Algebră, anul I Informatică

17 decembrie 2024

1 Obligatorii

Exerciţiul 1 (E3.2.33) *Să se arate că o listă cu doi vectori* $[x, y]^t \in V^{2\times 1}$ *este exact atunci liniar dependentă când există* $\alpha \in \mathbb{K}$ *astfel încât* $x = \alpha y$ *sau* $y = \alpha x$. *Să se găsească interpretarea geometrică în cazul* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *şi* $V = \mathbb{R}^3$. *Când este o listă de vectori* $[x, y, z]^t \in (\mathbb{R}^3)^{3\times 1}$ *liniar dependentă?*

Soluţie. $[x, y]^t$ liniar dependentă, $\exists c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ astfel încât $c_1x + c_2y = 0$, $|c_1| + |c_2| > 0$.

C1) $c_1 \neq 0$ $x = -\frac{c_2}{c_1}y$

C2) $c_2 \neq 0$ $y = -\frac{c_1}{c_2 y}$

Interpretare geometrică: Vectorii sunt coliniari sau unul din ei este vectorul nul

$[x, y, z]^t$ liniar dependentă, $\exists c_1, c_2, c_3 \in K$ $|c_1| + |c_2| + |c_3| > 0$, $c_1x + c_2y + c_3z = 0$ este ecuaţia unui plan, deci

1. vectorii sunt coplanari, $z = -\frac{c_1}{c_3}x - \frac{c_2}{c_3}y$, etc.

2. 2 vectori din listă sunt coliniari

3. unul din vectori este vectorul nul

■

Exerciţiul 2 (E3.2.35) *Fie* $f : V \to W$ *o aplicaţie liniară şi* $X \subseteq V$. *Să se arate că* $f(\langle X \rangle) = \langle f(X) \rangle$.

Soluţie.

$$\langle X \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i x_i | x_i \in V, c_i \in K, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Fie $x \in \langle X \rangle$. x se poate scrie sub forma $x = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$. Datorită liniarităţii avem

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) \in \langle f(X) \rangle,$$

adică $f(\langle X\rangle) \subseteq \langle f(X)\rangle$. Fie $y \in \langle f(X)\rangle$; el se poate scrie sub forma

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i) = f\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i\right) \in f(\langle X\rangle)$$

şi am demonstrat şi incluziunea inversă $f(\langle X\rangle) \supseteq \langle f(X)\rangle$. ■

Exerciţiul 3 (E3.2.36) *Să se arate că* $\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\sqrt{2} = \left\{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Q}\right\} = V$ *este un* $\mathbb{Q}$*-spaţiu vectorial şi să se determine o bază şi dimensiunea.*

Soluţie. $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$ este grup abelian. Adunarea este lege de compoziţie internă pe $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$: Fie $x = a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$, $y = c+d\sqrt{2}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$. Observăm că

$x+y = a+b\sqrt{2}+c+d\sqrt{2} = (a+c)+(b+d)\sqrt{2} \in \mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$. Asociativitatea rezultă

din asociativitatea pe $\mathbb{R}$. Elementul neutru este $0 = 0+0\sqrt{2} \in \mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$. Dacă $x = a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$, opusul său este $-x = -a-b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$.

$\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, $x, y \in \mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$, $\alpha(x+y) = \alpha\left(a+b\sqrt{2}+c+d\sqrt{2}\right) = \alpha\left(a+b\sqrt{2}\right)+\alpha\left(c+d\sqrt{2}\right) = \alpha x + \alpha y$.

$(\alpha+\beta)x = (\alpha+\beta)\left(a+b\sqrt{2}\right) = \alpha\left(a+b\sqrt{2}\right)+\beta\left(a+b\sqrt{2}\right) = \alpha x + \beta y$

$\alpha(\beta x) = \alpha\left(\beta a+\beta b\sqrt{2}\right) = \alpha\beta a + \alpha\beta b\sqrt{2} = \alpha\beta\left(a+b\sqrt{2}\right) = (\alpha\beta)x$

$1x = 1\left(a+b\sqrt{2}\right) = a+b\sqrt{2} = x$.

