Algebră, anul I Informatică

28 noiembrie 2024

1 Obligatorii

Exerciţiul 1 (E3.1.31) *Să se arate că* $\mathbb{R}_+^* = (0, \infty)$ *este un* $\mathbb{R}$*-spaţiu vectorial în raport cu adunarea vectorilor*

$$\boxplus : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*, \qquad x \boxplus y = xy, \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$$

şi cu înmulţirea cu scalari

$$\boxdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*, \qquad \alpha \boxdot x = x^\alpha . \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Soluţie. $\left(\mathbb{R}_+^*, \boxplus\right) = \left(\mathbb{R}_+^*, .\right)$ este grup abelian. Verificăm axiomele înmulţirii cu scalari:

$$\begin{aligned}
\alpha \boxdot (x \boxplus y) &= (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha = \alpha \boxdot x \boxplus \alpha \boxdot y \\
(\alpha + \beta) \boxdot x &= x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta = x^\alpha \boxplus y^\beta = \alpha \boxdot x \boxplus \beta \boxdot x \\
\alpha \boxdot (\beta \boxdot x) &= \alpha \boxdot \left(x^\beta\right) = \left(x^\beta\right)^\alpha = x^{\alpha\beta} = (\alpha\beta) \boxdot x \\
1 \boxdot x &= x^1 = x.
\end{aligned}$$

Deci, este spaţiu liniar peste $\mathbb{R}$. ■

Exerciţiul 2 (E3.1.32) *Să se verifice că operaţiile:*

$$\begin{aligned}
&\boxplus : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \boxplus y = \sqrt[5]{x^5 + y^5},\ \forall x, y \in \mathbb{R} \\
&\boxdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \boxdot x = \alpha \sqrt[5]{\alpha} x,\ \forall x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

definesc o structură de $\mathbb{R}$*-spaţiu vectorial pe* $\mathbb{R}$.

Soluţie. $x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow x \boxplus y = \sqrt[5]{x^5 + y^5} \in \mathbb{R}$. Operaţia este comutativă: $x \boxplus y = \sqrt[5]{x^5 + y^5} = \sqrt[5]{y^5 + x^5} = y \boxplus x$. 0 este element neutru: $x \boxplus 0 = \sqrt[5]{x^5 + 0^5} = \sqrt[5]{x^5} = x$.

Element simetric (opus): $x \boxplus x' = \sqrt[5]{x^5 + x'^5} = 0 \Longrightarrow x' = -x$. $(\mathbb{R}, \boxplus)$ este grup abelian.

Proprietăţile înmulţirii cu scalari:

$$\alpha \boxdot (x \boxplus y) = \alpha \boxdot \sqrt[5]{x^5 + y^5} = \alpha \sqrt[5]{\alpha} \sqrt[5]{x^5 + y^5} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \alpha \boxdot x \boxplus \alpha \boxdot y &= \left(\alpha \sqrt[5]{\alpha} x\right) \boxplus \left(\alpha \sqrt[5]{\alpha} y\right) = \sqrt[5]{\alpha^5 \alpha x^5 + \alpha^5 \alpha x^5} \\ &= \sqrt[5]{\alpha^5 \alpha \left(x^5 + y^5\right)} = \alpha \sqrt[5]{\alpha} \sqrt[5]{x^5 + y^5} \end{aligned} \tag{2}$$

(1), (2)$\Longrightarrow \alpha \boxdot (x \boxplus y) = \alpha \boxdot x \boxplus \alpha \boxdot y$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \boxdot x &= (\alpha + \beta) \sqrt[5]{(\alpha + \beta)} x \\ \alpha \boxdot x \boxplus \beta \boxdot x &= \alpha \sqrt[5]{\alpha} x \boxplus \beta \sqrt[5]{\beta} x = \sqrt[5]{\alpha^5 \alpha x^5 + \beta^5 \beta x^5} \\ &= x \sqrt[5]{\alpha^6 + \beta^6} \end{aligned}$$

$$\alpha \boxdot (\beta \boxdot x) = (\alpha\beta) \boxdot x??$$

Avem

$$\alpha \boxdot (\beta \boxdot x) = \alpha \boxdot \left(\beta \sqrt[5]{\beta}\right) x = \alpha \sqrt[5]{\alpha} \beta \sqrt[5]{\beta} x = \alpha\beta \sqrt[5]{\alpha\beta} x \tag{3}$$

$$(\alpha\beta) \boxdot x = \alpha\beta \sqrt[5]{\alpha\beta} x \tag{4}$$

(3),(4)$\Longrightarrow \alpha \boxdot (\beta \boxdot x) = (\alpha\beta) \boxdot x$
$1 \boxdot x = x$?

