CAPITOLUL 1

Vectori şi puncte

1.1 Breviar teoretic

1.1.1 Spaţiul vectorial al vectorilor liberi

Definiţia 1.1. Un *segment orientat* sau un *vector legat* $\overline{AB}$ este o pereche ordonată de puncte (A, B). Punctul A se numeşte *originea* sau *punctul de aplicare* al vectorului, în timp ce punctul B se numeşte *capătul* sau *extremitatea* vectorului. Distanţa dintre punctele A şi B se numeşte *modulul* vectorului $\overline{AB}$ şi se notează cu $\|\overline{AB}\|$. Alternativ, vectorul legat $\overline{AB}$ poate fi gândit ca fiind segmentul $[AB]$ cu o orientare aleasă pe el. Un vector legat se reprezintă cu ajutorul unei săgeţi care pleacă din punctul A şi are vârful în punctul B. În cazul în care punctele A şi B coincid, vectorul $\overline{AB} \equiv \overline{AA}$ se numeşte *vector nul* cu originea în A şi se mai notează cu $\overline{0}_A$ sau, dacă punctul A este subînţeles, pur şi simplu cu $\overline{0}$.

Definiţia 1.2. Vom spune că doi vectori legaţi $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au *aceeaşi direcţie* dacă dreptele suport ale celor două segmente orientate, AB şi CD sunt paralele (sau coincid).

Dacă vectorii legaţi $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ au aceeaşi direcţie, iar dreptele lor suport nu coincid, vom spune că ei au şi *acelaşi sens* dacă dreptele AC şi BD se intersectează în interiorul trapezului $ABDC$. În caz contrar, vom spune că cei doi vectori au sensuri opuse.

Definiţia 1.3. Spunem că doi vectori legaţi $\overline{AB}$ şi $\overline{CD}$ sunt *echipolenţi* şi scriem $\overline{AB} \sim \overline{CD}$ dacă ei au acelaşi modul, aceeaşi direcţie şi acelaşi sens.

Relaţia de echipolenţă este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea tuturor vectorilor legaţi.

Definiţia 1.4. Se numeşte *vector liber* o clasă de echivalenţă în raport cu relaţia de echipolenţă. Vectorul liber determinat de segmentul orientat $\overline{AB}$ se notează cu $\overrightarrow{AB}$. Astfel,

$$\overrightarrow{AB} = \left\{\overline{CD} \,|\, \overline{CD} - \text{segment orientat a.î. } \overline{CD} \sim \overline{AB}\right\}$$

Dacă nu vrem să scoatem în evidenţă un reprezentant, vectorii liberi se notează cu litere mici, de regulă de la începutul alfabetului: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots$.

Adunarea vectorilor liberi

Fie $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ doi vectori liberi oarecare. Alegem un punct oarecare O din spaţiu şi construim un punct A astfel încât să avem $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ şi un punct B astfel încât $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$.

Definiţia 1.5 (regula triunghiului)**.** Se numeşte *sumă* a vectorilor $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ şi se notează cu $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, vectorul $\overrightarrow{OB}$.

Mulţimea $\mathcal{V}$ a vectorilor liberi din spaţiu este un grup abelian în raport cu adunarea vectorilor. Elementul neutru este vectorul nul (clasa vectorilor legaţi de modul zero), iar opusul unui vector liber $[\overline{AB}]$ este vectorul liber $[\overline{BA}]$.

Înmulţirea cu scalari a vectorilor

Definiţia 1.6. Dacă $\mathbf{a}$ un vector liber şi $\lambda \in \mathbb{R}$ un număr real, definim *produsul vectorului* $\mathbf{a}$ *cu scalarul* λ ca fiind un vector, notat cu $\lambda\mathbf{a}$, caracterizat în modul următor:

(i) modulul lui $\lambda\mathbf{a}$ este dat de
$$\|\lambda\mathbf{a}\| := |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\|,$$
produsul din membrul drept fiind un prosus de numere reale;

(ii) direcţia lui $\lambda\mathbf{a}$ coincide cu direcţia lui $\mathbf{a}$;

(iii) sensul lui $\lambda\mathbf{a}$ coincide cu sensul lui $\mathbf{a}$ dacă $\lambda > 0$ sau cu sensul opus sensului lui $\mathbf{a}$ dacă $\lambda < 0$.

În raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire cu scalari, mulţimea vectorilor liberi este un spaţiu vectorial real. Acest spaţiu are dimensiunea 3, dacă segmentele orientate de la care plecăm sunt din spaţiu, sau dimensiunea 2 dacă lucrăm cu vectori situaţi într-un plan. Toate noţiunile legate de spaţii vectoriale se aplică acestui spaţiu (combinaţii liniare, dependenţă liniară, baze, etc.)

1.1.2 Sisteme de coordonate afine

Definiţia 1.7. Considerăm o bază orientată (ordinea vectorilor este fixată!) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ a spaţiului vectorilor liberi şi O un punct din spaţiu. Sistemul $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ se numeşte *reper* sau *sistem de coordonate afine* în $\mathbb{R}^3$. Coordonatele unui punct M sunt, prin definiţie, componentele vectorului $\overrightarrow{OM}$ (*vectorul de poziţie al lui M faţă de origine*), în raport cu baza considerată. Vom scrie $M = M(x_1, x_2, x_3)$ sau $M = M(x, y, z)$.

Analog se definesc coordonatele în plan, dar baza are doar doi vectori.

Definiţia 1.8. O bază orientată în plan $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ se numeşte *directă* sau *dreaptă* dacă atunci când rotim primul vector pentru a-l suprapune peste al doilea, pe drumul cel mai scurt, rotaţia se face în sens trigonometric pozitiv (invers mersului acelor de ceasornic). Altfel baza se numeşte *inversă* sau stângă.

O bază orientată în spaţiu $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ se numeşte *directă* sau *dreaptă* dacă, văzută din extremitatea vectorului al treilea, rotaţia primului vector pentru a-l suprapune peste al doilea, pe drumul cel mai scurt, se face în sens trigonometric pozitiv (invers mersului acelor de ceasornic). Altfel baza se numeşte *inversă* sau stângă.

Un sistem de coordonate este drept sau stâng, după cum este baza orientată care îl defineşte.

Definiţia 1.9. Un sistem de corodonate se numeşte *ortogonal* dacă vectorii bazei sunt perpendiculari doi câte doi. Dacă, în pus, vectorii bazei sunt de lungime 1, sistemul (sau reperul) se numeşte *ortonormat*.

În această culegere, dacă nu se precizează altfel, toate bazele (în plan şi spaţiu) sunt ortonormate şi directe. O astfel de bază, în plan, se notează cu $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, iar în spaţiu, cu $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Dreptele care trec prin origine şi sunt paralele cu vectorii de coordonate se numesc *axe de coordonate*: Ox – paralelă cu $\mathbf{i}$, Oy – paralelă cu $\mathbf{j}$, Oz – paralelă cu $\mathbf{k}$.

1.1.3 Produsul scalar a doi vectori liberi

Dacă $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt doi vectori liberi, *produsul scalar* al celor doi vectori este un număr real, notat cu $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, dat de

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cdot\cos\alpha, \tag{1.1.1}$$

unde α este unghiul dintre cei doi vectori.

Proprietăţi

(a) Pentru orice vector liber $\mathbf{a}$ avem $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a}^2}$.

(b) Produsul scalar este comutativ: pentru orice doi vectori $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ avem $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$.

(c) Produsul scalar liniar în fiecare dintre cei doi factori. Dacă $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ sunt trei vectori liberi, iar λ şi μ sunt două numere reale, atunci

$$(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \lambda\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) + \mu\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}).$$

(d) Doi vectori sunt perpendiculari dacă şi numai dacă produsul lor scalar se anulează (cu convenţia că vectorul nul se consideră perpendicular pe orice vector).

(e) Cosinusul unghiului format de doi vectori liberi $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ este dat de

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|}.$$

Expresia produsului scalar în coordonate

Dacă am ales un sistem de coordonate ortonormat în raport cu care vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt daţi prin $\mathbf{a} = \mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, respectiv $\mathbf{b} = \mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, atunci

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Drept urmare:

- Lungimea unui vector $\mathbf{a}$ este dată de

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

- Cosinusul unghiului format de doi vectori liberi $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ este dat de

$$\cos\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

- Doi vectori $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt perpendiculari dacă şi numai dacă

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

1.1.4 Produsul vectorial al doi vectori

Produsul vectorial al doi vectori $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ este un *vector*, notat $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, definit în modul următor:

1. Dacă vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ sunt coliniari, atunci $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0$.
2. Dacă vectorii $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$ nu sunt coliniari, atunci produsul vectorial $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ este un vector astfel încât:
   (a) $\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\|\cdot\|\mathbf{b}\|\cdot\sin\alpha$, unde α este unghiul dintre cei doi vectori.
   (b) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ este perpendicular atât pe $\mathbf{a}$, cât şi pe $\mathbf{b}$.
   (c) Sensul vectorului $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ se alege astfel încât tripletul ordonat de vectori $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}\times\mathbf{b}\}$ să fie orientat direct.

Proprietăţi

Printre proprietăţile produsului vectorial menţionăm:

- Doi vectori liberi sunt coliniari dacă şi numai dacă produsul lor vectorial este egal cu zero.
- Produsul vectorial este *anticomutativ*: dacă $\mathbf{a}$ şi $\mathbf{b}$, atunci

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}.$$

- Produsul vectorial este liniar în fiecare factor: dacă $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ sunt trei vectori, iar λ şi μ sunt două numere reale, atunci

$$(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \lambda\left(\mathbf{a}\times\mathbf{c}\right)+\mu\left(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\right).$$

- Aria paralelogramului construit pe doi vectori este egală cu norma produsului vectorial al celor doi vectori, iar aria triunghiului construit pe cei doi vectori este egală cu jumătate din această normă.
- Deşi are sens să vorbim de produse vectoriale de trei factori (spre deosebire de cazul produsului scalar), în general produsul vectorial *nu este asociativ*: dacă $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ sunt trei vectori, atunci

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} \neq \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}).$$

Expresia în coordonate a produsului vectorial

Dacă avem doi vectori $\mathbf{a}(a_1, b_1, c_1)$ şi $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$, daţi prin intermediul componentelor lor relativ la o bază ortonormată, atunci produsul lor vectorial se poate scrie

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\cdot\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\cdot\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\cdot\mathbf{k}. \tag{1.1.2}$$

1.1.5 Produsul mixt al trei vectori

Fie $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ trei vectori. Se numeşte *produs mixt* al acestor trei vectori scalarul

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}. \tag{1.1.3}$$

Proprietăţi

1. Modulul produsului mixt al trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ este egal cu volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori:
$$V = \left|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\right|.$$
2. Volumul tetraedrului construit pe trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ este dat de
$$V = \frac{1}{6}\left|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\right|.$$
3. Produsul mixt este liniar în fiecare argument (adică este triliniar).
4. Trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ sunt coplanari dacă şi numai dacă produsul lor mixt se anulează.
5. Trei vectori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$ formează un reper direct dacă şi numai dacă
$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0.$$

Expresia produsului mixt în coordonate

Dacă vectorii $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3), \mathbf{b}(b_1, b_2, b_)$ şi $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$ sunt daţi prin intermediul componentelor lor faţă de o bază ortonormată, atunci

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{1.1.4}$$

1.1.6 Alte produse de vectori

Dublul produs vectorial

Considerăm trei vectori oarecare $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ şi $\mathbf{c}$. Se numeşte *dublu produs vectorial* al celor trei vectori (în această ordine!) unul dintre vectorii $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ şi $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Pentru ei avem expresiile:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{a} \tag{1.1.5}$$

şi

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}. \tag{1.1.6}$$

Produse de patru vectori

Există două produse de patru vectori care apar în aplicaţii. Considerăm patru vectori oarecare $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ şi $\mathbf{d}$.

