Algebră, anul I Informatică

17 noiembrie 2024

1 Obligatorii

Exerciţiul 1 (E2.1.44) *Se consideră mulţimea*

$$\mathbb{Z} + i\mathbb{Z} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C} \ (\textit{aici } i^2 = -1).$$

Să se arate că $\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}$ *este un monoid în raport cu înmulţirea numerelor complexe. Să se determine* $(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})^{\times}$.

Soluţie. Operaţia este comutativă şi asociativă. $\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$ este parte stabilă a lui $(\mathbb{C}, \cdot)$. Elementul neutru în $(\mathbb{C}, \cdot)$ este $1 = 1 + 0i \in \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$. Deoarece

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i,$$

rezultă că $\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Z}$, adică $a^2 + b^2 | a$ şi $a^2 + b^2 | b$, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$; adică $a = 0$, $b = \pm 1$ sau $a = \pm 1$, $b = 0$. Deci, $(\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})^{\times} = \{1, -1, i, -i\}$. ■

Exerciţiul 2 (E2.1.51) *Fie* $A_1A_2 \ldots A_n$ *un poligon regulat (cu* n *vârfuri şi* n *laturi) cu centrul* O *într-un plan* α *(considerat ca o mulţime de puncte). O izometrie este o funcţie* $f : \alpha \to \alpha$ *cu proprietatea că* $|f(X)f(Y)| = |XY|$ *pentru orice* $X, Y \in \alpha$*, unde prin* $|XY|$ *notăm distanţa dintre* X *şi* Y*. Se consideră mulţimea tuturor izometriilor care invariază poligonul* $A_1A_2 \ldots A_n$ *mai precis*

$$D_n = \{f : \alpha \to \alpha | f \textit{ izometrie} \wedge f(A_1A_2 \ldots A_n) = A_1A_2 \ldots A_n\}.$$

Notăm cu s *rotaţia în jurul centrului* O *cu* $\frac{2\pi}{n}$ *radiani, (de la* A_1 *către* A_2*) şi cu* t *simetria axială faţa de axa* A_1O*. Să observăm că* $s, t : \alpha \to \alpha$ *sunt izometrii. Să se arate că*

(1) $s^n = 1 = t^2$ *(aici* $1 = 1_\alpha$ *este funcţia identitate a planului).*

(2) $ts = s^{n-1}t$.

(3) $D_n = \{1, s, \ldots, s^{n-1}, t, st, \ldots, s^{n-1}t\}$

(4) D_n *este un grup în raport cu compunerea funcţiilor (care este numit* grupul diedral *de ordinul* n*)*

(5) Să se determine $\langle s\rangle$, $\langle t\rangle$, $\langle s,t\rangle$.

Să se construiască tablele operaţiilor D_3 şi D_4.

Soluţie. Termenul diedral provine din greacă di şi hedron = faţă a unui solid geometric.

Fie $(\mathbb{R}, |\cdot,\cdot|)$ planul euclidian şi

$$Izom\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 |\, |\sigma(P) = \sigma(Q)| = |PQ|\,, \forall P, Q \in \mathbb{R}^2\right\}$$

mulţimea izometriilor lui $\mathbb{R}^2$. Deoarece orice izometrie este o bijecţie, iar produsul izometriilor şi inversa unei izometrii sunt de asemenea izometrii, rezultă că $\left(Izom\left(\mathbb{R}^2\right), \circ\right)$ este grup. Imaginea a trei puncte necoliniare determină o izometrie: dacă σ şi τ sunt izometrii, $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{R}^2$ sunt puncte necoliniare şi $\sigma(Q_i) = \tau(Q_i)$, $i = 1, 2, 3$, atunci $\sigma = \tau$.

(1) Compunerea unei rotaţii de unghi α cu o rotaţie de unghi β (în jurul originii) este o rotaţie de unghi $\alpha + \beta$. Rezultă că s^n este o rotaţie cu 2π, deci aplicaţia identică. Dar $t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$, $t\left(t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = t\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, adică $t^2 = 1$.

