Marc Goedecke
Christopher Schmidt

| A | 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| P | 3,5 | 3,5 | 3 | 3 | 13 |

Angewandte Mathematik: Numerik

Aufgabe 1:

$v_1, \dots, v_k \in \mathbb{C}^m$ ; $I \in \mathbb{C}^{m\times m}$ ; $P = I - \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^* \in \mathbb{C}^{m\times m}$

orthonormal

z.z. $P^* = P, P^2 = P$

$(v_i v_i^*)^* = v_i v_i^*$

$$P^* = (I - \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*)^* = I^* - (\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*)^* = I - \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^* = P \checkmark$$

$$P^2 = P\,P = (I - \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*)(I - \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*)$$

$$= I - 2\cdot \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^* + (\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*)(\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*)$$

$$= I - 2(\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*) + v_1 v_1^* v_1 v_1^* + \dots + v_1 v_1^* v_k v_k^* + \dots + v_k v_k^* v_1 v_1^* + \dots + v_k v_k^* v_k v_k^*$$

$$= I - \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^* = P \checkmark$$

$\forall i,j$ mit $i \neq j$: $v_i^* v_j = 0$ und $v_i v_i^* v_j v_j^* = v_i v_j^*$ weil orthonormal

Bild:

$$\text{Bild}(I - \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*) = \text{Kern}(\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*)$$

$$\text{Kern}(I - \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*) = \text{Bild}(\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*)$$

} Weil P eine Projektionsmatrix ist

Wir ergänzen $v_1, \dots, v_k$ mit $v_{k+1}, \dots, v_m$ zu einer Orthonormalen Basis von $\mathbb{C}^m$. Sei nun $v \in \mathbb{C}^m$ beliebig, so gilt $v = a_1 \cdot v_1 + \dots + a_m \cdot v_m$ wobei $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$.

$$(\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*) v = a_1 v_1 v_1^* v_1 + \dots + a_m v_1 v_1^* v_m + \dots + a_1 v_k v_k^* v_1 + \dots + a_m v_k v_k^* v_m$$

$$= a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$$

$\Rightarrow \text{Kern}(\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*) = \langle v_{k+1}, \dots, v_m \rangle = \text{Bild}(I - \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*)$ was ist an denen besonders?

$\Rightarrow \text{Bild}(\sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*) = \langle v_1, \dots, v_k \rangle = \text{Kern}(I - \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*) \checkmark$

$\Rightarrow \text{Rang}(P) = \dim(\text{Bild}(I - \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^*)) = m-k \checkmark$ (Bild-Kern-Satz)

3,5/4

Numerik - Blatt 6

Marc Goedecke
Christopher Schmidt

## Aufgabe 2

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \cdot L_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = U$$

$$L_3 \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot A = U \iff A = \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}}_{L} \cdot U$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ +1/2 & 1 & 0 & 0 \\ +1 & -1/3 & 1 & 0 \\ +1/2 & 2/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

3,5/4

Aufgabe 3: Lineare Ausgleichsproblem lösen

$A \in \mathbb{C}^{m \times n}, b \in \mathbb{C}^m$ wobei $m > n$

Gib alle effizienten Verfahren an, die du zum lösen des linearen Ausgleichsproblems $\|Ax-b\|_2 \to \min$ kennst.

1. Lösen mit Singulärwertzerlegung ✓

Eingabe: A, b

Ausgabe: x

- Berechne Singulärwertzerlegung $A = U \Sigma V^*$; $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$; $\Sigma \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$

return
- $x = (A^*A)^{-1} A^* b = V \Sigma^+ U^* b$, wobei wir $\Sigma^+$ mithilfe von $\Sigma$ berechnen

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n \\ & & 0 \\ & & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix} ; \quad \Sigma^+ = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_n^{-1} \\ & & 0 \\ & & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