1. Se numeşte *produs vectorial al celor patru vectori* triplul produs vectorial $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$. El se calculează cu formula

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})\,\mathbf{c} - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\,\mathbf{d} = (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})\,\mathbf{a}. \tag{1.1.7}$$

2. Se numeşte *produs scalar al celor patru vectori* scalarul $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$. El se calculează cu formula

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) & (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) \\ (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) & (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \end{vmatrix}. \tag{1.1.8}$$

CAPITOLUL 2

Dreapta în plan

2.1 Breviar teoretic

Fie Δ o dreaptă din planul π, fixat în acest capitol. Un vector nenul $\mathbf{a}$, coliniar cu dreapta Δ, se numeşte *vector director* al dreptei. Orice dreaptă are o infinitate de vectori directori, întrucât orice vector nenul, coliniar cu un vector director, este, el însuşi, un vector director. Un vector director de lungime egală cu unitatea se numeşte *versor director* al dreptei. Orice dreaptă are exact doi versori directori, care sunt vectori opuşi. Astfel, dacă $\mathbf{a}$ este un vector director oarecare al dreptei Δ, cei doi versori directori ai dreptei sunt vectorii

$$\mathbf{v}_{\pm} = \pm\frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}.$$

Considerăm acum o dreaptă Δ din plan, de vector director $\mathbf{a}$, şi M_0 un punct oarecare al dreptei, care are vectorul de poziţie $\mathbf{r}_0$ relativ la un punct O, fixat, din plan. Atunci vectorul de poziţie $\mathbf{r}$ al oricărui punct M de pe dreaptă se poate scrie ca

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{a}, \tag{2.1.1}$$

unde t este un număr real. Ecuaţia (2.1.1) se numeşte *ecuaţia vectorială* a dreptei Δ.

Dacă relativ la un sistem de coordonate afine $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, cu originea în punctul O, punctul M_0 are coordonatele (x_0, y_0), iar vectorul $\mathbf{a}$ are componentele (l, m), atunci ecuaţia vectorială (2.1.1) se poate scrie ca un sistem de două ecuaţii scalare

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1.2}$$

unde (x, y) sunt cordonatele punctului curent M de pe dreaptă în sistemul de coordonate ales. Ecuaţiile (2.1.2) se numesc *ecuaţiile parametrice* ale dreptei Δ.

Dacă l şi m sunt ambele nenule, putem elimina parametrul t între cele două ecuaţii din sistemul (2.1.2) şi obţinem aşa-numita *ecuaţie canonică* a dreptei Δ:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{2.1.3}$$

Ecuaţia (2.1.3) se poate scrie şi dacă unul dintre numerele l şi m se anulează, cu convenţia că dacă într-una dintre fracţii se anulează numitorul, aceasta este o indicaţie a faptului că numărătorul trebuie să fie identic nul. Astfel, de exemplu, ecuaţia

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{m}$$

trebuie înlocuită cu ecuaţia

$$x - x_0 = 0.$$

Vom utiliza această convenţie în această culegere.

Fie $M_0(x_0, y_0)$ şi $M_1(x_1, y_1)$ două puncte distincte ale dreptei Δ. Atunci vectorul $\overrightarrow{M_0M_1}$ este un vector nenul coliniar cu dreapta, deci e un vector director al său. Dar componentele vectorului $\overrightarrow{M_0M_1}$ sunt $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$, prin urmare, ecuaţia canonică a dreptei Δ se poate scrie

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}. \tag{2.1.4}$$

Aceasta este *ecuaţia dreptei prin două puncte*.

Să considerăm, acum, o dreaptă Δ din plan, care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ şi are vectorul director $\mathbf{a}(l, m)$ astfel încât $l \neq 0$ (dreapta nu este "verticală"). Atunci ecuaţia canonică a dreptei, (2.1.3), poate fi rescrisă sub forma

$$y - y_0 = \frac{m}{l}(x - x_0).$$

Numărul $k \equiv \dfrac{m}{l}$ se numeşte *coeficientul unghiular al dreptei*. În cazul în care baza de coordonate este ortonormată, atunci k este unghiul pe care dreapta îl face cu direcţia pozitivă a axei Ox şi se numeşte *panta dreptei*. În cele ce urmează, baza de coordonate va fi întotdeauna ortonormată. Ecuaţia

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{2.1.5}$$

este ecuaţia dreptei Δ, care *trece prin M_0 şi are panta k*.

Este uşor de constatat că ecuaţia (2.1.5) se poate rescrie sub forma

$$y = kx + b, \tag{2.1.6}$$

unde $b = y_0 - kx_0$. Această formă a ecuaţiei dreptei se numeşte *ecuaţia explicită*. Un alt nume care se foloseşte este *ecuaţia pantă-tăietură*, deoarece b este ordonata punctului în care dreapta taie axa Oy (*tăietura* dreptei pe axa Oy).

Revenind la ecuaţia vectorială a dreptei (2.1.1), putem rescrie această ecuaţie sub forma

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = t\mathbf{a}. \tag{*}$$

Fie $\mathbf{n}$ un vector nenul perpendicular pe vectorul director al dreptei (un vector *normal* la dreaptă). Există o infinitate de astfel de vectori, toţi coliniari între ei. Dacă înmulţim scalar ambii membri ai ecuaţiei (*) cu $\mathbf{n}$, obţinem că vectorii de poziţie ai tuturor punctelor de pe dreaptă verifică ecuaţia

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{2.1.7}$$

Se vede uşor că şi reciproca este adevărată (orice punct al cărui vector de poziţie verifică ecuaţia (2.1.7) aparţine dreptei).

Dacă folosim componentele vectorilor, ecuaţia (2.1.7) se poate scrie sub forma

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) = 0$$

sau

$$n_1x + n_2y - n_1x_0 - n_2y_0 = 0.$$

Astfel, ecuaţia unei drepte în plan se poate scrie sub forma

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.1.8}$$

unde coeficienţii A şi B nu se anulează simultan şi ei sunt componentele unui vector normal la dreaptă. Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia generală a dreptei*. Ea poate fi folosită pentru drepte de orice direcţie, inclusiv drepte verticale.

Observaţie. Cum vectorul $\mathbf{n}(A, B)$ este un vector normal la dreapta de ecuaţie (2.1.8), este clar că vectorul $\mathbf{a}(-B, A)$ este un vector director al dreptei, întrucât el este un vector (nenul!) perpendicular pe vectorul normal. Astfel, din ecuaţia generală a dreptei putem citi imediat atât un vector normal, cât şi un vector director.

Dacă dreapta nu trece prin origine şi nu este paralelă cu nici una dintre axele de coordonate, atunci ecuaţia generală a dreptei se poate scrie sub forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0. \tag{2.1.9}$$

Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia dreptei prin tăieturi*, deoarece numerele reale a şi b reprezintă abscisa (respectiv ordonata) punctului în care dreapta intersectează axa Ox (respectiv axa Oy), adică sunt ceea ce numim *tăieturile* dreptei pe cele două axe de coordonate.

Uneori este util să scriem ecuaţia unei drepte care trece printr-un punct dat prin intersecţia a două drepte, fără a determina efectiv coordonatele punctului de intersecţie. Aceasta se face utilizând ecuaţia *fasciculului de drepte* determinat de cele două drepte. Astfel, dacă

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \tag{2.1.10}$$

şi

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{2.1.11}$$

sunt două drepte concurente, adică dacă

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{2.1.12}$$

atunci o dreaptă oarecare care trece prin punctul de intersecţie al celor două drepte are ecuaţia de forma

$$\lambda\,(A_1x + B_1y + C_1) + \mu\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{2.1.13}$$

unde λ şi μ sunt doi parametri reali, care nu se pot anula simultan.

Mulţimea tuturor dreptelor din plan ale căror ecuaţii se pot scrie sub forma (2.1.13), pentru anumite valori ale parametrilor, formează *fasciculul de drepte determinat de dreptele* (2.1.10) *şi* (2.1.11).

Observaţie. Uneori ecuaţia fasciculului de drepte se scrie sub forma

$$A_1x + B_1y + C_1 + \alpha\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0, \tag{2.1.14}$$

unde α poate lua orice valoare reală, inclusiv 0. Este de remarcat, totuşi, că ecuaţia (2.1.14) nu descrie şi dreapta (2.1.11), care ar corespunde lui $\alpha = \infty$.

Unghiul dintre două drepte este unghiul dintre vectorii lor directori (sau, ceea ce este acelaşi lucru, unghiul dintre vectorii normali). Întrucât schimbând sensul unuia dintre cei doi vectori tangenţi unghiul se înlocuieşte cu suplementul său, înseamnă că avem, de fapt, două unghiuri, unul ascuţit şi unul obtuz.

Dacă cele două drepte sunt date prin ecuaţiile lor generale, (2.1.10) şi (2.1.11), atunci vectorii lor normali sunt $\mathbf{n}_1(A_1, B_1)$ şi $\mathbf{n}_2(A_2, B_2)$, deci cosinusurile unghiurilor celor două unghiuri dintre drepte sunt date de

$$\cos\theta = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \tag{2.1.15}$$

Dacă dreptele sunt date prin ecuaţiile lor explicite, $y = k_1x + b_1$, respectiv $y = k_2x + b_2$, atunci putem scrie tangentele celor două unghiuri dintre drepte:

$$\operatorname{tg}\theta = \pm\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}. \tag{2.1.16}$$

Pentru a determina unghiul *ascuţit* dintre două drepte este suficient ca în formulele (2.1.15) şi (2.1.16) să înlocuim membrii drepţi cu valorile absolute ale acestor cantităţi.

Aceste formule permit stabilirea condiţiilor de paralelism şi perpendicularitate a două drepte.

Astfel, dacă dreptele sunt date prin ecuaţiile lor generale, atunci:

- dreptele sunt perpendiculare dacă şi numai dacă

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0; \tag{2.1.17}$$

- dreptele sunt paralele dacă şi numai dacă

$$A_1B_2 - A_2B_1 = 0. \tag{2.1.18}$$

Dacă dreptele sunt date prin ecuaţiile lor explicite, atunci:

- dreptele sunt perpendiculare dacă şi numai dacă

$$1 + k_1k_2 = 0; \tag{2.1.19}$$

- dreptele sunt paralele dacă şi numai dacă

$$k_1 = k_2. \tag{2.1.20}$$

Dacă în ecuaţia generală a dreptei înlocuim vectorul normal cu unul dintre cei doi versori normali, astfel încât termenul liber să devină negativ, obţinem aşa-numita *formă normală (Hesse)* a ecuaţiei dreptei:

$$\cos\alpha\cdot x + \sin\alpha\cdot y - p = 0, \tag{2.1.21}$$

unde p este distanţa de la origine până la dreaptă (lungimea perpendicularei coborâte din origine pe dreaptă), iar α este unghiul pe care îl face dreapta cu Ox. Dacă dreapta trece prin origine, se poate alege oricare dintre cei doi versori normali la dreaptă.

Dacă se pleacă de la ecuaţia generală a dreptei (2.1.8), ecuaţia normală va fi

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0, \tag{2.1.22}$$

unde semnul de la numitor se alege astfel încât termenul liber să fie negativ. Dacă termenul liber se anulează, putem alege oricare dintre cele două semne.

Distanţa de la un punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ până la o dreaptă dată prin ecuaţia generală (2.1.8) este

$$d(M_0,\Delta) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{2.1.23}$$

CAPITOLUL 3

Dreapta şi planul în spaţiu

3.1 Breviar teoretic

3.1.1 Planul în spaţiu

Fixăm un sistem de coordonate afin în spaţiu, cu origine în punctul O.

Fie Π un plan în spaţiu şi $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – un punct din plan. Dacă $\mathbf{a}_1(l_1, m_1, n_1)$ şi $\mathbf{a}_2(l_2, m_2, n_2)$ sunt doi vectori necoliniari paraleli cu planul Π, atunci vectorul de poziţie $\mathbf{r}$ al unui punct oarecare $M(x, y, z)$ din plan se poate scrie sub forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a}_1 + v\mathbf{a}_2, \tag{3.1.1}$$

unde $\mathbf{r}_0$ este vectorul de poziţie al punctului M_0, iar u şi v sunt numere reale. Ecuaţia (3.1.1) se numeşte *ecuaţia vectorială a planului* Π.

