Algebră, anul I Informatică

11 decembrie 2024

1 Obligatorii

Exerciţiul 1 (E3.1.42) *Care dintre următoarele aplicaţii sunt liniare:*

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f[x_1, x_2, x_3] = [x_1 - x_2, x_2 - x_3, x_3 - x_1]$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f[x_1, x_2, x_3] = [x_1 - 1, x_2 + 2, x_3 + 1]$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f[x_1, x_2, x_3] = [2x_1 - 3x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + 3x_3, x_1 + x_2 + x_3]$.
4. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f[x_1, x_2] = [x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + x_2]$.
5. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f[x_1, x_2] = x_1^2 - x_2^2$.
6. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f[x_1, x_2] = [a_{1,1}x_1 + a_{2,1}x_2, a_{1,2}x_1 + a_{2,2}x_2]$, *unde* $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,1}$, $a_{2,2} \in \mathbb{R}$ *sunt fixate.*

Pentru aplicaţiile care sunt liniare să se determine ecuaţiile subspaţiilor $\mathrm{Ker} f$ *şi* $\mathrm{Im}\, f$.

Soluţie. Vom arăta că aplicaţia $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = Ax$ unde $A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$ este fixată, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$ este liniară. A este $n \times m$, x este $m \times 1$. Fie $x, y \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{K}$. Vom scrie vectorii sub formă de vectori coloană.

$$f(x+y) = A(x+y) = Ax + Ay = f(x) + f(y),$$
$$f(cx) = A(cx) = cAx = cf(x).$$

1. Scriem aplicaţia sub forma

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \end{bmatrix}$$

care este liniară. Avem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rangul lui A este 2. Ker$f$ se determină astfel

$$f(x) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Deci, Ker$f = \left\{[x_1, x_2, x_3]^T | x_1 = x_2 = x_3\right\} = \left\langle [1,1,1]^T \right\rangle$. Im f este subspaţiul generat de coloanele lui A, adică

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Obţinem

$$\mathrm{Im}\, f = \left\{ \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} | \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda - \mu \\ \mu \\ -\lambda \end{bmatrix} | \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Avem $x_1 = \lambda - \mu$, $x_2 = \mu$, $x_3 = -\lambda$. Eliminând parametrii λ şi μ obţinem $x_1 = -x_3 - x_2$, adică $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Interpretarea geometrică: Im f este planul de ecuaţie $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, iar Ker$f$ este dreapta de ecuaţie $x_1 = x_2 = x_3$.

2. $f(x+y) = [x_1+y_1-1, x_2+y_2+2, x_3+y_3+1] \neq f(x)+f(y) = [x_1-1, x_2+2, x_3+1] + [y_1-1, y_2+2, y_3+1] = [x_1+y_1-2, x_2+y_2+4, x_3+y_3+2]$. Nu este liniară. Altfel, scriem $f(x)$ sub forma

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = I_3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se observă că

$$f(x+y) = I_3(x+y) + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = x + y + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$f(x) + f(y) = x + y + 2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ x_2 - x_1 + 3x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

este liniară. Rangul matricei este 3, deci Ker$f = \{0\}$, Im $f = \mathbb{R}^3$.

4.
$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

Este liniară.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$$

$\mathrm{Ker} f = \{0\}$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \\ 2\lambda + \mu \end{bmatrix} \\ &= \left\{ [x_1, x_2, x_3]^T : 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \right\} \end{aligned}$$

5. Nu este liniară $f[x_1\ , x_2\ ] = x_1^2 - x_2^2$. $f(cx) = c^2 x_1^2 - c^2 x_2^2 \neq cf(x)$.

6. Este liniară

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dacă rangul lui A este 2, $\mathrm{Ker} f = \{0\}$ şi $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^2$. Dacă $rang(A) = 1$, sistemul $Ax = 0$ are soluţie diferită de soluţia banală şi $\mathrm{Ker} f$ este dreapta $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = 0$. $\operatorname{Im} f$ este subspaţiul generat de una din coloanele matricei.

■

2