

Geometrie liniară

Cu un ochi către grafica pe calculator

Paul A. Blaga

I	Transformări geometrice	9
1	Transformări de coordonate	11
1.1	Introducere	11
1.2	Transformări de coordonate scrise în coordonate afine	12
1.2.1	Schimbarea originii	12
1.2.2	Schimbarea axelor	13
1.2.3	Cazul general	15
1.3	Schimbări de coordonate ortogonale. Matrici ortogonale	16
1.3.1	Transformări de coordonate ortogonale în plan	17
	Translația axelor de coordonate	17
	Schimbarea axelor de coordonate	17
1.4	Spațiul proiectiv n -dimensional	18
1.5	Transformări de coordonate în scrise cu ajutorul matricelor extinse .	20
1.5.1	Operații cu matrici extinse	22
2	Transformări geometrice în plan	25
2.1	Generalități despre transformări afine	25
2.2	Transformări plane	26
2.2.1	Translația	26
	Forma vectorială	26
	Forma matricială	28
2.2.2	Rotația în jurul unui punct	28

	Forma vectorială	28
	Forma matricială	30
2.2.3	Scalarea simplă uniformă	31
	Forma vectorială	32
	Forma matricială	34
2.2.4	Scalarea simplă neuniformă	34
	Produsul tensorial	34
	Forma vectorială	35
	Forma matricială	36
2.2.5	Scalarea neuniformă generală (Goldman)	36
	O altă metodă	37
	Forma matricială	38
2.2.6	Reflexia față de o dreaptă	39
	Forma vectorială	40
	Forma matricială	40
2.2.7	Forfecarea	42
	Forma vectorială	42
	Forma matricială	43
	Exemple	44
2.3	Grupurile de transformări fundamentale ale planului	46
2.3.1	Grupul translațiilor	46
2.3.2	Grupul scalărilor uniforme	47
2.3.3	Grupul scalărilor neuniforme	48
3	Transformări geometrice (afine) în spațiu	51
3.1	Translația	51
3.1.1	Forma vectorială	51
3.1.2	Forma matricială	52
3.2	Rotația în jurul unei axe	52
3.2.1	Forma vectorială	52
3.2.2	Forma matricială	54
3.3	Scalarea simplă uniformă	57
3.3.1	Forma vectorială	57
3.3.2	Forma matricială	57
3.4	Scalarea simplă neuniformă	58
3.4.1	Forma vectorială	58
	Forma matricială	59

3.5	Scalarea neuniformă generală (Goldman)	60
3.5.1	Forma vectorială	60
3.5.2	Forma matricială	61
3.6	Reflexia față de un plan	62
3.6.1	Forma vectorială	62
3.6.2	Forma matricială	63
3.6.3	Cazul în care planul este dat sub forma generală	64
3.7	Forfecarea în spațiu	65
3.7.1	Forma vectorială	65
3.7.2	Forma matricială	66
4	Proiecții	69
4.1	Geometrie analitică plană în coordonate omogene	69
4.2	Geometrie analitică în spațiu în coordonate omogene	71
4.3	Proiecții	73
4.3.1	Proiecția pe o dreaptă	73
4.3.2	Proiecția pe un plan	76
4.4	Clasificarea proiecțiilor paralele	78
4.4.1	Proiecții ortografice	78
	Proiecții ortografice multiple (multiview)	78
	Proiecții axonometrice	83
4.4.2	Proiecții oblice	84
	Proiecția cavalier (cavalier)	85
	Proiecția cabinet	87
4.4.3	Clasificarea proiecțiilor perspective	88

Partea I

**Transformări geometrice și
proiecții**

CAPITOLUL 1

Transformări de coordonate

1.1 Introducere

Am văzut, în primul capitol, că a defini un sistem de coordonate este totuna cu a defini un reper afin, care constă dintr-un punct al spațiului afin (de dimensiune 1, 2, sau 3, după cum studiem geometria pe dreaptă, în plan sau în spațiu) și o bază a spațiului vectorial asociat spațiului afin. Această bază e formată dintr-un vector nenul, în cazul drepte, din doi vectori necoliniari în cazul planului și din trei vectori necoplanari, în cazul spațiului.

Prin urmare, a realiza o schimbare de coordonate înseamnă a realiza cel puțin una dintre următoarele operații:

- o schimbare a originii (adică înlocuirea originii cu un alt punct);
- schimbarea direcției axelor de coordonate (și a sensului, eventual), ceea ce înseamnă înlocuirea bazei spațiului vectorial asociat cu o altă bază.

Fiecare punct al spațiului cu care lucrăm, într-un caz concret, are un set de coordonate relativ la reperul afin ales. Atunci când aplicăm o transformare de coordonate, trebuie să găsim legătura dintre coordonatele punctului relativ la reperul inițial și coordonatele sale relativ la reperul transformat. Analog stau lucrurile și în cazul vectorilor, unde trebuie să găsim legătura dintre componentele vectorilor relativ la baza inițială și componentele lor relativ la baza transformată.

Există, în cazul graficii, cel puțin, mai multe motivații pentru care este important să fim în stare să trecem de la un sistem de coordonate la altul. Dăm, mai jos, câteva dintre ele.

1.2 Transformări de coordonate scrise în coordonate afine

1.2.1 Schimbarea originii

Considerăm un sistem de coordonate

$$S = (O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\})$$

și un sistem transformat, obținut din acesta prin mutarea originii, fără a schimba direcțiile și sensurile axelor de coordonate,

$$S' = (O'; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}).$$

Presupunem că O' are, față de sistemul de coordonate vechi, coordonatele (w_1, \dots, w_n) .

Fie, acum, P un punct oarecare, ce are, relativ la sistemul de coordonate vechi, coordonatele (x_1, \dots, x_n) și, față de sistemul de coordonate nou, coordonatele (x'_1, \dots, x'_n) . Atunci, avem:

Teorema 1.1.

$$\begin{cases} x_1 = x'_1 + w_1, \\ \vdots \\ x_n = x'_n + w_n \end{cases}$$

sau, matricial,

$$X = X' + W,$$

unde

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}.$$

Observație. Facem convenția că vectorii (sau punctele) se reprezintă prin matricile *coloană* ale coordonatelor sau componentelor lor. Este una dintre cele două convenții posibile care se utilizează în grafică. Cealaltă convenție este că vectorii (sau punctele) se descriu prin matrici *linie*.

Demonstrația teoremei. Fie

$$O' = O + \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{e}_i.$$

În sistemul de coordonate noi, putem scrie

$$P = O' + \sum_{i=1}^n x'_i \mathbf{e}_i = O + \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^n x'_i \mathbf{e}_i = O + \sum_{i=1}^n (x'_i + w_i) \mathbf{e}_i. \quad (1.2.1)$$

Cum, pe de altă parte,

$$P = O + \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i, \quad (1.2.2)$$

iar vectorii \mathbf{e}_i sunt liniar independenți, din (1.2.1) și (1.2.2) rezultă relația cerută. \square

Observație. Dacă se modifică doar originea sistemului de coordonate, atunci, în mod evident, componentele unui vector relativ la noul sistem de coordonate nu se modifică, deoarece baza în raport cu care se descompune vectorul rămâne aceeași.

1.2.2 Schimbarea axelor

De data asta, reperul vechi este același, adică

$$S = (O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}),$$

dar reperul nou este de forma

$$S = (O; \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}),$$

adică originea rămâne aceeași, dar se schimbă baza de coordonate. Presupunem că

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} \mathbf{e}_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Matricea A se numește *matrice de schimbare a bazei*. Numele e justificat de teorema de mai jos.

Observație. După cum se poate constata cu ușurință, elementele coloanelor matricei de schimbare a bazei sunt componentele elementelor noii baze față de vechea bază. Matricea de schimbare a bazei este, desigur, inversabilă, din moment ce coloanele sale sunt vectori liniar independenți.

Teorema 1.2. *Fie P un punct oarecare. Atunci coordonatele sale relativ la cele două repere sunt legate prin relația*

$$X = A \cdot X'. \quad (1.2.3)$$

Observație. De remarcat că, dacă am fi utilizat cealaltă convenție, relația (1.2.3) s-ar fi scris

$$X = X' \cdot A^t,$$

unde, de data aceasta, X și X' sunt matrici linie, nu coloană.

Demonstrația teoremei. Avem

$$P = O + \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j = O + \sum_{i=1}^n x'_i \mathbf{e}'_i,$$

prin urmare,

$$\sum_{j=1}^n x_j \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^n x'_i \mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^n x'_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} \mathbf{e}_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x'_i \right) \mathbf{e}_j.$$

De aici rezultă că

$$x_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x'_i, \quad 1 \leq j \leq n,$$

sau, matricial,

$$X = A \cdot X'.$$

□

Este important să avem și regula după care se schimbă componentele unui vector relativ la un sistem de coordonate atunci când se modifică direcțiile axelor. Avem următorul rezultat:

Teorema 1.3. Fie \mathbf{v} un vector care are componentele v_1, \dots, v_n relativ la vechiul sistem de coordonate și componentele v'_1, \dots, v'_n relativ la noul sistem de coordonate. Atunci cele două seturi de componente sunt legate prin relația

$$V' = A \cdot V, \quad (1.2.4)$$

unde A este matricea de schimbare a bazei.

Demonstrație Avem

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v'_i \mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v'_i a_{ji} \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{ji} v'_i \right) \mathbf{e}_j$$

□

1.2.3 Cazul general

Mai rămâne de discutat cazul în care se schimbă atât originea reperului, cât și baza de coordonate. Este ușor de constatat că atunci are loc

Teorema 1.4. Dacă se trece de la reperul

$$S = (O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\})$$

la reperul

$$S' = (O'; \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}),$$

adică se schimbă atât originea, cât și baza, atunci legătura între coordonatele unui punct în vechea bază și coordonatele sale în noua bază sunt date de

$$X = A \cdot X' + W, \quad (1.2.5)$$

unde W este vectorul de poziție al noii origini relativ la originea vechiului sistem de coordonate, iar A este matricea schimbării de bază.

Faptul că relația (1.2.5) nu se reduce la o simplă înmulțire de matrici complică destul de mult lucrurile dacă, așa cum se întâmplă adesea, trebuie să facem mai multe schimbări de coordonate. Astfel, de exemplu, dacă, în (1.2.5)

$$X' = B \cdot X'' + W',$$

atunci relația citată se scrie

$$X = A \cdot (B \cdot X'' + W') + W = (A \cdot B) \cdot X'' + A \cdot W' + W.$$

Este ușor de imaginat cât de tare se poate complica transformarea dacă trebuie să compunem mai multe transformări. Ideal ar fi dacă am avea $W = 0$, tot timpul. Desigur, așa ceva nu este posibil, dar putem obține ceva aproape la fel de bun utilizând așa-numitele coordonate omogene, pe care le vom introduce ceva mai târziu.

1.3 Schimbări de coordonate ortogonale. Matrici ortogonale

De cele mai multe ori, în cadrul acestei cărți, coordonatele pe care le vom folosi vor fi coordonate ortogonale, în care baza de coordonate este o bază ortonormată. De aceea, merită să ne ocupăm, în mod special, de acele schimbări de coordonate care păstrează caracterul ortonormat al bazei de coordonate. Este clar că schimbarea originii nu modifică nici într-un fel caracterul ortonormat al bazei, așa că ne vom concentra, exclusiv, asupra schimbărilor care afectează axele de coordonate, prin modificarea bazei.

După cum am văzut, coloanele matricii de schimbare a coordonatelor nu sunt altceva decât componentele elementelor noii baze de coordonate relativ la vectorii vechii baze. Noi vrem ca vectorii din noua bază să continue să fie de lungime 1 și să fie ortogonali, doi câte doi, ceea ce înseamnă că trebuie ca între vectorii din noua bază să existe relațiile

$$\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j, \\ 0, & \text{dacă } i \neq j. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

Ținând cont de formula de schimbare a bazei, relația (1.3.1) se poate rescrie sub forma

$$\begin{aligned} \delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ki} \mathbf{e}_k \right) \cdot \left(\sum_{l=1}^n a_{lj} \mathbf{e}_l \right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ki} a_{lj} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ki} a_{lj} \delta_{kl} = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}. \end{aligned}$$

Dar $\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}$ este elementul de pe poziția (i, j) al matricii $A \cdot A^t$. Astfel, transformarea de coordonate de la coordonatele ortogonale $(O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\})$ conduce la

un nou set de coordonate ortogonale $(O; \{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\})$ dacă și numai dacă matricea A de transformare a coordonatelor îndeplinește condiția

$$A \cdot A^t = I_n. \quad (1.3.2)$$

O matrice care îndeplinește condiția (1.3.2) se numește *matrice ortogonală*. Astfel, cum translația nu modifică baza de coordonate, putem spune că *o transformare de ortogonală este ortogonală dacă și numai dacă matricea schimbării de bază este o matrice ortogonală*.

Din relația (1.3.2) mai rezultă că, pentru o matrice ortogonală avem

$$\det A = \pm 1. \quad (1.3.3)$$

Dacă $\det A = 1$, atunci schimbarea de coordonate păstrează orientarea bazei, în caz contrar – o inversează.

1.3.1 Transformări de coordonate ortogonale în plan

Translația axelor de coordonate

Schimbarea axelor de coordonate

Vrem să vedem cum arată o matrice ortogonală 2×2 .

Fie

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

o astfel de matrice. Atunci avem

$$\begin{cases} a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \\ a_{12}^2 + a_{22}^2 = 1, \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0. \end{cases}$$

Este ușor de constatat că matricele ale căror elemente verifică acest sistem și au determinantul egal cu 1 sunt de forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

iar cele de determinant egal cu -1 sunt de forma

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

unde θ poate fi orice număr real. După cum ne vom convinge imediat, matricele din prima familie determină o rotație cu unghi θ a axelor de coordonate. Într-adevăr, fie $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ o bază ortonormată a planului. Imaginea sa printr-o transformare ortogonală de determinant 1 va fi formată din vectorii

$$\mathbf{i}' = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad \text{și} \quad \mathbf{j}' = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}.$$

Atunci unghiul dintre \mathbf{i}' și \mathbf{i} este dat de

$$\cos \varphi = \frac{\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{i}'\| \cdot \|\mathbf{i}\|} = \cos \theta.$$

Unghiul pe care îl formează \mathbf{j}' cu \mathbf{i} este dat de

$$\cos \psi = \frac{\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i}}{\|\mathbf{j}'\| \cdot \|\mathbf{i}\|} = -\sin \theta = \cos \left(\theta + \frac{\pi}{2} \right).$$

Astfel, baza formată din vectorii \mathbf{i}' și \mathbf{j}' (în această ordine) este o bază orientată directă, deoarece ambii vectori sunt de lungime 1, iar cel de-al doilea se obține prin rotirea primului, în sens pozitiv, cu un unghi de $\pi/2$.

Dacă mai adăugăm și o translație de vector (x_0, y_0) , cea mai generală transformare de coordonate ortogonale în plan, care nu schimbă orientarea spațiului, este de forma

$$\begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta + x_0, \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta + y_0. \end{cases} \quad (1.3.4)$$

Trecem acum la cel de-al doilea tip de transformare, care inversează orientarea planului. De data aceasta avem

$$\mathbf{i}' = \cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} \quad \text{și} \quad \mathbf{j}' = \sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}.$$

1.4 Spațiul proiectiv n -dimensional

Există o serie de probleme cărora geometria euclidiană nu le face față cu succes, dar care se pot descrie cu ușurință într-o geometrie mai generală, numită geometrie proiectivă. Un spațiu proiectiv se obține, până la urmă, din spațiul afin de aceeași dimensiune, adăugând o serie de puncte numite *puncte de la infinit* sau *puncte ideale*. Adăugarea acestor puncte elimină, de multe ori, cazurile speciale care trebuie luate în considerare atunci când se face o discuție. Astfel, de exemplu, în planul afin,

două drepte distincte pot să se intersecteze sau să fie paralele. În planul proiectiv, oricare două drepte se intersectează, dar unele dintre ele, care corespund dreptelor afine paralele, se intersectează într-un punct de la infinit.

Din punctul nostru de vedere, principalul avantaj al punctului de vedere proiectiv este că ne furnizează un sistem de coordonate foarte utile, *coordonatele omogene*, care permit descrierea foarte comodă a transformărilor geometrice.

Începem cu o definiție.

Definiția 1.1. Fie $u, v \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Spunem că punctele u și v sunt echivalente și scriem $x \sim y$ dacă există un număr real nenul t astfel încât $u = t \cdot v$. Este ușor de verificat că această relație este o relație de echivalență. Clasa de echivalență a lui u ,

$$[u] = \{t \cdot u \mid t \in \mathbb{R}^*\}$$

este dreapta care trece prin origine și punctul u , mai puțin originea, desigur. Mulțimea tuturor claselor de echivalență, adică *spațiul factor* $\mathbb{RP}^n \equiv \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$, se numește *spațiu proiectiv n -dimensional*. Dacă în \mathbb{R}^{n+1} alegem un sistem de coordonate $OX_1 \dots X_{n+1}$, atunci, pentru $[u] = [X_1, \dots, X_{n+1}]$, spunem că numerele X_1, \dots, X_{n+1} sunt *coordonatele omogene* ale punctului $[u]$. De remarcat că aceste coordonate nu sunt unice. Într-adevăr, dacă (X_1, \dots, X_{n+1}) sunt coordonate omogene ale lui $[u]$, atunci, pentru orice $t \neq 0$, (tX_1, \dots, tX_{n+1}) sunt, de asemenea, coordonate omogene ale aceluiași punct.

Pentru noi sunt importante cazurile $n = 2$ și $n = 3$.

Începem cu $n = 2$. Spațiul proiectiv \mathbb{RP}^2 se mai numește *plan proiectiv real*. Să presupunem că am ales, în \mathbb{R}^3 , un sistem de coordonate $WXYZ$. Atunci un punct din planul proiectiv se scrie

$$[X, Y, Z] = \{t(X, Y, Z) \mid t \in \mathbb{R}^*\}.$$

Să considerăm, mai întâi, cazul în care $Z \neq 0$. Un punct de acest tip are un reprezentant de forma $(x, y, 1)$, dacă alegem $t = 1/Z$ și notăm $x = X/Z$, $y = Y/Z$.