Dacă proiectăm ecuaţia (3.1.1) pe axele de coordonate, obţinem *ecuaţiile parametrice ale planului* Π:

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 \cdot u + l_2 \cdot v, \\ y = y_0 + m_1 \cdot u + m_2 \cdot v, \qquad u, v \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + n_1 \cdot u + n_2 \cdot v, \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Ecuaţia vectorială (3.1.1) exprimă, de fapt, condiţia ca vectorii $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ să fie liniar independenţi, deci, în acest caz, coplanari. Dar condiţia ca cei trei vectori să fie coplanari, aşa cum ştim deja, este echivalentă cu condiţia ca produsul lor mixt să se anuleze:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0. \tag{3.1.3}$$

Vom numi această ecuaţie *ecuaţia vectorială neparametrică a planului care trece printr-un punct dat şi este paralel cu doi vectori (necoliniari) daţi.*

Ecuaţia (3.1.3) se poate rescrie, folosind expresia în coordonate a produsului mixt al trei vectori şi obţinem *ecuaţia scalară a planului care trece printr-un punct dat şi este paralel cu doi vectori (necoliniari) daţi*:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1.4}$$

Trei puncte necoliniare $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ determină un plan Π. Doi vectori necoliniari care sunt paraleli cu acest plan sunt, de exemplu, vectorii

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \quad \text{şi} \quad \overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1).$$

Astfel, planul Π, determinat de cele *trei puncte necoliniare* este planul care trece prin M_1 şi este paralel cu $\overrightarrow{M_1M_2}$ şi $\overrightarrow{M_1M_3}$, prin urmare, ecuaţia sa este

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1.5}$$

Ecuaţia (3.1.5) se mai poate scrie şi în forma mai simetrică şi mai uşor de memorat, dar mai puţin practică

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{3.1.6}$$

Forma cea mai utilizată de reprezentare a unui plan este *ecuaţia generală*,

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.1.7}$$

unde A, B, C, D sunt numere reale, astfel încât A, B, C să nu se anuleze simultan.

Vectorul $\mathbf{n}(A, B, C)$ este un vector *normal* la plan.

Dacă toţi cei patru coeficienţi din ecuaţia generală a planului sunt nenuli (ceea ce este echivalent cu faptul că planul nu e paralel cu nici o axă de coordonate şi nu trece prin origine), atunci ecuaţia se poate rescrie sub forma

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0. \tag{3.1.8}$$

Ecuaţia (3.1.8) se numeşte *ecuaţia planului prin tăieturi*, deoarece numerele a, b, respectiv c sunt abscisa, ordonata, respectiv cota, punctelor în care planul intersectează axa Ox, axa Oy, respectiv axa Oz, adică sunt *tăieturile* planului pe cele trei axe de coordonate.

O formă particulară a ecuaţiei generale a planului se obţine dacă înlocuim vectorul normal la plan cu unul dintre cei doi versori ai săi. Atunci putem alege unul dintre cei doi versori normali astfel încât ecuaţia generală a planului să devină

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z - p = 0, \tag{3.1.9}$$

unde p este distanţa de la origine până la plan (lungimea perpendicularei coborâte din origine pe plan), iar α, β şi γ sunt unghiurile făcute de versorul normal cu axele Ox, Oy, respectiv Oz.

Ecuaţia (3.1.9) se numeşte *forma normală* sau *forma Hesse* a ecuaţiei generale a planului. Dacă planul trece prin origine, atunci p este egal cu zero şi se poate folosi oricare dintre cei doi versori.

Dacă planul este dat prin ecuaţia generală (3.1.7), atunci ecuaţia sa normală se poate scrie sub forma

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0, \tag{3.1.10}$$

unde semnul de la numitor se alege astfel încât termenul liber,

$$\frac{D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

să fie negativ.

Un plan separă planul în două semispaţii deschise:

semispaţiul negativ (cel care conţine originea) şi

semispaţiul pozitiv (cel opus semispaţiului negativ).

Dacă planul trece prin origine, atunci se alege un versor normal oarecare. Semispaţiul pozitiv va fi acela care conţine extremitatea versorului normal, atunci când vectorul este ataşat unui punct din plan.

Se numeşte *abatere* a unui punct $M_0(x_0, y_0, z_0)$ relativ la un plan Π dat prin ecuaţia normal (3.1.9) numărul real

$$\delta(M_0, \Pi) = \cos\alpha \cdot x_0 + \cos\beta \cdot y_0 + \cos\gamma \cdot z_0 - p. \tag{3.1.11}$$

Dacă planul este dat printr-o ecuaţie generală arbitrară, de forma (3.1.7), atunci abaterea punctului faţă de plan va fi dată de relaţia

$$\delta(M_0, \Pi) = \frac{Ax_0 + By_0 + C_0 z + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{3.1.12}$$

cu aceeaşi regulă de alegere a semnului de la radical ca în cazul ecuaţiei normale a planului.

Abaterea unui punct de la un plan este lungimea cu semn a perpendicularei coborâte din punct pe plan, lungimea fiind considerată negativă atunci când punctul de află în semispaţiul negativ definit de plan şi pozitivă atunci când acesta se găseşte în semispaţiul pozitiv.

Distanţa $d(M_0, \Pi)$ de la un punct M_0 la un plan Π este lungimea perpendicularei coborâte din punct pe plan, adică avem

$$d(M_0, \Pi) = |\delta(M_0, \Pi)|. \tag{3.1.13}$$

Astfel, dacă planul este dat prin ecuaţia normală, atunci

$$d(M_0, \Pi) = |\cos\alpha \cdot x_0 + \cos\beta \cdot y_0 + \cos\gamma \cdot z_0 - p|, \tag{3.1.14}$$

în timp ce dacă planul este dat printr-o ecuaţie generală oarecare, atunci

$$d(M_0, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C_0 z + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3.1.15}$$

Unghiul a două plane este unghiul plan asociat unghiului diedru format de plane. El este egal cu unghiul format de vectorii normali la cele două plane. Ca şi în cazul dreptei în plan, există, de fapt, patru unghiuri între cele două plane, două câte două egale (opuse la vârf). De asemenea, ca şi în cazul dreptei în plan, formula pe care o vom da ne dă cosinusul unuia dintre aceste unghiuri.

Dacă cele două plane, fie ele Π_1 şi Π_2 sunt date prin ecuaţiile lor generale

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{3.1.16}$$

respectiv

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{3.1.17}$$

atunci vectorii lor normali sunt $\mathbf{n}_1\,(A_1, B_1, C_1)$, respectiv $\mathbf{n}_2\,(A_2, B_2, C_2)$, atunci cosinusul unghiului α format de cele două plane (de fapt, de cei doi vectori normali) este dat de

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{3.1.18}$$

Unghiul α este ascuţit dacă avem $\cos\alpha > 0$ şi obtuz dacă $\cos\alpha < 0$. Dacă vrem să obţinem unghiul ascuţit, atunci folosim formula

$$\cos\alpha = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{3.1.19}$$

Planele Π_1 şi Π_2 sunt *perpendiculare* dacă vectorii lor normali sunt perpendiculari, deci condiţia de perpendicularitate este

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \tag{3.1.20}$$

în timp ce ele sunt *paralele* atunci când vectorii normali sunt paraleli, deci condiţia de paralelism se scrie

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{3.1.21}$$

Planele bisectoare a două plane concurente, date prin ecuaţiile lor generale (3.1.16) şi (3.1.17) sunt planele care formează unghiuri egale cu cele două plane. Ele reprezintă, pe de altă parte, *locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de cele două plane*, prin urmare vor fi date de ecuaţia

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \tag{3.1.22}$$

sau

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \tag{3.1.23}$$

unde fiecare alegere de semn corespunde câte unui plan bisector.

3.1.2 Dreapta în spaţiu

Ca şi în cazul dreptei în plan, vom numi *vector director* al unei drepte Δ orice vector nenul $\mathbf{a}$ care este coliniar cu dreapta. Şi de data aceasta avem o infinitate de vectori directori, oricare doi dintre ei fiind coliniari între ei.

Dacă alegem o origine O în spaţiu şi un punct M_0 pe dreapta Δ, atunci vectorul de poziţie $\mathbf{r}$ al unui punct oarecare M de pe dreaptă se poate scrie sub forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t \cdot \mathbf{a}, \tag{3.1.24}$$

unde t este un număr real, $\mathbf{r}_0$ este vectorul de poziţie al punctului M_0, iar $\mathbf{a}$ este vectorul director al dreptei. Ecuaţia (3.1.24) se numeşte *ecuaţia vectorială a dreptei care trece prin punctul M_0 şi are vectorul director* $\mathbf{a}$.

Dacă alegem un sistem de coordonate, cu origine în O, relativ la care punctul M are coordonatele (x, y, z), punctul M_0 are coordonatele (x_0, y_0, z_0), iar vectorul $\mathbf{a}$ are componentele (l, m, n), atunci ecuaţia (3.1.24) se poate înlocui cu sistemul de ecuaţii scalare

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + n \cdot t, \end{cases} \tag{3.1.25}$$

Ecuaţiile (3.1.25) se numesc *ecuaţiile parametrice ale dreptei Δ, care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este paralelă cu vectorul $\mathbf{a}$ (sau are vectorul director $\mathbf{a}$).*

Dacă eliminăm parametrul t din ecuaţiile parametrice (3.1.25) obţinem *ecuaţiile canonice ale dreptei care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi care are vectorul director* $\mathbf{a}$:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \tag{3.1.26}$$

Şi aici, ca şi în cazul ecuaţiei canonice a dreptei în plan, folosim convenţia că dacă unul dintre numitori se anulează, atunci şi numărătorul corespunzător trebuie să fie luat egal cu zero. Cu alte cuvinte, de exemplu, sistemul de ecuaţii

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{0}$$

trebuie înlocuit cu sistemul

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}, \quad z-z_0=0,$$

în timp ce sistemul

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{0}$$

se înlocuieşte cu sistemul

$$y-y_0=0, \quad z-z_0=0.$$

Putem scrie cu uşurinţă ecuaţiile dreptei care trece prin două puncte distincte din spaţiu, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi $M_1(x_1,y_1,z_1)$. Un vector director al acestei drepte este

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{M_0M_1}(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0),$$

deci ecuaţiile canonice ale acestei drepte sunt

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}. \tag{3.1.27}$$

În sfârşit, o altă modalitate de a reprezenta o dreaptă este ca intersecţie de două plane:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \end{cases} \tag{3.1.28}$$

unde rangul matricei

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

trebuie să fie egal cu 2, condiţie care este echivalentă cu cerinţa ca vectorii normali la cele două plane să nu fie paraleli, deci planele să se intersecteze.

Dacă o dreaptă Δ este dată prin intermediul unei intersecţii de plane (3.1.28), atunci un vector director al dreptei se poate obţine calculând produsul vectorial al celor doi vectori normali la plane:

$$\mathbf{a}=\mathbf{n}_1(A_1,B_1,C_1)\times\mathbf{n}_2(A_2,B_2,C_2),$$

adică

$$\mathbf{a}=\begin{vmatrix} B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}\mathbf{i}+\begin{vmatrix} C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\mathbf{k}.$$

Distanţa de la un punct $M_1(x_1,y_1,z_1)$ la o dreaptă Δ, care trece prin punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$ şi are vectorul director $\mathbf{a}$, este dată de formula

$$d(M_1,\Delta)=\frac{\|(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{a}\|}{\|\mathbf{a}\|}, \tag{3.1.29}$$

unde $\mathbf{r}_0$, respectiv $\mathbf{r}_1$ sunt vectorii de poziţie ai punctelor M_0, respectiv M_1.

Unghiul a două drepte Δ_1 şi Δ_2 este unghiul format de vectorii lor directori $\mathbf{a}_1(l_1,m_1,n_1)$ şi $\mathbf{a}_2(l_2,m_2,n_2)$. Ca şi în cazul a două drepte în plan, avem un unghi ascuţit şi unul obtuz. Cosinusurile celor două unghiuri sunt date, prin urmare, de formula

$$\cos\alpha=\pm\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}. \tag{3.1.30}$$

Desigur, cosinusul pozitiv corespunde unghiului ascuţit, în timp ce cosinusul negativ corespunde unghiului obtuz.

Dacă vrem să determinăm cosinusul unghiului ascuţit, folosim formula

$$\cos\alpha = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \tag{3.1.31}$$

Cele două drepte sunt *perpendiculare* dacă şi numai dacă vectorii lor sunt perpendiculari, deci condiţia de perpendicularitate este

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \tag{3.1.32}$$

Dreptele sunt, în schimb, *paralele* dacă şi numai dacă vectorii lor directori sunt coliniari, adică

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}, \tag{3.1.33}$$

cu aceeaşi convenţie asupra componentelor nule ca şi în cazul ecuaţiilor canonice ale dreptei.

