1 Obligatorii

Exerciţiul 1 (E1.3.42) *Să se găsească un exemplu care constă dintr-o funcţie* $f : A \to B$*, aşa încât:*

(1) f *este injectivă, dar nu are o inversă la stânga.*

(2) f *are exact o inversă la stânga, dar nu este bijectivă.*

(3) f *are exact două inverse la stânga.*

(4) f *are o infinitate de inverse la stânga.*

Soluţie.

(1) $f\emptyset \to \emptyset$

(2) $f : \{1\} \to \{1, 2\}$, $f(1) = 1$;
$g : \{1, 2\} \to \{1\}$ $g(1) = 1$, $g(2) = 1$.

(3) $f : \{1, 2\} \to \{1, 2, 3\}$ $f(1) = 1$, $f(2) = (2)$;
$g_1, g_2 : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$ $g_1(1) = g_2(1) = 1$, $g_1(2) = g_2(2) = 2$, $g_1(3) = 1$, $g_2(3) = 2$.

(4) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$;
$g_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$g_k(x) = \begin{cases} x - 1, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$$

■

Exerciţiul 2 (E1.3.43) *Să se găsească un exemplu care constă dintr-o funcţie* $g : B \to A$*, aşa încât:*

(1) g *are exact două inverse la dreapta.*

(2) g *are o infinitate de inverse la dreapta.*
Să se arate că g *are exact o inversă la dreapta ddacă* g *este bijectivă.*

Soluţie.

(1) $f\{1, 2\} \to \{1\}$, $f(1) = f(2) = 1$;
$g_1, g_2 : \{1\} \to \{1, 2\}$, $g_1(1) = 1$, $g_2(1) = 2$.

(2) $f : \mathbb{N} \to 1$, $f(n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$;
$g_k : \{1\} \to \mathbb{N}$, $g_k(1) = k$.

($\Leftarrow$) $g : B \to A$ bijectivă $\Rightarrow$ g inversabilă$\Rightarrow$ inversa este unică, deci g are o singură inversă la dreapta.

($\Rightarrow$) g este surjectivă deoarece are inversă la dreapta, fie ea g_1. Presupunem că nu este injectivă, $\exists\ y_1, y_2 \in A, y_1 \neq y_2$ a.Ã®. $g(y_1) = g(y_2) = x$. ÃŽn acest caz putem construi două inverse la dreapta

$$g_2 : A \to B, g_2(y) = \begin{cases} g_1(y), & \text{pt. } y \neq x \\ y_1, & \text{pt. } y = x \end{cases}$$

$$g_3 : A \to B, g_3(y) = \begin{cases} g_3(y), & \text{pt. } y \neq x \\ y_2, & \text{pt. } y = x \end{cases}$$

contradicţie!!! ■

Exerciţiul 3 (E1.3.44) *Să se găsească un exemplu care constă din două funcţii* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$*, aşa încât:*

(1) $g \circ f$ este injectivă, dar g nu este injectivă;

(2) $g \circ f$ este surjectivă, dar f nu este surjectivă;

(3) $g \circ f$ este bijectivă, dar g nu este injectivă şi f nu este surjectivă.

Soluţie.

(1) $g \circ f$ injectivă $\Rightarrow$ f injectivă $f : \{1,2\} \to \{1,2\}$, $f(x) = x$ şi $g : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$,

x	1	2	3
$g(x)$	2	1	2

(2) $g \circ f$ surjectivă $\Rightarrow$ g surjectivă, $f : \{1,2\} \to \{1,2\}$, $f(x) = x$ şi $g : \{1,2,3\} \to \{1\}$, $g(x) = 1$.

(3) $g \circ f$ bijectivă $\Rightarrow$ f injectivă $\wedge$ g surjectivă. Definim $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4\}$, $f(x) = x$ şi $g\{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}$

x	1	2	3	4
$g(x)$	1	2	3	3

■

2 Opţionale

Fie $f : A \to B$; imaginea submulţimii $X \subseteq A$ prin f este:

$$f(X) = \{y \in B | \exists x \in X : y = f(x)\} = \{f(x) : x \in X\}.$$

$f(A)$ se numeşte imaginea lui A. Imaginea inversă (coimaginea) lui $Y \subseteq B$

$$f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

Exercițiul 4 (E1.3.45) *Fie $f : A \to B$ o funcție, și fie $X, X_1, X_2 \in A$ și $Y, Y_1, Y_2 \in B$ submulțimi. Să se arate:*

(1) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

(2) $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2)$.

(3) $f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2)$.

