Paper exercise:

Group members:

Christopher Schmidt

Student-Id: 2541872

E-Maile: s6cischm@uni-bonn.de

Marc Goedecke

Student-Id: 2567982

E-Maile: s6magoed@uni-bonn.de

1 a) $$\mathcal{F}(g(t) * h(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(u) h(t-u)\, du \right) dt$$

$z = t-u$; $t = z+u$; $dz = 1 \cdot dt$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega z} \cdot h(z)\, dz \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega u} \cdot g(u)\, du \right)$$

$$= H(\omega) \cdot G(\omega)$$

b) $$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}}$$

$$G(\omega) = \mathcal{F}(g(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} g(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t - \frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{t}{\sqrt{2}\sigma} + \frac{i\sigma\omega}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{\sigma^2\omega^2}{2}}\, dt$$

Substitution : $z = \frac{t}{\sqrt{2}\sigma} + \frac{i\sigma\omega}{\sqrt{2}} \cancel{= \frac{t + i\sigma^2\omega}{\sqrt{2}\sigma}}$

$dz = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} dt \iff dz\sqrt{2}\sigma = dt$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} \cdot \sqrt{2}\sigma \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2}\, dz}_{\sqrt{\pi}}$$ gaussian integral

$$= \frac{\sqrt{2}\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}}$$

$$= e^{-\frac{\sigma^2\omega^2}{2}} = e^{-\frac{(\sigma\omega)^2}{2}}$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1{,}5 \\ 0 \\ 1 \\ -0{,}5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & -1 & 0{,}2 \end{pmatrix} \quad \text{is separable.}$$

d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -0{,}2 & -1 & 0{,}3 \\ 2 & -6 & 0{,}1 & -2 & 0{,}6 \\ 4 & -12 & 0{,}8 & 4 & 1{,}2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -0{,}2 & -1 & 0{,}3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ \\ \\ + \end{matrix} \quad \cdot(-4)\,+ \quad \cdot(-2)\,+$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -0{,}2 & -1 & 0{,}3 \\ 0 & -12 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & -24 & 1{,}6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ + \\ \\ \\ \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -0{,}2 & -1 & 0{,}3 \\ 0 & -12 & 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{Rang}(A) = 3 \neq 1 \Rightarrow$ ~~not~~ A is not separable

e)

initialization

∞	∞	∞	0	0	∞	∞	∞
∞	∞	0	0	0	0	∞	∞
∞	0	0	∞	∞	0	0	∞
0	0	∞	∞	∞	∞	0	0
∞	0	∞	∞	∞	∞	0	∞
∞	0	∞	∞	∞	∞	0	∞
∞	0	∞	∞	∞	∞	0	∞
∞	0	∞	∞	∞	∞	0	∞

$\rightsquigarrow$ after forward pass

∞	∞	∞	0	0	1	2	3
∞	∞	0	0	0	0	1	2
∞	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	2	2	1	0	0
1	0	1	2	3	2	0	1
2	0	1	2	3	3	0	1
3	0	1	2	3	4	0	1
4	0	1	2	3	4	0	1

$\rightsquigarrow$ after the backward pass

3	2	1	0	0	1	2	3
2	1	0	0	0	0	1	2
1	0	0	1	1	0	0	1
0	0	1	2	2	1	0	0
1	0	1	2	2	1	0	1
1	0	1	2	2	1	0	1
1	0	1	2	2	1	0	1
1	0	1	2	2	1	0	1

-	1
1	0

closest above and to left

0	1
1	-

closest below and to right

2. EM-Algorithm and Factor Analysis

a) Given observations $x_1, \dots, x_i, \dots, x_I$, derive the E-Step of the EM-Algorithm for factor analysis, i.e. compute

$$\hat{q}_i(h_i) = Pr(h_i | x_i, \theta),$$

where $\theta = (\mu, \phi, \Sigma)$ denotes the set of model parameters.

$$\hat{q}_i(h_i) = Pr(h_i | x_i, \theta) = \frac{Pr(x_i | h_i, \theta) \cdot P(h_i | \theta)}{P(x_i)}$$

$$= \frac{N_{x_i}(\mu + \phi h_i, \Sigma) \cdot N_{h_i}(0, I)}{N_{x_i}(\mu, \phi\phi^T + \Sigma)}$$

b) To show: $\underbrace{(\tilde{\mu}, \tilde{\phi}, \tilde{\Sigma})}_{=\tilde{\theta}} = \underset{\tilde{\theta}}{\operatorname{argmax}} \left\{ \sum_{i=1}^{I} \int \hat{q}_i(h_i) \log Pr(x_i, h_i | \tilde{\theta})\, dh_i \right\}$

$$\tilde{\theta} = \underset{\tilde{\theta}}{\operatorname{argmax}} \left\{ \sum_{i=1}^{I} E[-\log|\tilde{\Sigma}| - (x_i - \tilde{\mu} - \tilde{\phi} h_i)^T \tilde{\Sigma}^{-1} (x_i - \tilde{\mu} - \tilde{\phi} h_i)] \right\}$$

assumption

$$= \cancel{\underset{\tilde{\theta}}{\operatorname{argmax}}}\ \underset{\tilde{\theta}}{\operatorname{argmax}} \left\{ \sum_{i=1}^{I} E[-\log| \right.$$