3.1.3 Dreapta şi planul

Poziţia relativă a două plane

Două plane, Π_1 şi Π_2, date prin ecuaţiile lor generale

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

şi

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

- se taie după o dreaptă dacă
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} = 2;$$
- sunt paralele dacă
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$
- coincid dacă
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Poziţia relativă a trei plane

Considerăm trei plane, date prin ecuaţiile lor generale:

$$\begin{cases} (\Pi_1)\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ (\Pi_2)\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ (\Pi_3)\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases} \tag{3.1.34}$$

Fie Δ determinantul sistemului (3.1.34):

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix},$$

m – matricea sistemului,

$$m = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$$

şi M – matricea sa extinsă,

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Atunci:

(a) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci planele se intersectează într-un punct.

(b) Dacă $\Delta = 0$, $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 3$, iar vectorii normali la cele trei plane sunt, doi câte doi, necoliniari, atunci planele se intersectează, două câte două, după câte o dreaptă, iar cele trei drepte care se obţin sunt paralele.

(c) Dacă $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 3$, dar doi dintre cei trei vectori normali la plane sunt coliniari[1], atunci dintre cele trei plane (cele cu vectorii normali coliniari) sunt paralele între ele, iar cel de-al treilea le intersectează pe celelalte două după câte o dreaptă.

(d) Dacă $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 2$, iar vectorii normali sunt doi câte doi necoliniari, atunci planele sunt două câte două distincte şi trec prin aceeaşi dreaptă.

(e) Dacă $\operatorname{rg} m = 2$, $\operatorname{rg} M = 2$, iar doi dintre cei trei vectori normali sunt coliniari, atunci două dintre plane coincid (cele care au vectorii normali coliniari), iar cel de-al treilea le intersectează după o dreaptă.

(f) Dacă $\operatorname{rg} m = 1$, $\operatorname{rg} M = 3$, atunci planele sunt distincte şi paralele între ele.

(g) Dacă $\operatorname{rg} m = 1$, $\operatorname{rg} M = 2$, atunci două dintre plane coincid, iar cel de-al treilea este paralel cu ele.

(h) Dacă $\operatorname{rg} m = 1$, $\operatorname{rg} M = 1$, atunci toate cele trei plane coincid.

Fascicule de plane şi snopuri de plane

Dacă se dau două plane distincte concurente

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{3.1.35}$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \tag{3.1.36}$$

se numeşte *fascicul de plane* determinat de cele două plane mulţimea tururor planelor din spaţiu care trec prin dreapta de intersecţie a celor două plane. Ecuaţia unui plan oarecare din fascicul se poate scrie sub forma

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{3.1.37}$$

unde α şi β sunt două numere reale care nu se pot anula simultan. Dreapta de intersecţie a planelor date se numeşte *axa fasciculului*.

Fie

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases} \tag{3.1.38}$$

ecuaţiile a trei plane care trec prin punctul $S(x_0, y_0, z_0)$ astfel încât să fie îndeplinită condiţia

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.1.39}$$

[1] Nu pot fi toţi trei coliniari, deoarece $\operatorname{rg} m = 2$!

Se numeşte *snop de plane* sau *stea de plane* cu centrul în S_0 mulţimea tuturor planelor care trec prin acest punct. Ecuaţia unui plan oarecare al snopului se poate scrie sub forma

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\gamma(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)=0, \quad (3.1.40)$$

unde α, β şi γ sunt trei numere reale care nu se anulează simultan.

Poziţia relativă a unei drepte faţă de un plan

Dacă se dă un plan Π

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (3.1.41)$$

şi o dreaptă Δ, dată prin ecuaţiile sale parametrice

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt, \end{cases} \quad (3.1.42)$$

atunci:

- dacă
$$Al+Bm+Cn\neq 0$$
(adică dacă vectorul director al dreptei nu e perpendicular pe vectorul normal la plan), atunci dreapta şi planul au un punct comun (dreapta *înţeapă* planul);

- dacă
$$Al+Bm+Cn=0, \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$$
(adică dacă vectorul director al dreptei este perpendicular pe vectorul normal la plan şi există un punct de pe dreaptă care nu aparţine planului) atunci dreapta este paralelă cu planul.

- dacă
$$Al+Bm+Cn=0, \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$$
(adică dacă vectorul director al dreptei este perpendicular pe vectorul normal la plan şi există un punct de pe dreaptă care aparţine planului) atunci dreapta este conţinută în planul.

Ecuaţia planului determinat de două drepte concurente

Dreptele concurente

$$\Delta_1):\ \frac{x-x_0}{l_1}=\frac{y-y_0}{m_1}=\frac{z-z_0}{n_1} \quad (3.1.43)$$

şi

$$(\Delta_2):\ \frac{x-x_0}{l_2}=\frac{y-y_0}{m_2}=\frac{z-z_0}{n_2}, \quad (3.1.44)$$

care trec prin punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)$, determină un plan de ecuaţie

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0. \quad (3.1.45)$$

Ecuaţia planului determinat de o dreaptă şi un punct

Dreapta

$$(\Delta):\ \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \tag{3.1.46}$$

şi punctul $M_2(x_2,y_2,z_2)$, care nu aparţine dreptei, determină un plan de ecuaţie

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0. \tag{3.1.47}$$

Ecuaţia planului determinat de două drepte paralele

Dreptele paralele (şi distincte!)

$$(\Delta_1):\ \frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n} \tag{3.1.48}$$

şi

$$(\Delta_2):\ \frac{x-x_2}{l}=\frac{y-y_2}{m}=\frac{z-z_2}{n}, \tag{3.1.49}$$

care trec prin punctele $M_1(x_1,y_1,z_1)$ şi $M_2(x_2,y_2,z_2)$, determină un plan, de ecuaţie

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l & m & n \end{vmatrix}=0. \tag{3.1.50}$$

Proiecţia unui punct pe un plan

Proiecţia unui punct $M_0(x_0,y_0,z_0)$ pe un plan de ecuaţie

$$Ax+By+Cz+D=0$$

este piciorul perpendicularei coborâte din punctul dat pe plan. Coordonatele sale se obţin rezolvând sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0, \\ \dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}. \end{cases}$$

Proiecţia unui punct pe o dreaptă în spaţiu

Proiecţia unui punct $M_1(x_1,y_1,z_1)$ pe o o dreaptă

$$\Delta:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

este punctul însuşi, dacă el aparţine dreptei, sau piciorul perpendicularei coborâte din punct pe dreaptă, dacă punctul nu aparţine dreptei. În cel de-al doilea caz, coordonatele proiecţiei se obţin rezolvând sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}, \\ (x-x_1)\cdot l+(y-y_1)\cdot m+(z-z_1)\cdot n=0. \end{cases} \tag{3.1.51}$$

Proiecţia unei drepte pe un plan

Proiecţia dreptei

$$(\Delta):\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \tag{3.1.52}$$

pe planul

$$(\Pi):\ Ax+By+Cz+D=0 \tag{3.1.53}$$

este punctul lor de intersecţie, dacă dreapta este perpendiculară pe plan. Dacă dreapta Δ nu este perpendiculară pe planul Π, atunci proiecţia sa pe plan este intersecţia dintre planul Π şi planul perpendicular pe Π, care trece prin dreapta Δ. Ecuaţiile proiecţiei sunt

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l & m & n \\ A & B & C \end{vmatrix}=0, \\ Ax+By+Cz+D=0. \end{cases} \tag{3.1.54}$$

Poziţia reciprocă a două drepte în spaţiu

Considerăm două drepte în spaţiu:

$$(\Delta_1)\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \tag{3.1.55}$$

şi

$$(\Delta_2)\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}, \tag{3.1.56}$$

care trec prin punctele $M_1(x_1,y_1,n_1)$, respectiv $M_2(x_2,y_2,z_2)$ şi au vectorii directori $\mathbf{a}_1(l_1,m_1,n_1)$, respectiv $\mathbf{a}_2(l_2,m_2,n_2)$.

Atunci:

- dreptele Δ_1 şi Δ_2 sunt paralele şi distincte dacă vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ sunt coliniari, dar vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ sunt necoliniari;

- dreptele Δ_1 şi Δ_2 coincid dacă vectorii $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ sunt coliniari.

Presupunem acum că vectorii $\mathbf{a}_1$ şi $\mathbf{a}_2$ sunt necoliniari (adică dreptele corespunzătoare nu sunt paralele). Atunci

- dreptele sunt concurente dacă vectorii $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ şi $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ sunt coplanari, adică dacă

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0; \tag{3.1.57}$$

- dreptele sunt necoplanare (sau strâmbe) dacă cei trei vectori sunt necoplanari, adică dacă

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}\neq 0. \tag{3.1.58}$$

Perpendiculara comună a două drepte necoplanare

Perpendiculara comună a două drepte necoplanare

$$(\Delta_1)\ \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \tag{3.1.59}$$

şi

$$(\Delta_2)\ \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}, \tag{3.1.60}$$

care trec prin punctele $M_1(x_1,y_1,n_1)$, respectiv $M_2(x_2,y_2,z_2)$ şi au vectorii directori $\mathbf{a}_1(l_1,m_1,n_1)$, respectiv $\mathbf{a}_2(l_2,m_2,n_2)$, astfel încât

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

este singura dreaptă care intersectează ambele drepte şi este perpendiculară pe ele. Ecuaţiile perpendicularei comune se obţin intersectând un plan care trece prin prima dreaptă şi prin perpendiculara comună cu un plan care trece prin cea de-a doua dreaptă şi prin perpendiculaera comună. Astfel, ecuaţiile perpendicularei comune sunt

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0, \\ \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0, \end{cases} \tag{3.1.61}$$

unde $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ sunt componentele vectorului director al perpendicularei comune, $\mathbf{v}=\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2$.

Distanţa dintre două drepte strâmbe (lungimea perpendicularei comune)

Distanţa dintre două drepte strâmbe Δ_1 şi Δ_2 este distanţa dintre punctele în care perpendiculara comună a celor două drepte intersectează dreptele. Ea este, astfel, *lungimea segmentului de pe perpendiculara comună, cuprins între punctele de intersecţie cu cele două drepte* sau, cu un uşor abuz de limbaj, *lungimea perpendicularei comune* a dreptelor date.

Această distanţă se calculează ca distanţa dintre un punct oarecare de pe prima dreaptă şi planul care trece prin cea de-a doua dreaptă şi este paralel cu prima dreaptă. Astfel, avem

$$d(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\frac{\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}}\right|. \tag{3.1.62}$$

Notaţiile sunt aceleaşi ca în paragraful precedent.

Unghiul dintre o dreaptă şi un plan

Dacă o dreaptă este perpendiculară pe un plan, atunci unghiul dintre dreaptă şi plan este egal cu $\frac{\pi}{2}$. În caz contrar, *unghiul dintre dreaptă şi plan este unghiul dintre dreaptă şi proiecţia sa pe plan, adică unghiul dintre vectorul director al dreptei şi vectorul director al proiecţiei sale pe plan.*

Dacă dreapta are vectorul director $\mathbf{a}(l, m, n)$, iar planul are ecuaţia generală

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

atunci unghiul dintre dreaptă şi plan este unghiul φ dat de

$$\sin \varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \tag{3.1.63}$$

Dreapta este *paralelă* cu planul dacă vectorul director al dreptei este perpendicular pe vectorul normal la plan, adică dacă

$$Al + Bm + Cn = 0, \tag{3.1.64}$$

iar ea este *perpendiculară* pe plan dacă cei doi vectori menţionaţi sunt paraleli, adică dacă

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}. \tag{3.1.65}$$

CAPITOLUL 4

Conice pe ecuaţii reduse

4.1 Breviar teoretic

4.1.1 Elipsa

Ecuaţia canonică

Elipsa este locul geometric al punctelor din plan pentru care suma distanţelor la două puncte fixe din plan, F_1 şi F_2, numite *focare*, situate la distanţa $2c$ unul de altul, este o lungime constantă, egală cu $2a$. Dacă alegem sistemul de coordonate astfel încât axa Ox să treacă prin cele două focare, iar axa Oy să fie mediatoarea segmentului determinat de focare, atunci ecuaţia elipsei se poate scrie sub forma

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{4.1.1}$$

unde $b=\sqrt{a^2-c^2}$. a se numeşte *semiaxa mare* a elipsei, iar b – *semiaxa mică*. Lungimea $2c$ se numeşte *distanţă focală*.

