Algebră, anul I Informatică

31 octombrie 2024

1 Obligatorii

Exerciţiul 1 (E1.4.39) *Să se arate că relaţia dată prin*

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ ddacă } ad = cb$$

este o echivalenţă pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *şi să se determine mulţimea factor* $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim$.

Soluţie. Relaţia este reflexivă, $(a, b) \sim (a, b) \Longleftrightarrow ab = ba$. Simetria: $(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow ad = cb \Longleftrightarrow cb = ad \Longleftrightarrow (c, d) \sim (a, b)$

Tranzitivitatea: $(a, b) \sim (c, d) \wedge (c, d) \sim (e, f) \Longrightarrow ad = cb \wedge cf = de \Longrightarrow adf = bcf \wedge bcf = bde$ (putem înmulţi deoarece $b, d, f \neq 0$)$\Longrightarrow adf = bde$; putem simplifica cu $d \neq 0$, rezultă $af = be \Longleftrightarrow (a, b) \sim (e, f)$. Mulţimea factor (cât) este $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*)/\sim = \{[(a, b)]\} = \{(c, d) | c \in \mathbb{Z}, d \in \mathbb{Z}^*, ad = cb\}$. ∎

Exerciţiul 2 (E1.4.41) *Considerăm mulţimea* $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*)/\sim$ *ca în Exerciţiul 1. Să se arate că* $+, \cdot : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ *sunt bine definite, unde:*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \text{ şi } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Soluţie. $b, d \neq 0 \Longrightarrow bd \neq 0$. Pentru simplificare, vom folosi notaţia $\frac{a}{b}$ în loc de (a, b). Vrem să arătăm independenţa de alegerea reprezentanţilor. Fie $\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'} \Longrightarrow ab' = a'b \wedge cd' = dc'$. De aici rezultă

$$\begin{aligned}(ad + bc)\, b'd' &= (ab')\, dd' + (cd')\, bb' \\ &= a'bdd' + dc'bb' \\ &= (a'd' + c'b')\, bd,\end{aligned}$$

adică

$$\frac{ad + bc}{bd} \sim \frac{a'd' + c'b}{b'd'}.$$

Pentru înmulţire

$$\begin{aligned}acb'd' &= (ab')(cd') = a'bdc' \\ &= acb'd' = a'c'bd,\end{aligned}$$

deci

$$\frac{ac}{bd} \sim \frac{a'c'}{b'd'}.$$

■

Exerciţiul 3 (E1.4.42) *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Să se arate că:*

(1) Congruenţa modulo n, şi anume $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \equiv_n)$ dată de

$$x \equiv_n y \ (\textit{sau } x \equiv y \pmod n) \ \textit{ddacă } n|(x-y)$$

este o relaţie de echivalenţă.

(2) Mulţimea factor corespunzătoare este mulţimea tuturor claselor de resturi modulo n: $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/\equiv_n = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\}$.

(3) Operaţiile următoare sunt bine definite: $+ : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ unde $[x]_n + [y]_n = [x+y]_n$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$ şi $\cdot : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ unde $[x]_n[y]_n = [xy]_n$ pentru orice $x, y \in \mathbb{Z}$.

Soluţie.

(1) reflexivitatea, $n|(x-x) = 0$, $x \equiv_n x$, simetria $x \equiv_n y \iff n|(x-y) \implies n|(y-x) \iff y \equiv_n y$, tranzitivitatea $x \equiv_n y \wedge y \equiv_n z \implies n|(x-y) \wedge n|(y-z) \implies n|\left[(x-y)-(y-z)\right] = x - z \implies x \equiv_n z$.

(2) $y \in [x]_n \implies x \equiv_n y \implies n|\,(x-y) \implies x$ şi y dau acelaşi rest la împărţirea cu n, $x = q_1 n + r$, $y = q_2 n + r$, $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Dacă $x = nq + r$, $[x]_n = n\mathbb{Z} + r = \{nq + r | q \in \mathbb{Z}\}$. $[x]_n = [y]_n \iff x \bmod n = y \bmod n$.

