SEMINARUL 11

Transformări geometrice în plan

În lista de probleme de mai jos, dacă nu se precizează altfel, triunghiul ABC are vârfurile $A(1,1)$, $B(4,1)$, $C(2,3)$. La fiecare problemă desenaţi, pe acelaşi sistem de axe de coordonate, figura iniţială şi figura obţinută după aplicarea transformării.

Problema 11.1. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de unghi 30° în jurul punctului $Q(2,2)$, urmată de o translaţie de vector $(1,2)$. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Problema 11.2. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare uniformă de factor de scală 2 relativ la punctul $Q(2,2)$, urmată de o translaţie de vector $\mathbf{v}(2,-1)$. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Problema 11.3. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, de factori de scală $(2,1)$, relativ la punctul $Q(2,2)$., urmată de o rotaţie de unghi 60°, relativ la acelaşi punct. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Problema 11.4. Determinaţi imaginea triunghiului ABC printr-o rotaţie de unghi -45° în jurul vârfului A, urmată de o scalare de factori $(2,1)$ relativ la vârful C. Aplicaţi apoi transformările în ordine inversă.

Problema 11.5. Se consideră pătratul $ABCD$, de vârfuri $A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$. Demonstraţi că patrulaterul $A'B.C'D'$, cu $A'(1,-2), B'(2,-3), C'(3,-2), D'(2,-1)$ este, de asemenea, un pătrat şi indicaţi o secvenţă de transformări geometrice care transformă primul pătrat în cel de-al doilea.

Problema 11.6. Se consideră pătratul $ABCD$, de vârfuri $A(0,0), B(2,0), C(2,2), D(0,2)$. Demonstraţi că patrulaterul $A'B.C'D'$, cu $A'\left(3-\frac{\sqrt{2}}{2},-1-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $B'\left(3+\frac{3\sqrt{2}}{2},-1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $C'\left(3+\frac{\sqrt{2}}{2},-1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $D'\left(3-\frac{3\sqrt{2}}{2},-1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ este un dreptunghi şi indicaţi o secvenţă de transformări geometrice care transformă pătratul în dreptunghi.

Problema 11.7. Măriţi de două ori dimensiunile triunghiului ABC, cu $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(5,2)$, astfel încât punctul $C(5,2)$ să rămână fix.

Problema 11.8. Aplicaţi o rotaţie de unghi 45° triunghiului ABC, cu $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(5,2)$:

(a) în jurul originii;

(b) în jurul punctului $P(-1,-1)$.

Problema 11.9. Determinaţi imaginea triunghiului ABC, cu $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(5,2)$ prin scalarea simplă neuniformă de factori $(1,2)$ relativ la punctul B, urmată de o rotaţie de $30°$ în jurul punctului $Q(1,1)$.

Problema 11.10. Reflectaţi rombul de vârfuri $A(-1,0)$, $B(0,-2)$, $C(1,0)$ şi $D(0,2)$ faţă de:

(a) dreapta orizontală $y = 2$;

(b) dreapta verticală $x = 2$;

(c) dreapta $y = x + 2$.

Problema 11.11. Demonstraţi că ordinea în care se fac transformările este importantă aplicând triunghiului de vârfuri $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$:

(a) o rotaţie de unghi $45°$ în jurul originii, urmată de o translaţie de vector $(1,0)$;

(b) o translaţie de vector $(1,0)$, urmată de o rotaţie de unghi $45°$ în jurul originii.

Problema 11.12. Determinaţi matricea unei transformări care constă dintr-o reflexie faţă de dreapta $y = x$, urmată de o reflexie faţă de dreapta $y = \sqrt{3}x$.

Problema 11.13. Determinaţi imaginea dreptunghiului de vârfuri $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ şi $D(0,1)$ prin forfecarea relativ la origine în direcţia axei Ox, de unghi θ cu $\operatorname{tg}\theta = 3$.

Problema 11.14. Determinaţi imaginea dreptunghiului de vârfuri $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ şi $D(0,1)$ prin forfecarea relativ la origine în direcţia axei Oy, de unghi θ cu $\operatorname{tg}\theta = 2$.

Problema 11.15. Determinaţi imaginea dreptunghiului de vârfuri $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(2,1)$ şi $D(0,1)$ prin forfecarea relativ la origine în direcţia versorului $\mathbf{v}(3/5, 4/5)$, de unghi θ cu $\operatorname{tg}\theta = 2$.