(2) s^k este o rotaţie de unghi $\frac{2k\pi}{n}$, rezultă $s^{-1} = s^{n-1}$, iar din $t^2 = 1$ rezultă $t = t^{-1}$. Se observă că $ts(A_1A_2 \ldots A_n) = t\left(A_2A_3 \ldots A_nA_1\right) = A_2A_1A_n \ldots A_3$ şi că

(3) Notăm cu 0 centrul lui P_n şi $1, 2, \ldots, n$ vârfurile lui P_n. Dacă $\sigma \in D_n$, atunci $\sigma(0) = 0$ şi $\sigma(k) \in \{1, \ldots, n\}$, deci D_n se poate identifica cu un grup de permutări, astfel ca $D_n \leq (S_n, \circ)$. Deoarece $\sigma(0) = 0$, rezultă că $\sigma(1)$ şi $\sigma(n)$ determină pe σ; dacă $\sigma(1) = k \in \{1, \ldots, n\}$, atunci $\sigma(n) \in \{k + 1 \bmod n, k - 1 \bmod n\}$, deci $|D_n| \leq 2n$. Arătăm că $|D_n| = 2n$. Este suficient să arătăm că există în D_n $2n$ elemnete distincte. Deoarece $s(1) = 2$, $s(n) = 1$, s se scrie ca permutare sub forma

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}.$$

Analog, $t(1) = 1$, $t(n) = 2$

$$t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & n & n-1 & \cdots & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Trebuie să arătăm că 1,s, $\ldots$, s^{n-1}, t, st, $\ldots$, $s^{n-1}t$ sunt transformări distincte Se observă că primele n sunt distincte. Dacă $0 \leq k < n$, $(s^k \circ t)(1) = s^k(1) = k + 1$ şi $(s^k \circ t)(n) = s^k(t(n)) = s^k(2) = k + 2$. Rezultă că

$$D_n = \left\{1, s, \ldots, s^{n-1}, t, st, \ldots, s^{n-1}t\right\}.$$

Să mai observăm că $ts = s^{n-1}t$; într-adevăr

$$\begin{aligned}(t \circ s)(1) = t(s(1)) = t(2) = n = (s^{n-1} \circ t)(1) \\ (t \circ s)(n) = t(s(n)) = t(1) = n = (s^{n-1} \circ t)(n).\end{aligned}$$

Se poate arăta că $s^k \circ t$ este simetria faţă de axa d_k unde d_k este mediatoarea segmentului $[1, k+1] \bmod n$; dacă $k = 2m$ este par, atunci d_k este dreapta $0(m+1)$; dacă $k = 2m+1$ este impar, atunci d_k este mediatoarea laturii $[m, m+1]$.

(4) Fie $P_n = A_1 A_2 \dots A_n \subset \mathbb{R}^2$ poligonul regulat cu n laturi. Prin definiţie grupul diedral de ordinul (gradul) n, D_n este grupul de simetrie al mulţimii P_n, adică

$$D_n = \left\{\sigma \in Izom\left(\mathbb{R}^2\right) | \sigma(P_n) = P_n\right\}.$$

D_n este subgrup al al grupului $Izom\left(\mathbb{R}^2\right)$, deci este grup.

(5) $\langle s \rangle = \{1, s, \dots, s^{n-1}\}$, $\langle t \rangle = \{1, t\}$, $\langle s, t \rangle = D_n$.

În general, grupul D_n are elementele s_0, ..., s_{n-1} şi $t_0, \dots, t_{n-1}$, cu compunerile date de formulele următoare:

$$s_i s_j = s_{i+j},\ s_i t_j = t_{i+j},\ t_i s_j = t_{i-j},\ t_i t_j = s_{i-j}.$$

În toate cazurile, adunarea şi scăderea indicilor se fac în aritmetica modulo n.

$\circ$	e	s	s^2	t	st	s^2t
e	e	s	s^2	t	st	s^2t
s	s	s^2	e	st	s^2t	t
s^2	s^2	e	s	s^2t	t	st
t	t	s^2t	st	e	s^2	s
st	st	t	s^2t	s	e	s^2
s^2t	s^2t	st	t	s^2	s	e

D_3 este izomorf cu grupul de permutări S_3 al unei mulţimi cu 3 elemente.