$$1 \boxdot x = 1 \sqrt[5]{1} x = x.$$

■

Observaţia 3 *Dacă se schimbă definiţia înmulţirii cu scalari*

$$\boxdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha \boxdot x = \sqrt[5]{\alpha} x, \ \forall x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$$

avem

SM1

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \boxdot (x \boxplus y) = \alpha \boxdot \sqrt[5]{x^5 + y^5} = \sqrt[5]{\alpha} \sqrt[5]{x^5 + y^5}; \\ \alpha \boxdot x \boxplus \alpha \boxdot y = \sqrt[5]{\alpha} x \boxplus \sqrt[5]{\alpha} y = \sqrt[5]{\alpha x^5 + \alpha y^5} = \sqrt[5]{\alpha} \sqrt[5]{x^5 + y^5} \end{array}\right\}$$
$$\Longrightarrow \alpha \boxdot (x \boxplus y) = \sqrt[5]{\alpha} \sqrt[5]{x^5 + y^5}$$

SM2

$$\left.\begin{array}{r} (\alpha + \beta) \boxdot x = \sqrt[5]{\alpha + \beta} x; \\ \alpha \boxdot x \boxplus \beta \boxdot x = \sqrt[5]{\alpha} x \boxplus \sqrt[5]{\beta} x = \sqrt{\alpha x^5 + \beta x^5} = \sqrt[5]{\alpha + \beta} x \end{array}\right\}$$
$$\Longrightarrow (\alpha + \beta) \boxdot x = \alpha \boxdot x \boxplus \beta \boxdot x$$

SM3 $(\alpha\beta) \boxdot x = \sqrt[5]{\alpha\beta} x = \sqrt[5]{\alpha} \left(\sqrt[5]{\beta} x\right) = \alpha \boxdot (\beta \boxdot x)$

SM4 $1 \boxdot x = \sqrt[5]{1}x = x$

şi rezultă că $(\mathbb{R}, \boxplus, \boxdot)$ *este* $\mathbb{R}$*-spaţiu liniar.*

Exerciţiul 4 (E3.1.33) *Care dintre următoarele submulţimi ale mulţimii* $\mathbb{R}^3$ *sunt* $\mathbb{R}$*-subspaţii:*

- $A = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 | 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.
- $B = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 | 2x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$.
- $C = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_2 = x_3\}$.
- $D = \left\{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + x_2 = 0\right\}$.
- $E = \mathbb{R}^3 \backslash A$.
- $F = \left(\mathbb{R}^3 \backslash A\right) \cup \{0\}$.

Soluţie.

- Fie $x = [x_1, x_2, x_3],\ y = [y_1, y_2, y_3] \in A$; are loc $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ şi $2y_1 + y_2 - y_3 = 0$. Se observă că $\theta = [0, 0, 0] \in A$. Fie

  $$[d_1, d_2, d_3] = [x_1, x_2, x_3] - [y_1, y_2, y_3] = [x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3].$$

  Se mai observă că

  $$2d_1 + d_2 - d_3 = 2x_1 + x_2 - x_3 - (2y_1 + y_2 - y_3) = 0,$$

  adică $d = x - y \in A$. De asemenea $\alpha x = [\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3]$ verifică $2\alpha x_1 + \alpha x_2 - \alpha x_3 = \alpha(2x_1 + x_2 - x_3) = 0$, adică $\alpha x \in A$. A este $\mathbb{R}$-subspaţiu al lui $\mathbb{R}^3$.

- $\theta = [0, 0, 0] \notin B$; nu este subspaţiu

- $C = \left\{[a, a, a] \,| a \in \mathbb{R}\right\}$. Fie $x = [a, a, a],\ y = [b, b, b] \in C$. Se observă că $\theta \in C$, $x - y = [a - b, a - b, a - b] \in C$ şi $\alpha x = [\alpha a, \alpha a, \alpha a] \in C$. C este $\mathbb{R}$-subspaţiu al lui $\mathbb{R}^3$.