(3) Independenţa de alegerea reprezentanţilor fie $a \in [x]_n$ şi $[b] \in [y]_n$. Conform definiţiei $[a+b]_n = [(a+b) \bmod n]$. $n|(a-x), n|(b-y) \implies n|\left[a+b-(x+y)\right] \implies a + b \equiv x + y$. Analog pentru înmulţire $[a]_n[b]_n = [ab]_n$; $n|(a-x)$, $n|(b-y) \implies n|\left[y(x-a) + a(y-b)\right] = xy - ab$

■

2 Opţionale

Exerciţiul 4 (E1.4.43) *Fie A o mulţime şi $r = (A, A, R)$ o preordine pe A. Să se arate că $r \cap r^{-1}$ unde $x(r \cap r^{-1})y$ ddacă xry şi yrx este o relaţie de echivalenţă pe A şi pe mulţimea factor $A/(r \cap r^{-1})$ relaţia r induce o ordine: $[x] \leq_r [y]$ ddacă xry. Să se studieze cazul particular când $A = \mathbb{Z}$ şi preordinea este divizibilitatea (vezi Exerciţiul* **??***1.4.36).*

Soluţie. r preordine $= r$ reflexivă şi tranzitivă

Reflexivitate: $xry \wedge xrx \implies x\left(r \cap r^{-1}\right)x$ (tranzitivitatea lui r)

Simetrie: $x\left(r \cap r^{-1}\right)y \implies x\,r\,y \wedge y\,r\,x$

Tranzitivitate: $x\left(r\cap r^{-1}\right)y\wedge y\left(r\cap r^{-1}\right)z\Longrightarrow(x\,r\,y\wedge y\,r\,x)\wedge(yrz\wedge zry)$
$(x\,r\,y\wedge y\,r\,x\Longrightarrow xrz)\wedge(zry\wedge yrx\Longrightarrow zrx)\Longrightarrow x(r\cap r^{-1})z$

Să arătăm că definiţia $\leq_r$nu depinde de alegerea reprezentanţilor x şi y din clasele $\left(r\cap r^{-1}\right)\langle x\rangle$ şi $\left(r\cap r^{-1}\right)\langle y\rangle$. Dacă xry şi $x_1\in\left(r\cap r^{-1}\right)\langle x\rangle$, $y_1\in\left(r\cap r^{-1}\right)\langle y\rangle$, atunci $x\left(r\cap r^{-1}\right)x_1$ şi $y\left(r\cap r^{-1}\right)y_1$. Rezultă că x_1rx, xry, yry_1, iar din tranzitivitate lui r obţinem x_1ry_1. Să arătăm că $\leq_r$este ordine.

reflexivitate: $[x]\leq_r[x]\Longleftrightarrow xrx$

tranzitivitate:

$$\left.\begin{array}{l}[x]\leq_r[y]\\ [y]\leq_r[z]\end{array}\right\}\Longrightarrow xry\wedge yrz\Longrightarrow xrz\Longrightarrow[x]\leq_r[z]$$

$A/(r\cap r^{-1})=\{[x]:x\in A\}$; $[x]=\{z:x\left(r\cap r^{-1}\right)z\}=\{z:xrz\wedge zrx\}$

Antisimetria:

$$\left(r\cap r^{-1}\right)\langle x\rangle\leq_r\left(r\cap r^{-1}\right)\langle y\rangle\wedge\left(r\cap r^{-1}\right)\langle y\rangle\leq_r\left(r\cap r^{-1}\right)\langle x\rangle\Longrightarrow$$
$$xry\wedge yrx\Longrightarrow xry\wedge xr^{-1}y$$
$$xr^{-1}y\Longrightarrow x\left(r\cap r^{-1}\right)y\Longrightarrow\left(r\cap r^{-1}\right)\langle y\rangle=\left(r\cap r^{-1}\right)\langle x\rangle\Longrightarrow[x]=[y].$$

Cazul particular $A=\mathbb{Z}$ şi $r=|$ (divizibilitatea pe $\mathbb{Z}$): $x\left(r\cap r^{-1}\right)y\Longleftrightarrow x|y\wedge y|x\Longrightarrow x=\pm y$; deci $[x]=\{-x,x\}$.

