembrar que $p_{\parallel|}$ e $p'_{\parallel}$ são quantidade paralelas ao movimento, logo sofrem a transforação de Lorentz, mas as quantidades $p'_{\perp}$ e $p_{\perp}$ são perpendiculares ao movimento, sendo assim elas não sofrem a transformação de Lorentz, logo elas são iguais: $p'_{\perp} = p_{\perp}$. Assim provamos a relação de transformação proposta pelo exercício.

**Exercício 8b:**

Mostre em detalhes que o decaimento de dois corpos pode ser descrito por: $E_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M}$, $\|\vec{p_1}\| = \|\vec{p_2}\|$, $\|\vec{p_1}\| = \frac{\sqrt{(M^2-(m_1+m_2)^2)(M^2-(m_1-m_2)^2)}}{2M}$

Sabemos que pela conservação de momento: $P = p_1 + p_2 \ \rightarrow \ p_2^2 = (P - p_1)$
Lembrando que como a partícula decai, podemos considerar que ela estava inicialmente em repouso, ou seja, $\|\vec{P}\| = 0$. Devemos lembrar que $p_1^2 = m_1^2, \ p_2^2 = m_1^2 \ e \ P^2 = M^2$. Elevando ambos os lados ao quadrado, temos:

$$p_2^2 = P^2 + p_1^2 - 2Pp_1$$

Usando a relação de momento escalar de quadrivetores, temos que: $Pp_1 = EE_1 - \vec{P}\vec{p_2}$. Onde $\vec{P}\vec{p_1} = \|\vec{P}\|\|\vec{p_1}\|cos\theta \ \rightarrow \vec{P}\vec{p_1} = 0$. Utilizando a relação momento e energia $E^2 - \|P\|^2 = M^2 \ \rightarrow \ E = M$
Substituindo essas relações na equação, temos:

$$m_2^2 = M^2 + m_1^2 - 2ME_1$$

Isolando $E_1$ chegamos em:

$$E_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M}$$

Sabemos que pela relação de momento e energia: $E_1^2 - \|\vec{p_1}\|^2 = m_1^2 \ \rightarrow E_1^2 = m_1^2 + \|\vec{p_1}\|^2$.

$$E_1 = \frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M} \rightarrow E_1^2 = (\frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M})^2 = \frac{M^4 + m_2^4 + m_1^4 - 2M^2m_2^2 + 2M^2m_1^2 - 2m_1^2m_2^2}{4M^2}$$

Substituindo a relação encontrada de momento e energia, temos:

$$\|\vec{p_1}\|^2 + m_1^2 = (\frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M})^2 = \frac{M^4 + m_2^4 + m_1^4 - 2M^2m_2^2 + 2M^2m_1^2 - 2m_1^2m_2^2}{4M^2}$$

Isolando o termo com momento e fazendo o mmc, temos:

$$\|\vec{p_1}\|^2 = (\frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M})^2 = \frac{M^4 + m_2^4 + m_1^4 - 2M^2m_2^2 + 2M^2m_1^2 - 2m_1^2m_2^2 - 4M^2m_1^2}{4M^2}$$

Simplificando os termos com $M^2m_1^2$, temos:

$$\|\vec{p_1}\|^2 = (\frac{M^2 - m_2^2 + m_1^2}{2M})^2 = \frac{M^4 + m_2^4 + m_1^4 - 2M^2m_2^2 - 2M^2m_1^2 - 2m_1^2m_2^2}{4M^2}$$

Podemos separar e equação da seguinte forma:

$$\|\vec{p_1}\|^2 = \frac{M^4 - M^2(m_1^2 + m_2^2 - 2m_1m_2) - M^2(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2) + (m_1^2 - m_2^2)^2}{4M^2}$$

E pode ser mais simplificada:

$$\|\vec{p_1}\|^2 = \frac{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}{4M^2}$$

Aplicando a raiz quadrado nos dois lados da equação chegamos em:

$$\|\vec{p_1}\| = \frac{\sqrt{(M^2 - (m_1 + m_2)^2)(M^2 - (m_1 - m_2)^2)}}{2M}$$

**Exercício 9:**

Determine a energia e momento para os seguintes decaimento de dois corpos: $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$

Sabemos que: $m_{\pi^+} = 139,57\ MeV$, $m_{\mu^+} = 105,66\ MeV$ e $m_{\nu_\mu} \approx 0$.

