# Algebră, anul I Informatică

8 octombrie 2024

## 1 Obligatorii

**Exerciţiul 1 (E1.3.48)** *Fie $A$ şi $B$ două mulţimi finite cu $|A| = n$ şi $|B| = m$. Să se determine $\left|B^A\right|$. Indicaţie: Se arată prin inducţie după $n$ că $\left|B^A\right| = m^n$.*

**Exerciţiul 2 (E1.3.49)** *Fie $A$ şi $B$ două mulţimi finite cu $|A| = n$ şi $|B| = m$. Să se determine numărul tuturor funcţiilor injective de la $A$ la $B$.* Indicaţie*: Numărul căutat este $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$.*

**Exerciţiul 3 (E1.3.50)** *Fie $A$ o mulţime finită cu $|A| = n$. Să se determine numărul tuturor funcţiilor bijective $f : A \to A$ (adică numărul tuturor permutărilor lui $A$).*

**Exerciţiul 4 (E1.3.51)** *Fie $B$ o mulţime finită cu $|B| = m$. Să se determine numărul tuturor submulţimilor lui $B$ cu $n$ elemente.* Indicaţie*: Numărul căutat este $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$.*

**Exerciţiul 5 (E1.3.52)** *Să se arate că*

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} = 2^m.$$

## 2 Opţionale

**Exerciţiul 6 (E1.3.53, Principiul includerii şi al excluderii)** *Fie $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$ mulţimi finite, unde $n \in \mathbb{N}$. Atunci*

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = &\sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &- \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| = &\sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cup A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cup A_j \cup A_k| \\ &- \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n|\end{aligned} \tag{2}$$

**Soluţie.** Demonstrăm (1) prin inducţie completă. Pentru $n = 1$, formula se verifică trivial. Pentru $n = 2$ avem

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \tag{3}$$

Dacă adunăm $|A_1|+|A_2|$ am adunat de două ori cardinalul intersecţiei şi pentru a obţine rezultatul corect trebuie să-l scădem.

Presupunem relaţia adevărată pentru $n$. Dar $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1} = (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}$ şi folosind (3) avem

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| = |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| + |A_{n+1}| - |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1}|\,.$$

Dar, $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) \cap A_{n+1} = \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})$. Aplicând ipoteza inducţiei obţinem

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup A_{n+1}| = \sum_{1\le i\le n} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap A_{n+1})\right|\end{aligned}$$

din care regrupând termenii se obţine

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n+1} |A_i| - \sum_{1\le 1<j\le n+1} |A_i \cap A_j| + + \sum_{1\le i<j<k\le n+1} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ - \cdots + (-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right|.\end{aligned}$$

Formula (1) se poate scrie mai compact sub forma:

**Propoziţia 7** *Fie $A_i$, $(i \in Q = \{1, 2, \ldots, q\})$ submulţimi ale lui unei mulţimi $X$. Are loc relaţia:*

$$\left|\bigcup_{i\in Q} A_i\right| = \sum_{K\subseteq Q} (-1)^{|K|+1} \left|\bigcap_{i\in K} A_i\right|. \tag{4}$$

Demonstraţia lui (2) se obţine din demonstraţia lui (1), în care schimbăm peste tot reuniunea cu intersecţia şi intersecţia cu reuniunea.

Altă demonstraţie:

$$\begin{aligned}
\left|\bigcap_{i\in Q} A_i\right| = \left|\overline{\bigcup_{i\in Q}\overline{A_i}}\right| &= |X| - \left|\bigcup_{i\in Q}\overline{A_i}\right| \\
&= |X| - \sum_{K\subseteq Q} (-1)^{|K|+1}\left|\bigcap_{i\in K}\overline{A_i}\right| \\
&= |X| - \sum_{K\subseteq Q} (-1)^{|K|+1}\left|\overline{\bigcup_{i\in K} A_i}\right| \\
&= |X| - \sum_{K\subseteq Q} (-1)^{|K|+1}\left(|X| - \left|\bigcup_{i\in K} A_i\right|\right) \\
&= \sum_{K\subseteq Q} (-1)^{|K|+1}\left(\left|\bigcup_{i\in K} A_i\right|\right) + |X|\left(1 - \binom{q}{1} + \binom{q}{2} - \cdots + \binom{q}{q}\right) \\
&= \sum_{K\subseteq Q} (-1)^{|K|+1}\left(\left|\bigcup_{i\in K} A_i\right|\right).
\end{aligned}$$

deoarece coeficientul lui $|X|$ este egal cu $(1-1)^q = 0$ şi ţinând seama de propoziţia 7. Am folosit de asemenea faptul că o submulţime cu $k$ elemente a unei mulţimi cu $q$ elemente poate fi aleasă în $\binom{k}{k}$ moduri distincte. ■

**Exerciţiul 8 (E1.3.54)** *Fie $X$ şi $Y$ două mulţimi finite cu $|X| = n$ şi $|Y| = m$. Să se determine numărul tuturor funcţiilor surjective $f : X \to Y$.*

**Soluţie.** Să considerăm mulţimile finite $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ şi $Y = \{y_1, y_2, \ldots, ym\}$ cu $n \geq m$. Pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ să notăm prin $A_i$ mulţimea funcţiilor de la $A$ tn $B$ pentru care $y_i$ nu este imaginea nici unui element din $X$, adică

$$A_i = \{f : X \to Y | y_i \notin f(X)\}.$$

Mulţimea funcţiilor surjective de la $X$ pe $Y$ coincide cu mulţimea funcţiilor definite pe $X$ cu valori în $Y$ care nu aparţin nici uneia dintre mulţimile $A_1$. Deci $s_{m,n} = m^n - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m|$ deoarece numărul total de funcţii de la $X$ la $Y$ este egal cu $m^n$. Deci

$$\begin{aligned}
s_{n,m} = m^n - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{1\leq i<j\leq m} |A_i \cap A_j| - \sum_{1\leq i<j<k\leq m} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\
- \cdots + (-1)^m \left|\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right|.
\end{aligned}$$

Dar $A_i$ este de fapt mulţimea funcţiilor definite pe $X$ şi cu valori în $Y\backslash\{y_i\}$, deci $|A_i| = (m-1)^n$; $A_i \cap A_j$ este mulţimea funcţiilor definite pe X cu valori în $Y\backslash\{y_1, y_2\}$ şi deci $|A_i \cap A_j| = (m-2)^n$ şi în general

$$|A_{i1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i\ell}| = (m-\ell)^n\,,$$

unde $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell \leq m$. Se observă că $\bigcap_{i=1}^{m} A_i = \emptyset$, deoarece $f(X)$ conţine cel puţin un element din $Y$, pentru orice funcţie $f : X \to Y$. Dar putem elimina $\ell$ elemente din $Y$ în $\binom{m}{l}$ moduri, deci fiecare sumă

$$\sum_{\substack{K \subseteq \{1,2,\ldots,m\} \\ |K|=\ell}} \left| \bigcap_{i \in K} A_i \right|$$

conţine $\binom{m}{l}$ termeni, fiecare egal cu $(m-\ell)^n$. În concluzie

$$s_{n,m} = m^n - \binom{m}{1}(m-1)^n + \binom{n}{2}(m-2)^n - \cdots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}.$$

În cazul în care $m = n$, $s_{n,n}$ reprezintă numărul funcţiilor bijective $f : X \to Y$ cu $|X| = |Y| = n$, deci $s_{n,n} = n!$ şi se obţine identitatea

$$n! = n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}.$$

■