(4) $f\left(f^{-1}(Y)\right) \subseteq Y$.

(5) $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

(6) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Exercițiul 5 (E1.3.46) *Următoarele afirmații sunt echivalente, pentru o funcție $f : A \to B$:*

(1) f este injectivă.

(2) $X = f^{-1}(f(X))$ pentru orice submulțime $X \subseteq A$.

(3) $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$ pentru orice două submulțimi $X_1, X_2 \subseteq A$.

Să se găsească un exemplu care să arate că injectivitatea lui f este necesară pentru amândouă egalitățile (2) și (3).

Soluție.
($\Longrightarrow$) $X \subseteq f^{-1}(f(X))$ are loc întotdeauna (exercițiul 4 (2)). Vom demonstra incluziunea inversă, $f^{-1}(f(X)) \subseteq X$.

$x \in f^{-1}(f(X)) \Longrightarrow \exists x_0 \in X$ astfel încât $x \in f^{-1}(f(x_0) \Longrightarrow f(x) \in f(x_0)$, f aplicație $\Longrightarrow f(x) = f(x_0)$ și deoarece f este injectivă $x = x_0$ și deci $x \in X$.

($\Longleftarrow$) $f^{-1}(f(X)) = X$; luăm $X = \{x\}$, $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$. Fie x_1, x_2 astfel încât $f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow f^{-1}(f(\{x_1\})) = f^{-1}(f(\{x_2\})) \Longrightarrow \{x_1\} = \{x_2\} \Longrightarrow x_1 = x_2$, adică f injectivă.

Contraexemplu: $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = x^2$ și $X = [0, 1]$. f nu este injectivă.

$f([0, 1]) = [0, 1]$, $f^{-1}([0, 1] = [-1, 1]$, $f^{-1}f([0, 1]) = [-1, 1] \neq [0, 1]$. Contraexemplu mai simplu $f : \{-1, 0, 1\} \to \{0, 1\}$,

$$\begin{array}{c|ccc} x & -1 & 0 & 1 \\ \hline f(x) & 1 & 0 & 1 \end{array}, \; X = \{0, 1\}.$$

Avem $f(\{0, 1\}) = \{0, 1\}$, $f^{-1}(\{0, 1\}) = \{-1, 0, 1\}$, $f^{-1}(f(\{0, 1\}) = \{-1, 0, 1\} \neq \{0, 1\}$. ■

Exercițiul 6 (E1.3.47) *Următoarele afirmații sunt echivalente, pentru o funcție $f : A \to B$:*

(1) f este surjectivă.

(2) $f(f^{-1}(Y) = Y$ pentru orice submulțime $Y \subseteq B$.

Să se găsească un exemplu care să arate că surjectivitatea lui f este necesară pentru egalitatea (2).

Soluţie. ($\Longrightarrow$) f surjectivă, $Y \supseteq f\left(f^{-1}(Y)\right)$ are loc întotdeauna (exerciţiul 4 (4)). Vom arăta că $Y \subseteq f\left(f^{-1}(Y)\right)$.

$y \in Y$, $f^{-1}(y) = \{x : f(x) = y\}$; $f\left(f^{-1}\{y\}\right) = \{y\}$. $f\left(f^{-1}\left(Y\right)\right) = \{z \in A : \exists y \in Y$ a.î. $f(z) = y\}$

$\left.\begin{array}{r} y \in Y \\ f \text{ surj} \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists x \in A$ astfel încât $y = f(x)$, $f\left(f^{-1}\{y\}\right) = \{y\}$; $y \in f\left(f^{-1}\{y\}\right) \subseteq f\left(f^{-1}(Y\right)$

($\Longleftarrow$) $f(f^{-1}(Y) = Y$, luăm $Y = \{y\} \Longrightarrow f\left(f^{-1}\{y\}\right) = \{y\}$. $\forall y \in Y$ alegem $x \in f^{-1}\left(\{y\}\right)$, $f(\{x\}) = \{y\} \Longrightarrow y = f(x)$, f surjecţie.

Contraexemplu: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; f nu e surjectivă. Luăm $Y = \mathbb{R}$. $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, $f(\mathbb{R}) = [0, \infty)$, $f\left(f^{-1}\left(\mathbb{R}\right)\right) = f(\mathbb{R}) = [0, \infty] \neq \mathbb{R}$. ■

Exerciţiul 7 (E1.3.57) *Fie A o mulţime finită cu $|A| = n$.*

(1) Câte operaţii se pot defini pe A?

(2) Câte dintre ele sunt comutative?

(3) Câte dintre ele au un element neutru?