Algebră, anul I Informatică

2 octombrie 2024

1 Obligatorii

Exerciţiu 1 (E1.3.35) *Se consideră funcţiile:*

(1) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x^2;$

(2) $f_2 : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x^2;$

(3) $f_3 : \mathbb{R} \to [0, \infty),\ f_3(x) = x^2;$

(4) $f_4 : [0, \infty) \to [0, \infty),\ f_4(x) = x^2.$

Să se studieze pentru fiecare dintre ele injectivitatea, surjectivitatea şi bijectivitatea. În cazul existenţei inversei să se determine aceasta.

Soluţie.

(1) Nu este nici surjectivă, nici injectivă.

(2) Injectivă, nu este surjectivă.

(3) Surjectivă, nu este injectivă.

(4) Bijectivă. $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

∎

Exerciţiu 2 (E1.3.36) *Acelaşi exerciţiu ca şi 1 pentru funcţiile:*

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \textit{dacă } x \leq 1 \\ x+2, & \textit{dacă } x > 1 \end{cases}$

(2) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2+1, & \textit{dacă } x \leq 0 \\ -x+2, & \textit{dacă } x > 0 \end{cases}$

(3) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \textit{dacă } x \leq 0 \\ x+2, & \textit{dacă } x > 0 \end{cases}$

Soluţie.

(1) bijectivă,

$$f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f^{-1}(y)=\begin{cases}\frac{y-1}{2}, & \text{dacă } y\le 3\\ y-2, & \text{dacă } y>3\end{cases}$$

(2) surjectivă, nu este injectivă

(3) injectivă, nu este surjectivă

■

Exerciţiu 3 (E1.3.37) *Să se precizeze dacă următoarele compuneri $f\circ g$ şi $g\circ f$ sunt definite, şi în caz afirmativ să se determine funcţia compusă:*

(1) $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}x^2-1, & \textit{dacă } x\le -1\\ x-1, & \textit{dacă } x>-1\end{cases},\qquad g(x)=\begin{cases}-x+1 & \textit{dacă } x<3\\ x-2 & \textit{dacă } x\ge 3\end{cases}$$

(2)

$$f:\mathbb{R}\to[0,\infty),\quad f(x)=|x|,\qquad g:\mathbb{N}^*\to\mathbb{R},\qquad g(x)=\frac{1}{x}$$

(3)

$$f:\mathbb{R}\to[0,\infty),\quad f(x)=x^2+1,\qquad g:[0,\infty)\to\mathbb{R},\qquad g(x)=\sqrt{x}.$$

Soluţie.

(1) Ambele compuneri sunt definite

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}x^2-3, & \text{dacă } x\in(-\infty,-2]\\ -x^2+2, & \text{dacă } x\in(-2,-1]\\ 2-x, & \text{dacă } x\in(-1,4)\\ -3+x, & \text{dacă } x\in[4,\infty)\end{cases}$$

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}x, & x\in(-\infty,2)\\ -x^2+2x, & x\in[2,3)\\ 3-x, & x\in[3,\infty)\end{cases}$$

(2) $g\circ f$ nu este definită; $f\circ g:\mathbb{N}^*\to[0,\infty)$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{|x|}.$$

(3) Ambele compuneri sunt definite

$$g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad (g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(x^2+1\right)=\sqrt{x^2+1}$$
$$f\circ g:[0,\infty)\to[0,\infty),\qquad (f\circ g)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=x+1$$

■

2 Opţionale

Exerciţiu 4 (E1.3.38) *Fie A, B, C trei mulţimi aşa încât $C \subseteq A$ şi $f : A \to B$ o funcţie. Să se arate că $f|_C : f \circ i$, unde $i : C \to A$ este funcţia de incluziune.*

Soluţie. $f|_C : C \to B$, $f|_C(x) = f(x)$. $f \circ i : C \to A$; $(f \circ i)(x) = f(i(x)) = f(x)$, deci $f|_C(x) = (f \circ i)(x)$. ■

Exerciţiu 5 (E1.3.40) *Să se găsească un exemplu de două funcţii $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ aşa încât $g \circ f \neq f \circ g$. (Deşi compunerea este definită bilateral, ea nu este comutativă).*

Soluţie. Fie $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = x + 1$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$$
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2,$$

deci $g \circ f \neq f \circ g$. ■

Exerciţiu 6 (E1.3.41) *Să se arate că orice funcţie $f : A \to B$ poate scrisă ca o compunere $f = i \circ p$ unde $i = i_f$ este injectivă iar $p = p_f$ este surjectivă.*

Soluţie. Definim $p : A \to f(A)$, $p(x) = f(x)$; p este surjectivă (definiţia surjectivităţii); $i_f : f(A) \to B$, $i_f(x) = x$ (aplicaţia de incluziune de la $f(A)$ la B) - injectivă. ■

Exerciţiu 7 (E1.3.45) *Fie $f : A \to B$ o funcţie, şi $X, X_1, X_2 \subseteq A$ şi $Y, Y_1, Y_2 \subseteq B$ submulţimi. Să se arate:*

(1) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

(2) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.

(3) $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$.

(4) $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$.

(5) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

(6) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Exerciţiu 8 (E1.3.46) *Următoarele afirmaţii sunt echivalente, pentru o funcţie $f : A \to B$:*

(i) *f este injectivă.*

(ii) *$X = f^{-1}(f(X))$ pentru orice submulţime $X \subseteq A$.*

(iii) *$f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$ pentru orice două submulţmi $X_1, X_2 \subseteq A$.*

Să se găsească un exemplu care să arate că injectivitatea lui f este necesară pentru amândouă egalităţile (i) şi (ii).

Soluţie. $(i) \Longrightarrow (iii)$. Pres. că f injectivă. $b \in f(X_1) \cap f(X_2) \Longrightarrow b \in f(X_1) \wedge b \in f(X_2) \Longrightarrow \exists x_1 \in X_1 \wedge \exists x_2 \in X_2$ astfel încât $b = f(x_1) \wedge b = f(x_2)$. Din injectivitate, rezultă $x_1 = x_2$, deci $x_1 \in X_1 \cap X_2$, adică $b \in f(X_1 \cap X_2)$. Am demonstrat incluziunea $f(X_1) \cap f(X_2) \subseteq f(X_1 \cap X_2)$. Incluziunea inversă este valabilă pentru orice funcţie, vezi exerciţiul 7, punctul (3).

$(iii) \Longrightarrow (ii)$ Fie $x_1, x_2 \in A$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2)$. Fie $X_1 = \{x_1\}$, $X_2 = \{x_2\}$, $f(X_1) = \{f(x_1)\}$, $f(X_2) = \{f(x_2)\}$ Dar, $f(X_1) \cap f(X_2) = f(X_1 \cap X_2)$, de unde rezultă că $f(X_1 \cap X_2) \neq \emptyset$. Deci, $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$, adică $x_1 = x_2$ şi f este injectivă.

■

Exerciţiu 9 (E1.3.47) *Următoarele afirmaţii sunt echivalente, pentru o funcţie $f : A \to B$:*

(i) f este surjectivă.

(ii) $f\left(f^{-1}(Y)\right) = Y$ pentru orice submulţime $Y \subseteq B$.

Să se găsească un exemplu care să arate că surjectivitatea lui f este necesară pentru egalitatea (ii).