De remarcat că reprezentantul $(x, y, 1)$ este intersecția dintre dreapta care trece prin origine și prin punctul (X, Y, Z) și planul $Z = 1$. Dacă identificăm acest plan cu \mathbb{R}^2 , concluzia este că există o bijecție între punctele $[X, Y, Z]$, cu $Z \neq 0$, ale planului proiectiv și punctele planului euclidian. Dacă (X, Y, Z) sunt coordonate omogene ale unui punct din planul proiectiv, cu $Z \neq 0$, vom spune că ele sunt coordonatele omogene ale punctului $(x = X/Z, y = Y/Z)$ din planul euclidian. Invers, dacă (x, y) este un punct din planul euclidian, coordonatele sale omogene sunt $(x, y, 1)$ și orice triplet de numere reale obținut din acestea prin înmulțirea cu un scalar nenul.

Să vedem, acum, ce se întâmplă cu punctele din planul proiectiv pentru care ultima coordonată este zero. Fie (x_0, y_0) un punct din plan, diferit de origine. Coordonatele punctului pot fi privite ca fiind componentele unui vector care, fiind nenul, poate fi vectorul director al unei drepte. Fie (a, b) un punct oarecare din plan și dreapta

$$(x(t), y(t)) = (a + tx_0, b + ty_0)$$

de direcție (x_0, y_0) , care trece prin punctul (a, b) . Pentru fiecare t real, punctului $(x(t), y(t))$ îi putem asocia coordonatele omogene $(x(t), y(t), 1) = (a + tx_0, b + ty_0, 1)$. Același punct, dacă $t \neq 0$, are și coordonatele omogene $(a/t, x_0, b/t + y_0, 1/t)$. Dacă $t \rightarrow \infty$, atunci coordonatele omogene ale punctului considerat tind la $(x_0, y_0, 0)$. Interpretarea geometrică este că punctul de coordonate omogene $(x_0, y_0, 0)$ este punctul situat la infinit pe dreapta $(x(t), y(t))$. De remarcat că există *un singur* punct la infinit pe o dreaptă dată.

1.5 Transformări de coordonate în scrise cu ajutorul matricelor extinse

Am văzut că o schimbare de coordonate oarecare în \mathbb{R}^n este o combinație dintre o schimbare a axelor de coordonate care nu afectează originea și o schimbare a originii, adică este de forma

$$X = A \cdot X' + W.$$

Neajunsul acestei forme este acela că forma transformării devine foarte complicată dacă trebuie să aplicăm transformări de coordonate succesive. Principala problemă este legată de faptul că transformarea nu se reduce la înmulțiri de matrici.

Pentru a rezolva problema, procedăm în modul următor. Reprezentăm \mathbb{R}^n ca fiind subspațiul afin (hiperplanul afin) al lui \mathbb{R}^{n+1} , cu coordonatele x_1, \dots, x_n, x_{n+1} , dat de ecuația $x_{n+1} = 1$. Avem, atunci, următorul rezultat:

Definim *matricea extinsă* sau *matricea omogenă* asociată acestei transformări prin

$$M_{A,W} = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & w_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5.1)$$

Dacă vectorul W se presupune subînțeles, vom nota $M_{A,W} \equiv \bar{A}$. Fie, acum, \bar{X} și \bar{X}' vectorii coordonatelor omogene asociate lui X și X' , adică

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{și} \quad \bar{X}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Atunci transformarea de coordonate se poate scrie

$$\bar{X} = \bar{A} \cdot \bar{X}' \quad (1.5.2)$$

sau, explicit,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & w_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5.3)$$

Afirmația este ușor de demonstrat în cazul general, dar preferăm să o verificăm în cele două cazuri particulare care ne interesează pe noi, anume $n = 2$ și $n = 3$.

În cazul $n = 2$, transformarea omogenă se scrie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1.5.4)$$

Dacă facem înmulțirea de matrici, obținem

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + w_1 \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + w_2 \end{cases}$$

sau, matricial,

$$X = A \cdot X' + W,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

În cazul $n = 3$, transformarea omogenă se scrie

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & w_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & w_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.5.5)$$

de unde

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 + w_1 \\ x_2 = a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 + w_2 \\ x_3 = a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 + w_3 \end{cases}$$

sau, matricial,

$$X = A \cdot X' + W,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

1.5.1 Operații cu matrici extinse

Dacă privim matricile extinse ca fiind niște matrici formate din blocuri, atunci ele se pot înmulți, după cum se poate verifica ușor, considerând că blocurile sunt, de fapt, componentele matricii. Astfel, dacă înmulțim matricile $M_{A,W}$ și $M_{B,V}$ obținem

$$\begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} B & V \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot B & A \cdot V + W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Această relație demonstrează, în fapt, că $M_{A,W} \cdot M_{B,V}$ este matricea transformării compuse:

$$M_{A,W} \cdot M_{B,V} = M_{A \cdot B, A \cdot V + W},$$

după cum era de așteptat.

Matricea extinsă asociată transformării identice este matricea identică:

$$M_{I_n,0} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Inversa matricii $M_{A,W}$ este

$$M_{A,W}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Într-adevăr,

$$\begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot A^{-1} & A \cdot (-A^{-1} \cdot W) + W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1},$$

iar

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} \cdot A & A^{-1} \cdot W - A^{-1} \cdot W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{n+1}.$$

Să presupunem, acum, că avem o transformare de coordonate de forma

$$X = A \cdot X' + W.$$

Vrem să exprimăm pe X' în funcție de X . Un calcul simplu ne conduce la

$$X' = A^{-1} \cdot X - A^{-1} \cdot W$$

sau, în limbaj de matrici extinse,

$$\begin{pmatrix} X' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix} = M_{A,W}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X \\ 1 \end{pmatrix}.$$

CAPITOLUL 2

Transformări geometrice în plan

2.1 Generalități despre transformări afine

Fie \mathbb{E}^n spațiul afin n -dimensional. \mathbb{E}^n este, ca mulțime, \mathbb{R}^n , privită ca mulțime de puncte. Pentru a fi un spațiu afin, ea este însoțită de o aplicație care asociază fiecărei perechi de puncte vectorul care le unește, cu alte cuvinte,

$$\varphi : \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \varphi(P, Q) = \overrightarrow{PQ}. \quad (2.1.1)$$

Aplicația φ se bucură de următoarele două proprietăți:

1. $\varphi(P, Q) + \varphi(Q, R) = \varphi(P, R)$ (regula triunghiului);
2. pentru orice punct $P \in \mathbb{E}^n$ și orice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, există un singur punct $Q \in \mathbb{E}^n$ astfel încât $\varphi(P, Q) = \mathbf{v}$.

O aplicație bijectivă $T : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ se numește *transformare afină* dacă există $O \in \mathbb{E}^n$, aplicația $\vec{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, definită, pentru orice $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, prin

$$\vec{T}(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{T(O)T(P)},$$

unde $\overrightarrow{OP} = \mathbf{v}$, este liniară.

Se poate demonstra că, dacă în \mathbb{E}^n s-a fixat un reper $(O; \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\})$, o transformare afină se poate scrie

$$T(P) = A \cdot P + B,$$

unde A este matricea aplicației liniare \vec{T} , iar $B = T(O)$. Pentru a simplifica notația, în cele ce urmează vom renunța la săgeata care indică partea vectorială a transformării afine și ne vom da seama după argument dacă este vorba despre partea punctuală sau cea vectorială a aplicației afine. Astfel, dacă scriem

$$T(P + \mathbf{v}) = T(P) + T(\mathbf{v}),$$

al doilea termen din membrul drept este, de fapt, partea vectorială (liniară) a transformării afine. Dacă folosim coordonate omogene, matricea corespunzătoare unei transformări afine se va scrie

$$T = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dacă \mathbf{v} este un vector, atunci

$$T(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot v \\ 0 \end{pmatrix},$$

deci aplicația A e liniară pe vectori. Pe de altă parte

$$T(P) = \begin{pmatrix} A & W \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \cdot P + W \\ 1 \end{pmatrix}.$$

În cele ce urmează, ne vom concentra, exclusiv, pe cazurile $n = 2$ și $n = 3$ și vom determina, pentru fiecare caz contra, matricea omogenă a transformării. Strategia va fi să determinăm, de fiecare dată, o formă vectorială a transformării, care să nu depindă de coordonate, și abia apoi să determinăm matricea (omogenă) a transformării.

2.2 Transformări plane

2.2.1 Translația

Forma vectorială

Translația este o transformare care mută toate punctele planului cu un același vector, constant. Prin urmare, dacă privim planul ca fiind un spațiu afin bidimensional, pe care îl vom nota cu \mathbb{E}^2 , atunci translația este o aplicație $T : \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$,

$$T(P) = P + \mathbf{w}, \tag{2.2.1}$$

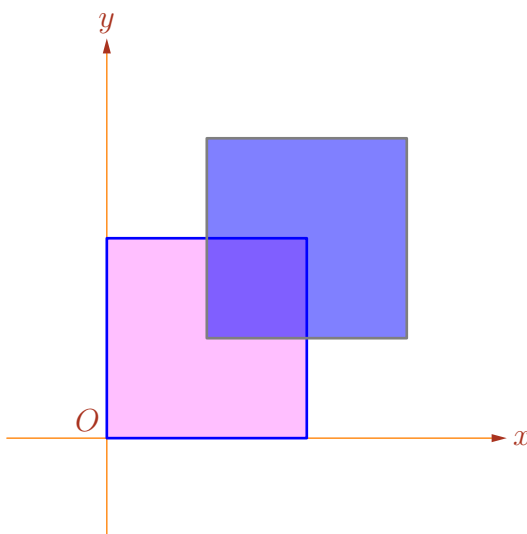


Figura 2.1: Translația aplicată unui păătrat

unde \mathbf{w} este un vector constant din plan. Transformarea se mai scrie și

$$P' = P + \mathbf{w}.$$

O tehnică generală, atunci când studiem transformările afine, ale planului sau ale spațiului, fără a utiliza coordonate, este aceea de a determina, separat, modul în care transformarea acționează pe puncte și pe vectori. Să aplicăm această metodă în cazul translației. Dacă Q este un al doilea punct, atunci

$$T(Q) = Q + \mathbf{w}. \quad (2.2.2)$$

Fie $\mathbf{v} = Q - P \left(\equiv \overrightarrow{PQ} \right)$. Atunci

$$T(\mathbf{v}) = T(Q - P) = T(Q) - T(P) = (P + \mathbf{v}) - P = (P - P) + \mathbf{v} = \mathbf{0} + \mathbf{v} = \mathbf{v},$$

deci, când translația este aplicată unui vector, ea se reduce la aplicația identică.

Forma matricială

Cele două reguli de transformare, pentru vectori și puncte, se scriu, sub forma matricială, ca

$$[v'] = [v] = I_2 \cdot [v], \quad (2.2.3)$$

$$[P'] = [P] + [w] = I_2 \cdot [P] + [w], \quad (2.2.4)$$

ceea ce înseamnă că, dacă utilizăm blocuri matriciale, matricea translației se va scrie

$$[T_w] = \begin{bmatrix} I_2 & w \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.5)$$

sau, în formă extinsă,

$$[T_w] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2.6)$$

Dacă aplicăm transformarea unui punct P , de coordonate (x_1, y_1) , obținem

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + w_1 \\ x_2 + w_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.2.7)$$

ceea ce corespunde, după cum ne așteptam, scrierii scalare

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + w_1, \\ x'_2 = x_2 + w_2 \end{cases}. \quad (2.2.8)$$

2.2.2 Rotația în jurul unui punct

Forma vectorială

Aplicăm aceeași metodă și în cazul rotației în plan relativ la un punct. Începem prin a determina rotația unui vector \mathbf{v} cu un unghi θ . Aceasta înseamnă să fixăm originea vectorului și să rotim extremitatea vectorului cu unghiul θ față de originea vectorului. E ușor de verificat că operația nu depinde de alegerea originii.

Introducem operatorul care rotește un vector, în sens direct, cu 90° . Pentru un vector \mathbf{v} , vom nota imaginea sa prin acest operator cu \mathbf{v}^\perp (se citește “perp de \mathbf{v} ”). Dacă am fixat un reper ortonormat direct în care $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, atunci $\mathbf{v}^\perp = (-v_2, v_1)$. Un raționament simplu ne arată că putem scrie rotația de unghi θ aplicată

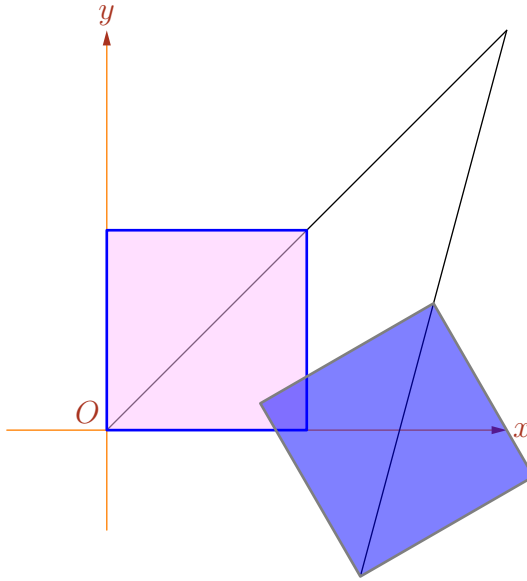


Figura 2.2: Rotația aplicată unui pătrat

vectorului sub forma:

$$\text{Rot}(\theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cos \theta + \mathbf{v}^\perp \sin \theta. \quad (2.2.9)$$

Fie acum Q punctul fix în jurul căruia se face rotația și P un punct oarecare din plan, pe care vrem să-l rotim cu unghiul θ în jurul lui Q . Pentru a stabili formula pentru rotația punctului P , remarcăm că putem scrie

$$P = Q + P - Q = Q + \overrightarrow{QP}.$$

Prin urmare, rotația fiind o transformare afină, avem:

$$\text{Rot}(Q, \theta)(P) = \text{Rot}(Q, \theta)(Q) + \text{Rot}(Q, \theta)(\overrightarrow{QP}).$$

Cum Q este punctul în jurul căruia se face rotația, el este fix: $\text{Rot}(Q, \theta)(Q) = Q$. Pe de altă parte, transformarea vectorului $P - Q$ este dată de formula (2.2.9), adică

$$\text{Rot}(Q, \theta)(P - Q) = \overrightarrow{QP} \cos \theta + \overrightarrow{QP}^\perp \sin \theta,$$

deci, în final, pentru transformarea punctelor avem formula:

$$\text{Rot}(Q, \theta)(P) = Q + \overrightarrow{QP} \cos \theta + \overrightarrow{QP}^\perp \sin \theta. \quad (2.2.10)$$

Forma matricială

Dacă utilizăm componentele vectorilor, relația (2.2.9) se poate scrie

$$\begin{cases} v'_1 = v_1 \cos \theta - v_2 \sin \theta, \\ v'_2 = v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta. \end{cases} \quad (2.2.11)$$

Introducem matricea

$$\text{Rot}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \quad (2.2.12)$$

Atunci, relațiile (2.2.11) capătă forma matricială

$$[v'] = \text{Rot}(\theta) \cdot [v]. \quad (2.2.13)$$

Prin urmare, folosind relația (2.2.10), obținem

$$[P'] = [Q] + \text{Rot}(\theta) \cdot (P - Q) = \text{Rot}(\theta) \cdot [P] + (I_2 - \text{Rot}(\theta)) \cdot [Q]$$

Dacă trecem la coordonate omogene, găsim matricea rotației de unghi θ în jurul lui Q sub forma

$$\text{Rot}(Q, \theta) = \begin{bmatrix} \text{Rot}(\theta) & (I_2 - \text{Rot}(\theta)) \cdot [Q] \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2.14)$$

Dacă explicităm, matricea de mai sus se scrie

$$\text{Rot}(Q, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & q_1(1 - \cos \theta) + q_2 \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta & -q_1 \sin \theta + q_2(1 - \cos \theta) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2.15)$$

Exemplul 2.1. Rotația față de origine. De data asta, Q este originea, deci coordonatele sale sunt $(0, 0)$. Așadar, matricea rotației de unghi θ relativ la origine este

$$\text{Rot}(\text{Origine}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.2.16)$$

Problema 2.1. Determinați imaginea triunghiului ABC , de vârfuri $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(4, 4)$ printr-o rotație de unghi 30° în jurul originii. Desenați, pe același sistem de axe, triunghiul inițial și imaginea sa.

Soluție Conform formulei (2.2.16), matricea omogenă a transformării este

$$R = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ & 0 \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Prin urmare, avem:

$$\begin{aligned} [A' \ B' \ C'] &= R \cdot [A \ B \ C] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}-2}{2} & \frac{3\sqrt{3}-1}{2} & 2\sqrt{3}-2 \\ \frac{2\sqrt{3}+1}{2} & \frac{3+\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3}+2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Așadar, punctele A' , B' , C' vor fi date de

$$A' = A' \left(\frac{\sqrt{3}-2}{2}, \frac{2\sqrt{3}+1}{2} \right), \quad B' = B' \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2} \right), \quad C' = C' (2\sqrt{3}-2, 2\sqrt{3}+2)$$

□

Problema 2.2. Determinați imaginea triunghiului ABC , de vârfuri $A(1, 2)$, $B(3, 1)$, $C(4, 4)$ printr-o rotație de unghi 30° în jurul punctului $Q(1, 3)$. Desenați, pe același sistem de axe, triunghiul inițial și imaginea sa.

2.2.3 Scalarea simplă uniformă

Scalarea simplă este o transformare afină în care se scalează vectorii bazei, adică aceștia se înmulțesc cu un număr real diferit de zero. Dacă numărul este același, avem de-a face cu o scalare *uniformă* sau *izotropă*. Dacă factorii de scală nu sunt aceeași pentru toți vectorii bazei, atunci spunem că scalarea este *neuniformă* sau *anizotropă*. Începem cu studiul scalării simple uniforme. Ea se mai numește și *omotetie*.