✓

2. Lösen mit QR-Zerlegung ✓

Eingabe: A, b

Ausgabe: x

- Berechne QR-Zerlegung $A = QR$ $\quad Q \in \mathbb{C}^{m \times m}, R \in \mathbb{C}^{m \times n}$
- $Rx = Q^* b$ (berechne $Q^* b$)
- Rücksubstitution um x zu berechnen
- return x;

✓

3. LU-Zerlegung ✓

Eingabe: A, b

Ausgabe: x $\qquad L = (\text{◺})\quad U = (\text{◹})$

- Berechne $A = LU$ die LU-Zerlegung der Matrix A $\quad (LUx = b)$
- Vorwärtssubstitution berechne y: $Ly = b$
- Rückwertssubstitution berechne x: $Ux = y$
- return x

Bem: SVD und QR klappen für Matrizen $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, wohingegen die LU-Zerlegung nur mit Matrizen $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ klappt ✓

3/4

## Aufgabe 4

a) Ein ein-dimensionales Array mit aufsteigenden Werten von 0 bis $2 \cdot \pi$ in Schritten von 0,01: $[[0], [0{,}01], [0{,}02], \ldots, [6{,}28]]$
Die Länge ist $n = 629$

b) $y(x) = \sin(x)$

$$w(x) = \exp\left(\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

c) A: $a_{i,j} = x_i^{j-1}$, wobei $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq 2$

W: $w_{i,j} \begin{cases} \sqrt{w(x_i)} & \text{, wenn } i=j \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

wobei $1 \leq i,j \leq n$

$\Rightarrow$ Diagonalmatrix mit $\sqrt{\exp\left(\frac{-(x_i - x_0)^2}{2\sigma^2}\right)}$ auf der Diagonalen.

e ~~d~~) Die Zeile berechnet eine quadratische Funktion, die Sinus mit minimalem quadratischen Fehlern berechnet.

Gelöst wird dabei: $W \cdot A \cdot \cancel{X} = W \cdot y$

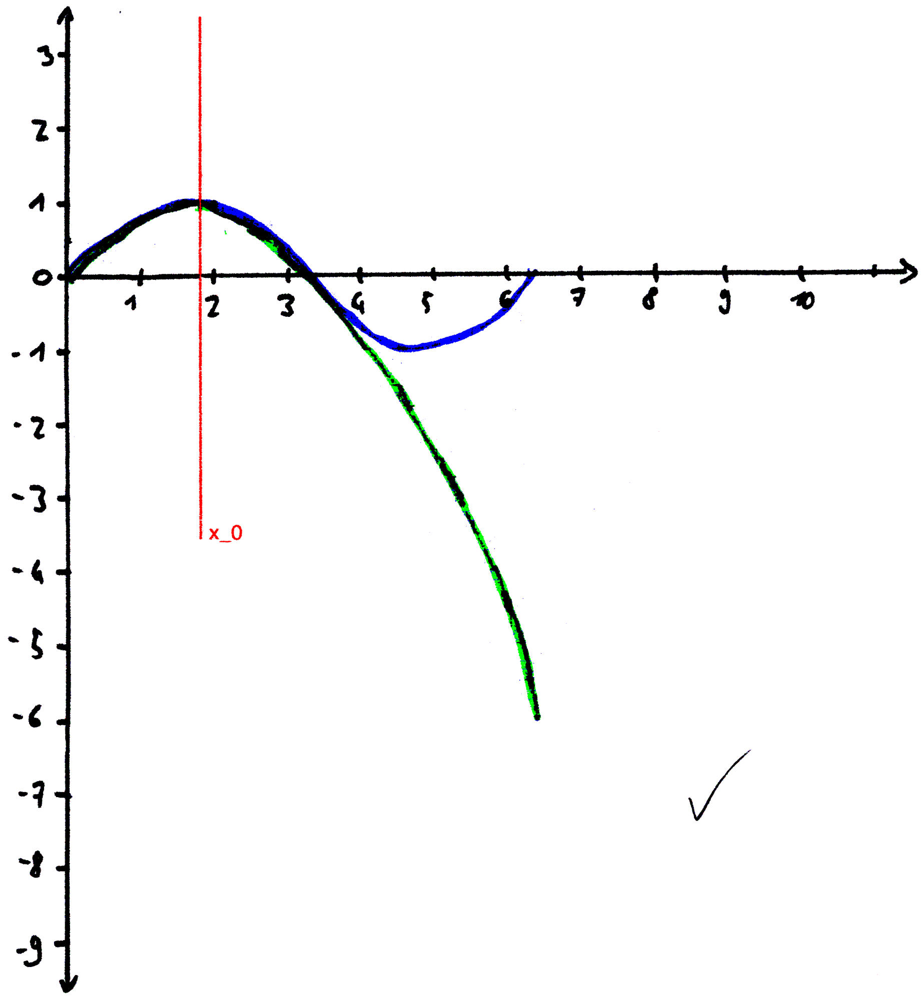
$\Leftrightarrow A \cdot \cancel{X} = y$, wobei $x = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$