Excentricitatea şi razele focale

Se numeşte *excentricitate* a elipsei numărul

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\frac{b^2}{a^2}\right)}, \tag{4.1.2}$$

care măsoară abaterea formei elipsei de la cea a unui cerc.

Se numesc *raze focale* ale unui punct $M(x,y)$ de pe elipsă distanţele de la acest punct până la cele două focare ale elipsei. Ele se exprimă, în funcţie de semiaxa mare a elipsei şi excentricitatea sa, prin formulele

$$\begin{cases} r_1=a+\varepsilon x,\\ r_2=a-\varepsilon x. \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Tangenta şi normala într-un punct al elipsei

Tangenta la o elipsă este o dreaptă care are un contact dublu cu elipsa (dreapta şi elipsa au două puncte confundate în comun). *Normala* la elipsă într-un punct este dreapta care trece prin acel punct şi este perpendiculată pe tangenta în acel punct.

Dacă $M(x_0, y_0)$ este un punct de pe elipsă, atunci ecuaţia tangentei în M_0 se scrie

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{4.1.4}$$

Ecuaţia normalei este

$$a^2y_0x - b^2x_0y - (a^2 - b^2)x_0y_0 = 0. \tag{4.1.5}$$

Tangentele la elipsă paralele cu o direcţie dată

Dacă direcţia dată nu este verticală şi ea este identificată printr-o pantă k, atunci există două tangente cu această pantă, date de ecuaţiile

$$y = kx \pm \sqrt{a^2k^2 + b^2}. \tag{4.1.6}$$

Există două tangente verticale, date de ecuaţiile

$$x = \pm a. \tag{4.1.7}$$

Tangentele la o elipsă care trec printr-un punct exterior elipsei

Fie $M_1(x_1, y_1)$ un punct exterior elipsei. Dacă $x_1 \neq \pm a$ (adică punctul nu se află pe una dintre cele două tangente verticale), atunci prin M_1 trec două tangente la elipsă, care au pantele date de

$$k_{1,2} = \frac{x_1y_1 \pm \sqrt{b^2x_1^2 + a^2y_1^2 - a^2b^2}}{x_1^2 - a^2}. \tag{4.1.8}$$

Dacă M_1 are coordonatele de forma $(\pm a, y_1)$, atunci avem o tangentă verticală (fie $x = a$, fie $x = -a$, depinde de punct) şi o tangentă neverticală, de pantă

$$k = \pm\frac{y_1^2 - b^2}{2ay_1} \tag{4.1.9}$$

(y_1 nu se poate anula, deoarece punctul M_1 este exterior elipsei). Semnul este cel care corespunde punctului M_1 ales.

4.1.2 Hiperbola

Ecuaţia canonică

Hiperbola este locul geometric al punctelor din plan pentru care modulul diferenţei distanţelor la două puncte fixe din plan, F_1 şi F_2, numite *focare*, situate la distanţa $2c$ unul de altul, este o lungime constantă, egală cu $2a$. Dacă alegem sistemul de coordonate astfel încât axa Ox să treacă prin cele două focare, iar axa Oy să fie mediatoarea segmentului determinat de focare, atunci ecuaţia elipsei se poate scrie sub forma

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4.1.10}$$

unde $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. a şi b *semiaxe* ale hiperbolei. Lungimea $2c$ se numeşte *distanţă focală*.

Excentricitatea şi razele focale

Se numeşte *excentricitate* a hiperbolei numărul

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2}\right)}. \tag{4.1.11}$$

Spre deosebire de cazul elipsei, la hiperbolă excentricitatea este tot timpul mai mare decât 1. Se numesc *raze focale* ale unui punct $M(x, y)$ de pe hiperbolă distanţele de la acest punct până la cele două focare ale hiperbolei. Ele se exprimă, în funcţie de prima semiaxă a hiperbolei şi excentricitatea sa, prin formulele

$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x, \\ r_2 = a - \varepsilon x. \end{cases} \tag{4.1.12}$$

Asimptotele hiperbolei

Spre deosebire de elipsă, hiperbola este o curbă nemărginită. Ea este alcătuită din două ramuri. Curba are două asimptote. Fiecare este asimptotă pentru ambele ramuri, pentru una dintre ele la $+\infty$, pentru cealaltă la $-\infty$. Ecuaţiile asimptotelor sunt

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \tag{4.1.13}$$

Tangenta şi normala într-un punct al hiperbolei

Tangenta la o hiperbolă este o dreaptă care are un contact dublu cu hiperbola (dreapta şi hiperbola au două puncte confundate în comun). *Normala* la hiperbolă într-un punct este dreapta care trece prin acel punct şi este perpendiculată pe tangenta în acel punct.

Dacă $M(x_0, y_0)$ este un punct de pe hiperbolă, atunci ecuaţia tangentei în M_0 se scrie

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{4.1.14}$$

Ecuaţia normalei este

$$a^2 y_0 x + b^2 x_0 y - (a^2 + b^2) x_0 y_0 = 0. \tag{4.1.15}$$

Tangentele la hiperbolă paralele cu o direcţie dată

Dacă direcţia dată nu este verticală şi ea este identificată printr-o pantă k, atunci există două tangente cu această pantă, date de ecuaţiile

$$y = kx \pm \sqrt{a^2 k^2 - b^2}. \tag{4.1.16}$$

Există două tangente verticale, date de ecuaţiile

$$x = \pm a. \tag{4.1.17}$$

Spre deosebire de elipsă, la hiperbolă nu există tangente de orice pantă. Panta unei hiperbole trebuie să verifice condiţia

$$k^2 > \frac{b^2}{a^2}.$$

Tangentele la hiperbolă care trec printr-un punct exterior ei

Fie $M_1(x_1, y_1)$ un punct din plan exterior hiperbolei, deci coordonatele sale verifică inegalitatea

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} < 1. \tag{4.1.18}$$

Atunci din M_1 se pot duce două tangente la hiperbolă. Dacă x_1 nu este egal cu $\pm a$, atunci ambele tangente sunt neverticale, iar pantele lor sunt date de

$$k_{1,2} = \frac{x_1 y_1 \pm \sqrt{a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2 + a^2 b^2}}{x_1^2 - a^2}. \tag{4.1.19}$$

Dacă M_1 are coordonatele de forma $(\pm a, y_1)$, atunci avem o tangentă verticală (fie $x = a$, fie $x = -a$, depinde de punct) şi o tangentă neverticală, de pantă

$$k = \pm\frac{y_1^2 + b^2}{2ay_1} \tag{4.1.20}$$

(y_1 nu se poate anula, deoarece punctul M_1 este exterior hiperbolei). Semnul este cel care corespunde punctului M_1 ales.

4.1.3 Parabola

Definiţia şi ecuaţia canonică

Parabola este locul geometric al punctelor din plan care sunt egal depărtate de o dreaptă fixă Δ, numită *directoare* şi de un punct fix F, numit *focar*. Distanţa dintre punctul fix şi dreapta fixă se notează cu p şi se numeşte *parametrul parabolei*.

Dacă alegem în calitate de axă Ox perpendiculara pe directoare care trece prin focar, orientată dinspre directoare către focar, iar în calitate de axă Oy – mediatoarea segmentului de pe axa Ox cuprins între mediatoare şi focar, orientată astfel încât să obţinem un reper orientat direct, atunci ecuaţia *canonică* a parabolei se va scrie sub forma

$$y^2 = 2px. \tag{4.1.21}$$

Axa Ox este singura axă de simetrie a curbei. Parabola intersectează axa de simetrie într-un singur punct (*vârful parabolei*), care, în cazul sistemului de coordonate considerat, coincide cu originea.

Tangenta într-un punct al parabolei

Dacă $M_0(x_0, y_0)$ este un punct al parabolei dată prin ecuaţia canonică (4.1.21), atunci ecuaţia tangentei la parabolă în punctul M_0 se obţine prin *dedublare*, adică are forma

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{4.1.22}$$

Tangenta la parabolă de pantă dată

Pentru orice pantă k, nenulă, există o singură tangentă la parabolă de pantă k. Ecuaţia acestei tangente este

$$y = kx + \frac{p}{2k}. \tag{4.1.23}$$

Observaţie. Nu există nici o tangentă la parabolă care să aibă panta $k = 0$ (adică să fie orizontală sau, ceea ce este acelaşi lucru, paralelă cu axa de simetrie a parabolei).

Tangentele la parabolă dintr-un punct exterior parabolei

Considerăm un punct $M_1(x_1, y_1)$ din planul parabolei (4.1.21), exterior parabolei, adică astfel încât coordonatele sale să verifice inegalitatea

$$y_1^2 > 2px_1. \tag{4.1.24}$$

Din M_1 se pot duce întotdeauna două tangente distincte la parabolă. Avem două situaţii de considerat:

1. Dacă punctul M_1 se află pe axa Oy (adică are coordonatele de forma $(0, y_1)$), atunci una dintre tangente este verticală (este tocmai axa Oy), iar cealaltă tangentă are ecuaţia

$$y - y_1 = \frac{p}{2y_1}. \tag{4.1.25}$$

2. Dacă punctul nu se află pe axa Oy, atunci avem două tangente oblice, cu ecuaţii de forma

$$y - y_1 = k(x - x_1), \tag{4.1.26}$$

unde panta k a tangentei este una dintre cele două rădăcini (distincte!) ale ecuaţiei

$$2x_1k^2 - 2y_1k + p = 0. \tag{4.1.27}$$

CAPITOLUL 5

Generarea suprafeţelor

5.1 Breviar teoretic

5.1.1 Suprafeţe cilindrice

O *suprafaţă cilindrică* este o suprafaţă generată de o familie de drepte, numite *generatoare*, care se mişcă în spaţiu, paralel cu o dreaptă fixă, numită *directoare*, şi verifică o condiţie suplimentară. Condiţia suplimentară este, de regulă, ca generatoarele să intersecteze o curbă dată, numită *curbă directoare*, dar se pot impune şi alte cerinţe, de exemplu aceea ca generatoarele să fie tangente la o suprafaţă dată.

Să presupunem că dreapta directoare este dată ca intersecţie de două plane, adică prin intermediul unui sistem de ecuaţii de forma

$$(\Delta)\ \begin{cases} P_1(x,y,z)=0,\\ P_2(x,y,z)=0, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

în timp ce curba directoare este dată ca intersecţie de două suprafeţe, adică tot de un sistem de ecuaţii

$$(C)\ \begin{cases} F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Generatoarele fiind paralele cu dreapta directoare, ecuaţiile lor se pot scrie sub forma

$$(G_{\lambda,\mu})\ \begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda,\\ P_2(x,y,z)=\mu, \end{cases} \tag{5.1.3}$$

unde λ şi μ sunt doi parametri reali, pe moment arbitrari. Condiţia ca generatoarele să intersecteze curba directoare ne conduce la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda,\\ P_2(x,y,z)=\mu,\\ F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{5.1.4}$$

Acesta este un sistem de patru ecuaţii pentru necunoscutele x, y şi z. Cerinţa ca sistemul să fie compatibil implică existenţa unei dependenţe între parametrii λ şi μ,

$$\varphi(\lambda,\mu)=0. \tag{5.1.5}$$

Atunci ecuaţia suprafeţei cilindrice se scrie

$$\varphi\left(P_1(x,y,z), P_2(x,y,z)\right) = 0. \tag{5.1.6}$$

5.1.2 Suprafeţe conice

O *suprafaţă conică* este o suprafaţă generată de o familie de drepte mobile, numite *generatoare*, care trec printr-un punct fix, care se numeşte *vârful suprafeţei conice*, şi care verifică o condiţie suplimentară. Ca şi în cazul suprafeţelor cilindrice, de regulă condiţia ca generatoarele să intersecteze o curbă dată, numită *curbă directoare* a suprafeţei conice, dar, din nou ca şi în cazul suprafeţelor cilindrice, poate lua şi alte forme, de exemplu cerinţa ca generatoarele să fie tangente unei suprafeţe date.