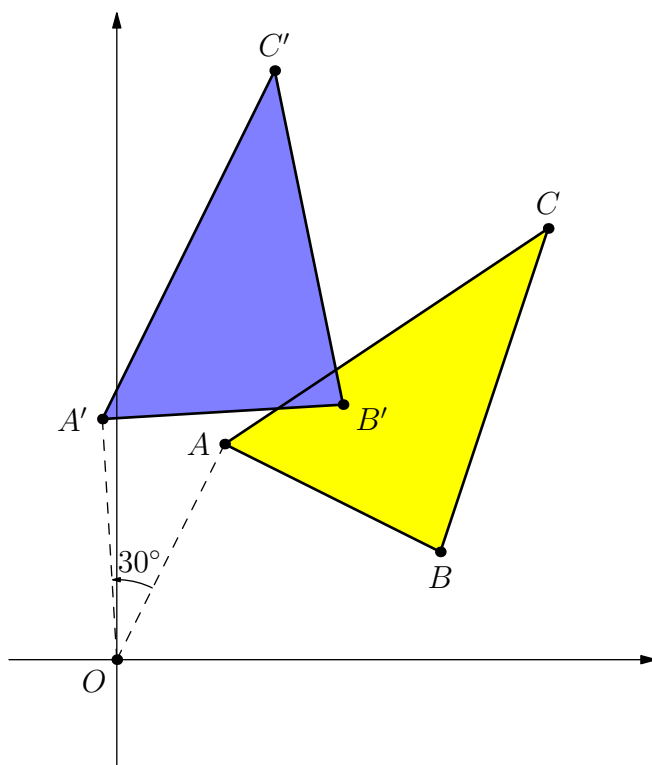


Figura 2.3:

Forma vectorială

Scalarea simplă omogenă de factor s , relativ la un punct Q din plan este transformarea geometrică ce asociază unui punct P din plan un punct P' astfel încât

$$\overrightarrow{QP'} = s \overrightarrow{QP}. \quad (2.2.17)$$

Este ușor de dedus forma transformării atunci când este aplicată vectorilor:

$$\text{Scale}(Q, s)(\mathbf{v}) = s \cdot \mathbf{v}. \quad (2.2.18)$$

Această “parte” a scalării nu depinde de punctul Q , ci doar de factorul de scală, s .

Pentru a determina modul în care scalarea se aplică punctelor, procedăm ca și în cazul rotației, adică aplicăm scalarea vectorială vectorului $\overrightarrow{QP} \equiv P - Q$. Din (2.2.18)

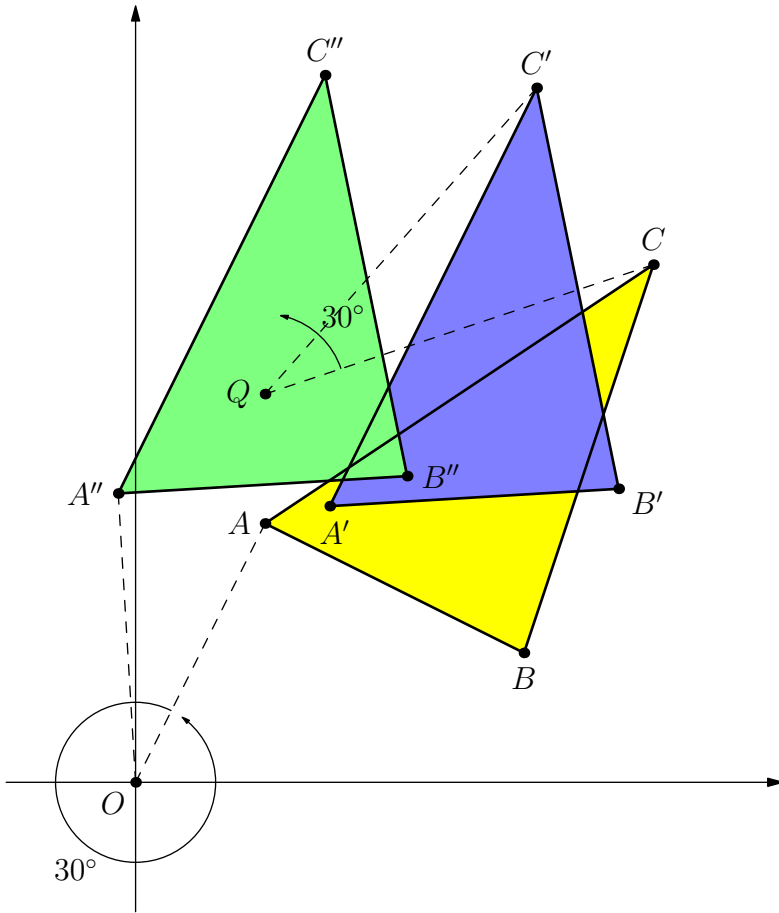


Figura 2.4:

rezultă

$$\text{Scale}(Q, s)(P - Q) = \text{Scale}(Q, s)(P) - \text{Scale}(Q, s)(Q) = s \cdot (P - Q)$$

Cum Q este punct fix al transformării, relația de mai sus se poate scrie

$$\text{Scale}(Q, s)(P) = Q + s \cdot \overrightarrow{QP}. \quad (2.2.19)$$

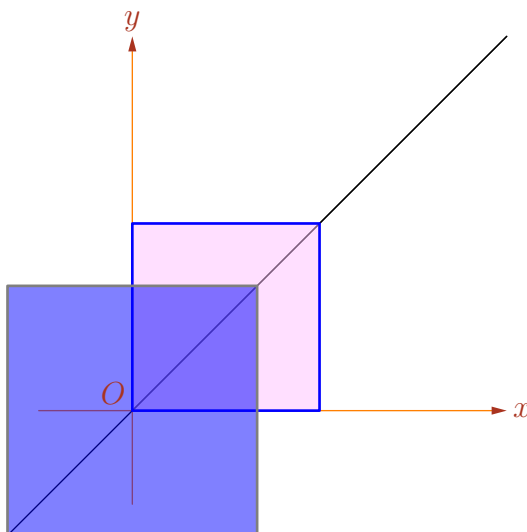


Figura 2.5: Rotația aplicată unui pătrat

Forma matricială

Relația (2.2.19) se poate scrie, matriceal

$$\text{Scale}(Q, s)(P) = [Q] + s(P - Q) = s[P] + (1-s)[Q] = (sI_2) \cdot [P] + (1-s)[Q].$$

Prin urmare, matricea scalării uniforme relativ la Q este

$$\text{Scale}(Q, s) = \begin{pmatrix} s \cdot I_2 & (1-s)Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2.20)$$

sau, explicit,

$$\text{Scale}(Q, s) = \begin{pmatrix} s & 0 & (1-s)q_1 \\ 0 & s & (1-s)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.21)$$

2.2.4 Scalarea simplă neuniformă

Produsul tensorial

Avem nevoie de un mic artificiu, bazat pe o operație cu vectori care se numește *produs tensorial*. Fie $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ și $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ doi vectori. *Produsul tensorial* al celor doi

vectori este aplicația biliniară care are, în baza considerată, matricea

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot (a_1 \ a_2) = [\mathbf{b}] \cdot [\mathbf{a}]^t. \quad (2.2.22)$$

În general, produsul tensorial nu este comutativ. În fapt, avem

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^t.$$

Pe noi, produsul tensorial ne interesează pentru reformularea anumitor egalități. De multe ori, de exemplu, apar expresii de forma

$$\mathbf{t} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}. \quad (2.2.23)$$

Remarcabil este, la relația de mai sus, că, atunci când \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt vectori constanți, \mathbf{t} este o aplicație liniară de \mathbf{u} . Într-adevăr, un calcul simplu, pe care îl lășăm în seama cititorului, demonstrează că

$$\mathbf{t} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}. \quad (2.2.24)$$

Prin urmare, atunci când se trece de la reprezentarea vectorială la reprezentarea matricială, formula (2.2.43) se transformă în formula (2.2.44).

Fie Q un punct din plan. O scalare simplă neuniformă a planului, relativ la punctul Q , este o transformare afină care asociază unui punct P , de vector de poziție \overrightarrow{QP} , relativ la punctul Q , un punct P' astfel încât

$$\begin{cases} \overrightarrow{QP'} \cdot \mathbf{i} = s_x \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}), \\ \overrightarrow{QP'} \cdot \mathbf{j} = s_y \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}). \end{cases} \quad (2.2.25)$$

Forma vectorială

Fie \mathbf{v} un vector din plan. Atunci el se poate scrie

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y,$$

unde $\mathbf{v}_x = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{v}_y = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}$. Atunci,

$$\text{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}) = \text{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}_x) + \text{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}_y),$$

adică

$$\text{Scale}(s_x, s_y)(\mathbf{v}) = s_x \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}. \quad (2.2.26)$$

Dacă P e un punct,

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y)(P) = \text{Scale}(Q, s_x, s_y)(Q + \overrightarrow{QP}),$$

adică

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y)(P) = Q + s_x \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}. \quad (2.2.27)$$

Forma matricială

Din (2.2.27), obținem

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y)(P) = Q + s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i})(P - Q) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})(P - Q)$$

sau

$$\begin{aligned} \text{Scale}(Q, s_x, s_y) &= (s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})) \cdot P + \\ &+ (I_2 - s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) - s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})) \cdot Q \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

Matricea transformării este, deci

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) & (I_2 - s_x(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) - s_y(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j})) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.29)$$

Dar

$$\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci matricea extinsă este

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & (1 - s_x)q_1 \\ 0 & s_y & (1 - s_y)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.30)$$

2.2.5 Scalarea neuniformă generală (Goldman)

Scalarea neuniformă generală nu este tocmai o generalizare a scalării neuniforme obișnuite. Ea este, în același timp, mai generală și mai particulară decât scalarea neuniformă simplă. Este mai particulară, deoarece avem un singur factor de scală, dar este mai generală pentru că vectorul \mathbf{i} este înlocuit cu un versor oarecare. În rest, “filozofia” transformării este aceeași.

Mai precis, considerăm un număr real nenul s , versor \mathbf{w} din plan și un punct din plan. *Scalarea neuniformă generală* de-a lungul lui \mathbf{w} , relativ la Q , de factor de scală s , este singura transformare afină a planului care transformă vectorul \mathbf{w} în vectorul $s\mathbf{w}$, vectorul \mathbf{w}^\perp – în el însuși și lasă pe loc punctul Q .

Așadar,

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) = \begin{pmatrix} s \cdot \mathbf{w} & \mathbf{w}^\perp & Q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{w} & \mathbf{w}^\perp & Q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \quad (2.2.31)$$

sau, extins,

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) = \begin{pmatrix} s \cdot w_1 & -w_2 & q_1 \\ s \cdot w_2 & w_1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 & -w_2 & q_1 \\ w_2 & w_1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}. \quad (2.2.32)$$

Cum

$$\begin{pmatrix} w_1 & -w_2 & q_1 \\ w_2 & w_1 & q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & -w_1 q_1 - q_2 w_2 \\ -w_2 & w_1 & w_2 q_1 - w_1 q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

rezultă că

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) = \begin{pmatrix} 1 + (s-1)w_1^2 & (s-1)w_1 w_2 & -(s-1)(q_1 w_1^2 + q_2 w_1 w_2) \\ (s-1)w_1 w_2 & 1 + (s-1)w_2^2 & -(s-1)(q_1 w_1 w_2 + q_2 w_2^2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.33)$$

O altă metodă

De data aceasta, vom deduce, mai întâi, formula pentru vectori. Fie \mathbf{v} un vector oarecare din plan. Vom descompune acest vector după două direcții, una paralelă cu versorul \mathbf{w} și una perpendiculară pe el:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp. \quad (2.2.34)$$

Este ușor de constatat că

$$\mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}, \quad (2.2.35)$$

de unde, desigur,

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \quad (2.2.36)$$

Prin urmare,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\parallel}) + \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\perp}). \quad (2.2.37)$$

Cum scalarea se produce paralel cu vectorul \mathbf{w} , avem, evident

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\parallel}) = s\mathbf{v}_{\parallel}. \quad (2.2.38)$$

Pe de altă parte, nici o scalare nu are loc în direcția perpendiculară la \mathbf{w} , deci

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\perp}. \quad (2.2.39)$$

Prin urmare,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = s\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$$

sau, dacă ținem cont de definițiile lui \mathbf{v}_{\parallel} și \mathbf{v}_{\perp} ,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (s - 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \quad (2.2.40)$$

Pentru a determina modul în care transformarea acționează asupra unui punct P , remarcăm, mai întâi, că:

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(P - Q) = \text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) - \text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(Q) = \text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) - Q,$$

de unde

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\overrightarrow{QP})$$

sau, folosind (2.2.40),

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \overrightarrow{QP} + (s - 1)(\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \quad (2.2.41)$$

Forma matricială

Pentru a descrie matricial transformarea, avem nevoie de un mic artificiu, bazat pe o operație cu vectori care se numește *produs tensorial*. Fie $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ și $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ doi vectori. *Produsul tensorial* al celor doi vectori este aplicația biliniară care are, în baza considerată, matricea

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_2 b_1 \\ a_1 b_2 & a_2 b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot (a_1 \ a_2) = [\mathbf{b}] \cdot [\mathbf{a}]^t. \quad (2.2.42)$$

În general, produsul tensorial nu este comutativ. În fapt, avem

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a})^t.$$

Pe noi, produsul tensorial ne interesează pentru reformularea anumitor egalități. De multe ori, de exemplu, apar expresii de forma

$$\mathbf{t} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b}. \quad (2.2.43)$$

Remarcabil este, la relația de mai sus, că, atunci când \mathbf{a} și \mathbf{b} sunt vectori constanți, \mathbf{t} este o aplicație liniară de \mathbf{u} . Într-adevăr, un calcul simplu, pe care îl lăsăm în seama cititorului, demonstrează că

$$\mathbf{t} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}. \quad (2.2.44)$$

Prin urmare, atunci când se trece de la reprezentarea vectorială la reprezentarea matricială, formula (2.2.43) se transformă în formula (2.2.44).

Deducem că din formula (2.2.40) rezultă expresia matricială pentru scalarea ne-uniformă a vectorilor:

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)([\mathbf{v}]) = (I_2 + (s - 1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot [\mathbf{v}]. \quad (2.2.45)$$

Pentru a determina matricea omogenă a transformării pentru puncte, plecăm de la (2.2.41) și obținem

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + P - Q + (s - 1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \cdot (P - Q)$$

sau

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = (I_2 + (s - 1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot P + (1 - s)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \cdot Q. \quad (2.2.46)$$

Prin urmare, matricea omogenă a scalării generale neuniforme este

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) = \begin{pmatrix} I_2 + (s - 1)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} & (1 - s)\mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.47)$$

Dacă facem calculele, ajungem, din nou, la formula (2.2.33).

2.2.6 Reflexia față de o dreaptă

Reflexia relativ la o dreaptă este transformarea care asociază unui punct simetricul punctului față de dreaptă.

Forma vectorială

Considerăm o dreaptă care trece printr-un punct Q și are versorul director \mathbf{w} . Începem, ca de obicei, prin a determina imaginea unui vector prin reflexie. Evident, imaginea vectorului nu depinde de punctul Q . Fie \mathbf{v} un vector oarecare din plan. După cum am văzut, \mathbf{v} se poate descompune ca o sumă dintr-un vector paralel cu vectorul \mathbf{w} și unul perpendicular pe acest vector,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}.$$

De data aceasta, însă, vom pune

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp}) \mathbf{w}^{\perp}, \\ \mathbf{v}_{\perp} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp}) \mathbf{w}^{\perp}. \end{cases}$$

Este clar că

$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}_{\parallel}) = \mathbf{v}_{\parallel}, \quad (2.2.48)$$

în timp ce

$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}_{\perp}) = -\mathbf{v}_{\perp}.$$

Așadar,

$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\parallel} - \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp}) \mathbf{w}^{\perp}. \quad (2.2.49)$$

Ca să determinăm imaginea unui punct oarecare, P , din plan, ținem cont de faptul că $P = Q + (P - Q)$ și, Q fiind un punct fix al transformării, obținem

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = Q + \text{Mirror}(\mathbf{w})(\overrightarrow{QP}),$$

deci

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = Q + \overrightarrow{QP} - 2(\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{w}^{\perp}) \mathbf{w}^{\perp}. \quad (2.2.50)$$

Forma matricială

Transcriem, mai întâi, matricial, formula de transformare pentru vectori (2.2.49), ținând cont de faptul că

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^{\perp}) \mathbf{w}^{\perp} = (\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}) \mathbf{v}.$$

Obținem, prin urmare,

$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{w}^{\perp} \otimes \mathbf{w}^{\perp}) \mathbf{v}$$

sau

$$\text{Mirror}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \left(I_2 - 2 \left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp \right) \right) \cdot \mathbf{v}. \quad (2.2.51)$$

Așadar, matricea părții liniare a reflexiei este

$$\text{Mirror}(\mathbf{w}) = I_2 - 2 \left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp \right). \quad (2.2.52)$$

Pentru determinarea matricei omogene, plecăm de la (2.2.50) și obținem

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = Q + P - Q - 2 \left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp \right) (P - Q),$$

adică

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w})(P) = \left(I_2 - 2 \left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp \right) \right) \cdot P + 2 \left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp \right) \cdot Q, \quad (2.2.53)$$

ceea ce înseamnă că matricea omogenă a transformării este

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} I_2 - 2 \left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp \right) & 2 \left(\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp \right) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.54)$$

Dacă ținem cont că

$$\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}^\perp = \begin{pmatrix} w_2^2 & -w_1 w_2 \\ -w_1 w_2 & w_1^2 \end{pmatrix},$$

matricea de mai sus se scrie, în mod explicit, ca

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 - 2w_2^2 & 2w_1 w_2 & 2(q_1 w_2^2 - q_2 w_1 w_2) \\ 2w_1 w_2 & 1 - 2w_1^2 & 2(-q_1 w_1 w_2 + q_2 w_1^2) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.55)$$

Observații. (i) Dacă examinăm formulele (2.2.47) și (2.2.55), ajungem imediat la concluzia că, de fapt, reflexia față de o dreaptă este o scalare generală neomogenă, de factor de scală -1 , în direcția perpendiculară pe dreaptă, deoarece avem

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{w}) = \text{Scale}(Q, \mathbf{w}^\perp, -1).$$

(ii) Dacă Q este originea, iar reflexia se face față de Ox , atunci avem $\mathbf{w} = (1, 0)$, deci

$$\text{Mirror}(\text{Origine}, \mathbf{i}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Analog, reflexia față de Oy este dată de matricea

$$\text{Mirror}(\text{Origine}, \mathbf{j}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Formula (2.2.55) a fost obținută în ipoteza că dreapta este dată sub forma vectorială:

$$P(t) = Q + t\mathbf{w}.$$

Dacă dreapta este dată sub forma generală,

$$\Delta : ax + by + c = 0,$$

atunci ca versor al vectorului director se poate lua vectorul

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(b, -a).$$

Dacă $a \neq 0$, putem lua $Q = (-c/a, 0)$. Dacă înlocuim în formula (2.2.55), obținem

$$\text{Mirror}(\Delta) = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab & -2ac \\ -2ab & a^2 - b^2 & -2bc \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.56)$$

Aceeași formulă se obține pentru orice alt punct al dreptei.