,,Vectorii” 1 şi $\sqrt{2}$ sunt liniar independenţi, din $a+b\sqrt{2} = 0$, unde a şi b nu sunt simultan nule rezultă $a = 0$ şi $b = 0$. Orice element $x = a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt{2}$ se scrie în mod unic sub această formă. Presupunem că admite două scrieri $x = a+b\sqrt{2} = c+d\sqrt{2} \Longrightarrow (a-c)\cdot 1+(b-d)\sqrt{2} = 0$. deoarece 1 şi $\sqrt{2}$ sunt liniar independenţi rezultă că $a-c = 0$ şi $b-d = 0$, adică $a = c$ şi $b = d$. ■

Exerciţiul 4 (E3.2.40) *Se consideră în* $\mathbb{R}^3$ *lista de vectori* $\mathbf{v} = [v_1, v_2, v_3]^t$. *Folosind două metode (definiţia bazei respectiv lema substituţiei) să se găsească* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât* $\mathbf{v}$ *este o bază a lui* $\mathbb{R}^3$*, unde:*

(1) $v_1 = [1, -2, 0]$, $v_2 = [2, 1, 1]$, $v_3 = [0, a, 1]$.

(2) $v_1 = [2, 1, -1]$, $v_2 = [0, 3, -1]$, $v_3 = [1, a, 1]$.

Soluţie.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & a \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & a \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & a \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & a+1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & a+1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & a+4 \end{bmatrix}$$

1. $a \neq 5$
2. $a \neq -4$

■

Exercişiul 5 (E3.2.41) *Să se arate că* $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3, b_4]^t$ *unde* $b_1 = [1, 2, -1, 2]$, $b_2 = [1, 2, 1, 4]$, $b_3 = [2, 3, 0, -1]$, $b_4 = [1, 3, -1, 0]$ *este o bază a lui* $\mathbb{R}^4$ *şi să se determine coordonatele lui* $x = [2, 3, 2, 10]$ *în raport cu acea bază.*

Soluţie. Aplicând eliminarea gaussiană se obţine

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 9 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rezultă că rangul lui A este 4. CoordonateleCoordonatele lui x în baza $\mathbf{b}$ sunt $[1, 2, 0, 1]^T$. ■

Exercişiul 6 (E3.2.42) *Să se determine* $a \in \mathbb{R}$ *astfel încât lista* $v = [v_1, v_2, v_3]^t$ *este o bază a lui* $\mathbb{R}^3$*, unde:* $v_1 = (a, 1, 1)$, $v_2 = (1, a, 1)$, $v_3 = (1, 1, a)$.

Soluţie. Formăm matricea

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determinantul său este $\det A = (a+2)(a-1)^2$. Dacă $a \neq -2$ şi $a \neq 1$, rangul lui A este 3 şi vectorii sunt liniar independenţi. Deoarece dimensiunea spaţiului este 3, ei formează o bază. ■

2 Opţionale

Exercişiul 7 (E3.2.34) *Fie* V *un* K*-spaţiu vectorial cu* $\dim V = n$. *Să se arate că pentru orice număr natural* $m \leq n$ *există un subspaţiu* $S \leq_K V$ *astfel încât* $\dim S = m$.

Soluţie. Fie $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ o bază a spaţiului V. Lista $\mathbf{v}$ este liniar independentă, rezultă că şi lista s= $[v_1, \ldots, v_m]$, cu $m \leq n$ este liniar independentă şi subspaţiul căutat este $S = \langle s \rangle$. ■

Exerciţiul 8 (E3.2.37) *Fie p un număr prim. Să se arate că $\mathbb{Q}+\mathbb{Q}\sqrt[3]{p}+\mathbb{Q}\sqrt[3]{p^2}=\left\{a+b\sqrt[3]{p}+c\sqrt[3]{p^2}|a,b,c\in\mathbb{Q}\right\}$ este un $\mathbb{Q}$-spaţiu vectorial şi să se determine o bază şi dimensiunea.*

Soluţie. O bază este $[1, \sqrt[3]{p}, \sqrt[3]{p^2}]$, iar dimensiunea spaţiului este 3. ■

Exerciţiul 9 (E3.2.38) *Fie $f:V\to W$ o aplicaţe liniară şi $\mathbf{v}=[v_1,\dots,v_n]^t\in V^{n\times 1}$ o listă de vectori. Notăm $f(v)=[f(v_1),\dots,f(v_n)]^t\in W^{n\times 1}$. Atunci:*

(a) dacă f este injectivă şi $\mathbf{v}$ este liniar independentă atunci $f(\mathbf{v})$ are aceeaşi proprietate.