Utilizando as equações do exercício 8, e sabendo que $m_1 = m_{\mu^+}$, $M = m_{\pi^+}$ e $m_2 = m_{\nu_\mu}$, temos:

$$E_{\mu^+} = \frac{m_{\pi^+}^2 - m_{\nu_\mu}^2 + m_{\mu^+}^2}{2m_{\pi^+}}$$

Substituindo os valores, temos:

$$E_{\mu^+} = \frac{139,57^2 + 105,66^2}{2.139,57}$$

Logo, a energia do muon é:

$$E_{\mu^+} = 109,78MeV$$

Agora vamos calcular o momento do muon:

$$\|\vec{p}_{\mu^+}\| = \frac{\sqrt{(m_{\pi^+}^2 - (m_{\mu^+} + m_{\nu_\mu})^2)(m_{\pi^+}^2 - (m_{\mu^+} - m_{\nu_\mu})^2)}}{2m_{\pi^+}}$$

Considerando as mesmas definições anteriores, temos:

$$\|\vec{p}_{\mu^+}\| = \frac{\sqrt{(m_{\pi^+}^2 - m_{\mu^+}^2)(m_{\pi^+}^2 - m_{\mu^+}^2)}}{2m_{\pi^+}}$$

Simplificando, temos:

$$\|\vec{p}_{\mu^+}\| = \frac{m_{\pi^+}^2 - m_{\mu^+}^2}{2m_{\pi^+}}$$

Substituindo os valores:

$$\|\vec{p}_{\mu^+}\| = \frac{139,57^2 - 105,66^2}{2.139,57}$$

Assim chegamos no valor para o momento do muon:

$$\|\vec{p}_{\mu^+}\| = 29,79\ MeV$$

**Exercício 10:**

Prove o decaimento de 3 corpos: $\|\vec{p_3}\| = \frac{\sqrt{(M^2-(s_{12}+m_3)^2)(M^2-(s_{12}-m_3)^2)}}{2M}$

Para fazer isso podemos utilizar as variáveis de Mandelstam: $s = (p_1 + p_2)^2$

Como se trata do decaimento de 3 corpos, podemos escrever a conservação de momento como:

$$P = p_1 + p_2 + p_3$$

E pela conservação de energia, temos:

$$E = E_1 + E_2 + E_3$$

Podemos verificar que:

$$(P - p_1) = (p_2 + p_3)\ ou\ (P - p_2) = (p_1 + p_1)\ ou\ ainda\ (P - p_3) = (p_1 + p_2)$$

Assim podemos definir as variáveis de Mandelstam como: $s_{12} = (p_1+p_2)^2 = (P-p_3)^2 = s_{21}$, $s_{13} = (p_1+p_3)^2 = (P - p_2)^2 = s_{31}$ e $s_{23} = (p_2 + p_3)^2 = (P - p_1)^2 = s_{32}$

Considerando momento e energia, podemos escrever: $s_{12} = (E - E_3)^2 - \|\vec{P} - \vec{p_3}\|^2$
$s_{31} = (E - E_2)^2 - \|\vec{P} - \vec{p_2}\|^2$
$s_{23} = (E - E_1)^2 - \|\vec{P} - \vec{p_1}\|^2$

Somando todos os termos podemos simplificar para:

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = \sum_{i=1}^{3}((E - E_i)^2 - \|\vec{P} - \vec{p_i}\|^2)$$

Abrindo os termos dentro do somatório e considerando os ângulos $\theta_i$ formados pelas partículas que surgiram do decaimento com a partícula que decaiu, temos:

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = \sum_{i=1}^{3}(E^2 + E_i^2 - 2EE_i - (\|\vec{P}\|^2 + \|\vec{p_i}\|^2 - 2\|\vec{P}\|\|\vec{p_i}\|cos\theta_i))$$

Lembrando da relação momento e energia: $E^2 - \|P\|^2 = M^2$ e simplificando os termos, temos:

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = \sum_{i=1}^{3}(M^2 + m_i^2 - 2EE_i + 2\|\vec{P}\|\|\vec{p_i}\|cos\theta_i)$$