2.2.7 Forfecarea

Forfecarea este transformarea afină care transformă un pătrat unitate cu un vârf în punctul Q și de laturi \mathbf{w} și \mathbf{w}^\perp într-un paralelogram înclinând latura \mathbf{w}^\perp și transformând-o în $\mathbf{w}_{\text{new}}^\perp$, care face un unghi θ cu \mathbf{w}^\perp , fără să modifice punctul Q sau vectorul \mathbf{w} .

Forma vectorială

Începem, ca de obicei, prin a determina forfecarea aplicată unui vector. Fie, prin urmare, \mathbf{v} un vector oarecare din plan. Tot ca de obicei, îl descompunem în două

componente, una paralelă cu vectorul \mathbf{w} și una perpendiculară pe el sau, mai degrabă, una paralelă cu vectorul \mathbf{w}^\perp . Atunci, vom avea

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\parallel + \mathbf{v}_\perp,$$

unde

$$\mathbf{v}_\perp = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp) \cdot \mathbf{w}^\perp \text{ și } \mathbf{v}_\parallel = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\perp.$$

Este clar că $\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}_\parallel) = \mathbf{v}_\parallel$, în timp ce

$$\begin{aligned} \text{Shear}(\mathbf{v}, \theta)(\mathbf{v}_\perp) &= \text{Shear}(\mathbf{v}, \theta) \left((\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp) \cdot \mathbf{w}^\perp \right) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp) \text{Shear}(\mathbf{v}, \theta)(\mathbf{w}^\perp) = \\ &= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp) (\text{tg } \theta \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp). \end{aligned}$$

Așadar,

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{v}_\perp + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp) (\text{tg } \theta \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w}^\perp) = \mathbf{v} + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp) \cdot \mathbf{w}$$

adică

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}^\perp) \cdot \mathbf{w}. \quad (2.2.57)$$

Pentru a determina imaginea prin forfecare a unui punct P , folosim, din nou, relația $P = Q + P - Q \equiv Q + \overrightarrow{QP}$ și obținem, folosind (2.2.57) și faptul că punctul Q este fix,

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{w}, \theta) = Q + \overrightarrow{QP} + \text{tg } \theta (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{w}^\perp) \cdot \mathbf{w}. \quad (2.2.58)$$

Forma matricială

Pentru a determina matricea transformării, mai întâi determinăm forma matricială a transformării vectorilor. Plecăm de la formula (2.2.57) și obținem

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \text{tg } \theta (\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v}$$

sau

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta)(\mathbf{v}) = \left(I_2 + \text{tg } \theta (\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}) \right) \cdot \mathbf{v}, \quad (2.2.59)$$

ceea ce înseamnă că matricea părții vectoriale a forfecării este

$$\text{Shear}(\mathbf{w}, \theta) = I_2 + \text{tg } \theta (\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}). \quad (2.2.60)$$

Pentru a obține matricea omogenă a transformării pentru puncte, combinăm (2.2.58) și (2.2.60) și obținem

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{w}, \theta) = \begin{pmatrix} I_2 + \text{tg } \theta (\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}) & -\text{tg } \theta (\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.61)$$

Pentru a obține forma explicită a acestei matrici, remarcăm, înainte de toate, că

$$\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -w_2 & w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_1 w_2 & w_1^2 \\ -w_2^2 & w_1 w_2 \end{pmatrix},$$

prin urmare,

$$I_2 + \text{tg } \theta (\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 - w_1 w_2 \text{tg } \theta & w_1^2 \text{tg } \theta \\ -w_2^2 \text{tg } \theta & 1 + w_1 w_2 \text{tg } \theta \end{pmatrix},$$

iar

$$-\text{tg } \theta (\mathbf{w}^\perp \otimes \mathbf{w}) \cdot Q = \begin{pmatrix} (q_1 w_1 w_2 - q_2 w_1^2) \text{tg } \theta \\ (q_1 w_2^2 - q_2 w_1 w_2) \text{tg } \theta \end{pmatrix}.$$

Așadar, în final,

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{w}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 - w_1 w_2 \text{tg } \theta & w_1^2 \text{tg } \theta & (q_1 w_1 w_2 - q_2 w_1^2) \text{tg } \theta \\ -w_2^2 \text{tg } \theta & 1 + w_1 w_2 \text{tg } \theta & (q_1 w_2^2 - q_2 w_1 w_2) \text{tg } \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2.62)$$

Exemple

- Dacă punem $\mathbf{w} = \mathbf{i} = (1, 0)$, matricea forfecării devine:

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{i}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & \text{tg } \theta & -q_2 \text{tg } \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

În particular, forfecarea în direcția axei Ox relativ la origine este

$$\text{Shear}(\text{Origine}, \mathbf{i}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & \text{tg } \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Forfecarea în direcția axei Oy este, în schimb,

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{j}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\tan \theta & 1 & q_1 \tan \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplul 2.2. Vrem să rotim pătratul $ABCD$, de vârfuri $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$, $D(0, 1)$ cu 60° în jurul lui C . Plecând de la formula vectorială, avem

$$\text{Rot}(C, 60^\circ)(P) = C + \overrightarrow{CP} \cdot \frac{1}{2} + \overrightarrow{CP}^\perp \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

sau

$$\{x', y'\} = (x_C, y_C) + \frac{1}{2}\{x - x_C, y - y_C\} + \frac{\sqrt{3}}{2}\{-y + y_C, x - x_C\}$$

sau, încă,

$$\{x', y'\} = \left\{ \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}x_C + \frac{\sqrt{3}}{2}y_C, \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y_C - \frac{\sqrt{3}}{2}x_C \right\}.$$

Dacă scriem transformarea pe componente, obținem

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2}x_C + \frac{\sqrt{3}}{2}y_C, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y_C - \frac{\sqrt{3}}{2}x_C. \end{cases}$$

Asta e formula pentru o rotație de 60° în jurul unui punct oarecare. În cazul nostru concret, obținem:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1-\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Se constată imediat că originea se duce în $A' \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2} \right)$, B se duce în $B' \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right)$, $C' = C$, iar D se duce în $D' \left(\frac{1}{2}, \frac{2-\sqrt{3}}{2} \right)$

2.3 Grupurile de transformări fundamentale ale planului

Dacă notăm cu \mathcal{A} mulțimea tuturor transformărilor afine ale planului, este ușor de verificat că această mulțime, împreună cu compunerea aplicațiilor, formează un grup (necomutativ). Nu același lucru se poate spune în ceea ce privește mulțimile de transformări fundamentale pe care le-am studiat (translații, rotații, scalări, etc.), cu excepția translațiilor. Compunerea a două rotații față de puncte diferite continuă să fie o transformare a planului, dar *nu este o rotație*. Vom vedea, însă, că dacă impunem niște restricții, obținem grupuri de transformări interesante.

2.3.1 Grupul translațiilor

Teorema 2.1. *Mulțimea \mathcal{T} a tuturor translațiilor planului formează un grup comutativ, care este un subgrup al grupului \mathcal{A} al tuturor transformărilor planului.*

Demonstrație Vom verifica, mai întâi, că \mathcal{T} este parte stabilă în raport cu compunerea aplicațiilor. După cum șim, în cazul aplicațiilor liniare, matricea aplicației compuse este produsul matricilor celor două aplicații. Fie T matricea aplicației obținute prin compunerea unei translații de vector \mathbf{v} cu o translație de vector \mathbf{w} . Atunci avem

$$\begin{aligned} T = \text{Trans}_{\mathbf{w}} \cdot \text{Trans}_{\mathbf{v}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1 + v_1 \\ 0 & 1 & w_2 + v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 + w_1 \\ 0 & 1 & v_2 + w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Trans}_{\mathbf{w}+\mathbf{v}} = \text{Trans}_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} = \text{Trans}_{\mathbf{v}} \cdot \text{Trans}_{\mathbf{w}}, \end{aligned}$$

așadar \mathcal{T} este parte stabilă în raport cu compunerea translațiilor (i.e. compunerea a două translații este tot o translație), iar operația internă este comutativă.

Operația este asociativă, întrucât, în general, compunerea aplicațiilor este comutativă.

Elementul neutru este aplicația identică a planului, care este translația de vector $\mathbf{0}$. Mai rămâne să verificăm că orice element admite un invers. Compunerea fiind comutativă, este suficient să verificăm existența unei inverte la stânga care va fi, în mod automat, și inversă la dreapta.

Afirmăm că inversa translației de vector \mathbf{w} este translația de vector $-\mathbf{w}$. Într-

adevăr, avem

$$\text{Trans}_{(-w_1, -w_2)} \cdot \text{Trans}_{(w_1, w_2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -w_1 \\ 0 & 1 & -w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ceea ce înseamnă că translația de vector \mathbf{w} are o inversă, care este tot o translație, de vector $-\mathbf{w}$:

$$(\text{Trans}_{\mathbf{w}})^{-1} = \text{Trans}_{-\mathbf{w}}.$$

□

Observație. Fie \mathbf{w} un vector și n un număr natural nenul. Atunci, după cum se poate constata cu ușurință,

$$(\text{Trans}_{\mathbf{w}})^n = \text{Trans}_{n\mathbf{w}}.$$

2.3.2 Grupul scalărilor uniforme

Spre deosebire de translații, toate celelalte transformări fundamentale ale planului se fac *relativ* la un punct sau la o direcție. Vom studia, prin urmare, scalările uniforme, de diferiți factori de scală, dar relativ la același punct. Punctul cu pricina este un punct fix al transformării (singurul punct fix).

Teorema 2.2. *Fie Q un punct dat din plan. Mulțimea \mathcal{S}_Q a tuturor scalărilor uniforme $\text{Scale}(Q, s)$, când s parcurge \mathbb{R}^* , împreună cu operația de compunere a aplicațiilor, formează un grup comutativ.*

Demonstrație Demonstrăm, mai întâi, că \mathcal{S}_Q este o parte stabilă a grupului tuturor transformărilor planului, în raport cu operația de compunere a aplicațiilor, cu alte cuvinte demonstrăm că rezultatul compunerii a două scalări relativ la Q este, de asemenea, o scalare relativ la Q . Într-adevăr, fie T transformarea care se obține compunând două scalări uniforme relativ la Q , de factori de scară s , respectiv t . Atunci avem

$$\begin{aligned} T &= \text{Scale}(Q, t) \cdot \text{Scale}(Q, s) = \begin{pmatrix} t & 0 & (1-t)q_1 \\ 0 & t & (1-t)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s & 0 & (1-s)q_1 \\ 0 & s & (1-s)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} ts & 0 & t(1-s)q_1 + (1-t)q_1 \\ 0 & ts & t(1-s)q_2 + (1-t)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ts & 0 & (1-ts)q_1 \\ 0 & ts & (1-ts)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \text{Scale}(Q, ts) = \text{Scale}(Q, st) = \text{Scale}(Q, s) \cdot \text{Scale}(Q, t). \end{aligned}$$

Am demonstrat, altfel, nu doar că mulțimea scalărilor uniforme față de Q este parte stabilă, dar și că operația de compunere, restrânsă la scalări uniforme, este comutativă.

Asociativitatea compunerii este o proprietate ereditară, aplicația identică este o scalare (de factor de scală 1) și joacă rolul elementului neutru și vom demonstra că orice scalare relativ la Q , de factor nenul s , este inversabilă, iar inversa este scalarea de factor $1/s$. Într-adevăr, la nivel matricial avem

$$\begin{aligned} \text{Scale}(Q, s) \cdot \text{Scale}(Q, 1/s) &= \begin{pmatrix} s & 0 & (1-s)q_1 \\ 0 & s & (1-s)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & 0 & \left(1 - \frac{1}{s}\right)q_1 \\ 0 & \frac{1}{s} & \left(1 - \frac{1}{s}\right)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & s\left(1 - \frac{1}{s}\right)q_1 + (1-s)q_1 \\ 0 & 1 & s\left(1 - \frac{1}{s}\right)q_2 + (1-s)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Observație. Și de data aceasta putem calcula cu ușurință puterile transformării: dacă n este un număr natural nenul, atunci avem

$$(\text{Scale}(Q, s))^n = \text{Scale}(Q, s^n).$$

2.3.3 Grupul scalărilor neuniforme

Teorema 2.3. *Fie Q un punct din plan. Atunci mulțimea S'_Q tuturor scalărilor neuniforme relativ la Q , de factori de scală $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^*$ formează un grup comutativ, în raport cu compunerea aplicațiilor.*

Demonstrație Verificăm, întâi, că este parte stabilă și că operația este comutativă.

Avem:

$$\begin{aligned}
 \text{Scale}(Q, t_1, t_2) \cdot \text{Scale}(Q, s_1, s_2) &= \begin{pmatrix} t_1 & 0 & (1-t_1)q_1 \\ 0 & t_2 & (1-t_2)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 & 0 & (1-s_1)q_1 \\ 0 & s_2 & (1-s_2)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} t_1 s_1 & 0 & (1-t_1 s_1)q_1 \\ 0 & t_2 s_2 & (1-t_2 s_2)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Scale}(Q, t_1 s_1, t_2 s_2) = \text{Scale}(Q, s_1 t_1, s_2 t_2) = \\
 &= \text{Scale}(Q, s_1, s_2) \cdot \text{Scale}(Q, t_1, t_2).
 \end{aligned}$$

Ca și mai sus, asociativitatea este ereditară, iar elementul neutru este aplicația identică, adică scalarea de factori de scală $(1, 1)$.

Inversa scalării de factori (s_1, s_2) este scalarea de factori $(1/s_1, 1/s_2)$. Într-adevăr,

$$\begin{aligned}
 \text{Scale}(Q, s_1, s_2) \cdot \text{Scale}(Q, 1/s_1, 1/s_2) &= \begin{pmatrix} s_1 & 0 & (1-s_1)q_1 \\ 0 & s_2 & (1-s_2)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \\
 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{s_1} & 0 & \left(1 - \frac{1}{s_1}\right)q_1 \\ 0 & \frac{1}{s_2} & \left(1 - \frac{1}{s_2}\right)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & s_1 \left(1 - \frac{1}{s_1}\right)q_1 + (1-s_1)q_1 \\ 0 & 1 & s_2 \left(1 - \frac{1}{s_2}\right)q_2 + (1-s_2)q_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

□

Probleme

În lista de probleme de mai jos, triunghiul ABC are vârfurile $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(2, 3)$. Reprezentați, de fiecare dată, pe aceeași figură, triunghiul inițial și imaginea sa.

Problema 2.1. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o rotație de unghi 30° în jurul punctului $Q(2, 2)$, urmată de o translație de vector $(1, 2)$. Aplicați apoi transformările în ordine inversă.

Problema 2.2. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare uniformă de factor de scală 2 relativ la punctul $Q(2, 2)$.

Problema 2.3. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, de factori de scală $(2, 1, 2)$, relativ la punctul $Q(2, 2)$.

Problema 2.4. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare neuniformă generală, de factor de scală 2, relativ la punctul $Q(2, 2)$, în direcția vectorului $\mathbf{v}(1, 2)$.

Problema 2.5. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o forfecare de unghi 45° , relativ la punctul $Q(2, 2)$, în direcția vectorului $\mathbf{v}(2, 1)$.

Problema 2.6. Determinați imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta $2x + 3y - 5 = 0$.

Problema 2.7. Determinați imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta AB .

Problema 2.8. Determinați imaginea triunghiului ABC prin reflexia relativ la dreapta BC , urmată de o forfecare, de unghi 60° , relativ la punctul A , în direcția vectorului $\mathbf{v}(1, 1)$.

Problema 2.9. Determinați imaginea triunghiului ABC prin rotația cu 90° în jurul punctului C , urmată de reflexia relativ la dreapta AB .

Problema 2.10. Determinați imaginea triunghiului ABC prin scalarea simplă neuniformă de factori $(1, 2, 1)$ relativ la punctul B , urmată de o rotație de 30° în jurul punctului $Q(1, 1)$.

CAPITOLUL 3

Transformări geometrice (afine) în spațiu

În acest capitol ne vom ocupa de variantele tridimensionale ale transformărilor afine descrise în capitolul precedent. Filozofia va fi, în esență, aceeași: vom stabili mai întâi, în limba vectorial, regula de transformare a vectorilor, apoi, în același limbaj, regula de transformare a punctelor, apoi vom deduce matricea transformării. Matricele (omogene) ale transformărilor spațiului sunt matrici de tip 4×4 .

3.1 Translația

Din punct de vedere vectorial, dacă nu folosim coordonate, nu există nici o diferență între translația în spațiu și translația în plan. De aceea, nu vom mai repeta raționamentul din cazul plan, atunci când vorbim despre forma vectorială a transformării.

3.1.1 Forma vectorială

Fie \mathbf{w} un vector constant. Atunci translația de vector \mathbf{w} acționează pe vectori astfel:

$$\text{Trans}(\mathbf{w})(\mathbf{v}) = \mathbf{v}, \quad (3.1.1)$$

adică se reduce la transformarea identică. În cazul punctelor, avem

$$\text{Trans}(\mathbf{w})(P) = P + \mathbf{w}. \quad (3.1.2)$$

3.1.2 Forma matricială

Ecuția (3.1.2) se transcrie matricial ca

$$\text{Trans}(\mathbf{w})(P) = I_3 \cdot P + \mathbf{w},$$

de unde rezultă matricea omogenă a transformării:

$$\text{Trans}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} I_3 & \mathbf{w} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.1.3)$$

sau, în forma extinsă,

$$\text{Trans}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & w_2 \\ 0 & 0 & 1 & w_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1.4)$$

3.2 Rotația în jurul unei axe

Fie Q un punct din spațiu și \mathbf{u} un versor. Vrem să determinăm expresia pentru rotația de unghi θ unui punct oarecare în jurul axei Δ determinate de punctul Q și versorul \mathbf{u} .

3.2.1 Forma vectorială

Ca de obicei, vom stabili mai întâi formula de transformare pentru vectori. Fie \mathbf{v} un vector oarecare. Folosind o tehnică ce am mai utilizat-o, descompunem vectorul ca

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}, \quad (3.2.1)$$

unde \mathbf{v}_{\parallel} este componenta lui \mathbf{v} paralelă cu \mathbf{u} , în timp ce \mathbf{v}_{\perp} este componenta perpendiculară pe \mathbf{u} .