$\circ$	e	s	s^2	s^3	t	st	s^2t	s^3t
e	e	s	s^2	s^3	t	st	s^2t	s^3t
s	s	s^2	s^3	e	st	s^2t	s^3t	t
s^2	s^2	s^3	e	s	s^2t	s^3t	t	st
s^3	s^3	e	s	s^2	s^3t	t	st	s^2t
t	t	s^3t	s^2t	st	e	s^3	s^2	s
st	st	t	s^2t	s^2	s	e	s^3t	s^3
s^2t	s^2t	st	t	s^3t	s^2	s	e	s^3
s^3t	s^3t	s^2t	st	t	s^3	s^2	s	e

■

Exerciţiul 3 (E1.4.55) *Pe mulţimea* $H = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ *se defineşte în felul următor o înmulţire:*

- *1 este elementul neutru.*

- *Înmulţirea respectă regula semnelor:* $(-x)y = x(-y) = -xy$ *(altfel semnele + şi - nu au încă vreun sens).*
- $i^2 = j^2 = k^2 = -1$. $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$.

Să se arate că $(H, \cdot)$ *este un grup (numit grupul quaternionilor).*

Soluţie. Tabela înmulţirii

$\cdot$	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	$-k$
1	1	-1	i	$-i$	j	$-j$	k	-1
-1	-1	1	$-i$	i	$-j$	j	$-k$	k
i	i	$-i$	-1	1	k	$-k$	$-j$	j
$-i$	$-i$	i	1	-1	$-k$	k	j	$-j$
j	j	$-j$	$-k$	k	-1	1	i	$-i$
$-j$	$-j$	j	k	$-k$	1	-1	$-i$	i
k	k	$-k$	j	$-j$	$-i$	i	-1	1
$-k$	$-k$	k	$-j$	j	i	$-i$	1	-1

Asociativitatea se verifică direct. Elementul neutru este 1. Simetricele $1' = 1, (-1)' = 1$, $i' = -i$, $(-i)' = i$, $j' = -j$, $(-j)' = j$, $k' = -k$, $(-k)' = k$. Grupul este necomutativ.

Altfel: Grupul este izomorf cu grupul generat de matricele inversabile din $M_2(\mathbb{C})$

$$G = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \right.$$
$$\left. \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \right\rangle,$$

care este subgrup al grupului matricelor inversabile din $(M_2(\mathbb{C}), \cdot)$. ■

2 Opţionale

Exerciţiul 4 (E2.1.45) *Se consideră operaţia* $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$x * y = xy - 5x - 5y + 30.$$

Este $(\mathbb{R}, *)$ *grup? Dar* $(\mathbb{R}\backslash\{5\}, *)$, $((5, \infty), *)$ *sau*$((-\infty, 5), *)$*?*

Soluţie. $(x * y) * z = xyz - 5xy - 5xz - 5yz + 25x + 25y + 25z - 120$, $x * (y * z) = xyz - 5xy - 5xz - 5yz + 25x + 25y + 25z - 120$; $x * y = yx - 5y - 5x + 30 = y * x$; operaţia este asociativă şi comutativă.

Element neutru $x * e = e \Longrightarrow xe - 5x - 5e + 30 = e \Longrightarrow e = 6$

Element simetric: $x * y = e \Longrightarrow xy - 5x - 5y + 30 = 6 \Longrightarrow y = \frac{5x-24}{x-5}$; 5 nu are simetric, deci $(\mathbb{R}, *)$ nu este grup. $(\mathbb{R}\backslash\{5\}, *)$ este grup.

$x, y \in (5, \infty) \Longrightarrow x * y = (x - 5)(y - 5) + 5 > 5$; $(5, \infty)$ este parte stabilă; $e = 6 \in (5, \infty)$;

$x \in (5, \infty) \Longrightarrow y = 5 + \frac{1}{x-5} > 5 \Longrightarrow x^{-1} \in (5, \infty)$, $((5, \infty), *)$ este grup

$e = 6 \notin (-\infty, 5)$, $((-\infty, 5), *)$ nu este grup ■

Exercițiul 5 (E2.1.46) *Arătați că* $(\mathbb{Z}_n, +)$, $(n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$ *este grup abelian și* $p_n(x) = [x]_n$ *este un omomorfism surjectiv de grupuri (a se vedea exercițiul 1.4.42).*

