Algebră, anul I Informatică

7 decembrie 2024

1 Obligatorii

Exerciţiul 1 (E3.1.37) *Se consideră submulţimile* $S, T \in \mathbb{R}^3$ *date prin* $S = \left\{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}$ *şi* $T = \left\{[x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3 | x_1 = x_2 = x_3\right\}$. *Să se arate că* $S, T \leq \mathbb{R}^3$ *şi* $S \oplus T = \mathbb{R}^3$.

Soluţie. S subspaţiu $\theta = [0, 0, 0] \in S$ deoarece $0 + 0 + 0 = 0$. Fie

$$\left.\begin{array}{r} x = [x_1, x_2, x_3] \in S,\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ y = [y_1, y_2, y_3] \in S,\ y_1 + y_2 + y_3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow z = x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3]$$

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 \\ &= x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 = 0 \end{aligned}$$

deci $z \in S$. $\alpha x = [\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3] \in S$, deoarece $\alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = \alpha\left(x_1 + x_2 + x_3\right) = 0$

T subspaţiu $\theta = [0, 0, 0] \in S$ deoarece $0 = 0 = 0$. Fie

$$\left.\begin{array}{r} x = [x_1, x_2, x_3] \in T,\ x_1 = x_2 = x_3 \\ y = [y_1, y_2, y_3] \in T,\ y_1 = y_2 = y_3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} z = x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3] \\ x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = x_3 + y_3 \end{array}\right.$$

Dar $z_1 = z_2 = z_3$ şi $z \in T$. $\alpha x = [\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3] \in T$, deoarece $\alpha x_1 = \alpha x_2 = \alpha x_3$.

Fie $x \in S \cap T$, rezultă $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ şi $x_1 = x_2 = x_3$; deci $3x_1 = 3x_2 = 3x_3 = 0$, adică $x = \theta$. Am arătat că $S \cap T = \{\theta\}$. Se observă că $S \oplus T \leq \mathbb{R}^3$. Fie $z = [z_1, z_2, z_3] \in \mathbb{R}^3$. Există $s = [s_1, s_2, s_3] \in S$ şi $t = [t_1, t_2, t_3] \in T$ astfel încât $s + t = z$ şi scrierea este unică. Fie Relaţia $s + t = z$ ne conduce la sistemul

$$\begin{aligned} s_1 + t_1 &= z_1 \\ s_2 + t_2 &= z_2 \\ s_3 + t_3 &= z_3 \\ s_1 + s_2 + s_3 &= 0 \\ t_1 = t_2 = t_3 &= t \end{aligned}$$

Sistemul este echivalent cu

$$\begin{aligned} s_1 + t &= z_1 \\ s_2 + t &= z_2 \\ s_3 + t &= z_3 \\ s_1 + s_2 + s_3 &= 0, \end{aligned}$$

care este compatibil determinat, deoarece

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = -3 \neq 0$$

■

Exerciţiul 2 (E3.1.38) *Se consideră* $S = \{\alpha I_2 \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | \alpha \in \mathbb{R}\}$ *şi* $T = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) | Tr(A) = 0\}$, *unde* $Tr(A)$ *este suma intrărilor de pe diagonala principală a matricii* A. *Să se arate că* $S, T \leq_{\mathbb{R}} M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ *şi* $S \oplus T = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Soluţie. S subspaţiu: $\mathbf{0} \in S$. Fie $A, B \in S$, $\alpha, \in \mathbb{R}$, $A = \alpha I_2$, $B = \beta I_2$, $A + B = (\alpha + \beta) I_2 \in S$, $\gamma A = \gamma (\alpha I_2) = (\gamma\alpha) I_2 \in S$.

T subspaţiu: $Tr(\mathbf{0}) = Tr\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0+0$, $\mathbf{0} \in T$, $A \in T$, $Tr(A) = a_{11} + a_{22} = 0$, $B \in T$, $Tr(B) = b_{11} + b_{22} = 0$, $Tr(A + B) = a_{11} + b_{11} + a_{22} + b_{22} = 0$, deci $A + B \in T$. $Tr(\alpha A) = \alpha Tr(A) = 0$.

Fie $A \in S \cap T$. Are loc $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ şi $Tr(A) = 2\alpha = 0$, deci A este matricea nulă 2×2 şi $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$.