Dacă aplicăm rotația vectorului \mathbf{v} , componenta \mathbf{v}_{\parallel} rămâne nemodificată, deci putem să ne concentrăm asupra componente \mathbf{v}_{\perp} . Această componentă poate fi fixată într-un plan perpendicular pe \mathbf{u} , iar prin rotație, ea rămâne în acest plan. Prin urmare, rotația 3D a vectorului \mathbf{v} în jurul axei Δ se reduce la o rotație plană a vectorului \mathbf{v}_{\perp} .

Ne aducem aminte de formula pentru rotația de unghi θ a unui vector \mathbf{w} situat într-un plan:

$$\mathbf{w}' = \cos \theta \mathbf{w} + \sin \theta \mathbf{w}^{\perp}.$$

Vectorul \mathbf{w}^\perp este rotitul cu 90° al vectorului \mathbf{w} . E suficient, prin urmare, să identificăm rotitul cu 90° al vectorului \mathbf{v}_\perp , în planul perpendicular pe \mathbf{u} pe care l-am considerat. E ușor de constatat că acest vector este $\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp$. Într-adevăr, $\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp$ este perpendicular atât pe \mathbf{u} , cât și pe \mathbf{v}_\perp , deci e situat în planul corespunzător. Cum \mathbf{u} și \mathbf{v}_\perp sunt perpendiculari, unghiul dintre ei este 90° , iar, \mathbf{u} fiind un versor, $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp\| = \|\mathbf{v}_\perp\|$, ceea ce înseamnă că $\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp$ este, într-adevăr, rotitul cu 90° al lui \mathbf{v}_\perp .

Prin urmare,

$$\text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_\perp) = \cos \theta \cdot \mathbf{v}_\perp + \sin \theta \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp),$$

iar

$$\text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_\perp) = \mathbf{v}_\parallel + \cos \theta \cdot \mathbf{v}_\perp + \sin \theta \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_\perp),$$

Pe de altă parte,

$$\begin{cases} \mathbf{v}_\parallel = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, \\ \mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}. \end{cases}$$

Așadar,

$$\text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \cos \theta \cdot (\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}) + \sin \theta \cdot [\mathbf{u} \times (\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u})]$$

sau

$$\text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = \cos \theta \cdot \mathbf{v} + (1 - \cos \theta) \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \sin \theta \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}), \quad (3.2.2)$$

unde am folosit faptul că $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = 0$.

Fie, acum, P un punct oarecare din spațiu. Ca de obicei, scriem $P = Q + (P - Q) = Q + \overrightarrow{QP}$. Atunci

$$\text{Rot}(Q, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)(\overrightarrow{QP}), \quad (3.2.3)$$

de unde, folosind (3.2.2), obținem

$$\text{Rot}(Q, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \cos \theta \cdot \overrightarrow{QP} + (1 - \cos \theta) \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + \sin \theta \cdot (\mathbf{u} \times \overrightarrow{QP}). \quad (3.2.4)$$

Formula (3.2.4) se numește *formula lui Rodrigues*, după numele matematicianului francez care a descoperit-o.

3.2.2 Forma matricială

Plecăm de la formula (3.2.2), pe care vrem să o scriem matricial. Singura parte care ne poate crea probleme este produsul vectorial $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Pentru un vector \mathbf{u} fixat, definim operatorul liniar de matrice

$$\mathbf{u} \times - = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.5)$$

Un calcul simplu ne arată acum că

$$(\mathbf{u} \times -) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}. \quad (3.2.6)$$

Cu acest artificiu, obținem

$$\text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = [\cos \theta \cdot I_3 + (1 - \cos \theta)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \sin \theta \cdot (\mathbf{u} \times -)] \cdot \mathbf{v},$$

de unde rezultă că matricea rotației vectorilor este

$$\text{Rot}(\mathbf{u}, \theta) = \cos \theta \cdot I_3 + (1 - \cos \theta)(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \sin \theta \cdot (\mathbf{u} \times -). \quad (3.2.7)$$

Din formula (3.2.3) rezultă acum că

$$\text{Rot}(\mathcal{Q}, \mathbf{u}, \theta)(P) = \text{Rot}(\mathbf{u}, \theta) \cdot \mathbf{P} + (I_3 - \text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)) \cdot \mathbf{Q}. \quad (3.2.8)$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotației este

$$\text{Rot}(\mathcal{Q}, \mathbf{u}, \theta) = \begin{pmatrix} \text{Rot}(\mathbf{u}, \theta) & (I_3 - \text{Rot}(\mathbf{u}, \theta)) \cdot \mathbf{Q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.9)$$

Exemple. 1) O rotație relativ la origine va avea matricea

$$\text{Rot}(\text{Origine}, \mathbf{u}, \theta) = \begin{pmatrix} \text{Rot}(\mathbf{u}, \theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Rotația relativ la origine în jurul axei Ox este similară cu ceea ce se întâmplă în plan. Mai precis, în acest caz avem, înainte de toate,

$$\text{Rot}(\mathbf{i}, \theta) = \cos \theta \cdot I_3 + (1 - \cos \theta)(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + \sin \theta \cdot (\mathbf{i} \times -). \quad (3.2.10)$$

Dar

$$\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{i} \times - = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

deci formula (3.2.10) se transformă în

$$\begin{aligned} \text{Rot}(\mathbf{i}, \theta) &= \cos \theta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sin \theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotației de unghi θ relativ la origine, în jurul axei Ox este:

$$\text{Rot}(\text{Origine}, \mathbf{i}, \theta) = \begin{pmatrix} \text{Rot}(\mathbf{i}, \theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.11)$$

3) **Rotația relativ la origine în jurul axei Oy .** Avem, mai întâi,

$$\text{Rot}(\mathbf{j}, \theta) = \cos \theta \cdot I_3 + (1 - \cos \theta)(\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) + \sin \theta \cdot (\mathbf{j} \times -). \quad (3.2.12)$$

Dar

$$\mathbf{j} \otimes \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{j} \times - = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci formula (3.2.12) se transformă în

$$\begin{aligned} \text{Rot}(\mathbf{j}, \theta) &= \cos \theta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sin \theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotației de unghi θ relativ la origine, în jurul axei Oy este:

$$\text{Rot}(\text{Origine}, \mathbf{j}, \theta) = \begin{pmatrix} \text{Rot}(\mathbf{j}, \theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.13)$$

4) **Rotația relativ la origine în jurul axei Oz .** Avem, mai întâi,

$$\text{Rot}(\mathbf{k}, \theta) = \cos \theta \cdot I_3 + (1 - \cos \theta)(\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) + \sin \theta \cdot (\mathbf{k} \times -). \quad (3.2.14)$$

Dar

$$\mathbf{k} \otimes \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

în timp ce

$$\mathbf{k} \times - = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

deci formula (3.2.14) se transformă în

$$\begin{aligned} \text{Rot}(\mathbf{j}, \theta) &= \cos \theta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin \theta \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Prin urmare, matricea omogenă a rotației de unghi θ relativ la origine, în jurul axei Oz este:

$$\text{Rot}(\text{Origine}, \mathbf{k}, \theta) = \begin{pmatrix} \text{Rot}(\mathbf{k}, \theta) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.15)$$

3.3 Scalarea simplă uniformă

Ne interesează scalarea de factor s , relativ la punctul Q .

3.3.1 Forma vectorială

Scalarea vectorilor se face foarte simplu:

$$\text{Scale}(s)(\mathbf{v}) = s \cdot \mathbf{v}. \quad (3.3.1)$$

Cum, dacă P este un punct arbitrar din spațiu, $P = Q + (P - Q) = Q + \overrightarrow{QP}$, avem

$$\text{Scale}(Q, s)(P) = Q + \text{Scale}(s)(\overrightarrow{QP}),$$

adică

$$\text{Scale}(Q, s) = Q + s \cdot \overrightarrow{QP}. \quad (3.3.2)$$

3.3.2 Forma matricială

Determinăm, mai întâi, ca de obicei, forma matricială a scalării vectorilor și obținem, din (3.3.1),

$$\text{Scale}(s)(\mathbf{v}) = s \cdot I_3 \cdot \mathbf{v}.$$

Prin urmare, matricea scalării uniforme a vectorilor, de factor s , este

$$\text{Scale}(s) = s \cdot I_3. \quad (3.3.3)$$

Prin urmare,

$$\text{Scale}(Q, s)(P) = Q + \text{Scale}(s) \cdot (P - Q)$$

sau

$$\text{Scale}(Q, s)(P) = \text{Scale}(s) \cdot P + (I_3 - \text{Scale}(s)) \cdot Q = s \cdot I_3 \cdot P + (1-s) \cdot I_3 \cdot Q. \quad (3.3.4)$$

Așadar, matricea omogenă a scalării simple uniforme relativ la punctul Q , de factor s , este

$$\text{Scale}(Q, s) = \begin{pmatrix} s \cdot I_3 & (1-s) \cdot I_3 \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3.5)$$

sau, explicit,

$$\text{Scale}(Q, s) = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & (1-s) \cdot q_x \\ 0 & s & 0 & (1-s) \cdot q_y \\ 0 & 0 & s & (1-s) \cdot q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.3.6)$$

3.4 Scalarea simplă neuniformă

Considerăm o scalare de factori s_x, s_y, s_z de-a lungul axelor de coordonate, relativ la un punct Q .

3.4.1 Forma vectorială

Fie \mathbf{v} un vector din spațiu. Atunci el se poate scrie

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_x + \mathbf{v}_y + \mathbf{v}_z,$$

unde $\mathbf{v}_x = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i}$, $\mathbf{v}_y = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j}$, $\mathbf{v}_z = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}$. Atunci,

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}) = \text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}_x) + \text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}_y) + \text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}_z),$$

adică

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}) = s_x \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} + s_z \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}. \quad (3.4.1)$$

Dacă P e un punct,

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z)(P) = \text{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z)(Q + \overrightarrow{QP}),$$

adică

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z)(P) = Q + s_x \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{i}) \cdot \mathbf{i} + s_y \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} + s_z \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}. \quad (3.4.2)$$

Forma matricială

Din (3.4.1) obținem forma matricială a transformării vectorilor

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(\mathbf{v}) = s_x (\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) \cdot \mathbf{v} + s_y (\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) \cdot \mathbf{v} + s_z (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}) \cdot \mathbf{v},$$

de unde rezultă matricea transformării:

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z) = s_x (\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) + s_y (\mathbf{j} \otimes \mathbf{j}) + s_z (\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}). \quad (3.4.3)$$

După cum am văzut mai devreme,

$$\mathbf{i} \otimes \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

deci formula (3.4.3) se poate rescrie ca

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{pmatrix}. \quad (3.4.4)$$

Ca să găsim matricea transformării punctelor, scriem $P = Q + (P - Q)$, deci

$$\text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(P) = Q + \text{Scale}(s_x, s_y, s_z)(P - Q)$$

sau

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z)(P) = \text{Scale}(s_x, s_y, s_z) \cdot P + (I_3 - \text{Scale}(s_x, s_y, s_z)) \cdot Q, \quad (3.4.5)$$

prin urmare, matricea transformării va fi

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} \text{Scale}(s_x, s_y, s_z) & (I_3 - \text{Scale}(s_x, s_y, s_z)) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.6)$$

sau, în forma completă,

$$\text{Scale}(Q, s_x, s_y, s_z) = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & (1 - s_x) \cdot q_x \\ 0 & s_y & 0 & (1 - s_y) \cdot q_y \\ 0 & 0 & s_z & (1 - s_z) \cdot q_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4.7)$$

3.5 Scalarea neuniformă generală (Goldman)

Suntem interesați de scalarea generală de factor s , în direcția versorului \mathbf{w} , relativ la punctul Q .

3.5.1 Forma vectorială

Fie \mathbf{v} un vector oarecare din spațiu. Vom descompune acest vector după două direcții, una paralelă cu versorul \mathbf{w} și una perpendiculară pe el:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}. \quad (3.5.1)$$

Este ușor de constatat că

$$\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}, \quad (3.5.2)$$

de unde, desigur,

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \quad (3.5.3)$$

Prin urmare,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\parallel}) + \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\perp}). \quad (3.5.4)$$

Cum scalarea se produce paralel cu vectorul \mathbf{w} , avem, evident

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\parallel}) = s\mathbf{v}_{\parallel}. \quad (3.5.5)$$

Pe de altă parte, nici o scalare nu are loc în direcția perpendiculară la \mathbf{w} , deci

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\perp}. \quad (3.5.6)$$

Prin urmare,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = s\mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}$$

sau, dacă ținem cont de definițiile lui \mathbf{v}_{\parallel} și \mathbf{v}_{\perp} ,

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (s - 1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \quad (3.5.7)$$

Pentru a determina imaginea unui punct P , ținem cont de faptul că $P = Q + \overrightarrow{QP}$, deci

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\overrightarrow{QP})$$

sau

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \overrightarrow{QP} + (s - 1)(\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{w})\mathbf{w}. \quad (3.5.8)$$

3.5.2 Forma matricială

Începem prin a determina forma matricială a transformării pentru vectori. Avem

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + (s - 1)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot \mathbf{v},$$

deci matricea pentru transformarea vectorilor este

$$\text{Scale}(\mathbf{w}, s) = I_3 + (s - 1)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}). \quad (3.5.9)$$

Pe de altă parte, cum $P = Q + (P - Q)$,

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = Q + \text{Scale}(\mathbf{w}, s) \cdot (P - Q) = \text{Scale}(\mathbf{w}, s) \cdot P + (I_3 - \text{Scale}(\mathbf{w}, s)) \cdot Q$$

sau

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s)(P) = \text{Scale}(\mathbf{w}, s) \cdot P + (1 - s)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot Q. \quad (3.5.10)$$

Prin urmare, matricea omogenă a transformării este

$$\text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) = \begin{pmatrix} I_3 + (s - 1)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) & (1 - s)(\mathbf{w} \otimes \mathbf{w}) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5.11)$$

sau, în formă extinsă,

$$\begin{aligned} \text{Scale}(Q, \mathbf{w}, s) &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 + (s - 1)w_1^2 & (s - 1)w_1w_2 & (s - 1)w_1w_3 & (1 - s)(q_1w_1^2 + q_2w_1w_2 + q_3w_1w_3) \\ (s - 1)w_1w_2 & 1 + (s - 1)w_2^2 & (s - 1)w_2w_3 & (1 - s)(q_1w_1w_2 + q_2w_2^2 + q_3w_2w_3) \\ (s - 1)w_1w_3 & (s - 1)w_2w_3 & 1 + (s - 1)w_3^2 & (1 - s)(q_1w_1w_3 + q_2w_2w_3 + q_3w_3^2) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

Exemplul 3.1. Dacă Q este originea, iar $\mathbf{w} = \mathbf{i}$, adică scalarea generală se face de-a lungul axei Ox , atunci matricea de transformare se transformă în

$$\text{Scale}(\text{Origine}, \mathbf{i}, s) = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{Scale}(\text{Origine}, s, 1, 1),$$

adică scalarea se reduce la o scalare simplă neomogenă, de-a lungul axei Ox .

3.6 Reflexia față de un plan

Reflexia față de un plan, în spațiu, este perfect analogă cu reflexia față de o dreaptă în plan și modalitatea de a obține expresia ei este similară. De data asta datele sunt: un punct Q și un plan Π care trece prin el, descris prin intermediul versorului planului normal, \mathbf{n} .

3.6.1 Forma vectorială

Fie \mathbf{v} un vector oarecare din spațiu. Descompunem vectorul

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp}, \quad (3.6.1)$$

unde \mathbf{v}_{\parallel} este un vector paralel vectorului \mathbf{n} (adică perpendicular pe planul Π), în timp ce vectorul \mathbf{v}_{\perp} este perpendicular pe vectorul \mathbf{n} (adică este paralel cu planul Π).

Reflexia față de planul Π a vectorului \mathbf{v}_{\perp} coincide, evident, cu vectorul însuși:

$$\text{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\perp}.$$

Prin urmare, trebuie să de preocupăm doar de cealaltă componentă, perpendiculară pe plan. Dar, iarăși în mode evident,

$$\text{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}_{\parallel}) = -\mathbf{v}_{\parallel}.$$

Ca urmare,

$$\text{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_{\perp} - \mathbf{v}_{\parallel}.$$

Dar

$$\mathbf{v}_{\parallel} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\parallel},$$

deci, în final,

$$\text{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}. \quad (3.6.2)$$

Fie, acum, P un punct din spațiu. Atunci $P = Q + \overrightarrow{QP}$, deci

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n})(P) = Q + \text{Mirror}(\mathbf{n})(\overrightarrow{QP})$$

sau

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n})(P) = Q + \overrightarrow{QP} - 2(\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}. \quad (3.6.3)$$

3.6.2 Forma matricială

Scriem, mai întâi, matricial transformarea pentru vectori. Relația (3.6.2) se transformă, după cum se poate constata ușor, în

$$\text{Mirror}(\mathbf{n})(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v},$$

prin urmare, matricea transformării vectorilor este

$$\text{Mirror}(\mathbf{n}) = I_3 - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}). \quad (3.6.4)$$

Pentru a găsi matricea omogenă a transformării pentru puncte, scriem $P = Q + (P - Q)$ și obținem

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n})(P) = Q + (P - Q) - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot (P - Q)$$

sau

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n})(P) = (I_3 - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})) \cdot P + 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot Q.$$

Așadar, matricea omogenă a reflexiei față de planul Π este:

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} I_3 - 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) & 2(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6.5)$$

sau, în forma extinsă,

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 1 - 2n_1^2 & -2n_1n_2 & -2n_1n_3 & 2(n_1n_3q_3 + n_1n_2q_2 + n_1^2q_1) \\ -2n_1n_2 & 1 - 2n_2^2 & -2n_2n_3 & 2(n_2n_3q_3 + n_2^2q_2 + n_1n_2q_1) \\ -2n_1n_3 & -2n_2n_3 & 1 - 2n_3^2 & 2(n_3^2q_3 + n_2n_3q_2 + n_1n_3q_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6.6)$$

Exemple. 1. **Simetria față de planul xOy .** În acest caz, $Q = O(0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = \mathbf{k}$ și obținem:

$$R_{xy} = \text{Mirror}(O, \mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6.7)$$

2. **Simetria față de planul xOz .** De data aceasta, $Q = O(0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = \mathbf{j}$ și obținem:

$$R_{xz} = \text{Mirror}(O, \mathbf{j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6.8)$$

3. **Simetria față de planul yOz .** Acum, $Q = O(0, 0, 0)$, $\mathbf{n} = \mathbf{i}$ și obținem:

$$R_{yz} = \text{Mirror}(O, \mathbf{i}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6.9)$$

3.6.3 Cazul în care planul este dat sub forma generală

Să presupunem că ecuația planului este

$$\Pi : ax + by + cz + d = 0.$$

Să presupunem, pentru fixarea ideilor, că $a \neq 0$. Atunci planul Π este planul care are ca vector normal

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c),$$

și putem lua

$$Q = (-d/a, 0, 0).$$

Dacă înlocuim în formula (3.6.6), obținem

$$\text{Mirror}(Q, \mathbf{n}) = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} \begin{pmatrix} -a^2 + b^2 + c^2 & -2ab & -2ac & -2ad \\ -2ab & a^2 - b^2 + c^2 & -2bc & -2bd \\ -2ac & -2bc & a^2 + b^2 - c^2 & -2cd \\ 0 & 0 & 0 & a^2 + b^2 + c^2 \end{pmatrix} \quad (3.6.10)$$

3.7 Forfecarea în spațiu

Fie Π un plan în spațiu, $Q \in \Pi$ un punct dat, \mathbf{u} – un versor paralel cu planul Π și θ un unghi. Dacă P este un punct oarecare din spațiu, îl proiectăm ortogonal pe planul Π într-un punct $P' \in \Pi$. Acum mutăm punctul P paralel cu vectorul \mathbf{u} într-un punct P^{new} , astfel încât $\angle P^{\text{new}} P' P = \theta$. Vom spune că punctul P^{new} a fost obținut din punctul P printr-o *forfecare paralelă cu planul Π , relativ la punctul Q , în direcția versorului \mathbf{u} , de unghi θ* . Vom scrie

$$P^{\text{new}} = \text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P),$$

unde \mathbf{n} este versorul normal la planul Π (prin urmare, Q și \mathbf{n} determină în mod unic planul Π).