Să presupunem că vârful conului este dat ca o intersecţie de trei plane, deci ca unica soluţie a unui sistem liniar compatibil şi determinat

$$(V)\ \begin{cases} P_1(x,y,z) = 0, \\ P_2(x,y,z) = 0, \\ P_3(x,y,z) = 0, \end{cases} \tag{5.1.7}$$

iar curba directoare este dată ca o intersecţie de două suprafeţe, deci sub forma unui sistem de două ecuaţii (în general, neliniare!)

$$(C)\ \begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases} \tag{5.1.8}$$

O generatoare a suprafeţei conice (adică o dreaptă care trece prin vârf) se poate scrie sub forma

$$(G_{\lambda,\mu})\ \begin{cases} P_1(x,y,z) = \lambda P_3(x,y,z), \\ P_2(x,y,z) = \mu P_3(x,y,z), \end{cases} \tag{5.1.9}$$

unde λ şi μ sunt doi parametri reali, deocamdată arbitrari.

Condiţia ca generatoarele să intersecteze curba directoare ne conduce la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} P_1(x,y,z) = \lambda P_3(x,y,z), \\ P_2(x,y,z) = \mu P_3(x,y,z), \\ F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases} \tag{5.1.10}$$

Sistemul este compatibil doar dacă între cei doi parametri există o relaţie

$$\varphi(\lambda,\mu) = 0. \tag{5.1.11}$$

Ecuaţia suprafeţei conice este

$$\varphi\left(\frac{P_1(x,y,z)}{P_3(x,y,z)}, \frac{P_2(x,y,z)}{P_3(x,y,z)}\right). \tag{5.1.12}$$

5.1.3 Suprafeţe conoide (conoizi cu plan director)

O *suprafaţă conoidă* sau un *conoid cu plan director* este o suprafaţă generată de o familie de drepte, numite *generatoare*, care intersectează o dreaptă dată, numită *dreaptă directoare* şi rămân paralele cu un plan dat, numit *plan director*, şi mai verifică o condiţie suplimentară, de regulă aceea de intersecţie cu o curbă dată, numită *curbă directoare*.

Dacă dreapta directoare este dată ca intersecţie de două plane:

$$(\Delta)\ \begin{cases} P_1(x,y,z)=0, \\ P_2(x,y,z)=0, \end{cases} \tag{5.1.13}$$

iar planul director are ecuaţia

$$(\Pi)\ P(x,y,z)=0, \tag{5.1.14}$$

atunci ecuaţiile generatoarelor se pot scrie

$$(G_{\lambda,\mu})\ \begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda P_2(x,y,z), \\ P(x,y,z)=\mu, \end{cases} \tag{5.1.15}$$

unde λ şi μ sunt parametri reali.

Să presupunem acum că curba directoare este dată de

$$(C)\ \begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{5.1.16}$$

Atunci condiţia ca generatoarele să intersecteze curba directoare este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda P_2(x,y,z), \\ P(x,y,z)=\mu, \\ F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{5.1.17}$$

Sistemul (5.1.17) este compatibil dacă şi numai dacă între parametri există o relaţie de compatibilitate

$$\varphi(\lambda,\mu)=0. \tag{5.1.18}$$

Atunci ecuaţia suprafeţei conoide căutate este

$$\varphi\left(\frac{P_1(x,y,z)}{P_2(x,y,z)}, P(x,y,z)\right)=0. \tag{5.1.19}$$

5.1.4 Suprafeţe de rotaţie (sau de revoluţie)

O *suprafaţă de rotaţie* (numită şi *suprafaţă de revoluţie*) este o suprafaţă generată de o curbă (numită *curbă directoare*) care se roteşte, în spaţiu, în jurul unei drepte, numită *axă de rotaţie*.

Ideea de deducere a ecuaţiei unei suprafeţe de rotaţie este similară cu cea care se utilizează pentru deducerea ecuaţiilor celorlalte suprafeţe generate. Concret, considerăm o familie, biparametrică, de cercuri situate în plane perpendiculare pe axa de rotaţie şi cu centrul pe axă (*cercuri generatoare*). În continuare, algoritmul este perfect analog cu algoritmii utilizaţi pentru restul suprafeţelor:

- Se pune condiţia ca cercurile generatoare să intersecteze curba directoare.
- Se deduce condiţia de compatibilitate.
- Ecuaţia suprafeţei de rotaţie se obţine înlocuind în condiţia de compatibilitate parametrii care provin din ecuaţiile cercurilor generatoare.

Să presupunem că axa de rotaţie este dată prin ecuaţiile sale canonice,

$$(\Delta)\ \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}. \tag{5.1.20}$$

Atunci ecuaţiile cercurilor generatoare vor fi

$$(G_{\lambda,\mu})\ \begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \lambda^2, \\ lx + my + cz = \mu. \end{cases} \tag{5.1.21}$$

Dacă ecuaţiile curbei directoare sunt

$$(C)\ \begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases} \tag{5.1.22}$$

atunci condiţia ca cercurile generatoare să intersecteze curba directoare este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = \lambda^2, \\ lx + my + cz = \mu, \\ F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0. \end{cases} \tag{5.1.23}$$

Acest sistem este compatibil dacă şi numai dacă între cei doi parametri există o relaţie

$$\varphi(\lambda,\mu) = 0. \tag{5.1.24}$$

Atunci ecuaţia suprafeţei de rotaţie căutate se scrie sub forma

$$\varphi\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}, lx + my + cz\right) = 0. \tag{5.1.25}$$

CAPITOLUL 6

Cuadrice pe ecuaţii reduse

6.1 Breviar teoretic

Cuadricele sunt suprafeţe din spaţiu ale căror coordonate afine verifică o ecuaţie de gradul al doilea de forma

$$\begin{aligned} &a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + \\ &+ a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44} = 0. \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Există doar câteva clase de astfel de suprafeţe. Printr-o transformare de coordonate, ecuaţia oricăreia dintre ele poate fi adusă la o aşa-numită *formă canonică*, ce nu conţine termeni de gradul al doilea micşti şi, cu câteva excepţii, nu conţine termeni de gradul întâi. Vom studia, în exclusivitate, aceste cuadrice, folosind ecuaţia canonică.

6.1.1 Elipsoidul

Se numeşte *elipsoid* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate (x, y, z) verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{6.1.2}$$

unde a, b şi c sunt numere reale strict pozitive, care se numesc *semiaxele* elipsoidului.

Planele de coordonate sunt *plane de simetrie* ale elipsoidului, în timp ce axele de coordonate sunt *axe de simetrie*.

Punctele în care elipsoidul intersectează axele de simetrie (în număr de şase) se numesc *vârfuri* ale elipsoidului. Ele au coordonatele $(\pm a, 0, 0), (0, \pm b, 0)$, respectiv $(0, 0, \pm c)$.

Elipsoidul este o figură mărginită. El este inclus în paralelipipedul

$$[-a, a] \times [-b, b] \times [-c, c].$$

Elipsoidul de rotaţie

Dacă în ecuaţia (6.1.2) două dintre semiaxele corespunzătoare la două axe de coordonate sunt egale, atunci elipsoidul se numeşte *elipsoid de rotaţie*, pentru că el este, în fapt, o suprafaţă de rotaţie în jurul celei de-a treia axe. Astfel, de exemplu, un elipsoid de rotaţie în jurul axei Oz are ecuaţia

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{6.1.3}$$

Evident, dacă toate trei semiaxele sunt egale, se obţine sfera de rază a, cu centrul în origine.

Planul tangent la elipsoid

Dacă (x_0, y_0, z_0) este un punct de pe elipsoidul dat de ecuaţia (6.1.2), atunci ecuaţia planului tangent la elipsoid în acest punct se obţine prin dedublare, adică se scrie sub forma

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1. \tag{6.1.4}$$

6.1.2 Conul de gradul al doilea

Conul de gradul al doilea sau *conul eliptic* este mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un reper ortonormat verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{6.1.5}$$

unde a, b, c sunt numere reale strict pozitive.

Conul de gradul al doilea este un caz particular de *suprafaţă conică*, având vârful în origine, în timp ce generatoarele intersectează elipsa

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = c. \end{cases} \tag{6.1.6}$$

În continuare, vom folosi termenul de *generatoare* a conului printr-un punct al său pentru dreapta care trece prin origine şi prin punct (şi care, în mod evident, este conţinută în întregime în con).

Ca şi elipsoidul, conul de gradul al doilea are planele de coordonate ca *plane de simetrie*, axele de coordonate ca *axe de simetrie* şi originea ca *centru de simetrie*. Toate cele trei axe ale conului intersectează suprafaţa într-un singur punct, acelaşi pentru toate axele (originea), deci conul are un singur *vârf*, care este vârful conului, privit ca suprafaţă conică.

Intersecţiile cu planele de coordonate

Intersecţia conului cu un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$, se reduce la origine, dacă $h = 0$ (adică planul coincide cu planul xOy) sau, în cazul în care $h \neq 0$, este elipsa

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2h^2/c^2} + \dfrac{y^2}{b^2h^2/c^2} = 1 \\ z = h \end{cases},$$

de semiaxe $a|h|/c$, respectiv $b|h|/c$.

Intersecţia cu plane paralele cu planul xOz, de ecuaţie $y = h$ se reduce la perechea de drepte

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} \pm \dfrac{z}{c} = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

dacă $h = 0$ sau la hiperbola

$$\begin{cases} \dfrac{z^2}{c^2h^2/b^2} - \dfrac{x^2}{a^2h^2/b^2} = 1 \\ y = h \end{cases},$$

de semiaxe $c|h|/b$, respectiv $a|h|/b$, în cazul în care $h \neq 0$.

Intersecţia cu plane paralele cu planul yOz, de ecuaţie $x = h$ se reduce la perechea de drepte

$$\begin{cases} \dfrac{y}{b} \pm \dfrac{z}{c} = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

dacă $h = 0$ sau la hiperbola

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2h^2/a^2} - \dfrac{z^2}{c^2h^2/a^2} = 1 \\ x = h \end{cases},$$

de semiaxe $b|h|/a$, respectiv $c|h|/a$, în cazul în care $h \neq 0$.

Planul tangent la con

Planul tangent la conul de ecuaţia (6.1.5), într-un punct al său, diferit de vârful conului, de coordonate (x_0, y_0, z_0), se obţine, ca şi în cazul elipsodului, prin dedublare, adică este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 0. \tag{6.1.7}$$

Planul tangent într-un punct la un con este acelaşi în toate punctele generatoarei care trece prin punctul respectiv.

Conul de rotaţie

Dacă în ecuaţia (6.1.5) punem $a = b$, suprafaţa conică ce se obţine, de ecuaţie

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{6.1.8}$$

se numeşte *con de rotaţie*. Această suprafaţă este, în acelaşi timp, o suprafaţă conică şi o suprafaţă de rotaţie în jurul axei Oz.

6.1.3 Hiperboloidul cu o pânză

Se numeşte *hiperboloid cu o pânză* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate, relativ la un sistem de coordonate ortonormat, verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{6.1.9}$$

unde a, b, c sunt trei numere reale strict pozitive, numite *semiaxe* ale hiperboloidului.

Punctele în care axele Ox şi Oy intersectează suprafaţa, adică punctele de coordonate $(\pm a, 0, 0)$ şi $(0, \pm b, 0)$, se numesc *vârfurile* hiperboloidului.

Hiperboloidul cu o pânză are planele de coordonate ca plane de simetrie, axele de coordonate ca axe de simetrie şi originea – ca centru de simetrie.

Intersecţiile hiperboloidului cu plane paralele cu planele de coordonate

Intersecţia dintre hiperboloid şi un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$, este o elipsă

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2} + 1}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\dfrac{h^2}{c^2} + 1}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

cu axele paralele cu axele Ox şi Oy şi de semiaxe $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}$ şi $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}+1}$. Pentru $h=0$ se obţine elipsa de semiaxe minime, care se numeşte *elipsă de stricţiune*.

Intersecţia dintre hiperboloid şi un plan paralel cu planul yOz, de ecuaţie $x=h$, este descrisă de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{a^2}. \end{cases}$$

Sunt posibile trei cazuri:

(a) Dacă $|h| < |a|$, atunci avem hiperbola de ecuaţii

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2} - \dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)^2} = 1. \end{cases}$$

(b) Dacă $|h| = |a|$, obţinem perechea de drepte concurente

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{y}{b} \pm \dfrac{z}{c} = 0. \end{cases}$$

(c) Dacă $|h| > |a|$, atunci intersecţia este hiperbola de ecuaţii

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1}\right)^2} = 1. \end{cases}$$

Intersecţiile dintre planele paralele cu planul xOz şi hiperboloid se tratează complet analog cu intersecţiile dintre planele paralele cu planul yOz şi hiperboloid.