da $y = \begin{pmatrix} \sin(x_0) \\ \vdots \\ \sin(x_n) \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 1 & x_0^1 & x_0^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \sin'(x) = a x^2 + b x + c$

d) ?

f) Der Definitionsbereich erstreckt sich von 0 bis $2 \cdot \pi$.
Geplottet werden sin (x) und die berechnete Annäherung.




✓

3/4

# Ergänzung Zettel 6

1) $\forall j \in \{1, \ldots, k\}: Pv_j = 0 \Rightarrow \mathrm{Kern}(P) = \langle v_1, \ldots, v_k \rangle$

$\forall w \in \{1, \ldots, k\}^\perp: Pw = w - \sum_{i=1}^{k} v_i \underbrace{(v_i^* w)}_{=0} = w \Rightarrow \mathrm{Bild}(P) = \mathrm{Kern}(P)^\perp$

$\underset{\underset{\dim(\mathrm{Im}(P))}{\parallel}}{\mathrm{Rang}}(P) = m - \dim(\ker(P)) = m - k$

3) SVD:

$A^*Ax = (U\Sigma V^*)^*(U\Sigma V^*)x$

$= V\Sigma^* \cancel{U^*U} \cancel{\Sigma} \cancel{V^*V} \cancel{\Sigma^+} U^* b$

$= V\Sigma^* U^* b$

$= A^* b$

QR:

$A^*Ax = R^*Q^*QRx = \cancel{R^*}\cancel{Q^*}\cancel{Q}\cancel{R}\cancel{R^{-1}}Q^*b = \cancel{QR}R^*Q^*b$

$= (QR)^* b = Ab$

Cholesky:

- Gram-Matrix $B = A^*A \in \mathbb{C}^{n \times n}$
- Cholesky-Faktorisierung $B = G^*G^*$, $G \in \mathbb{C}^{n \times n}$ rechte obere Dreiecksmatrix
- $y = A^* b$
- $z = (G^*)^{-1} y$ (Vor. Sub.)
- $x = G^{-1} z$ (Rück Sub.)
- $A^*Ax = Bx = G^*GG^{-1}(G^*)^{-1}y = y = A^*b$

LU-Pivotisiert

$A^*Ax = P^*LUx = P^*Lz = P^*y = A^*b$

4 d) 15 p=linalg.lstsq(W*A,W*y)[0]

$E(p) = \|Wy - WAp\|_2^2 \to \min$

$E(p) = \sum_{i=1}^{n} (Wy - WAp)_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{w(x_i)}^2 (y - Ap)_i^2$

$= \sum_{i=1}^{n} w(x_i)\left(y_i - \sum_{j=1}^{3} A_{ij} p_j\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} w(x_i)\left(y(x_i) - \sum_{j=1}^{3} x_i^{j-1} p_j\right)^2$