3.7.1 Forma vectorială

Fie \mathbf{v} un vector oarecare din \mathbb{R}^3 . Îl descompunem ca

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp},$$

unde \mathbf{v}_{\parallel} este un vector paralel cu \mathbf{u} , în timp ce \mathbf{v}_{\perp} este un vector perpendicular pe \mathbf{u} , adică un vector paralel cu vectorul normal \mathbf{n} . Atunci

$$\text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_{\parallel}) + \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_{\perp}) = \mathbf{v}_{\parallel} + \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_{\perp}).$$

Un raționament simplu ne arată că

$$\text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}_{\perp}) = \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)((\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{n}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{n} + \text{tg } \theta \cdot \mathbf{u}).$$

Pe de altă parte,

$$\mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}.$$

Prin urmare,

$$\text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}. \quad (3.7.1)$$

Dacă vrem să determinăm forma transformării pentru un punct P , scriem

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\overrightarrow{QP})$$

sau

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \overrightarrow{QP} + \text{tg } \theta \cdot (\overrightarrow{QP} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u}. \quad (3.7.2)$$

3.7.2 Forma matricială

Pentru forma matricială a transformării pe vectori deducem imediat, cum am mai făcut-o înainte, că

$$\text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = \mathbf{v} + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$

sau

$$\text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(\mathbf{v}) = (I_3 + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u})) \cdot \mathbf{v}, \quad (3.7.3)$$

ceea ce înseamnă că matricea părții vectoriale a forfecării este

$$\text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta) = I_3 + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}). \quad (3.7.4)$$

Pentru a determina matricea omogenă de transformare a punctelor, plecăm de la relația

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P) = Q + \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta) \cdot (P - Q) = \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta) \cdot P + (I_3 - \text{Shear}(\mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)) \cdot Q$$

sau, dacă explicităm,

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta)(P) = (I_3 + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u})) \cdot P - \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) \cdot Q. \quad (3.7.5)$$

De aici deducem că matricea omogenă a forfecării este

$$\text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta) = \begin{pmatrix} I_3 + \text{tg } \theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) & -\text{tg } \theta \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{u}) \cdot Q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.7.6)$$

Matricea extinsă este

$$\begin{aligned} \text{Shear}(Q, \mathbf{n}, \mathbf{u}, \theta) &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 + n_1 u_1 \text{tg } \theta & n_2 u_1 \text{tg } \theta & n_3 u_1 \text{tg } \theta & -\text{tg } \theta (n_3 u_1 q_3 + n_2 u_1 q_2 + n_1 u_1 q_1) \\ n_1 u_2 \text{tg } \theta & 1 + n_2 u_2 \text{tg } \theta & n_3 u_2 \text{tg } \theta & -\text{tg } \theta (n_3 u_2 q_3 + n_2 u_2 q_2 + n_1 u_2 q_1) \\ n_1 u_3 \text{tg } \theta & n_2 u_3 \text{tg } \theta & 1 + n_3 u_3 \text{tg } \theta & -\text{tg } \theta (n_3 u_3 q_3 + n_2 u_3 q_2 + n_1 u_3 q_1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7.7)$$

În particular, forfecarea de-a lungul axei Ox , paralel cu planul xOy este dată de matricea

$$\text{Shear}(O, \mathbf{k}, \mathbf{i}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \text{tg } \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Forfecarea de-a lungul axei Oy , paralel cu planul xOy este dată de matricea

$$\text{Shear}(O, \mathbf{k}, \mathbf{j}, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \text{tg } \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probleme

În această secțiune, ABC este triunghiul de vârfuri $A(1, 2, 2)$, $B(2, 4, 3)$, $C(4, 3, 2)$.

Problema 3.1. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o rotație de 45° în jurul drepte care trece prin punctele $P(2, 2, 1)$ și $Q(1, 1, 1)$.

Problema 3.2. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o rotație de 30° în jurul dreptei

$$(\Delta) : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{0} = \frac{z-2}{2}.$$

Problema 3.3. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o rotație de 60° în jurul dreptei

$$(\Delta) : \begin{cases} x - y + z - 1 = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

Problema 3.4. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare simplă neuniformă, relativ la punctul $Q(2, 5, 3)$, de factori de scală $(2, 1, 3)$.

Problema 3.5. Determinați imaginea triunghiului ABC printr-o scalare neuniformă generală, relativ la punctul $Q(2, 5, 3)$, de factor de scală $s = 1$, în direcția vectorului $\mathbf{v}(1, 3, 2)$.

Problema 3.6. Determinați imaginea triunghiului ABC prin reflexia față de planul $x - y + 2z - 1 = 0$.

Problema 3.7. Determinați imaginea triunghiului ABC prin reflexia față de planul care trece prin punctele $O(0, 0, 0)$, $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 3, 2)$.

Problema 3.8. Determinați imaginea triunghiului ABC prin forfecarea de unghi 30° , relativ la planul $x - y - z - 1 = 0$, în direcția vectorului $\mathbf{v}(1, 1, 0)$.

Problema 3.9. Determinați imaginea triunghiului ABC prin forfecarea de unghi 30° , relativ la planul care trece prin punctele $O(0, 0, 0)$, $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 3, 2)$, în direcția vectorului $\mathbf{v}(1, -1, 0)$.

CAPITOLUL 4

Proiecții

4.1 Geometrie analitică plană în coordonate omogene

Fie $P(x, y)$ un punct din plan, dat prin coordonatele sale carteziene (x, y) . Acestor coordonate li se asociază coordonatele sale omogene (X, Y, W) astfel încât $x = X/W$ și $y = Y/W$. Presupunem că $W \neq 0$. Vom nota cu $\mathbf{P}(X, Y, W)$ punctul, dat prin coordonatele sale omogene. Coordonatele omogene nu sunt unice, ele sunt definite doar până la un factor nenul. În cele ce urmează, când va fi util, îl vom privi pe \mathbf{P} ca fiind un vector 3D. Din nou, este un vector *omogen*, de componente (X, Y, W) , care sunt unice până la un factor nenul. Dacă adăugăm punctelor obișnuite ale planului punctele care au coordonatele omogene $(X, Y, 0)$ (punctele “de la infinit”) obținem *planul proiectiv*.

Dacă punctul $P(x, y)$ aparține dreptei de ecuație

$$ax + by + c = 0,$$

atunci ecuațiile sale verifică ecuația

$$aX + bY + cW = 0. \quad (4.1.1)$$

Această ecuație se numește *ecuația omogenă a dreptei*.

Dreapta noastră unic determinată de coeficienții a, b, c . Reciproca este adevărată în sensul că fiecărei drepte i se pot asocia coeficienții săi, care sunt unici până la

un factor numeric nenul. Vom considera că (a, b, c) sunt coordonatele dreptei și introducem vectorul (omogen)

$$\ell = (a, b, c),$$

pe care îl vom numi *vectorul dreptei*.

Cu noile notații, ecuația dreptei (4.1.1) se poate scrie, cu ajutorul produsului scalar din \mathbb{R}^3 , sub forma:

$$\ell \cdot \mathbf{P} = aX + bY + cW = 0. \quad (4.1.2)$$

Relația (4.1.2) se poate utiliza pentru a rezolva două probleme importante care leagă punctele și dreptele din plan:

- (i) determinarea ecuației dreptei care trece prin două puncte date;
- (ii) determinarea punctului de intersecție a două drepte date.

Determinarea ecuației dreptei. Considerăm două puncte, date prin coordonatele lor omogene, \mathbf{P}_1 și \mathbf{P}_2 . Notăm cu $\ell(a, b, c)$ vectorul dreptei care trece prin ele. Atunci avem relațiile

$$\ell \cdot \mathbf{P}_1 = 0 \quad \text{și} \quad \ell \cdot \mathbf{P}_2 = 0.$$

Din punct de vedere geometric, aceste ecuații înseamnă că vectorul dreptei este perpendicular pe ambele puncte (privite ca vectori, desigur). Dar noi știm că asta înseamnă că putem pune

$$\ell = \mathbf{P}_1 \times \mathbf{P}_2.$$

Ca exemplu, vom determina ecuația dreptei care trece prin punctele $(1, 1)$ și $(2, 3)$. Avem, astfel, $\mathbf{P}_1(1, 1, 1)$ și $\mathbf{P}_2(2, 3, 1)$. Atunci vectorul dreptei va fi

$$\ell = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 1),$$

adică ecuația dreptei se poate scrie:

$$-2x + y + 1 = 0.$$

Determinarea punctului de intersecție a două drepte. Presupunem că se dau două drepte (distincte!), prin vectorii lor $\ell_1(a_1, b_1, c_1)$ și $\ell_2(a_2, b_2, c_2)$. Punctul lor de intersecție verifică sistemul de ecuații

$$\ell_1 \cdot \mathbf{P} = 0 \quad \text{și} \quad \ell_2 \cdot \mathbf{P} = 0.$$

Din aceleași motive ca mai sus, soluția evidentă este

$$\mathbf{P} = \ell_1 \times \ell_2.$$

Considerăm, de exemplu, dreptele $3x + 2y - 5 = 0$ și $4x + 7y - 1 = 0$, adică

$$\ell_1 = (3, 2, -5), \quad \ell_2 = (4, 7, -1).$$

Atunci

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -5 \\ 4 & 7 & -1 \end{vmatrix} = (33, -17, 13),$$

adică obținem punctul de coordonate carteziane $(33/13, -17/13)$. Considerăm, ca al doilea exemplu, dreptele (paralele!) $3x + 2y - 5 = 0$ și $3x + 2y = 0$, adică

$$\ell_1 = (3, 2, -5), \quad \ell_2 = (3, 2, 0).$$

Atunci punctul de “intersecție” este dat de

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & -5 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (10, 15, 0)$$

sau $\mathbf{P}(2, 3, 0)$. Faptul că punctul de intersecție omogen are zero ca ultimă coordonată, înseamnă că este punctul de la infinit corespunzător direcției celor două drepte paralele.

4.2 Geometrie analitică în spațiu în coordonate omogene

Lucrurile în spațiu stau analog cu ceea ce se întâmplă în plan. Unui punct $P(x, y, z)$ i se asociază $\mathbf{P}(X, Y, Z, W)$, cu $x = X/W, y = Y/W, z = Z/W$. și aici, dacă adăugăm punctele ce au ultima coordonată omogenă zero (punctele de la infinit), obținem *spațiul proiectiv*. Două drepte paralele se intersectează într-un punct de la infinit, iar două plane paralele se intersectează după o dreaptă, formată din puncte de la infinit. Studiul dreptelor și planelor paralele se poate face și în coordonate omogene, dar nu ne interesează aici. Un plan de ecuație

$$ax + by + cz + d = 0$$

se poate scrie în coordonate omogene sub forma

$$aX + bY + cZ + dW = 0. \quad (4.2.1)$$

Dacă introducem vectorul omogen 4-dimensional

$$\mathbf{n} = (a, b, c, d)$$

și îl numim *vectorul planului*, atunci ecuația (4.2.1) se poate rescrie, folosind produsul scalar euclidian 4-dimensional, sub forma

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P} = aX + bY + cZ + dW = 0. \quad (4.2.2)$$

Cu ajutorul relației (4.2.1) putem rezolva două probleme importante:

(a) determinarea planului care trece prin trei puncte;

(b) determinarea punctului de intersecție a trei plane.

Determinarea ecuației planului care trece prin trei puncte.

Considerăm trei puncte, date prin coordonatele lor omogene, $\mathbf{P}_1(X_1, Y_1, Z_1, W_1)$, $\mathbf{P}_2(X_2, Y_2, Z_2, W_2)$ și $\mathbf{P}_3(X_3, Y_3, Z_3, W_3)$ și fie \mathbf{n} vectorul omogen al planului care trece prin cele trei puncte. Atunci avem

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_1 = 0, \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_2 = 0, \text{ și } \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_3 = 0,$$

adică \mathbf{n} este ortogonal la cele trei puncte. Aceasta înseamnă că trebuie să avem

$$\mathbf{n} = \text{orth}(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & W_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & W_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & W_3 \end{vmatrix}. \quad (4.2.3)$$

Determinarea punctului de intersecție a trei plane.

De data aceasta se consideră trei plane, date prin vectorii lor, $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ și o trebuie să determinăm punctul lor de intersecție, \mathbf{P} . Întrucât punctul aparține tuturor celor trei plane, el trebuie să verifice egalitățile

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{P} = 0, \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{P} = 0, \text{ și } \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{P} = 0,$$

adică punctul trebuie să fie ortogonal celor trei plane, deci

$$\mathbf{P} = \text{orth}(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}. \quad (4.2.4)$$

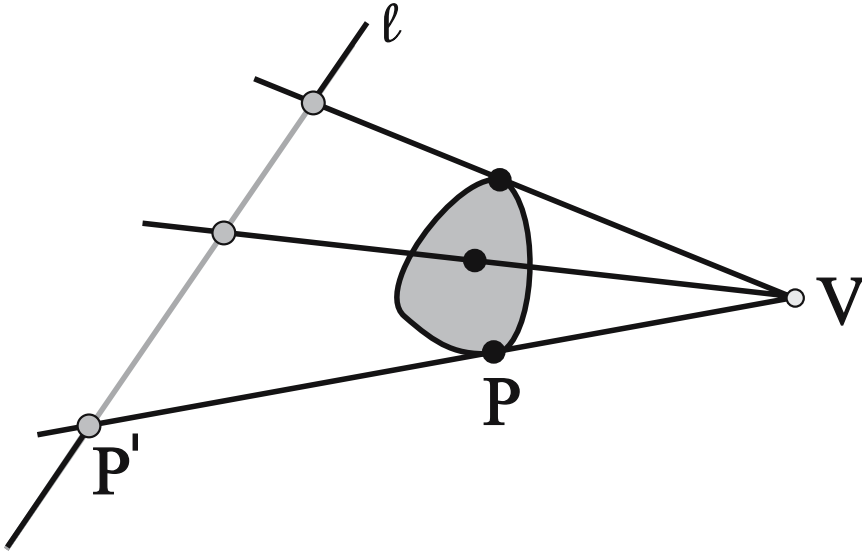


Figura 4.1: Proiecția perspectivă în plan

4.3 Proiecții

4.3.1 Proiecția pe o dreaptă

Fie V un punct din plan și ℓ o dreaptă care nu trece prin V . Se numește *proiecție centrală* sau *proiecție perspectivă* vin V pe ℓ aplicația care asociază fiecărui punct P din plan, diferit de V , punctul P' obținut intersectând dreapta VP cu dreapta ℓ . Punctul V se numește *centru de perspectivă* sau *punct de vedere*, iar dreapta ℓ se numește *linie de vedere* sau *linie de proiecție*. Liniile prin V se numesc *proiectori*. Dacă punctul de vedere $V(v_1, v_2, 0)$ este situat la infinit, atunci proiectorii sunt drepte paralele de vector director (v_1, v_2) . În acest caz, proiecția se numește *paralelă*.

Teorema 4.1. *Matricea proiecției perspective dintr-un punct V (exprimat în coordo-*

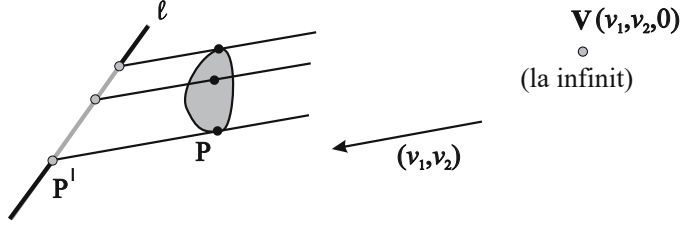


Figura 4.2: Proiecția paralelă în plan

nate omogene) pe o dreaptă de vector ℓ este dată de

$$\begin{aligned}
 M &= \mathbf{V}\ell^t - (\ell \cdot \mathbf{V})I_3 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot (a_1 \ a_2 \ a_3) - (\ell \cdot \mathbf{V})I_3 = \\
 &= \begin{pmatrix} -v_2a_2 - v_3a_3 & v_1a_2 & v_1a_3 \\ v_2a_1 & -v_1a_1 - v_3a_3 & v_2a_3 \\ v_3a_1 & v_3a_2 & -v_1a_1 - v_2a_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Observație. Pentru proiecția paralelă, $v_3 = 0$ și atunci formula din teoremă se reduce la

$$M = \begin{pmatrix} -v_2a_2 & v_1a_2 & v_1a_3 \\ v_2a_1 & -v_1a_1 & v_2a_3 \\ 0 & 0 & -v_1a_1 - v_2a_2 \end{pmatrix} \tag{4.3.2}$$

Demonstrația teoremei Imaginea \mathbf{P}' a punctului \mathbf{P} este obținută intersectând dreapta de proiecție ℓ cu dreapta care trece prin \mathbf{V} și \mathbf{P} . Această dreaptă are vectorul omogen $\mathbf{V} \times \mathbf{P}$ și, de aceea, intersectează ℓ în punctul de coordonate omogene $\ell \times (\mathbf{V} \times \mathbf{P})$.