Soluție. $[x] + [y] = [x + y]$ și definiția este independentă de reprezentant. Mulțimea claselor formează o partiție, $p : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, $p(x) = [x]$ este surjectivă. Să arătăm că este homomorfism.

$$\begin{aligned} p(x+y) &= [x+y] \qquad \text{def. p} \\ &= [x] + [y] \qquad \text{def + în } \mathbb{Z}_n \\ &= p(x) + p(y) \qquad \text{def. p} \end{aligned}$$

■

Exercițiul 6 (E2.1.47) *Fie* $(G_i, \cdot)$ *o familie de grupuri. Să se arate că* $\left(\prod_{i \in I} G_i, \cdot\right)$ *este un grup, unde*

$$(x_i)_{i \in I}(y_i)_{i \in I} = (x_i y_i)_{i \in I} \text{ pentru orice } (x_i)_{i \in I}; (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i.$$

Să se arate de asemenea că $pj : \prod_{i \in I} G_i \to G_j$, $p_j\left((xi)_{i \in I}\right) = x_j$ *este un homomorfism surjectiv pentru orice* $j \in I$.

Soluție. Pentru simplificare vom trata cazul $I = \{1, 2\}$. Fie (x_1, x_2), (y_1, y_2), $(z_1, z_2) \in G_1 \times G_2$.

$$\begin{aligned} [(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2)] \cdot (z_1, z_2) &= (x_1 y_1, x_2 y_2) \cdot (z_1, z_2) \\ &= ((x_1 y_1) z_1, (x_2 y_2) z_2) \\ &= (x_1 (y_1 z_1), x_2 (y_2 z_2)) \\ &= (x_1, x_2)(y_1 y_2, z_1 z_2) \\ &= (x_1, x_2)[(y_1, y_2)(z_1, z_2)]. \end{aligned}$$

Elemetul neutru este $1 = (1_1, 1_2)$. Avem

$$(x_1, x_2) \cdot (1_1, 1_2) = (x_1 \cdot 1_1, x_2 \cdot 1_2) = (x_1, x_2).$$

Inversul perechii (x_1, x_2) este $\left(x_1^{-1}, x_2^{-1}\right)$. Verificare

$$(x_1, x_2) \cdot \left(x_1^{-1}, x_2^{-1}\right) = \left(x_1 x_1^{-1}, x_2 x_2^{-1}\right) = (1_1, 1_2).$$

Dacă grupurile sunt comutative, atunci si produsul este comutativ

$$\begin{aligned} (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) &= (x_1 y_1, x_2 y_2) = (y_1 x_1, x_2, y_2) \\ &= (y_1, y_2) \cdot (x_1, x_2). \end{aligned}$$

Aplicaţiile

$$p_i : \ G_1 \times G_2 \to G_i, \qquad i = 1, 2$$
$$p_i \left(x_1, x_2 \right) = x_i$$

sunt surjecţii. Să arătăm că sunt homomorfisme

$$\begin{aligned} p_1 \left(\left(x_1, x_2 \right) \cdot \left(y_1, y_2 \right) \right) &= p_1 \left(\left(x_1 y_1 \right), \left(x_2 y_2 \right) \right) = x_1 y_1 \\ &= p_1 \left(x_1, x_2 \right) p_1 (y_1, y_2). \end{aligned}$$

În plus,

$$p_1 \left(\left(x_1, x_2 \right) \right) = 1_1 \Longleftrightarrow x_1 = 1_1 \Longrightarrow \ker p_1 = \left\{ \left(1, x_2 \right) | x_2 \in G_2 \right\}.$$

Analog pentru p_2. ■

Exerciţiul 7 (E2.1.48) *Fie G un grup. Să se arate că dacă pentru orice două elemente $x, y \in G$, există $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(xy)^i = x^i y^i$ pentru $i = k-1, k, k+1$. atunci G este abelian.*

Soluţie. Conform ipotezelor, pentru orice două elemente $x, y \in G$ avem $x^k y^k = (xy)^k = (xy)^{k-1} xy = x^{k-1} y^{k-1} xy$. Am obţinut $x^k y^k = x^{k-1} y^{k-1} xy$. Simplificăm la stânga cu x^{k-1} şi la dreapta cu y şi obţinem

$$xy^{k-1} = y^{k-1} x. \tag{1}$$

(1) ne arată că x comută cu y^{k-1} şi deci comută cu orice putere întreagă a lui y^{k-1}.

