Numerik: Blatt 1

Christopher Schmidt
Marc Goedecke
Mi 12-14; Christopher Paeßens A7b

| A | 1 | 2 | 3 | 4 | S |
|---|---|---|---|---|---|
| P | 4 | 3 | 3 | 4 | 14 |

Aufgabe 1:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -7 \\ -7 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

a) $\|B\|_1 = \max\limits_{j=1,\dots,3} \sum\limits_{i=1}^{3} |b_{ij}| = 13$ ✓ (Spaltensummennorm) 1

$\|B\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,3} \sum\limits_{j=1}^{3} |b_{ij}| = 11$ ✓ (Zeilensummennorm) $\underline{\infty}$

$\|B\|_F = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{3} |B_{ij}|^2} = \sqrt{4+1+49+49+1+1+36+25} = \sqrt{166}$ ✓

b)

$\|\cdot\|$ beliebige Norm, $W$ invertierbar mit $W \in \mathbb{C}^{m\times m}$

z.z. $\|x\|_W := \|Wx\|$ ist eine Norm

- z.z. $\|x\|_W \geq 0 \ \wedge\ \|x\|_W = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\|x\|_W = \|Wx\| \geq 0$

$\|x\|_W = 0 \Leftrightarrow \|Wx\| = 0 \Rightarrow Wx = 0 \Rightarrow x = 0$, da $\ker(W) = \{0\}$

$x = 0 \Rightarrow \|\underbrace{Wx}_{=0}\| = 0 \Rightarrow \|x\|_W = 0$ ✓

- z.z. $\|\alpha x\|_W = |\alpha|\,\|x\|_W$

$\|\alpha x\|_W = \|\alpha W x\| = |\alpha|\,\|Wx\| = |\alpha|\,\|x\|_W$ ✓

- z.z. $\|x+y\|_W \leq \|x\|_W + \|y\|_W$

$\|x+y\|_W = \|W(x+y)\| = \|Wx + Wy\| \leq \|Wx\| + \|Wy\| = \|x\|_W + \|y\|_W$ ✓

$\Rightarrow$ Norm $\|x\|_W$ ✓

c) $\|\cdot\|_{0,5} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}$ ; $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \longmapsto \left( \sum\limits_{j=1}^{m} \sqrt{|x_j|} \right)^2$

Ist die Abbildung eine Norm?

Nein, da die Dreiecksungleichung nicht erfüllt ist.

Beweis durch ein Gegenbeispiel:

$\left\| \begin{pmatrix} 9 \\ 36 \end{pmatrix} \right\|_{0,5} = (3+6)^2 = 81 \leq \left\| \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{0,5} + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 36 \end{pmatrix} \right\|_{0,5} = 9 + 36 = 45$ ✓

↯ 4/4

Aufgabe 2:

a) z.z. $\|x\|_\infty \le \|x\|_2$, wobei $x \in \mathbb{C}^m$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

Beweis:

$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} |x_i| = \max_{i=1,\dots,m} \sqrt{|x_i|^2} \le \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_m|^2} = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^2\right)^{1/2} = \|x\|_2$$

Beispiel für Gleichheit:

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \|x\|_\infty = 3 = \sqrt{|3|^2 + |0|^2 + |0|^2} = \|x\|_2$$

✓

b) z.z. $\|x\|_2 \le \sqrt{m} \cdot \|x\|_\infty$, wobei $x = \mathbb{C}^m$ mit $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$

Beweis:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^m |x_i|^2\right)} = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_m|^2} \le \sqrt{m \cdot \left(\max_{i=1,\dots,m} |x_i|^2\right)} = \sqrt{m} \cdot \left(\max_{i=1,\dots,m} |x_i|\right) = \sqrt{m} \cdot \|x\|_\infty$$

✓

Beispiel für Gleichheit:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \|x\|_2 = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2 = \sqrt{4} \cdot 1 = \sqrt{m} \cdot \|x\|_\infty$$

c) z.z. $\|A\|_\infty \le \sqrt{n} \cdot \|A\|_2$, wobei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{C}^n$

b) $\forall x \in \mathbb{C}^n: \frac{1}{\|x\|_\infty} \le \frac{\sqrt{n}}{\|x\|_2}$

Beweis:

$$\|A\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \overset{a)}{\le} \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_\infty} \le \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\sqrt{n} \cdot \|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{n} \cdot \|A\|_2$$

✓

Beispiel für Gleichheit:

$A =$

d) z.z. $\|A\|_2 \le \sqrt{m}\,\|A\|_\infty$

Beweis:

$$\|A\|_2 = \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \underset{a)}{\le} \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_\infty} \underset{b)}{\le} \sup_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} \frac{\sqrt{m}\,\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty}$$

b) $\forall x\in\mathbb{C}^n\ \forall A\in\mathbb{C}^{m\times n}$: $Ax\in\mathbb{C}^m \Rightarrow \|Ax\|_2 \le \sqrt{m}\,\|Ax\|_\infty$

$$= \|A\|_\infty\cdot\sqrt{m}$$ ✓

Beispiel für Gleichheit:

3/4

Aufgabe 3:

$n \in \mathbb{N}, v \in \mathbb{R}^n$ mit $v \neq 0$

a) $Q = I - \frac{2}{v*v} \cdot v \cdot v^*$

z.z. $\forall w \in \mathbb{R}^n : v*(Qw) = -v*w$

Beweis:

Bem: $\forall v, w \in \mathbb{C}^m$: $v*w = v^*w$

$$v*(Qw) = v*\left(\left(I - \frac{2}{v*v} \cdot v \cdot v^*\right) \cdot w\right)$$

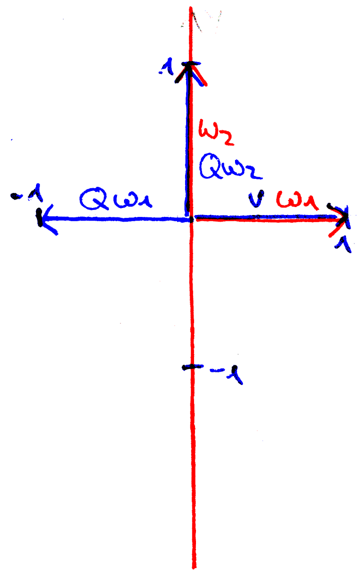
$$= v*\left(w - \frac{2}{v*v} \cdot v \cdot v^* w\right)$$

$$= v*w - 2 \cdot \frac{v^*v}{v^*v} v^* w$$

$$= v*w - 2v^*w$$

$$= -v^*w \quad \checkmark$$

b)




$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; $v*v = 1$

$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$H = \{w \in \mathbb{R}^n \mid w*v = 0\}$

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; $Qw_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; $Qw_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow w = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ; $Qw = Q(xe_1 + ye_2)$

$= x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Spiegelung an $H$

c) z.z. $Q^*Q = I$

Beweis:

$$Q^*Q = \left(I - \frac{2}{v*v} v \cdot v^*\right)^* \left(I - \frac{2}{v*v} v \cdot v^*\right)$$

$$= \left(I^* - \left(\frac{2}{v*v} v \cdot v^*\right)^*\right) \cdot \left(I - \frac{2}{v*v} v \cdot v^*\right)$$

$$= \left(I - \frac{2}{v*v} (v^*)^* v^*\right) \cdot \left(I - \frac{2}{v*v} v \cdot v^*\right)$$

$$= \left(I - \frac{2}{v*v} v \cdot v^*\right) \left(I - \frac{2}{v*v} v \cdot v^*\right)$$

$$= \left(I - \frac{4}{v*v} v \cdot v^* + 4 \frac{v \cdot \cancel{v^* v} \cdot v^*}{\cancel{v*v} \cdot v*v}\right) = I - \frac{4}{v*v} v \cdot v^* + \frac{4}{v*v} v \cdot v^*$$

$$= I \quad \checkmark$$

Aufgabe 4:

a)

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \langle a_1, a_2\rangle = 0, \ \langle a_1, a_3\rangle = 0, \ \langle a_1, a_4\rangle = 0 \\ \langle a_2, a_3\rangle = 0, \ \langle a_2, a_4\rangle = 0 \\ \langle a_3, a_4\rangle = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{Spalten von A paarweise orthogonal}$$

$$C := \begin{pmatrix} -1-11i & 1 & -1 \\ -1 & 5+8i & 1 \\ 1 & 1-3i & -5+8i \\ -1 & -5 & -5-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & | \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{matrix} \langle c_1, c_2\rangle = c_1^* c_2 = \cancel{-1} + \cancel{11i} - \cancel{5} - \cancel{8i} + \cancel{1} - \cancel{3i} + \cancel{5} = 0 \\ \langle c_1, c_3\rangle = \cancel{+1} - \cancel{11i} - \cancel{1} - \cancel{5} + \cancel{8i} + \cancel{5} + \cancel{3i} = 0 \\ \langle c_2, c_3\rangle = \cancel{-1} + \cancel{5} - \cancel{8i} - \cancel{5} + \cancel{8i} - \cancel{15i} - \cancel{24} + \cancel{25} + \cancel{15i} = 0 \end{matrix}\right\} \text{Spalten von C paarweise orthogonal}$$

✓

b)

$$A^* \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad (A^* A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$(A^* A)^{-1} \cdot A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & -1/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & -1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & -1/4 & 0 & 0 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1/4 & -1/4 & 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

Was fällt auf?

✓

4|4

Numerik : Blatt 1 - Ergänzung

Octave Freeware Matlab

2 c) Beispiel für Gleichheit:

$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m \times n} \qquad \|A\|_\infty = n \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$$

$$\|A\|_2 = \frac{\left\|A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\|_2}{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}\right\|_2} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow \quad \|A\|_\infty \cancel{\leq} \cancel{\sqrt{n}\ \sqrt{n}} = n = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n}\, \|A\|_2$$

d) Beispiel für Gleichheit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \qquad \|B\|_\infty = 1$$

$$\|B\|_2 = \frac{\|B e_1\|_2}{\|e_1\|_2} = \frac{\sqrt{m}}{1} = \sqrt{m}$$

$$\Rightarrow \|B\|_2 = \sqrt{m} \leq \sqrt{m} \cdot \|B\|_\infty = \sqrt{m} \cdot 1$$

3 b) $H = \{ w \in \mathbb{R}^2 \mid w * v = 0 \}$