$[x]\leq_|[y]\Longleftrightarrow x|y$. Putem identifica $\mathbb{Z}/\left(r\cap r^{-1}\right)$ cu $\mathbb{N}$. ■

Exerciţiul 5 (E1.4.44) *Fie $f:A\to B$ o funcţie. Nucleul funcţiei f este o relaţie omogenă pe A notată cu ker_f si definită prin $a(ker_f)b$ ddacă $f(a)=f(b)$. Să se arate că ker_f este o relaţie de echivalenţă pe A. Invers, pentru orice relaţie de echivalenţă $(A,A,\equiv)$ să se găsescă o funcţie $f:A\to B$, astfel încât $\equiv$ este nucleul lui f.*

Soluţie. ker_f este o relaţie de echivalenţă: $f(a)=f(a)\Longleftrightarrow a\,(\ker_f)\,a$ (reflexivitate); dacă $a\,(\ker_f)\,b\Longrightarrow f(a)=f(b)$ şi din simetria relaţiei de egalitate $f(b)=f(a)\Longrightarrow b\,(\ker_f)\,a$ (simetrie)

$a\,(\ker_f)\,b\wedge b\,(\ker_f)\,c\Longrightarrow f(a)=f(b)\wedge f(b)=f(c)\Longrightarrow f(a)=f(c)\Longleftrightarrow a\,(\ker_f)\,c$ (tranzitivitate).

Reciproc, fie $\equiv$ o echivalenţă. Definim $f:A\to A/\equiv$ prin $f(a)=[a]$ (clasa lui a); $x\equiv y\Longrightarrow[x]=[y]\Longrightarrow f(x)=f(y)\Longrightarrow x\,(\ker f)\,y$. ■

Exerciţiul 6 (E1.4.46) *Să se determine toate relaţiile de ordine care se pot defini pe $A=\{a,b,c\}$. În fiecare caz să se precizeze elementele minimale, maximale, cel mai mic şi/sau cel mai mare element.*

Soluţie. Considerăm mulţimea $A:=\{a,b,c\}$. Întâi, fie a unicul element minimal. Sunt exact trei ordini parţiale diferite pe $\{b,c\}$. Acelaşi raţionament se face şi dacă singurul element minimal din A este b şi respectiv c. Fiecare din ordinile parţiale pe o mulţime cu două elemente se extind unic la o ordine pe o mulţime de trei elemente în care al treilea element este minimal. Oricare două din aceste ordini parţiale pe A sunt diferite. Astfel, sunt exact $9=3\cdot3$ ordini

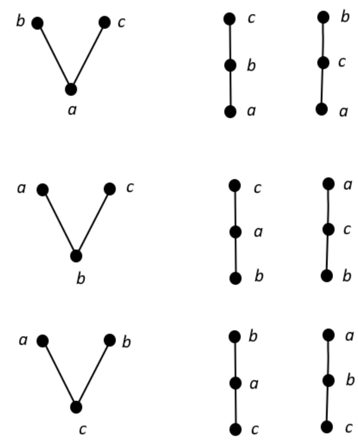

Figura 1: Relaţii de ordine cu un element minimal

parţiale pe A care au exact un element minimal (figura 1). Alegem apoi a şi b să fie singurele elemente minimale din A (astfel ca c să nu fie minimal). Avem exact trei ordini parţiale de acest fel peste A. Dacă singurul element neminimal este b sau b sau a, de fiecare dată obţinem 3 ordini parţiale diferite, deci încă $3 \cdot 3 = 9$ ordini parţiale diferite (figura 2). Până acum avem $9 + 9 = 18$ ordini

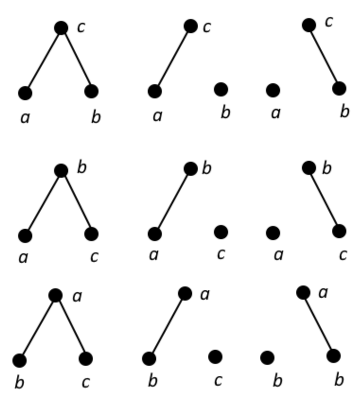

Figura 2: Relaţii de ordine cu două elemente minimale

parţiale diferite. Mai avem exact o ordine în care toate elementele lui A sunt minimale (figura 3). În total avem $1 + 18 = 19$ ordini parţiale diferite. Dintre acestea 6=3! sunt totale (coloanele 2 şi 3 din figura 1; diagramele lor sunt permutări ale diagramei din figura 1, rândul 1, coloana 2). ■

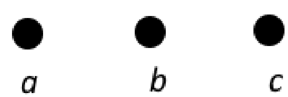

Figura 3: Relaţie cu trei elemente minimale (relaţia diagonală)