Algebră, anul I Informatică

22 octombrie 2024

1 Obligatorii

Exerciţiul 1 (E1.4.37) *Să se determine toate relaţiile de echivalenţă care se pot defini pe* $A = \{a, b, c\}$.

Soluţie. Există o bijecţie între mulţime relaţiilor de echivalenţă şi mulţime partiţiilor. Vom scrie partiţiile şi apoi relaţiile corespunzătoare. Avem următoarele 5 partiţii şi relaţiile corespunzătoare

1. $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ cu $r_1 = (A, A, \{(a, a), (b, b), (c, c)\}) = \delta_A$
2. $\{\{a\}, \{b, c\}\}$ cu $r_2 = (A, A, \{(a, a), (b, b), (c, c), (b, c), (c, b)\})$
3. $\{\{b\}, \{a, c\}\}$ cu $r_3 = (A, A, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\})$
4. $\{\{c\}, \{a, b\}\}$ cu $r_4 = (A, A, \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, a)\})$
5. $\{\{a, b, c\}\}$ cu $r_5 = (A, A, \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}) = A \times A$

■

Exerciţiul 2 (E1.4.38) *Să se arate că următoarele relaţii sunt echivalenţe şi să se calculeze respectivele mulţimi factor:*

(1) $(\mathbb{C}, \mathbb{C}, \equiv)$ *dată prin* $x \equiv y$ *ddacă* $|x| = |y|$.

(2) $(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*, \equiv)$ *dată prin* $x \equiv y$ *ddacă* $\arg(x) = \arg(y)$.

Soluţie.

(1a) Reflexivitate, $x \in \mathbb{C}$, $|x| = |x| \Longrightarrow x \equiv y$

(1b) Simetrie $x, y \in \mathbb{C}, x \equiv y \Longleftrightarrow |x| = |y| \Longrightarrow |y| = |x| \Longrightarrow y \equiv x$

(1c) Tranzitivitate $x, y, z \in \mathbb{C}, x \equiv y \wedge y \equiv z \Longrightarrow |x| = |y| \wedge |y| = |z| \Longrightarrow |x| = |z| \Longleftrightarrow x \equiv z$

Interpretare geometrică: Clasa de echivalenţă a lui x este $[x] = \{y \in \mathbb{C} : |x| = |y|\}$, adică toate punctele situate pe cercul cu centrul în origine şi de rază $|x|$

Argumentul nu este definit pentru $x = 0$.

(2a) Reflexivitate $x \in \mathbb{C}^*, \arg(x) = \arg(x) \Longrightarrow x \equiv y$

(2b) Simetrie $x, y \in \mathbb{C}, x \equiv y \Longleftrightarrow \arg(x) = \arg(y) \Longrightarrow \arg(y) = \arg(x) \Longrightarrow y \equiv x$

(2c) Tranzitivitate $x \equiv y \wedge y \equiv z \Longrightarrow \arg(x) = \arg(y) \wedge \arg(y) = \arg(z) \Longrightarrow \arg(x) = \arg(z) \Longleftrightarrow x \equiv z$

Interpretare geometrică: Clasa de echivalenţă a lui x este $[x] = \{y \in \mathbb{C}^* : \arg(x) = \arg(y)\}$, adică punctele situate pe semidreapta ce porneşte din origine şi face cu axa Ox unghiul $\arg(x) \in [0, 2\pi)$. ■

2 Opţionale

Exerciţiul 3 (E1.4.33) *Fie $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ două funcţii. Să se arate că funcţia compusă $g \circ f$ este acelaşi lucru ca şi relaţia compusă $g \circ f$.*

Soluţie. Fie $f = (A, B, G_f)$, $g = (B, C, G_g)$; h=$g \circ f : A \to C$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. Avem $g \circ f = (A, C, G_{g \circ f})$, unde $G_h = \{(x, g(f(x)))|x \in A\}$. Cele două relaţii au acelaşi domeniu şi codomeniu. Vom arăta egalitatea graficelor. Pentru graficul relaţiei compuse, $G_{g \circ f} = \{(x, z))|x \in A \exists y \in B\ (x, y) \in G_f \wedge (y, z) \in G_g\}$, dar $(x, y) \in G_f \Longrightarrow y = f(x)$ şi $(y, z) \in G_g \Longrightarrow z = f(g(y))$, adică $(x, z) \in G_{g \circ f} \Longrightarrow (x, z) \in G_{h.}$. Reciproc $(x, g(f(x))) \in G_h \Longrightarrow (x, f(x)) \in G_f \wedge (f(x), g(f(x))) \in G_g$, punând $y = f(x)$ şi $z = g(f(x))$, rezultă $(x, g(f(x))) \in G_{g \circ f}$. ■

Exerciţiul 4 (1.4.34) *Fie $r = (A, B, R)$ o relaţie şi notăm cu δ_A şi δ_B relaţiile de egalitate pe A, respectiv B.*

(1) Să se arate că $r \circ \delta_A = r = \delta_B \circ r$, adică relaţia de egalitate acţionează ca element neutru pentru compunerea relaţiilor.

