Algebră, anul I Informatică

9 ianuarie 2025

1 Obligatorii

Exerciţiul 1 (E3.2.43) *Să se determine rangul listelor de vectori din* $\mathbb{R}^4$*:*

(1) $[[0,1,3,2],[1,0,5,1],[-1,0,1,1],[3,-1,-3,-4],[2,0,1,-1]]^t$,

(2) $[[1,2,3,0],[0,1,-11,1],[3,7,8,1],[1,3,2,1]]^t$,

(3) $[[1,2,-1,2],[2,3,0,-1],[2,4,0,6],[1,2,1,4],[3,6,-1,-1],[1,3,-1,0]]^t$.

Soluţie. Rangul unei matrice=dimensiunea subspaţiului generat de coloane=dimensiunea subspaţiului generat de linii

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix},\ rang(A) = 3$$

(2)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ 3 & -11 & 8 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ rang(A) = 3$$

(3)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & 4 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ rang(A) = 4$$

■

Exerciţiul 2 (E3.2.44 var. b) *Se consideră subspaţiile*

$$S = \langle [2,0,1,-1],[0,1,2,3],[-1,0,1,1],[1,1,5,2] \rangle$$
$$T = \langle [1,0,2,0],[2,1,-1,2],[-1,-1,3,-2] \rangle$$

ale spaţiului vectorial real $\mathbb{R}^4$. Să se folosească lema substituţiei pentru a determina dimensiunea şi câte o bază în subspaţiile S, T, $S+T$ şi $S \cap T$.

Soluţie. Lucrat pe coloane

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ column basis: } \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \text{ column basis: } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{baza } S+T : \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ baza } S \cap T\text{: } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

■

Exerciţiul 3 (E3.2.44 var. a) *Se consideră subspaţiile*

$$S = \langle [2,0,1,-1],[0,1,3,2],[-1,0,1,1],[1,1,5,2] \rangle$$
$$T = \langle [1,0,2,0],[2,1,-1,2],[-1,-1,3,-2] \rangle$$

ale spaţiului vectorial real $\mathbb{R}^4$. Să se folosească lema substituţiei pentru a determina dimensiunea şi câte o bază în subspaţiile S, T, $S+T$ şi $S \cap T$.

Soluţie. (lucrat pe linii)

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \text{ row basis: } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \text{ row basis: } \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$S+T : [[2,0,1,-1],[0,1,3,2],[-1,0,1,1],[2,1,-1,2]]$

$S \cap T : [[-2,-3/2,7/2,1],[1,0,2,0])]$

■

Exerciţiul 4 (E3.2.45) *Să se calculeze dimensiunea şi câte o bază a subspaţiilor* $\mathrm{Ker} f$ *şi* $\mathrm{Im}\, f$*, în cazurile:*

(1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f[x_1, x_2, x_3] = [x_1 + 2x_2, x_2 + x_3, x_1 - 2x_3]$.

(2) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $f[x_1, x_2, x_3, x_4] = [x_1 - x_2 - x_3, 3x_2 + x_4, 3x_1 - 3x_3 + x_4]$.

(3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $f[x_1, x_2, x_3] = [-x_1 + 2x_2, x_1 - x_2 + x_3, x_2 + 2x_3]$.

(4) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $f[x_1, x_2] = [x_1 - 3x_2, 2x_1, -x_1 + x_2]$.

(5) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ $f[x_1, x_2, x_3, x_4] = [x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4, x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, x_1 + 2x_2, x_3 - x_4]$.

Soluţie.

(1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Bază pentru $\mathrm{Ker} f$: $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, Bază pentru $\mathrm{Im}\, f$: $\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right]$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, Bază pentru $\mathrm{Ker} f$: $\begin{bmatrix} -\frac{7}{12} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$, Bază pentru $\mathrm{Im}\, f$: $\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}\right]$,

(3) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, Bază pentru $\mathrm{Ker} f$: [], Bază pentru $\mathrm{Im}\, f$: $\begin{bmatrix} -1 & & 2 & & 0 \\ 1 & , & -1 & , & 1 \\ 0 & & 1 & & 2 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, Bază pentru $\mathrm{Ker} f$: [], Bază pentru $\mathrm{Im}\, f$: $\begin{bmatrix} 1 & & -3 \\ 2 & , & 0 \\ -1 & & 1 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, row echelon form: $\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$, rank: 2, Bază pentru $\mathrm{Ker} f$: $\begin{bmatrix} -2 & & 0 \\ 1 & & 0 \\ 0 & , & 1 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$, Bază pentru $\mathrm{Im}\, f$: $\begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ 1 & & -1 \\ 1 & , & 0 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

■