Planul tangent la hiperboloidul cu o pânză

Dacă (x_0, y_0, z_0) este un punct al hiperboloidului cu o pânză, atunci ecuaţia planului tangent la hiperboloid în acest punct se scrie prin dedublare, adică ea este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1. \tag{6.1.10}$$

Generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză

Pe hiperboloidul cu o pânză se află două familii de drepte, care se numesc *generatoare rectilinii* ale hiperboloidului. Ecuaţiile generatoarelor din prima familie sunt

$$\begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \mu\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \lambda\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{6.1.11}$$

unde λ şi μ sunt două numere reale care nu se anulează simultan, în timp ce ecuaţiile generatoarelor din cea de-a doua familie sunt

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = \beta\left(1 - \dfrac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right) = \alpha\left(1 + \dfrac{y}{b}\right), \end{cases} \tag{6.1.12}$$

unde α şi β sunt, din nou, parametri reali care nu se anulează simultan.

Generatoarele rectilinii se bucură de o serie de proprietăţi remarcabile, dintre care enumerăm:

- Prin fiecare punct al hiperboloidului trec exact două generatoare, câte una din fiecare familie,
- Oricare două generatoare din aceeaşi familie sunt necoplanare.
- Fiecare generatoare dintr-una dintre familii intersectează toate generatoarele din cealaltă familie.
- Toate generatoarele (din ambele familii) intersectează elipsa de stricţiune a hiperboloidului.
- Cele două generatoare care trec printr-un punct al hiperboloidului sunt conţinute în planul tangent la hiperboloid în acel punct.

Hiperboloidul cu o pânză de rotaţie

Dacă primele două semiaxe ale hiperboloidului sunt egale: $a = b$, atunci obţinem aşa-numitul *hiperboloid cu o pânză de rotaţie*, de ecuaţie

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{6.1.13}$$

Acesta este o suprafaţă de rotaţie în jurul axei Oz. Intersecţiile dintre hiperboloidul de rotaţie şi plane paralele cu planul xOy sunt cercuri.

6.1.4 Hiperboloidul cu două pânze

Hiperboloidul cu două pânze este mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un reper ortonormat verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{6.1.14}$$

unde a, b, c sunt constante reale strict pozitive, numite *semiaxe* ale hiperboloidului.

Hiperboloidul cu două pânze este alcătuit din două submulţimi disjuncte, numite *pânze*, care corespund cazurilor $z > 0$ şi $z < 0$.

Axa Oz intersectează suprafaţa în două puncte, numite *vârfuri* ale hiperboloidului cu două pânze.

Hiperboloidul cu două pânze are planele de coordonate ca plane de simetrie, axele de coordonate ca axe de simetrie şi originea ca centru de simetrie.

Intersecţiile hiperboloidului cu două pânze cu plane paralele cu planele de coordonate

Intersecţia suprafeţei cu un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$ este descrisă de ecuaţiile

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{c^2} - 1. \end{cases}$$

Aceasta poate fi:

(a) mulţmea vidă, dacă $|h| < |c|$;

(b) un punct, dacă $h = \pm c$;

(c) elipsa

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

de semiaxe $a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$ şi $b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$, dacă $|h| > |c|$.

Intersecţia hiperboloidului cu două pânze cu un plan paralel cu planul yOz, de ecuaţie $x = h$, este dată de ecuaţiile

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{z^2}{c^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{a^2} + 1. \end{cases}$$

Această intersecţie, indiferent de valoarea lui h, este o hiperbolă, de ecuaţii

$$\begin{cases} x = h, \\ \dfrac{z^2}{\left(c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+1}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+1}\right)^2} = 1, \end{cases}$$

de semiaxe $c\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+1}$ şi $b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}+1}$.

Intersecţiile cu plane paralele cu planul zOx sunt similare cu cele obţinute prin plane paralele cu planul yOz.

Hiperboloidul cu două pânze de rotaţie

Dacă primele două semiaxe ale hiperboloidului sunt egale, obţinem un *hiperboloid cu două pânze de rotaţie*, de ecuaţie

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Acesta este o suprafaţă de rotaţie în jurul axei Oz.

Planul tangent la un hiperboloid cu două pânze

Ecuaţia planului tangent la hiperboloidul cu două pânze, într-un punct al său, de coordonate (x_0, y_0, z_0), se obţine prin dedublare, adică este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = -1,$$

6.1.5 Paraboloidul eliptic

Se numeşte *paraboloid eliptic* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un reper ortonormat verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \tag{6.1.15}$$

unde p şi q sunt două numere reale strict pozitive, *parametrii paraboloidului*.

Paraboloidul eliptic are două plane de simetrie, planele de coordonate xOz şi yOz şi o axă de simetrie, axa Oz. Nu are centru de simetrie.

Axa Oz intersectează paraboloidul într-un singur punct, originea, care se numeşte *vârful* paraboloidului eliptic.

Intersecţiile paraboloidului eliptic cu plane paralele cu planele de coordonate

Intersecţia paraboloidului eliptic cu un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$ este descrisă de ecuaţiile

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2h. \end{cases}$$

Această intersecţie poate fi:

(a) mulţimea vidă, dacă $h < 0$;

(b) un punct (originea) dacă $h = 0$;

(c) elipsa de ecuaţii

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{2ph} + \dfrac{y^2}{2qh} = 1, \end{cases}$$

de semiaxe $\sqrt{2ph}$ şi $\sqrt{2qh}$, dacă $h > 0$.

Intersecţia paraboloidului cu un plan paralel cu planul yOz, de ecuaţie $x = h$, este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = 2qz - \dfrac{qh^2}{p}. \end{cases}$$

Aceasta este o parabolă, pentru orice valoare a lui h.

Intersecţiile paraboloidului cu plane paralele cu planul zOx sunt, de asemenea, parabole şi se obţin în acelaşi mod ca şi în cazul intersecţiilor cu plane paralele cu planul yOz.

Paraboloidul eliptic de rotaţie

Dacă cei doi parametri ai paraboloidului sunt egali: $p = q$, obţinem ceea ce se numeşte *paraboloidul eliptic de rotaţie*, de ecuaţie

$$x^2 + y^2 = 2pz. \tag{6.1.16}$$

În cazul acestui paraboloid (care este, într-adevăr, o suprafaţă de rotaţie în jurul axei Oz), intersecţiile cu plane paralele cu planul xOy sunt cercuri (eventual degenerate la un punct sau imaginare).

Planul tangent într-un punct la paraboloidul eliptic

Planul tangent la paraboloidul eliptic într-un punct al său, de coordonate (x_0, y_0, z_0) se obţine din ecuaţia paraboloidului, prin dedublare:

$$\frac{xx_0}{p} + \frac{yy_0}{q} = p(z + z_0). \tag{6.1.17}$$

De remarcat că aici deddublarea se produce ca şi în cazul ecuaţiei tangentei la parabolă, adică z (care este la puterea întâi în ecuaţia paraboloidului) se înlocuieşte cu $(z + z_0)/2$.

6.1.6 Paraboloidul hiperbolic

Paraboloidul hiperbolic este mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonare relativ la un reper ortonormat verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z. \tag{6.1.18}$$

Aici p şi q sunt două numere reale strict pozitive care se numesc *parametrii paraboloidului hiperbolic*.

Paraboloidul hiperbolic are două plane de simetrie (planele de coordonate yOz şi zOx) şi o axă de simetrie (axa Oz). Suprafaţa nu are un centru de simetrie.

Axa Oz înţeapă suprafaţa în origine (*vârful* paraboloidului hiperbolic).

Intersecţiile paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu planele de coordonate

Intersecţia paraboloidului hiperbolic cu un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$ este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2h. \end{cases}$$

Această intersecţie este:

(a) hiperbola

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{y^2}{-2qh} - \dfrac{x^2}{-2ph} = 1, \end{cases}$$

de semiaxe $\sqrt{-2qh}$, respectiv $\sqrt{-2ph}$, dacă $h < 0$;

(b) perechea de drepte

$$\begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x}{\sqrt{p}} \pm \dfrac{y}{\sqrt{q}} = 0, \end{cases}$$

dacă $h = 0$;

(c) hiperbola

$$\begin{cases} z = h, \\ \dfrac{x^2}{2ph} - \dfrac{y^2}{2qh} = 1, \end{cases}$$

de semiaxe $\sqrt{2ph}$, respectiv $\sqrt{2qh}$. dacă $h > 0$.

Intersecţia paraboloidului cu un plan paralel cu planul yOz, de ecuaţie $x = h$, este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x = h, \\ y^2 = -2qz + \dfrac{qh^2}{p}, \end{cases}$$

care este o parabolă, pentru orice valoare a lui h.

Intersecţiile paraboloidului hiperbolic cu plane paralele cu planul zOx sunt, de asemenea, parabole şi se obţin în acelaşi mod ca şi în cazul intersecţiilor cu plane paralele cu planul yOz.

Planul tangent într-un punct la paraboloidul hiperbolic

Planul tangent la paraboloidul hiperbolic, într-un punct al său de coordonate (x_0, y_0, z_0) se obţine prin dedublarea ecuaţiei paraboloidului, adică ecuaţia sa este

$$\frac{xx_0}{p} - \frac{yy_0}{q} = z + z_0. \tag{6.1.19}$$

Generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

Ca şi în cazul hiperboloidului cu o pânză, pe paraboloidul hiperbolic se află două familii de drepte, numite *generatoare rectilinii*.

Ecuaţiile generatoarelor din prima familie sunt:

$$\begin{cases} \lambda\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\mu z, \\ \mu\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = \lambda, \end{cases} \tag{6.1.20}$$

unde λ şi μ sunt doi parametri reali care nu se anulează simultan.

Ecuaţiile generatoarelor din cea de-a doua familie sunt:

$$\begin{cases} \alpha\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} + \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\beta z, \\ \beta\left(\dfrac{x}{\sqrt{p}} - \dfrac{y}{\sqrt{q}}\right) = \alpha, \end{cases} \tag{6.1.21}$$

unde α şi β sunt, de asemenea, doi parametri reali, care nu se anulează simultan.

Ca şi generatoarele rectilinii ale hiperboloidului cu o pânză, generatoarele paraboloidului hiperbolic se bucură de o serie întreagă de proprietăţi. Menţionăm câteva dintre ele.

- Prin fiecare punct al suprafeţei trec exact două generatoare rectilinii, câte una din fiecare familie.
- Generatoarele rectilinii care trec printr-un punct al hiperboloidului sunt conţinute în planul tangent în acel punct.
- Oricare două generatoare rectilinii din aceeaşi familie sunt necoplanare.
- Fiecare generatoare rectilinie dintr-o familie intersectează toate generatoarele din cealaltă familie.

6.1.7 Cilindrul eliptic

Se numeşte *cilindru eliptic* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un sistem ortonormat verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{6.1.22}$$

unde a şi b sunt două numere reale, care se numesc *semiaxele* cilindrului eliptic.

Planele de simetrie ale cilindrului eliptic sunt: planul yOz, planul xOz şi orice plan paralel cu planul xOy. Ca urmare, el are o infinitate de *axe de simetrie*: axa Oz şi orice dreaptă paralelă cu celalte două axe şi care interesectează axa Oz, precum şi o infinitate de *centre de simetrie*: toate punctele de pe axa Oz.

Intersecţiile cilindrului eliptic cu plane paralele cu planele de coordonate

Intersecţia dintre cilindrul eliptic şi un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$, este, pentru orice valoare a lui h, o elipsă de semiaxe a şi b, de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Intersecţia dintre cilindru şi un plan paralel cu planul yOz, de ecuaţie $x = h$, este descrisă de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{h^2}{a^2}, \\ x = h. \end{cases}$$

Intersecţia este:

- o pereche de drepte paralele cu axa Oz, de ecuaţii
$$\begin{cases} y = \pm b\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{a^2}}, \\ x = h, \end{cases}$$
dacă $|h| < |a|$;
- o singură dreaptă, paralelă cu Oz, de ecuaţii
$$\begin{cases} y = 0, \\ x = h, \end{cases}$$
dacă $|h| = |a|$;
- mulţimea vidă, dacă $|h| > |a|$.

Intersecţiile cilindrului eliptic cu plane paralele cu planul xOz sunt similare cu cele obţinute cu plane paralele cu planul yOz.

