SEMINARUL 9

Cuadrice pe ecuaţia redusă

Problema 9.1. Să se determine punctele de intersecţie ale elipsoidului

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

cu dreapta

$$x = 4 + 2t,\ y = -6 - 3t,\ z = -2 - 2t.$$

Problema 9.2. Să se scrie ecuaţia planului tangent la hiperboloidul cu o pânză

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{1} = 1$$

în punctul $M(2, 3, 1)$. Să se arate că acest plan tangent taie suprafaţa după două drepte reale şi să se calculeze unghiul format de cele două drepte.

Problema 9.3. Să se scrie ecuaţiile planelor tangente în punctele de intersecţie ale dreptei $x = y = z$ cu:

a) paraboloidul eliptic $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 9z$;

b) paraboloidul hiperbolic $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{4} = 9z$.

Problema 9.4. Să se scrie ecuaţia planelor tangente la:

a) paraboloidul eliptic $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{3} = z$;

b) paraboloidul hiperbolic $x^2 - \dfrac{y^2}{4} = z$,

paralele cu planul

$$x - 3y + 2z - 1 = 0.$$

Problema 9.5. Să se determine generatoarele rectilinii ale paraboloidului hiperbolic $4x^2 - 9y^2 = 36z$ care trec prin punctul $P(3\sqrt{2}, 2, 1)$.

Problema 9.6. Să se scrie ecuaţiile generatoarelor rectilinii ale paraboloidului hiperbolic

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$$

care sunt paralele cu planul

$$3x + 2y - 4z = 0.$$

Problema 9.7. Să se afle generatoarele rectilinii ale suprafeţei

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$$

care sunt paralele cu planul

$$x + y + z = 0.$$

Problema 9.8. Să se găsească un punct al elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a > b > c > 0.$$

astfel încât planul tangent în acest punct să taie segmente de lungime egală pe axele de coordonate.

Problema 9.9. Să se găsească punctele de pe elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \quad a > b > c > 0.$$

în care normalele intersectează axa Oz.

Problema 9.10. Ce condiţii trebuie să îndeplinească semiaxele unui elipsoid astfel încât normalele sale să treacă prin centrul său?

Problema 9.11. Să se găsească locul geometric al punctelor de pe cuadrica

$$y^2 - z^2 = 2x$$

prin care trec generatoare rectilinii perpendiculare.

Problema 9.12. Să se găsească ecuaţia proiecţiei pe planul xOy a curbei de intersecţie a elipsoidului

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} - 1 = 0$$

cu planul

$$x + y + z - 1 = 0.$$

Problema 9.13. Să se găsească locul geometric al punctelor M de pe suprafaţa $x^2 - y^2 = z$ pentru care normala în M la suprafaţă formează un unghi constant cu axa Oz. Să se arate că proiecţia acestui loc geometric pe planul xOy este un cerc a cărui ecuaţie se cere.

Problema 9.14. Să se determine ecuaţia hiperboloidului cu o pânză care are ca axe de simetrie axele de coordonate, este tangent la planul

$$6x - 3y + 2z - 6 = 0$$

şi pentru care dreapta

$$\begin{cases} 4x - z - 5 = 0, \\ 6x + 5z + 9 = 0 \end{cases}$$

este o generatoare rectilinie.

Problema 9.15. Să se scrie ecuaţia normalei în punctul $P(-2,2,-1)$ la cuadrica

$$\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{2}+1=0.$$

Să se determine coordonatele punctului în care normala înţeapă a doua oară suprafaţa.

Problema 9.16. Să se determine planele care conţin dreapta

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{0}$$

şi sunt tangente la hiperboloidul cu două pânze

$$x^2+2y^2-z^2+1=0.$$

Problema 9.17. Să se afle distanţa cea mai scurtă dintre paraboloidul eliptic

$$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=z$$

şi planul

$$x-y-2z=0.$$

Problema 9.18. Să verifice dacă dreapta

$$\frac{x-2}{0}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-6}{2}$$

este tangentă elipsoidului

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}-1=0$$

şi, în caz afirmativ, să se determine coordonatele punctului de tangenţă.