- $x = [x_1, x_2, x_3],\ y = [y_1, y_2, y_3] \in D$; are loc $x_1^2 + x_2 = 0$ şi $y_1^2 + y_2 = 0$. Se observă că $\theta = [0, 0, 0] \in A$. Fie

  $$[d_1, d_2, d_3] = [x_1, x_2, x_3] + [y_1, y_2, y_3] = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3].$$

  Se mai observă că

  $$d_1^2 + d_2 = (x_1 + y_1)^2 + x_2 + y_2 = x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2 + y_2 = 2x_1y_1 \neq 0$$

  Luăm $x = [1, -1, 0] \in D$, $2x = [2, -2, 0] \notin D$, deoarece $2^2 - 2 \neq 0$. Nu este subspaţiu.

- $\theta \notin E$, deoarece $\theta \in A$; nu este subspaţiu.
- $\theta \in F$, $x = [x_1, x_2, x_3] \notin A$, $y = [y_1, y_2, y_3] \notin A$; are loc $2x_1 + x_2 - x_3 \neq 0$ şi $2y_1 + y_2 - y_3 \neq 0$. $x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3]$. Fie $x = [1, 0, 6] \notin A$, $y = [0, 1, -3] \notin A$, $x + y = [1, 1, 3] \in A$, deci $x + y \notin F$. Nu este subspaţiu.

■

2 Opţionale

Exerciţiul 5 (E3.1.34) *Fie $n \in \mathbb{N}$ fixat. Să se arate că*

$$K_n[X] = \{f \in K[X] | \deg(f) \leq n\}$$

este un K-subspaţiu a lui $K[X]$.

Soluţie. Fie $g = b_0 + b_1 X + \cdots + b_n X^n$ şi $f = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, $\theta = 0 + 0X + \cdots + 0X^n \in K_n[X]$. $f + g = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_n)X^n \in K_n[X]$.

$\alpha f = \alpha a_0 + \alpha a_1 X + \cdots + \alpha a_n X^n \in K_n[X]$. Este subspaţiu. ■

Exerciţiul 6 (E3.1.35) *Să se găsească ecuaţiile care determină vectorii din următoarele subspaţii: $S = \langle [1, 2, -1] \rangle$ şi $T = \langle [1, 2, 1], [-2, 1, -3] \rangle$ ale lui $\mathbb{R}^3$ (ecuaţiile acestor subspaţii).*

Soluţie. $S = \{\alpha[1, 2, -1] : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{[\alpha, 2\alpha, -\alpha] : \alpha \in \mathbb{R}\} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 | x = \frac{y}{2} = -z\}$.

$\alpha[1, 2, 1] + \beta[-2, 1, -3] = [\alpha - 2\beta, 2\alpha + \beta, \alpha - 3\beta]$;

$$T = \{[\alpha - 2\beta, 2\alpha + \beta, \alpha - 3\beta] \, | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 | -7x + y + 5z = 0\}.$$

■

Exerciţiul 7 (E3.1.36) *Să se scrie subspaţiile $S = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 | x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$ şi $T = \{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 | x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = x_3 - x_1\}$ ale lui $\mathbb{R}^3$ ca subspaţii generate (cu număr minimal de generatori).*

Soluţie. Se observă că $x = [1, 1, 0] \in S$, $y = [2, 1, 1] \in S$. Avem $\langle x, y \rangle \subseteq S$.

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \{\alpha x + \beta y | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \\ &= \{[\alpha + 2\beta, \alpha + \beta, \beta] \, | \alpha + \beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Fie $u = [x_1, x_2, x_3] \in S$. Vom arăta că $u \in \langle x, y \rangle$, adică $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $\alpha x + \beta y = [\alpha + 2\beta, \alpha + \beta, \beta] = u$. Se ajunge la sistemul

$$\begin{aligned} \alpha + 2\beta &= x_1 \\ \alpha + \beta &= x_2 \\ \beta &= x_3 \end{aligned}$$

care este compatibil $\beta = x_3$, $\alpha = x_2 - x_3$ (din a doua ecuaţie), $\alpha = x_1 - 2x_3 \Longrightarrow x_2 - x_3 = x_1 - 2x_3 \Longleftrightarrow x_1 - x_2 - x_3 = 0$; sau cu Rouché sau cu Kronecker-Capelli.

Interpretare geometrică: S este un plan ce trece prin origine $\dim S = 2$, deci poate fi generat de doi vectori ai săi necoliniari

$T =< [1, 1, 1] >= \{[a, a, a] \,|a \in \mathbb{R}\}$. Interpretare geometrică: T este o dreaptă ce trece prin origine cu vectorul director $[1, 1, 1]$. $\blacksquare$