După cum se știe din algebra vectorială, dacă $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ sunt trei vectori din \mathbb{R}^3 , atunci

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{A})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C},$$

de aceea,

$$\mathbf{P}' = \ell \times (\mathbf{V} \times \mathbf{P}) = (\mathbf{P} \cdot \ell)\mathbf{V} - (\ell \cdot \mathbf{V})\mathbf{P}.$$

Dacă înlocuim vectorii cu matrici coloană și produsul scalar cu înmulțirea matricilor, obținem:

$$\mathbf{P}' = \mathbf{V}\ell^t \mathbf{P} - (\ell \cdot \mathbf{V})I_3 \mathbf{P} = (\mathbf{V}\ell^t - (\ell \cdot \mathbf{V})I_3)\mathbf{P} = M \cdot \mathbf{P}.$$

□

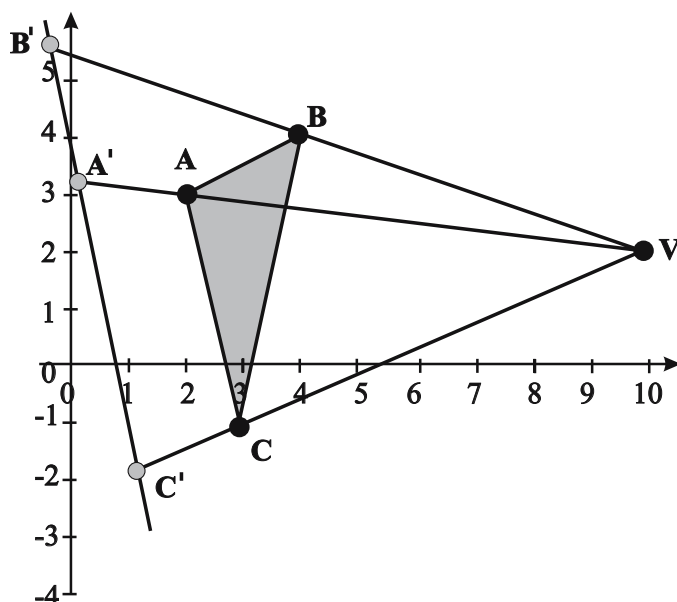


Figura 4.3: Proiecția perspectivă în plan

Exemplul 4.1. Vrem să proiectăm triunghiul de vârfuri $A(2, 3)$, $B(4, 4)$ și $C(3, -1)$ pe dreapta $5x + y - 4 = 0$, din punctul de coordonate $(10, 2)$. Avem $V(10, 2, 1)$, $\ell(5, 1, -4)$, iar $\ell \cdot V = 48$. Astfel, matricea de transformare este

$$M = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} (5 \quad 1 \quad -4) - 48 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & -40 \\ 10 & -46 & -8 \\ 5 & 1 & -52 \end{pmatrix}.$$

Vom avea, prin urmare,

$$\begin{aligned} (A' \quad B' \quad C') &= \begin{pmatrix} 2 & 10 & -40 \\ 10 & -46 & -8 \\ 5 & 1 & -52 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 8 & -44 \\ -126 & -152 & 68 \\ -39 & -28 & -38 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4.3.2 Proiecția pe un plan

Proiecția pe un plan este analoagă proiecției pe o dreaptă. Astfel, se alege un punct \mathbf{V} , *centrul de proiecție sau de perspectivă sau punctul de vedere*, precum și un plan de vector omogen \mathbf{n} , care nu trece prin \mathbf{V} , *planul de vedere sau de proiecție*. Proiecția perspectivă a unui punct \mathbf{P} , diferit de centrul de proiecție, pe planul de proiecție este punctul \mathbf{P}' în care acest plan se intersectează cu dreapta \mathbf{VP} . La fel ca în cazul plan, se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 4.2. *Matricea proiecției perspective dintr-un punct \mathbf{V} (exprimat în coordonate omogene) pe un plan de vector \mathbf{n} este dată de*

$$M = \mathbf{V}\mathbf{n}^t - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})I_4 = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{pmatrix} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{V})I_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} -n_2v_2 - & n_2v_1 & n_3v_1 & n_4v_1 \\ -n_3v_3 - n_4v_4 & & & \\ n_1v_2 & -n_1v_1 - & n_3v_2 & n_4v_2 \\ & -n_3v_3 - n_4v_4 & & \\ n_1v_3 & n_2v_3 & -n_1v_1 - & n_4v_3 \\ & & -n_2v_2 - n_4v_4 & \\ n_1v_4 & n_2v_4 & n_3v_4 & -n_1v_1 \\ & & & -n_2v_2 - n_3v_3 \end{pmatrix}. \quad (4.3.3)$$

Exemplul 4.2. Considerăm poliedrul $ABCDEF$, cu $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 3, 0)$, $D(0, 3, 0)$, $E(1, 2, 1)$ și $F(1, 1, 1)$.

Vrem să proiectăm această prismă pe planul xOy , paralel cu axa Oz . Asta înseamnă că centrul de proiecție este punctul la infinit de-a lungul axei Oz , adică $\mathbf{V}(0, 0, 1, 0)$, iar vectorul planului este $\mathbf{n}(0, 0, 1, 0)$. Matricea de proiecție este, atunci,

$$M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare, matricea coordonatelor omogene ale proiecției vârfurilor poliedrului va

fi

$$\begin{aligned}
 (A' \ B' \ C' \ D' \ E' \ F') &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Astfel, în coordonate carteziane, imaginile vor fi $A'(0, 0, 0)$, $B'(2, 0, 0)$, $C'(2, 3, 0)$, $D'(0, 3, 0)$, $E'(1, 2, 0)$ și $F'(1, 1, 0)$.

Proiectăm, din nou, același poliedru, dar, de data aceasta, facem o proiecție centrală, din punctul de coordonate carteziane $(1, 5, 3)$, pe același plan xOy . Acum, în coordonate omogene, centrul de proiecție este punctul $\mathbf{V}(1, 5, 3, 1)$, în timp ce vectorul omogen asociat planului de proiecție este, în continuare, $\mathbf{n}(0, 0, 1, 0)$.

Matricea de proiecție este, acum,

$$M = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 0 \ 1 \ 0) - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Astfel, matricea coordonatelor omogene vârfurilor proiecției poliedrului va fi

$$\begin{aligned}
 (A'' \ B'' \ C'' \ D'' \ E'' \ F'') &= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -6 & -6 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -9 & -9 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & -3 & -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

În coordonate carteziane, coordonatele vârfurilor sunt: $A''(0, 0, 0)$, $B''(2, 0, 0)$, $C''(2, 3, 0)$, $D''(0, 3, 0)$, $E''(1, 0.5, 0)$ și $F''(1, -1, 0)$.

4.4 Clasificarea proiecțiilor paralele

4.4.1 Proiecții ortografice

O *proiecție ortografică* (sau ortogonală) este o proiecție paralelă în care planul de proiecție este perpendicular pe direcția de proiecție. Dacă vectorul omogen al planului este $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3, n_4)$, atunci direcția de proiecție este descrisă de punctul de la infinit $\mathbf{V}(-n_1, -n_2, -n_3, 0)$. Înlocuind în formula generală pentru proiecția paralelă, obținem matricea unei proiecții ortografice sub forma

$$M = \begin{pmatrix} n_2^2 + n_3^2 & -n_1n_2 & -n_1n_3 & -n_4n_1 \\ -n_1n_2 & n_1^2 + n_3^2 & -n_2n_3 & -n_2n_4 \\ -n_1n_3 & -n_2n_3 & n_1^2 + n_2^2 & -n_4n_3 \\ 0 & 0 & 0 & n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 \end{pmatrix}. \quad (4.4.1)$$

În particular, matricea proiecției pe planul xOy este dată de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Să presupunem că se alege \mathbf{n} astfel încât să avem $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ (adică astfel încât vectorul normal la planul de proiecție să fie un versor). Se numește *factor de contracție al proiecției în direcția uneia dintre axele de coordonate* raportul dintre lungimea proiecției unui segment paralel cu acea axă și lungimea reală a segmentului. Se poate arăta că factorii de contracție în direcțiile axelor Ox , Oy și Oz sunt egali cu $\sqrt{n_2^2 + n_3^2}$, $\sqrt{n_1^2 + n_3^2}$, respectiv $\sqrt{n_1^2 + n_2^2}$. Mai mult, doi factori de contracție sunt egali dacă și numai dacă componentele lui \mathbf{n} pe axele respective sunt egale în modul.

Proiecții ortografice multiple (multiview)

Proiecțiile multiple (multiview) se folosesc în inginerie pentru a reprezenta obiecte alcătuite din fațete poligonale. De regulă, o reprezentare multiview a unui obiect include 6 proiecții ortogonale pe planele de coordonate: din față, din spate, din stânga, din dreapta, de sus și de jos. Considerăm, de exemplu, poliedrul din figura 4.4

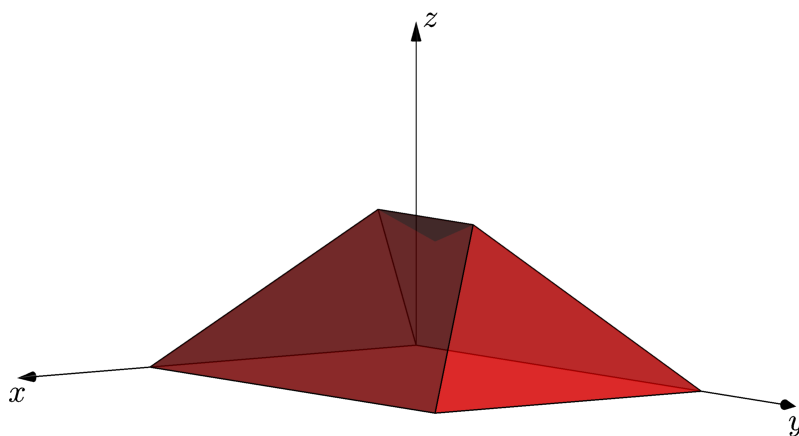


Figura 4.4: Exemplu de figură poliedrală

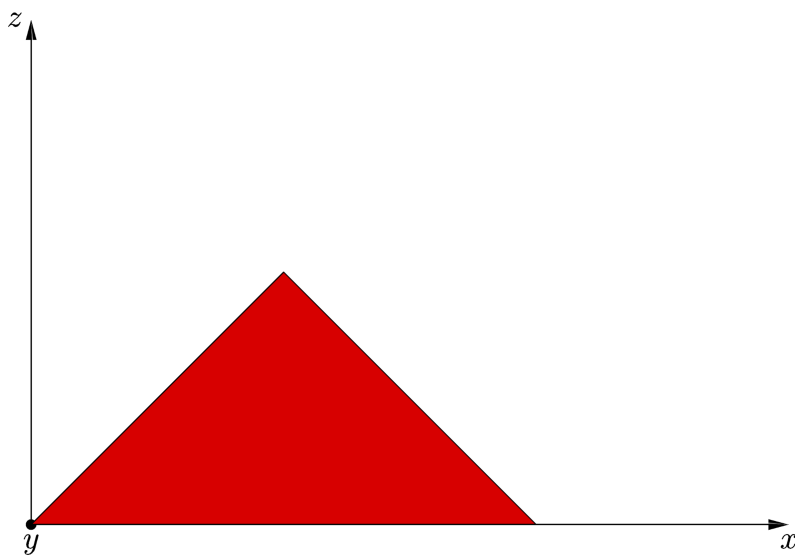


Figura 4.5: Vedere din față

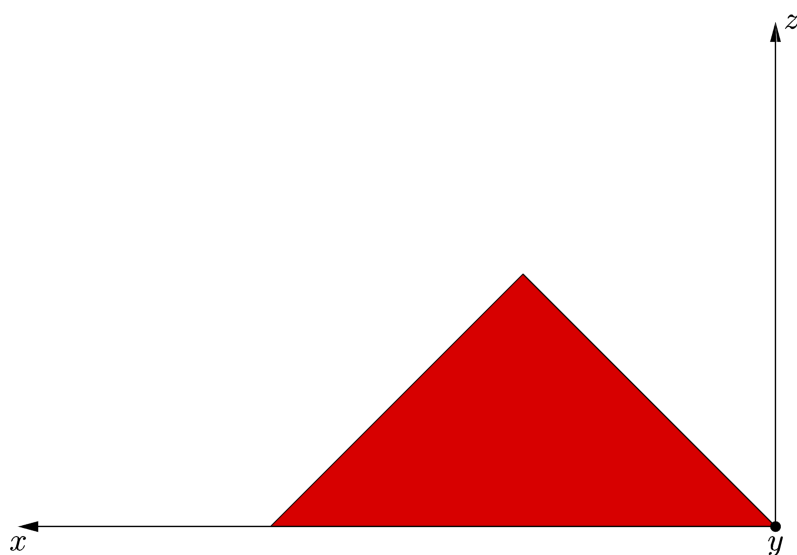


Figura 4.6: Vedere din spate

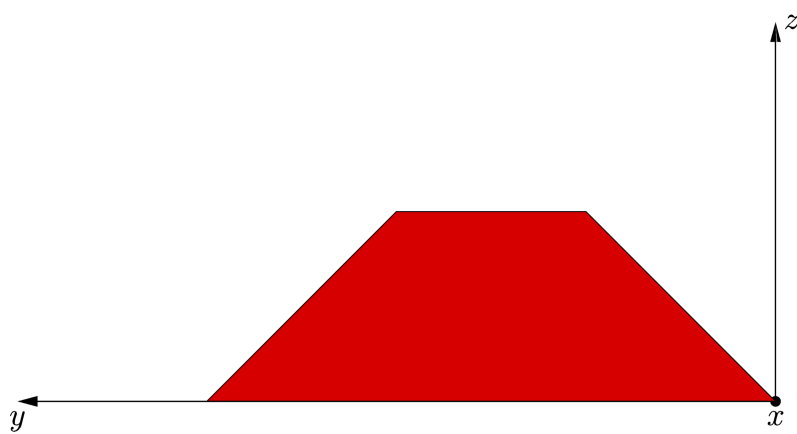


Figura 4.7: Vedere din stânga

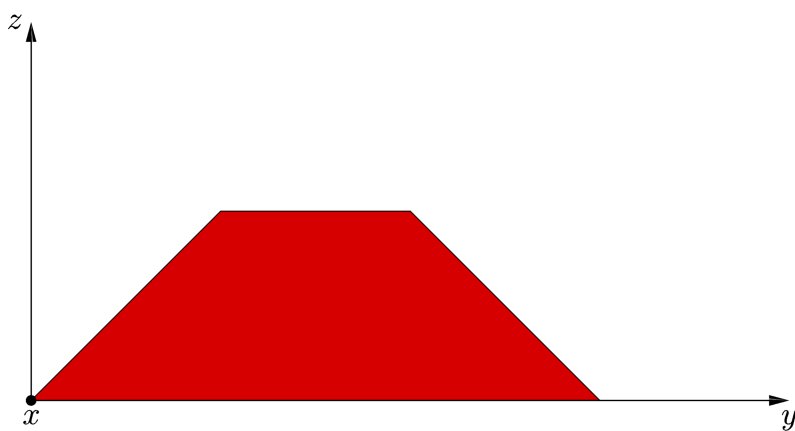


Figura 4.8: Vedere din dreapta

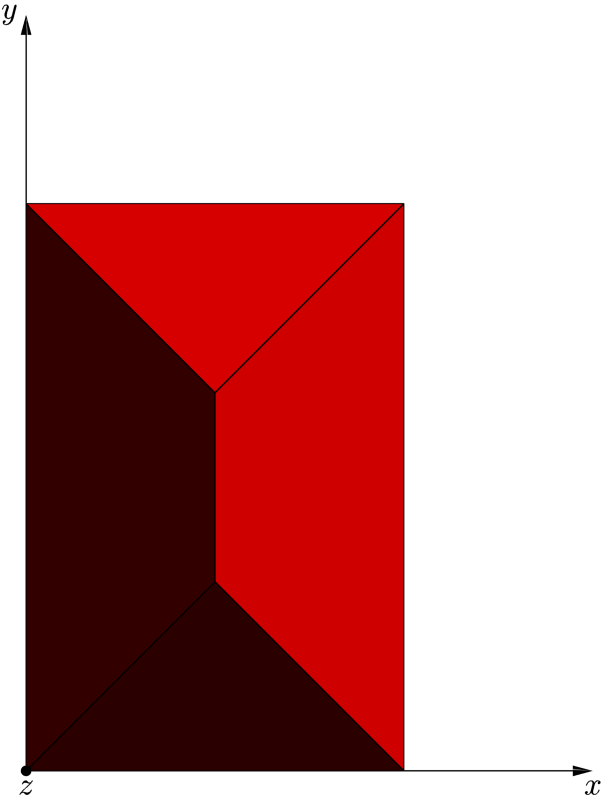


Figura 4.9: Vedere de sus

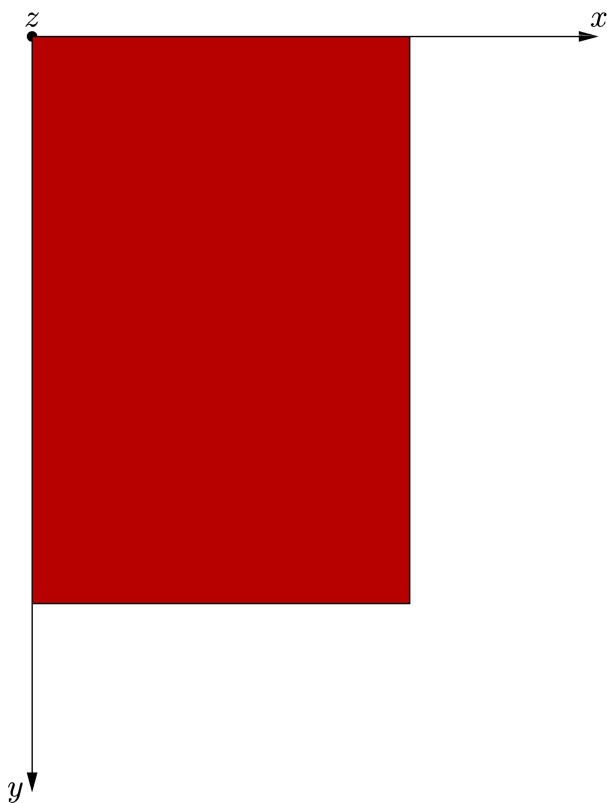


Figura 4.10: Vedere de jos

Proiecții axonometrice

Spre deosebire de proiecțiile multiple, care captează aspectul câte unei fațete plane a obiectului, proiecțiile axonometrice au scopul de a oferi într-o singură reprezentare o imagine cât mai sugestivă a obiectului tridimensional. O proiecție axonometrică este, în esența ei, o proiecție ortogonală după o direcție care nu coincide cu direcția nici uneia dintre axe.