Fie $C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Vom arăta că se poate scrie sub forma $C = A + B$, unde $A \in S$ şi $B \in T$. Avem $A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ şi $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & -e \end{bmatrix}$. Relaţia $C = A + B$ este echivalentă cu

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & -e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha + e & f \\ g & \alpha - e \end{bmatrix}.$$

Se ajunge la sistemul :

$$\begin{aligned} \alpha + e &= a \\ f &= b \\ g &= c \\ \alpha - e &= d \end{aligned}$$

cu soluţiile $\left[f = b, g = c, \alpha = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d, e = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d\right]$. Deci

$$A = \begin{bmatrix} \frac{a+d}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+d}{2} \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{bmatrix}.$$

Rezultă că $C \in S+T$, adică $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \subseteq S+T$. Incluziunea inversă are loc deoarece $S \leq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ şi $T \leq M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Deoarece $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$ şi $S+T = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, rezultă că $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = S \oplus T$. ■

Exerciţiul 3 (E3.1.39) *Se consideră o mulţime oarecare A şi*

$$\mathbb{R}^A = \{f : A \to \mathbb{R} | f \text{ este o funcţie}\}.$$

Să se arate că $\mathbb{R}^A$ este un $\mathbb{R}$-spaţiu vectorial în raport cu adunarea vectorilor (a funcţiilor):

$$+ : \mathbb{R}^A \times \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^A, (f+g)(x) = f(x) + g(x), \text{ pentru orice } x \in A,$$

şi cu înmulţirea cu scalari

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^A \to \mathbb{R}^A, (\alpha f)(x) = f(x), \text{ pentru orice } x \in A.$$

Soluţie. $\left(\mathbb{R}^A, +\right)$ grup abelian, comutativitatea şi asociativitatea rezultă din comutativitatea şi asociativitatea adunării pe $\mathbb{R}$, elementul neutru este funcţia nulă $0 : A \to \mathbb{R}$, $0(x) = 0$, simetricul lui f este funcţia $-f$. Proprietăţile înmulţirii cu scalari: din distributivitatea în $\mathbb{R}$ pentru $f, g : A \to R$ şi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pentru orice $x \in A$ avem

$$\begin{aligned}\alpha\left(f+g\right)(x) &= \alpha\left(f(x)+g(x)\right) = \alpha f(x) + \alpha g(x)\\ &= (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)\end{aligned}$$

adică $\alpha\left(f+g\right) = \alpha f + \alpha g$.

$$(\alpha+\beta) f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x) = (\alpha f)(x) + (\beta f)(x),$$

adică $(\alpha+\beta) f = \alpha f + \beta f$.

$$(\alpha\beta) f(x) = \alpha\beta f(x) = \alpha\left(\beta f(x)\right) = \alpha(\beta f)(x),$$

adică $(\alpha\beta) f = \alpha(\beta f)$, şi în fine

$$1f(x) = f(x).$$

■

2 Opţionale

Exerciţiul 4 (E3.1.40) *Se consideră submulţimile $S = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f \text{ este pară}\right\}$ şi $T = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} | f \text{ este impară}\right\}$ în $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Să se arate că $S, T \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ şi $S \oplus T = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.*

Soluţie. Deoarece suma a două funcţii pare (respectiv impare) este pară (respectiv impară) şi înmulţirea cu o constantă nu modifică paritatea (respectiv imparitatea) rezultă că S şi T sunt subspaţii ale lui $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Orice funcţie se poate descompune într-o componentă pară şi una impară, astfel

$$f_e(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}, \qquad f_o(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

$S+T=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Mai rămâne de arătat că $S\cap T = \{0 : A \to \mathbb{R}, 0(x) = 0\}$. Întradevăr, dacă $f \in S\cap T$, atunci $f(-x) = f(x)$ şi $f(-x) = -f(x)$, de unde rezultă că $f(x) = -f(x)$, adică $f(x) = 0$, pentru orice $x \in A$. ■

Exerciţiul 5 (E3.1.41) *Se consideră un număr prim $p \in \mathbb{N}$. Să se arate că în orice $\mathbb{Z}_p$-spaţiu vectorial V este valabilă egalitatea $0 = x + x + \cdots + x$ (de p ori); pentru orice $x \in V$. Există o structură de $\mathbb{Z}_p$-spaţiu vectorial pe grupul abelian $(\mathbb{Z},+)$?*

Soluţie. $\mathbb{Z}_p$-spaţiu vectorial peste el însuşi dacă p este prim.

$$\left(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{p \ ori}\right) x = 0x = \underbrace{x+x+\cdots+x}_{p \ ori}$$

Nu există nici o structură de $\mathbb{Z}_p$-spaţiu vectorial pe grupul abelian $(\mathbb{Z},+)$. Considerăm întâi cazul $p=2$. Avem $\widehat{0}x = 0$, $\widehat{1}x = x$. Luăm $\alpha = \widehat{1}$, $\beta = \widehat{1}$ şi $x \neq 0$. Dacă $\mathbb{Z}$ este spaţiu liniar peste $\mathbb{Z}_p$, $(\alpha+\beta)\,x = \left(\widehat{1}+\widehat{1}\right) x = \widehat{0}x = 0 = \widehat{1}x + \widehat{1}x = 2x$, contradicţie.

Dacă $p \neq 2$, fie 2^{-1} inversul lui 2, fie $y = 2^{-1}\cdot 1$

$$1 = 2\left(2^{-1}\cdot 1\right) = 2^{-1}\cdot 1 + 2^{-1}\cdot 1 = 2y,$$

contradicţie. ■