Analog, $x^{k+1} y^{k+1} = (xy)^{k+1} = (xy)^k xy = x^k y^k xy$; $x^{k+1} y^{k+1} = x^k y^k xy$. x comută cu y^k şi deci cu orice putere întreagă a lui a lui y^k. Deoarece k şi $k-1$ sunt relativ prime există α,$\beta \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\alpha(k-1) + \beta k = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} xy &= xy^{\alpha(k-1)+\beta k} = x \left(y^{k-1} \right)^{\alpha} \left(y^k \right)^{\beta} = \left(y^{k-1} \right)^{\alpha} x \left(y^k \right)^{\beta} \\ &= \left(y^{k-1} \right)^{\alpha} \left(y^k \right)^{\beta} x = y^{\alpha(k-1)+\beta k} x = yx. \end{aligned}$$

■

Exerciţiul 8 (E2.1.49) *Să se arate că o parte stabilă finită a unui grup este întotdeauna un subgrup. Dar o parte stabilă infinită?*

Soluţie. Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $H \subseteq G$ o parte stabilă finită, $H = \{h_1, h_2, \ldots h_n\}$. Considerăm toate produsele $h_1 h_j$, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Există un k astfel încât $h_1 h_k = h_1$. Deoarece h_1 este inversabil în G, $h_k = h_1^{-1} h_1 = 1 \in H$, adică h_k este element neutru pentru $(H, .)$. Fie $h_j \in H$, arbitrar. Există $h_p \in H$ astfel încât $h_p h_j = 1$. Rezultă că h_j este inversul lui h_j în H. Dar h_p este inversabil în G, deci $h_j = h_p^{-1} \in H$, deci $(H, .)$ este subrup.

Fie subgrupul lui $(\mathbb{C}^* \cdot)$, $U = \{z \in \mathbb{C} || z| = 1\}$ şi $z_0 = \cos \sqrt{2}\pi + i \sin \sqrt{2}\pi$. Mulţimea $H = \{z_0^n | n \in \mathbb{N}^*\}$ este parte stabilă infinită. Presupunem că este grup. Rezultă că $\exists p \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $z_0^p = 1$, adică $z_0^p = \cos \sqrt{2} p\pi + i \sin \sqrt{2} p\pi = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. se obţine că $\sqrt{2} p = k$, adică $\sqrt{2} = \frac{k}{p} \in \mathbb{Q}$, contradicţie. ■

Exerciţiul 9 (E2.1.50) *Se consideră un grup* $(G, \cdot)$, *şi se notează cu* $Sub(G) = \{H \subseteq G | H \leq G\}$ *mulţimea tuturor subgrupurilor. Să se arate că* $(Sub(G), \leq)$ *este o latice.*

Soluţie. Fie $H_1 \leq G$ şi $H_2 \leq G$. Avem

$$\inf(H_1, H_2) = H_1 \cap H_2$$
$$\sup(H_1, H_2) = \langle H_1 \cup H_2 \rangle .$$

Laticea este completă

$$\inf\left(\{H_i\}\, i \in I\right) = \bigcap_{i\in I} H_i$$
$$\sup\left(\{H_i\}\, i \in I\right) = \left\langle \bigcup_{i\in I} H_i \right\rangle = \{h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_n} | i_k \in I, k = 1, \ldots n, n \in \mathbb{N}^*\}$$

Notă:
$$\langle X \rangle = \left\{x_1 x_2 \cdots x_k | x_i \in X \cup X^{-1}; i = 1, \ldots, k; k \in \mathbb{N}^*\right\},$$

adică $\langle X \rangle$ este format din toate produsele finite de elemente din X şi inverse ale acestora. Cel mai mic element este $\{1\}$, iar cel mai mare este G. ■