Abrindo o somatório e lembrando que $E = E_1 + E_2 + E_3$ e $\|\vec{P}\| = \|\vec{p_1}\|cos\theta_1 + \|\vec{p_2}\|cos\theta_2 + \|\vec{p_3}\|cos\theta_3$, de forma simplificada, temos:

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

Se considerarmos os eventos no centro de massa, podemos dizer que $\|P\| \vec{=} 0$ e $E = M$. Sendo assim, podemos reescrever $s_{12} = (E - E_3)^2 - \|\vec{P} - \vec{p_3}\|^2$, como:

$$s_{12} = (M - E_3)^2 - \|\vec{p_3}\|^2 = M^2 + E_3^2 - 2ME_3 - \|\vec{p_3}\|^2$$

$$s_{12} = M^2 + E_3^2 - 2ME_3 - \|\vec{p_3}\|^2 = M^2 + m_2^2 - 2ME_3$$

Isolando $E_3$, temos:

$$E_3 = \frac{M^2 + E_3^2 - s_{12}}{2M}$$

Elevando os dois lados da equação ao quadrado e lembrando que $E_3^2 - \|\vec{p_3}\|^2 = m_3^2$, temos:

$$\|\vec{p_3}\|^2 + m_3^2 = \frac{M^4 + E_3^4 - s_{12}^2 - 2M^2 s_{12} - 2m_3^2 s_{12} + 2M^2 m_3^2}{4M^2}$$

Isolando $\|\vec{p_3}\|^2$ e fazendo o mmc, temos:

$$\|\vec{p_3}\|^2 = \frac{M^4 + E_3^4 - s_{12}^2 - 2M^2 s_{12} - 2m_3^2 s_{12} + 2M^2 m_3^2 - 4m^2 m_3^2}{4M^2}$$

Simplificando e aplicando a raiz em ambos os lados, chegamos em:

$$\|\vec{p_3}\| = \frac{\sqrt{(M^2 - (s_{12} + m_3)^2)(M^2 - (s_{12} - m_3)^2)}}{2M}$$

**Exercício 10a:**

Prove o decaimento: $\pi + p \to \pi + \pi + \pi + p$, $\sqrt{s} \geq \sum_i m_i c^2$, $E_\pi = \frac{\sum_i m_i c^2 - (m_\pi c^2)^2 - (m_p c^2)^2}{2m_p c^2} \approx 500\ MeV$.

Para fazer isso vamos considerar as variáveis de Mandelstam: $s = (p_1 + p_2)^2$. Assim, temos:

$$s = (p_\pi + p_p)^2 = p_\pi^2 + p_p^2 + 2p_\pi p_p$$

Pela relação de momento escalar de quadrivetores, temos:

$$s = (p_\pi + p_p)^2 = p_\pi^2 + p_p^2 + 2(E_\pi E_p - \|\vec{p_\pi}\|\|\vec{p_p}\|)$$

Podemos considerar o decaimento no referencial do centro de massa, logo $\|\vec{p_p}\| = 0$ e $E_p = m_p$, lembrando que $p_\pi^2 = m_\pi^2$ e $p_p^2 = m_p^2$ Assim, temos:

$$s = (p_\pi + p_p)^2 = m_\pi^2 + m_p^2 + 2E_\pi m_p$$

Isolando $E_\pi$, temos:

$$E_\pi = \frac{s - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p}$$

Como $\sqrt{s} \geq \sum_i m_i c^2$, temos:

$$E_\pi \geq \frac{(\sum_i m_i)^2 - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p}$$

Podemos ver que nesse decaimento, além das partículas iniciais, mais dois píons surgem. Sendo assim, o somatório pode ser aplicado:

$$E_\pi \geq \frac{4m_\pi^2 - m_\pi^2 - m_p^2}{2m_p}$$

$$E_\pi \geq \frac{(3m_\pi + m_p)^2 - m_p^2}{2m_p}$$

Expandindo o termo ao quadrado e simplificando, temos:

$$E_\pi \geq \frac{8m_\pi^2 + 6m_\pi m_p}{2m_p}$$

Podemos pesquisar as massas dessa partículas: $m_\pi = 139,6\ MeV$ e $m_p = 938\ MeV$. Substituindo temos:

$$E_\pi \geq \frac{8(139,6)^2 + 6.139,6.938}{2.938} \approx 500\ MeV$$