Planul tangent într-un punct al cilindrului eliptic

Ecuaţia planului tangent la cilindrul eliptic într-un punct al său, de coordonate (x_0, y_0, z_0), se obţine prin dedublare. Ea este

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{6.1.23}$$

Cilindrul eliptic de rotaţie

Dacă cele două semiaxe ale cilindrului eliptic sunt egale: $a = b$, atunci cilindrul se numeşte *cilindru de rotaţie* sau *cilindru circular*. El are ecuaţia

$$x^2 + y^2 = a^2. \tag{6.1.24}$$

6.1.8 Cilindrul hiperbolic

Se numeşte *cilindru hiperbolic* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonate relativ la un sistem ortonormat verifică ecuaţia

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{6.1.25}$$

unde a şi b sunt două numere reale, care se numesc *semiaxele* cilindrului hiperbolic.

Simetriile cilindrului hiperbolic sunt aceleaşi cu simetriile cilindrului eliptic.

Intersecţiile cilindrului hiperbolic cu plane paralele cu planele de coordonate

Intersecţia dintre cilindrul hiperbolic şi un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$, este, pentru orice valoare a lui h, o hiperbolă de semiaxe a şi b, de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

Intersecţia dintre cilindru şi un plan paralel cu planul yOz, de ecuaţie $x = h$, este descrisă de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{h^2}{a^2} - 1, \\ x = h. \end{cases}$$

Această intersecţie este:

- mulţimea vidă, dacă $|h| < a$;
- o dreaptă paralelă cu axa Oz, de ecuaţii

  $$\begin{cases} y = 0, \\ z = h, \end{cases}$$

  dacă $|h| = a$;
- o pereche de drepte paralele cu Oz, de ecuaţii

  $$\begin{cases} y = \pm b\sqrt{\dfrac{h^2}{a^2} - 1}, \\ x = h, \end{cases}$$

  dacă $|h| > a$.

Intersecţia dintre cilindrul hiperbolic şi un plan paralel cu planul zOx, de ecuaţie $y = h$ este, pentru orice valoare a lui h, o pereche de drepte paralele cu Oz, de ecuaţii

$$\begin{cases} x = \pm a\sqrt{\dfrac{h^2}{b^2} + 1}, \\ y = h. \end{cases}$$

Planul tangent într-un punct al cilindrului hiperbolic

Ca în cazul tuturor cuadricelor, ecuaţia planului tangent la cilindrul hiperbolic, într-un punct al său, de coordonate (x_0, y_0, z_0) se scrie prin dedublare, adică este

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \tag{6.1.26}$$

6.1.9 Cilindrul parabolic

Se numeşte *cilindru parabolic* mulţimea punctelor din spaţiu ale căror coordonare relativ la un sistem de coordonate ortonormat verifică ecuaţia

$$y^2 = 2px, \tag{6.1.27}$$

unde p este un număr real strict pozitiv, numit *parametrul* cilindrului.

Cilindrul parametric are un singur plan de simetrie, planul xOz şi o infinitate de axe de simetrie: toate dreptele care sunt paralele cu axa Ox şi intersectează axa Oz. Cilindrul nu are centre de simetrie.

Intersecţiile cilindrului parabolic cu plane paralele cu planele de coordonate

Intersecţia cilindrului parabolic cu un plan paralel cu planul xOy, de ecuaţie $z = h$, este, pentru orice valoare a lui h, o parabolă de parametru p, de ecuaţii

$$\begin{cases} y^2 = 2px, \\ z = h. \end{cases}$$

Intersecţia cilindrului cu un plan paralel cu planul yOz, de ecuaţie $x = h$, este descrisă de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} y^2 = 2ph, \\ x = h. \end{cases}$$

Această intersecţie este:

- mulţimea vidă, dacă $h < 0$;
- axa Oz, dacă $h = 0$;
- o pereche de drepte paralele cu axa Oz, de ecuaţii

  $$\begin{cases} y = \pm\sqrt{2ph}, \\ x = h, \end{cases}$$

  dacă $h > 0$.

În sfârşit, intersecţia cilindrului parabolic cu un plan paralel cu planul zOx, de ecuaţie $y = h$ este, pentru orice valoare reală a lui h, o dreaptă paralelă cu axa Oz, de ecuaţii

$$\begin{cases} x = \dfrac{h^2}{2p}, \\ y = h. \end{cases}$$

CAPITOLUL 7

Generarea suprafeţelor

7.1 Breviar teoretic

7.1.1 Suprafeţe cilindrice

O *suprafaţă cilindrică* este o suprafaţă generată de o familie de drepte, numite *generatoare*, care se mişcă în spaţiu, paralel cu o dreaptă fixă, numită *directoare*, şi verifică o condiţie suplimentară. Condiţia suplimentară este, de regulă, ca generatoarele să intersecteze o curbă dată, numită *curbă directoare*, dar se pot impune şi alte cerinţe, de exemplu aceea ca generatoarele să fie tangente la o suprafaţă dată.

Să presupunem că dreapta directoare este dată ca intersecţie de două plane, adică prin intermediul unui sistem de ecuaţii de forma

$$(\Delta)\ \begin{cases} P_1(x,y,z)=0,\\ P_2(x,y,z)=0,\end{cases} \tag{7.1.1}$$

în timp ce curba directoare este dată ca intersecţie de două suprafeţe, adică tot de un sistem de ecuaţii

$$(C)\ \begin{cases} F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases} \tag{7.1.2}$$

Generatoarele fiind paralele cu dreapta directoare, ecuaţiile lor se pot scrie sub forma

$$(G_{\lambda,\mu})\ \begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda,\\ P_2(x,y,z)=\mu,\end{cases} \tag{7.1.3}$$

unde λ şi μ sunt doi parametri reali, pe moment arbitrari. Condiţia ca generatoarele să intersecteze curba directoare ne conduce la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda,\\ P_2(x,y,z)=\mu,\\ F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases} \tag{7.1.4}$$

Acesta este un sistem de patru ecuaţii pentru necunoscutele x, y şi z. Cerinţa ca sistemul să fie compatibil implică existenţa unei dependenţe între parametrii λ şi μ,

$$\varphi(\lambda,\mu)=0. \tag{7.1.5}$$

Atunci ecuaţia suprafeţei cilindrice se scrie

$$\varphi\left(P_1(x,y,z),P_2(x,y,z)\right)=0. \tag{7.1.6}$$

7.1.2 Suprafeţe conice

O *suprafaţă conică* este o suprafaţă generată de o familie de drepte mobile, numite *generatoare*, care trec printr-un punct fix, care se numeşte *vârful suprafeţei conice*, şi care verifică o condiţie suplimentară. Ca şi în cazul suprafeţelor cilindrice, de regulă condiţia ca generatoarele să intersecteze o curbă dată, numită *curbă directoare* a suprafeţei conice, dar, din nou ca şi în cazul suprafeţelor cilindrice, poate lua şi alte forme, de exemplu cerinţa ca generatoarele să fie tangente unei suprafeţe date.

Să presupunem că vârful conului este dat ca o intersecţie de trei plane, deci ca unica soluţie a unui sistem liniar compatibil şi determinat

$$(V)\ \begin{cases}P_1(x,y,z)=0,\\ P_2(x,y,z)=0,\\ P_3(x,y,z)=0,\end{cases} \tag{7.1.7}$$

iar curba directoare este dată ca o intersecţie de două suprafeţe, deci sub forma unui sistem de două ecuaţii (în general, neliniare!)

$$(C)\ \begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases} \tag{7.1.8}$$

O generatoare a suprafeţei conice (adică o dreaptă care trece prin vârf) se poate scrie sub forma

$$(G_{\lambda,\mu})\ \begin{cases}P_1(x,y,z)=\lambda P_3(x,y,z),\\ P_2(x,y,z)=\mu P_3(x,y,z),\end{cases} \tag{7.1.9}$$

unde λ şi μ sunt doi parametri reali, deocamdată arbitrari.

Condiţia ca generatoarele să intersecteze curba directoare ne conduce la sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}P_1(x,y,z)=\lambda P_3(x,y,z),\\ P_2(x,y,z)=\mu P_3(x,y,z),\\ F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases} \tag{7.1.10}$$

Sistemul este compatibil doar dacă între cei doi parametri există o relaţie

$$\varphi(\lambda,\mu)=0. \tag{7.1.11}$$

Ecuaţia suprafeţei conice este

$$\varphi\left(\frac{P_1(x,y,z)}{P_3(x,y,z)},\frac{P_2(x,y,z)}{P_3(x,y,z)}\right). \tag{7.1.12}$$

7.1.3 Suprafeţe conoide (conoizi cu plan director)

O *suprafaţă conoidă* sau un *conoid cu plan director* este o suprafaţă generată de o familie de drepte, numite *generatoare*, care intersectează o dreaptă dată, numită *dreaptă directoare* şi rămân paralele cu un plan dat, numit *plan director*, şi mai verifică o condiţie suplimentară, de regulă aceea de intersecţie cu o curbă dată, numită *curbă directoare*.

Dacă dreapta directoare este dată ca intersecţie de două plane:

$$(\Delta)\ \begin{cases} P_1(x,y,z)=0, \\ P_2(x,y,z)=0, \end{cases} \tag{7.1.13}$$

iar planul director are ecuaţia

$$(\Pi)\ P(x,y,z)=0, \tag{7.1.14}$$

atunci ecuaţiile generatoarelor se pot scrie

$$(G_{\lambda,\mu})\ \begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda P_2(x,y,z), \\ P(x,y,z)=\mu, \end{cases} \tag{7.1.15}$$

unde λ şi μ sunt parametri reali.

Să presupunem acum că curba directoare este dată de

$$(C)\ \begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{7.1.16}$$

Atunci condiţia ca generatoarele să intersecteze curba directoare este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} P_1(x,y,z)=\lambda P_2(x,y,z), \\ P(x,y,z)=\mu, \\ F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases} \tag{7.1.17}$$

Sistemul (5.1.17) este compatibil dacă şi numai dacă între parametri există o relaţie de compatibilitate

$$\varphi(\lambda,\mu)=0. \tag{7.1.18}$$

Atunci ecuaţia suprafeţei conoide căutate este

$$\varphi\left(\frac{P_1(x,y,z)}{P_2(x,y,z)}, P(x,y,z)\right)=0. \tag{7.1.19}$$

7.1.4 Suprafeţe de rotaţie (sau de revoluţie)

O *suprafaţă de rotaţie* (numită şi *suprafaţă de revoluţie*) este o suprafaţă generată de o curbă (numită *curbă directoare*) care se roteşte, în spaţiu, în jurul unei drepte, numită *axă de rotaţie*.

Ideea de deducere a ecuaţiei unei suprafeţe de rotaţie este similară cu cea care se utilizează pentru deducerea ecuaţiilor celorlalte suprafeţe generate. Concret, considerăm o familie, biparametrică, de cercuri situate în plane perpendiculare pe axa de rotaţie şi cu centrul pe axă (*cercuri generatoare*). În continuare, algoritmul este perfect analog cu algoritmii utilizaţi pentru restul suprafeţelor:

- Se pune condiţia ca cercurile generatoare să intersecteze curba directoare.
- Se deduce condiţia de compatibilitate.
- Ecuaţia suprafeţei de rotaţie se obţine înlocuind în condiţia de compatibilitate parametrii care provin din ecuaţiile cercurilor generatoare.

Să presupunem că axa de rotaţie este dată prin ecuaţiile sale canonice,

$$(\Delta)\ \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \tag{7.1.20}$$

Atunci ecuaţiile cercurilor generatoare vor fi

$$(G_{\lambda,\mu})\ \begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda^2,\\ lx+my+cz=\mu.\end{cases} \tag{7.1.21}$$

Dacă ecuaţiile curbei directoare sunt

$$(C)\ \begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases} \tag{7.1.22}$$

atunci condiţia ca cercurile generatoare să intersecteze curba directoare este dată de sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\lambda^2,\\ lx+my+cz=\mu,\\ F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases} \tag{7.1.23}$$

Acest sistem este compatibil dacă şi numai dacă între cei doi parametri există o relaţie

$$\varphi(\lambda,\mu)=0. \tag{7.1.24}$$

Atunci ecuaţia suprafeţei de rotaţie căutate se scrie sub forma

$$\varphi\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},lx+my+cz\right)=0. \tag{7.1.25}$$