(2) Să se arate că relaţia inversă $r^{-1} = (B, A, R^{-1})$ nu este în mod necesar inversa în raport cu compunerea relaţiilor, adică să se construiască un exemplu de relaţie r aşa încît $r^{-1} \circ r \neq \delta_A$.

Soluţie.

(1) Fie $r = (A, B, G_r)$, $r \circ \delta_A : A \to B$, fie $x \in A$, $y \in B$, $(x, x) \in G_{\delta_A}$, $(x, y) \in G_r \Longleftrightarrow (x, y) \in G_{r \circ \delta_A}$. $(x, y) \in G_r, (y, y) \in G_{\delta_B} \Longleftrightarrow (x, y) \in G_{\delta_B \circ r}$.

(2) Fie $A = \{1, 2\}$, $r = (A, A, \{(1, 1), (2, 1)\})$, $r^{-1} = (A, A, \{(1, 1), (1, 2)\})$, $r^{-1} \circ r = (A, A, \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}) \neq \delta_A$.

■

Exerciţiul 5 (E1.4.35) *Fie $r = (A, B, R)$ şi $s = (B, C, S)$ două relaţii, unde A, B şi C sunt mulţimi finite cu $|A| = m$, $|B| = n$ şi $|C| = p$. Se ordonează elementele din A, B şi C şi se consideră matricile $M(r) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\{0,1\})$ şi $M(s) \in \mathcal{M}_{n\times p}(\{0,1\})$. Să se determine $M(r^{-1})$ şi $M(s \circ r)$ în funcţie de $M(r)$ şi $M(s)$. Să se scrie un algoritm care citeşte $M(r)$ şi $M(s)$ şi calculează $M(r^{-1})$ şi $M(s \circ r)$*

Exerciţiul 6 (E1.4.45) *Să se găsească numărul tuturor relaţiilor de echivalenţă care se pot defini pe o mulţime A cu n elemente.*

Soluţie. În combinatorică numărul lui Bell B_n dă numărul de partiţii al unei mulţimi cu n elemente. Se observă că $B_0 = 1$, deoarece avem o singură partţie a mulţimii vide. La fel, $B_1 = 1$. Primele numere ale lui Bell sunt 1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, ... Datorită bijecţiei între partiţii şi echivalenţe dă şi numărul de relaţii de echivalenţă care pot fi definite pe o mulţime de n elemente. Numerele lui Bell satisfac relaţia de recurenţă

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Se poate justifica explicând că, pornind de la o partiţie arbitrară a unei mulţimi cu $n+1$ elemente, eliminând mulţimea care conţine primul element rămâne o partiţie a unei mulţimi mai mici de k elemente pentru un k mergând de la 0 la n. Sunt $\binom{n}{k}$ alegeri pentru cele k elemente care rămân după ce o mulţime este eliminată şi B_k moduri de partiţionare. Sau:

Considerăm o partiţie a lui $S = \{1, 2, \ldots, n+1\}$, A_1, ..., A_m. Putem presupune că $n+1$ este în A_1 şi că $|A_1| = k+1$, pentru un k, $0 \le k \le n$. Atunci A_2, ..., A_m formează o partiţie a celor $n-k$ elemente ale lui S rămase, adică, ale lui $S \setminus A_1$. Sunt B_{n-k} partiţii ale acestei mulţimi, deci sunt B_{n-k} partiţii ale lui S în care o parte este mulţimea A_1. Sunt $\binom{n}{k}$ submulţimi de cardinal $k+1$ ce conţin $n+1$, deci numărul total de partiţii ale lui S în care $n+1$ este într-o mulţime cu $k+1$ elemente este $\binom{n}{k} B_{n-k}$. Însumând după toate valorile lui k, se obţine

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k. \end{aligned}$$

Triunghiul lui Bell - pentru calculul practic

1				
1	2			
2	3	5		
5	7	10	15	
15	20	27	37	52

■