Algebră, anul I Informatică

6 noiembrie 2024

1 Obligatorii

Exerciţiul 1 (E1.4.46) *Vezi seminarul 5 (`sem5alg.pdf`)*

Exerciţiul 2 (E1.4.36) *Să se arate că divizibilitatea pe* $\mathbb{Z}$ *este o preordine care nu este nici simetrică şi nici antisimetrică.*

Soluţie. $x, y \in \mathbb{Z}, x|y \iff \exists k \in \mathbb{Z} : y = kx$

Reflexivitatea $x|x$ $(k = 1)$

Tranzitivitatea $x|y \wedge y|z \implies y = k_1x \wedge z = k_2y \implies z = k_2k_1x \implies x|z$

Nu este simetrică, $2|4$ dar $4 \nmid 2$; nu este nici antisimetrică $x|y \wedge y|x \implies \exists k_1, k_2 \in \mathbb{Z} : y = k_1x \wedge x = k_2y \implies y = k_1k_2y \implies k_1k_2 = 1$, $k_1 = \pm 1$, $k_2 = \pm 1$.

Cex: $2| - 2 \wedge -2|2$, dar $2 \neq -2$. ∎

Exerciţiul 3 (E1.4.52) $(\mathbb{N}, |)$ *este o latice (aici cu* $|$ *se notează divizibilitatea). Este* $(\mathbb{N}, |)$ *completă?*

Soluţie. $x, y \in \mathbb{N}$, $x \wedge y = (x, y)$, $x \vee y = [x, y]$. $(x, y)|x$, $(x, y)|y$; $\forall z \in \mathbb{N} : z|x \wedge z|y \implies z|(x, y)$ (justificare: $g = (x, y) \iff \exists(a, b) \in \mathbb{Z} : ax + by = g$; de aici $z|g$)

$x|[x, y]$, $y|[x, y]$; $\forall z \in \mathbb{N} : x|z \wedge y|z$ avem $[x, y]|z$. Laticea este completă 1 divide orice număr, 0 este divizibil prin orice număr. ∎

Exerciţiul 4 (E1.4.53) *Arătaţi că* $(\mathbb{N}, \leq)$ *este o latice care nu este completă. Explicaţi de ce acest exemplu nu contrazice Propoziţia 1.4.32.*

Soluţie. Fie $x, y \in \mathbb{N}$; $x \wedge y = \min(x, y)$, $x \vee y = \max(x, y)$. Laticea nu este completă, deoarece $\sup \mathbb{N} = +\infty \notin \mathbb{N}$.

Propoziţia 1.4.32. O mulţime ordonată $(L, \leq)$ este o latice completă ddacă există $\inf X$ pentru orice $X \subseteq L$. Dar, $\inf \emptyset = \sup \mathbb{N} \notin \mathbb{N}$. ∎

Exerciţiul 5 (E1.4.54) $(\mathcal{P}(X),)$ *este o latice completă pentru orice mulţime* X.

Soluţie. $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $A \wedge B = A \cap B$, $A \vee B = A \cup B$. Să verificăm că $A \cap B \in \mathcal{P}(X)$ şi $A \cup B \in \mathcal{P}(X)$ sunt infimumul şi supremumul lui (A, B).

$A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$; fie $C \subseteq A$ şi $C \subseteq B$, $C \subseteq A \cap B$.

$A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$; fie $D \supseteq A$ şi $D \supseteq B$, $D \supseteq A \cup B$.

Fie $(A_i)_{i \in I}$ o mulţime de părţi ale lui X. Avem $\sup((A_i)_{i \in I}) = \bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{P}(X)$ şi $\inf((A_i)_{i \in I}) = \bigcap\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{P}(X)$. ■

2 Opţionale

Exerciţiul 6 (E1.4.55) *Pe mulţimea $\mathcal{L}$ a tuturor propoziţiilor logice se defineşte relaţia $p \preceq q$ ddacă $p \rightarrow q$ este o tautologie. Să se arate că este o preordine. Să se determine relaţia de echivalenţă asociată $\equiv = (\preceq \cap \preceq^{-1})$ (vezi Exerciţiul 1.4.35) şi mulţimea factor $\mathcal{L}/\equiv$ (această mulţime este numită* algebra Lindenbaum-Tarski*). Să se arate că $\mathcal{L}/\equiv$ este o latice completă.*

Soluţie. " $\preceq$ " preordine: reflexivitate $p \rightarrow p$, tautologie; $p \rightarrow q$ tautologie$\wedge q \rightarrow r$ tautologie$\Rightarrow$ $p \rightarrow r$ tautologie; de fapt $p \rightarrow q$ tautologie înseamnă $p \Rightarrow q$.

Relaţia de echivalenţă corespunzătoare este $p \equiv q$ ddacă $p \Longleftrightarrow q$. Mulţimea cât (factor) $\mathcal{L}/\equiv$ o notăm cu S. Clasa lui p, $[p]$ este mulţime tuturor propoziţiilor echivalente cu p. Relaţia de ordine este $[p] \leq [q]$ ddacă $p \preceq q$, adică $p \Rightarrow q$. Să arătăm că $(S, \leq)$ este latice.

Ordinea:

reflexivitate: $[a] \leq [a]$ ddacă $a \Rightarrow a$

tranzitivitatea: $([a] \leq [b]$ şi $[b] \leq [c]) \Rightarrow (a \Rightarrow c) \Rightarrow [a] \leq [c]$

antisimetria; $[a] \leq [b]$ şi $[b] \leq [a]$ ddacă $(a \Rightarrow b$ şi $b \Longrightarrow a) \Rightarrow (a \Longleftrightarrow b) \Rightarrow [a] = [b]$.

1. Existenţa marginii inferioare. Fie $\{[a], [b]\}$ o submulţime a lui S cu două elemente; un minorant al mulţimii $\{[a], [b]\}$ este un $[m]$ care verfică $m \Longrightarrow a$ şi $m \Longrightarrow b$. $[a] \wedge [b]$ este un minorant al mulţimii $\{[a], [b]\}$ căci
$$a \wedge b \Longrightarrow a$$
$$a \wedge b \Longrightarrow b$$
şi va fi cel mai mare minorant, deoarece $m \Longrightarrow a$ şi $m \Longrightarrow b$ implică $m \Longrightarrow a \wedge b$, adică $[m] \leq [a \wedge n]$.

2. Existenţa marginii superioare. $[a] \vee [b]$ este majorant al lui $\{[a], [b]\}$ căci $a \Longrightarrow a \vee b$ şi $b \Longrightarrow a \vee b$. Fie $[m]$ un alt majorant; $a \Longrightarrow m$ şi $b \Longrightarrow m$; rezultă $a \vee b \Longrightarrow m$, adică $[a] \vee [b] \leq [m]$.

3. Completitudinea. fie $[v]$ clasa tautologiilor (exemple: „un obiect este sau nu este o masă”; „cu un sfert de oră înainte să moară mai era încă în viaţă”) şi $[f]$ clasa relaţiilor întotdeauna false (exemple: „un obiect este şi nu este o masă”; „acest râu izvorăşte din mare şi se varsă în munţi").

Fie $S' = ([a]_i)_{i \in I}$ o parte a lui S. $\left[\bigwedge_{i \in I} a_i\right]$ este marginea inferioară a lui S', iar $\left[\bigvee_{i \in I} a_i\right]$ este marginea superioară a lui S'. $[f]$ va fi elementul nul, iar $[v]$ elementul universal.

■