Proiecțiile axonometrice se clasifică după factorii de contracție de-a lungul axelor. Astfel, avem:

- *proiecții trimetrice*, dacă toți cei trei factori de contracție sunt diferiți, ceea ce înseamnă că $|n_1|$, $|n_2|$ și $|n_3|$ sunt trei numere diferite două câte două.

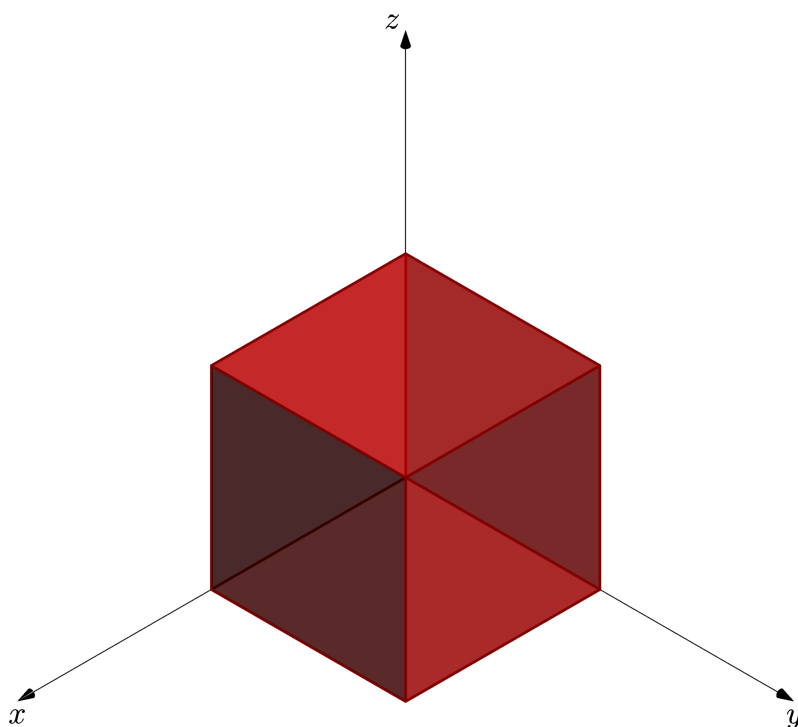


Figura 4.11: Proiecție izometrică a cubului unitate

- *proiecții dimetrice* dacă doar una dintre egalitățile $|n_1| = |n_2|$, $|n_2| = |n_3|$ și $|n_1| = |n_3|$ are loc.
- *proiecții izometrice*, dacă toți cei trei factori de contracție sunt egali: $|n_1| = |n_2| = |n_3|$.

4.4.2 Proiecții oblice

Proiecțiile oblice sunt acele proiecții pentru care direcția de proiecție nu este perpendiculară pe planul de proiecție. Avantajul acestui tip de proiecție este acela că reușește mai bine să redea impresia de adâncime a obiectului. În cazul acestor proiecții, segmentele paralele cu planul de proiecție își păstrează lungimea nemodificată. Printre proiecțiile oblice sunt două care sunt foarte des utilizate și de care ne vom ocupa în continuare.

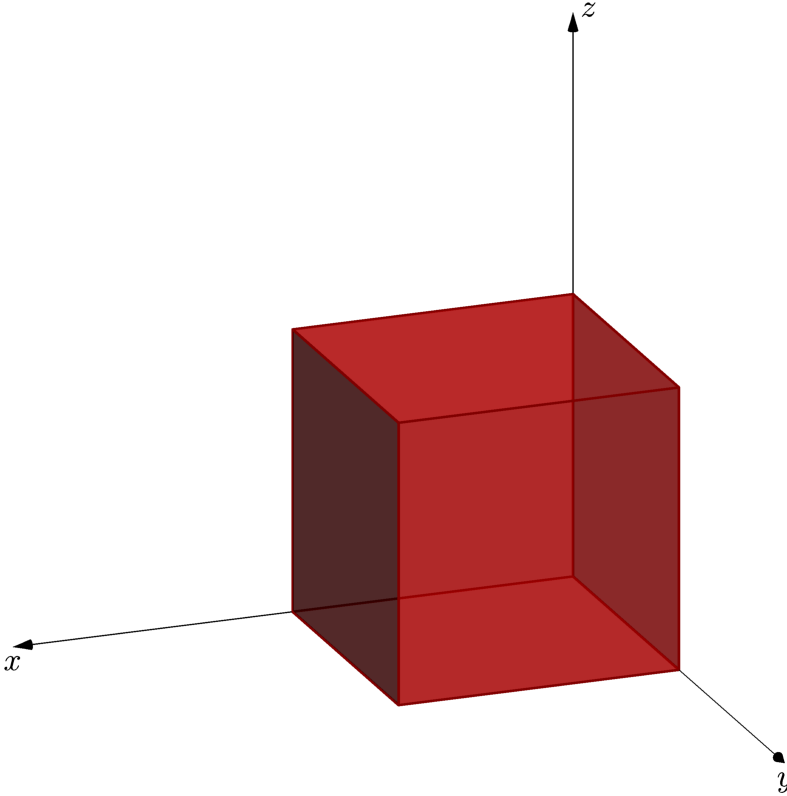


Figura 4.12: Proiecție dimetrică a cubului unitate

Proiecția cavalier (cavalier)

În cazul acestei proiecții, folosită, inițial, la fortificațiile militare, unghiul format de direcția de proiecție și planul de proiecție este egal cu $\pi/4$. Aici și segmentele perpendiculare pe planul de proiecție își păstrează lungimea, ceea ce face ca obiectul să pară mai gros decât este în realitate.

Unghiul dintre vectorul director al direcției de proiecție, (v_1, v_2, v_3) și vectorul normal la plan este egal tot cu $\pi/4$. Pe de altă parte, acest unghi θ satisface relația

$$(v_1, v_2, v_3) \cdot (n_1, n_2, n_3) = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \cos \theta,$$

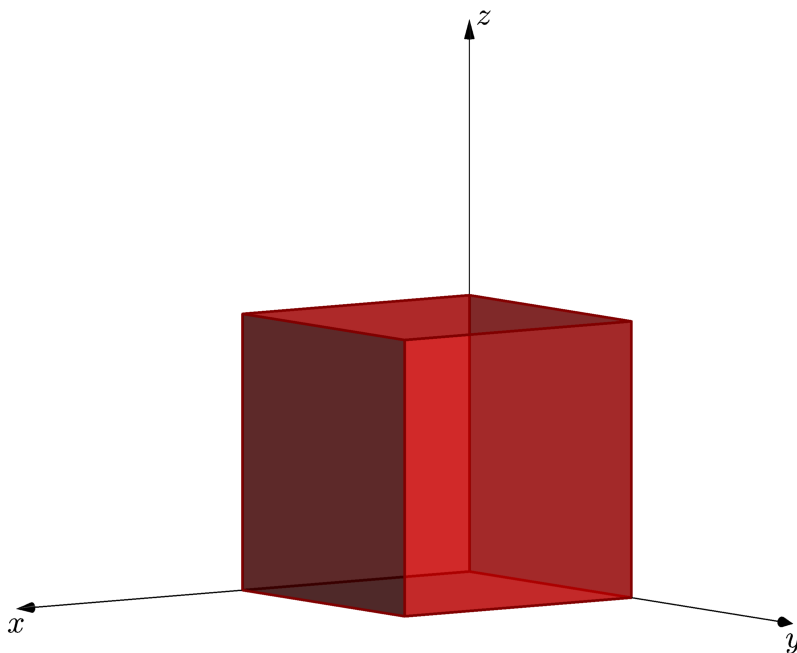


Figura 4.13: Proiecție trimetrică a cubului unitate

deci, în cazul proiecției cavalier, avem

$$v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}. \quad (4.4.2)$$

Exemplul 4.3. Considerăm un exemplu de proiecție cavalier pe planul xOy . Vectorul omogen asociat planului este $\mathbf{n}(0, 0, 1, 0)$, ceea ce înseamnă că relația (4.4.2) se reduce la

$$v_3^2 = v_1^2 + v_2^2.$$

E ușor să găsim un triplet de numere care verifică această ecuație, de exemplu $(3, 4, 5)$. Atunci matricea transformării va fi

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 0 \ 1 \ 0) - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

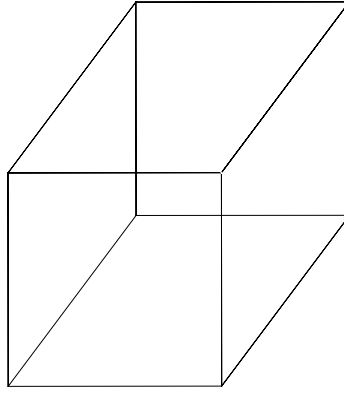


Figura 4.14: Proiecție cavalier

Proiecția cabinet

După cum am spus, proiecția cavalier are neajunsul că mărește prea tare grosimea. O soluție mai bună, din anumite puncte de vedere, este *proiecția cabinet*, folosită destul de mult în industria mobilei (de unde numele). Această proiecție oblică este aleasă astfel încât factorul de contracție pentru segmentele perpendiculare pe planul de proiecție să fie egal cu $1/2$. Prin urmare, tangenta unghiului format de direcția de proiecție cu planul de proiecție trebuie să fie $\tan \phi = 2$, prin urmare

$$\sin \phi = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \phi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Unghiul dintre direcția de proiecție și normala la planul de proiecție este

$$\theta = \frac{\pi}{2} \mp \phi,$$

deci

$$\cos \theta = \pm \sin \phi = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Un calcul similar cu cel din cazul proiecției cavalier ne conduce la condiția

$$v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}. \quad (4.4.3)$$

Exemplul 4.4. Vom determina, și de această dată, matricea proiecției cabinet pe planul xOy . Ecuația (4.15) devine $v_3^2 = 4(v_1^2 + v_2^2)$ și se observă că o soluție este $(3, 4, 10)$. Atunci matricea proiecției va fi

$$M = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 0 \ 1 \ 0) - 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

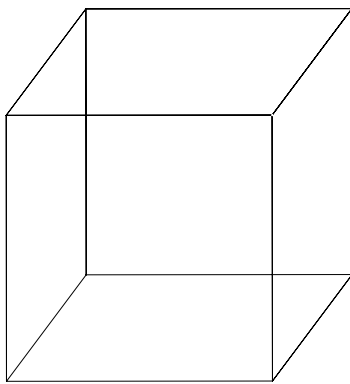


Figura 4.15: Proiecție cabinet

4.4.3 Clasificarea proiecțiilor perspective

Proiecțiile perspective se deosebesc prin numărul *punctelor de fugă* (*vanishing points*) în care se întâlnesc, în planul de proiecție, imagini ale unor drepte care sunt paralele în obiectul tridimensional care se proiectează. Această clasificare se bazează pe următoarea teoremă:

- Teorema 4.3.**
1. *Proiecțiile paralele aplică drepte paralele în spațiu în drepte paralele în planul de proiecție.*
 2. *Proiecțiile perspective aplică linii paralele în spațiu în linii paralele în planul de proiecție dacă și numai dacă liniile paralele din spațiu sunt paralele cu planul de proiecție.*

3. *O proiecție care aplică puncte de la infinit în trei sau mai multe direcții liniar independente în puncte de la infinit este o proiecție paralelă.*

Consecința 4.1. *Considerăm o proiecție perspectivă pe un plan de vector omogen $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3, n_4)$. Atunci vectorul normal la planul de proiecție, (n_1, n_2, n_3) poate*

1. *să nu fie perpendicular pe nici o axă de coordonate. Atunci fiecare dintre familiile de drepte paralele cu una dintre axele de coordonate se transformă într-o familie de drepte neparalele (perspectivă din trei puncte).*
2. *să fie perpendicular pe doar una dintre axe. Atunci dreptele paralele cu acea axă se transformă în drepte paralele, în timp ce dreptele paralele cu celelalte două axe se transformă în două familii de drepte neparalele (perspectivă din două puncte).*
3. *să fie perpendicular pe două dintre axele de coordonate. Atunci dreptele paralele cu aceste două axe se transformă în drepte paralele, iar dreptele paralele cu axa rămasă se transformă în drepte neparalele (perspectivă dintr-un punct).*

Observații. 1) Remarcăm că o familie de drepte paralele se intersectează, de fapt, într-un punct de la infinit. Prin urmare, imaginile lor printr-o proiecție se intersectează, de asemenea, într-un punct situat la infinit, dacă imaginile sunt paralele, sau un punct obișnuit, dacă imaginile nu sunt paralele. Astfel, pentru fiecare dintre cele trei tipuri de proiecții avem fie trei puncte de intersecție, fie două, fie unul. Acest puncte de intersecție a imaginilor dreptelor paralele se numesc *puncte de fugă*.

2) Vectorul normal la planul de proiecție este perpendicular pe o axă de coordonate dacă și numai dacă planul este paralel cu axa de coordonate respectivă. Atunci dreptele paralele cu acea axă rămân paralele prin proiecție. Dacă vectorul normal la planul de proiecție este perpendicular pe două axe de coordonate, el este, de fapt, paralel cu planul de coordonate care conține cele două axe, iar dreptele paralele cu cele două axe rămân paralele prin proiecție.

3) Punctele de fugă determinate de dreptele paralele cu axele de coordonate se numesc *puncte de fugă principale*. Pot exista și alte puncte de fugă, determinate de familii de drepte paralele care nu sunt paralele cu una dintre axele de coordonate.

4) Punctele de fugă determinate de dreptele paralele cu o anumită direcție se obțin, pur și simplu, aplicând proiecția punctului de la infinit de-a lungul acelei familii de puncte paralele. Dacă ceea ce se obține este tot un punct de la infinit (cu zero pe ultima coordonată) atunci dreptele nu determină un punct de fugă (adică ele rămân paralele prin proiecție). Dacă imaginea punctului este un punct ordinar (ultima

coordonată nu este zero), atunci coordonatele carteziene se obțin împărțind primele trei coordonate la cea de-a patra.

Exemplul 4.5. Considerăm un exemplu de proiecție cu un punct de fugă. Planul de proiecție este planul xOy , iar centrul de proiecție are coordonatele $(-1, 0, 2)$. Atunci avem $\mathbf{n}(0, 0, 1, 0)$ și $\mathbf{V}(-1, 0, 2, 1)$. Atunci matricea de proiecție este

$$M = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (0 \ 0 \ 1 \ 0) - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Imaginea cubului unitate prin această proiecție se poate vedea în figura 4.16.

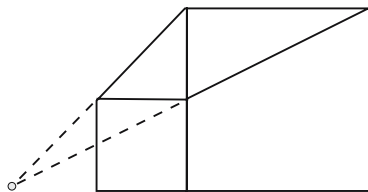


Figura 4.16: Proiecție perspectivă cu un punct de fugă

Punctul de la infinit este punctul de coordonate $(-1, 0, 0)$

Exemplul 4.6. Dăm acum un exemplu de proiecție perspectivă cu două puncte de fugă. Centrul de proiecție este același punct de coordonate $(-1, 0, 2)$, dar planul de proiecție este planul $x - z = 0$. Atunci avem $\mathbf{n}(1, 0, -1, 0)$ și $\mathbf{V}(-1, 0, 2, 1)$, deci matricea de proiecție este

$$M = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 0 \ -1 \ 0) - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Imaginea cubului unitate prin această proiecție se poate vedea în figura 4.17. Punctele de fugă sunt punctele $(2, 0, 2)$ și $(-1, 0, -1)$.

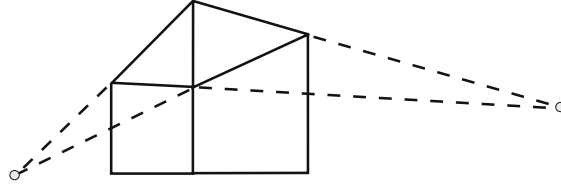


Figura 4.17: Proiecție perspectivă cu două puncte de fugă

Exemplul 4.7. Acesta este un ultim exemplu, de data asta e vorba de o proiecție cu trei puncte de fugă. Centrul de proiecție este același, dar planul este planul de ecuație $x + 2y - z - 3 = 0$. Prin urmare, avem $\mathbf{n}(1, 2, -1, -3)$ și $\mathbf{V}(-1, 0, 2, 1)$, deci matricea de proiecție este

$$M = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad 2 \quad -1 \quad 3) + 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Imaginea cubului unitate prin această proiecție se poate vedea în figura 4.18. Punctele de fugă sunt punctele $(5, 0, 2)$, $(-1, 3, 2)$ și $(-1, 0, -4)$.

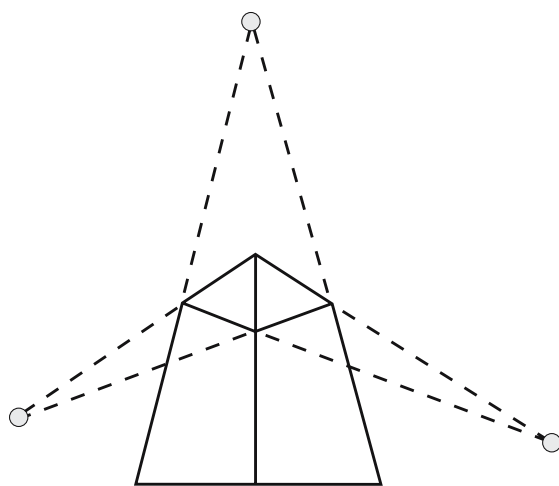


Figura 4.18: Proiecție perspectivă cu trei puncte de fugă