(b) Dacă f este surjectivă şi $\langle\mathbf{v}\rangle=V$, atunci $\langle f(\mathbf{v})\rangle=W$.

(c) Dacă f este bijectivă şi $\mathbf{v}$ este o bază a lui V atunci $f(\mathbf{v})$ este de asemenea o bază (a lui W).

Soluţie.

(a) f injectivă$\Longrightarrow$ $\mathrm{Ker} f=\{\theta\}$. $\mathbf{v}$ este liniar independentă $\Longrightarrow$

$(c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n=\theta_V\Longrightarrow c_k=0, k=1,\dots,n)$. Considerăm combinaţia liniară

$$\begin{aligned}\theta_W &= c_1f(v_1)+c_2f(v_2)+\cdots+c_nf(v_n)\\ &= f\left(c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n\right) && \text{(liniaritate)}\\ &= f(\theta_V) && \text{(injectivitate)}\end{aligned}$$

Se obţine $c_1v_1+c_2v_2+\cdots+c_nv_n=\theta_V\Longrightarrow c_k=0, k=1,\dots,n$, adică liniar independenţa lui $f(\mathbf{v})$.

(b) f surjectivă$\Longrightarrow$ $f(V)=W\wedge\langle\mathbf{v}\rangle=V\Longrightarrow f(\langle\mathbf{v}\rangle)=W$. Incluziunea $\langle f(\mathbf{v})\rangle\subseteq W$ este imediată. Fie $y\in W$; $\exists x\in V$ astfel încât $y=f(x)$

$$y=f\left(\sum_i c_iv_i\right)=\sum_i c_if\left(v_i\right)\in\langle f(\mathbf{v})\rangle,$$

adică $W\subseteq\langle f(\mathbf{v})\rangle$.

(c) Dacă f este liniară şi bijectivă, conform punctelor anterioare din injectivitate rezultă că dacă $\mathbf{v}$ este liniar independentă şi $f(\mathbf{v})$ este liniar independentă şi din surjectivitate dacă $\langle\mathbf{v}\rangle=V$, atunci $\langle f(\mathbf{v})\rangle=W$, adică $f(\mathbf{v})$ generează W. Deoarece $f(\mathbf{v})$ este liniar independentă şi generează W rezultă că este o bază a lui W.

■

Exerciţiul 10 (E3.2.39) *Pentru un K-spaţiu vectorial V cu $\dim V=n$ şi $S\le_K V$, să se arate că există $T\le_K V$ astfel încât $S\oplus T=V$.*

Soluţie. Dacă $\dim S = 0$, atunci $S = \{\theta\}$ şi $T = V$. Presupunem că S este un subspaţiu netrivial al lui V. Fie $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \ldots, v_n]^t$ o bază a lui V. Rezultă $m = \dim S < \dim V = n$.

Putem extrage din $\mathbf{v}$ o bază a lui S, fie ea $\mathbf{s} = [v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}]$. Deoarece $\mathbf{v}$ este liniar independentă, rezultă că s şi $v\backslash s$ sunt liniar independente.Luăm $T = \langle \mathbf{v}\backslash\mathbf{s}\rangle$. Se arată uşor că $S + T = V$ şi $S \cap T = \{\theta\}$. Incluziunea $S + T \subseteq V$ este imediată. Fie $x \in V$, $I = \{1, 2, \ldots, n\}\backslash\{i_1, \ldots, i_m\}$

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = \sum_{j=1}^{m} c_{i_j} v_{i_j} + \sum_{k \in I} c_k v_k.$$

Dar, $z = \sum_{j=1}^{m} c_{i_j} v_{i_j} \in S$ şi $x - z = \sum_{k\in I} c_k v_k \in T$, deci $x = x - z \in S + T$. Fie $y \in S \cap T$, $y \neq \theta$. Rezultă că $y = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{i_j} v_{i_j} = \sum_{k\in I} c_k v_k$, unde coeficienţii din ambele sume nu sunt toţi nuli, sau trecând totul într-un membru $\sum_{j=1}^{m} \alpha_{i_j} v_{i_j} - \sum_{k\in I} c_k v_k = \theta$, ceea ce contrazice liniar independenţa lui v. Deci, $y = \theta$. ∎