Übung zu Angewandte Mathematik: Numerik – Blatt 7

Christopher Schmidt
Marc Goedecke
Mi 12-14 Gruppe 2

	1	2	3	4	Σ
P.	4	[illegible]	/	4	9

Aufgabe 1: Eigenwertzerlegung

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$

a) z.z. $\lambda \in \mathbb{C}$ EW der Matrix A $\Leftrightarrow$ $p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$

Beweis:

$\lambda \in \mathbb{C}$ EW und $v \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektor zum Eigenwert λ mit $v \neq 0$

$\Leftrightarrow \quad Av = \lambda v$

$\Leftrightarrow \quad 0 = (\lambda I - A) v$

$\Leftrightarrow \quad \det(\lambda I - A) = 0$

Da $v \neq 0$ und wenn ~~$\Leftrightarrow$~~ $(\lambda I - A)$ vollen Rang hätte $\ker(\lambda I - A) = \{0\}$ wäre, also $(\lambda I - A)$ besitzt keinen vollen Rang $\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0$ ✓

b) z.z. $\Lambda = V^{-1} A V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix

Wissen: n linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$ mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

V eine Matrix mit $v_1, \dots, v_n$ als Spalten

Beweis:

$$\Lambda = V^{-1} A V \quad \Leftrightarrow \quad V\Lambda = AV \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} x_1 & & & 0 \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} | & | & & | \\ v_1 x_1 & v_2 x_2 & \cdots & v_n x_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ Av_1 & Av_2 & \cdots & Av_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} | & | & & | \\ x_1 v_1 & x_2 v_2 & \cdots & x_n v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_n v_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = \lambda_1, \dots, x_n = \lambda_n$$

Wir haben Angenommen, dass Λ eine Diagonalmatrix ist und dann gezeigt, dass diese immer aus den EW von Eigen-Vektoren $v_1, \dots, v_n$ besteht. Da dies immer Funktioniert ist auch bewiesen, dass Λ eine Diagonalmatrix ist. ✓

Aufgabe 2:

z.z. $g(A) = V \cdot \mathrm{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_m)) \cdot V^{-1}$

$c_0, c_1, \dots \in \mathbb{C}$

$A \in \mathbb{C}^{m \times m}$

$\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$

$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i, \; g(B) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i B^i$

Beweis:

$$g(A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot (V \Lambda V^{-1})^i$$

$$= c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \cdot (V \Lambda V^{-1})^i$$

$$= c_0 \underbrace{V V^{-1}}_{I} + \sum_{i=1}^{\infty} c_i V \Lambda^i V^{-1}$$

$$= V c_0 V^{-1} + V \cdot \left(\sum_{i=1}^{\infty} c_i \Lambda^i \right) V^{-1}$$

$$= V \cdot \left(c_0 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i \Lambda^i \right) V^{-1}$$

$$= V \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i \Lambda^i \right) V^{-1} = V \cdot \left(\sum_{i=0} c_i \cdot \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \right) \cdot V^{-1}$$

$$= V \cdot \mathrm{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_m)) \cdot V^{-1}$$

✓

Bem: $(V \Lambda V^{-1})^i \dots$

$= V \Lambda^i V^{-1}$

da sich $V^{-1} V = I$ wegkürzen ✓

4/4

Aufgabe 4: Spektralsatz

$m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ normale Matrix $(A^* A = A \cdot A^*)$

$A = QTQ^*$, wobei $Q \in \mathbb{C}^{m \times m}$ unitär und $T \in \mathbb{C}^{m \times m}$ obere Dreiecksmatrix

a) z.z. T ist normale Matrix $\Rightarrow$ z.z. $T^*T = TT^*$

Beweis:

A ist normal

$$T^*T = (Q^*AQ)^*(Q^*AQ) = Q^* A^* Q Q^* A Q = Q^* A^* A Q = Q^* A A^* Q$$

$$= Q^* A I A^* Q = Q^* A Q Q^* A^* Q = (Q^* A Q) \cdot (Q^* A Q)^* = T \cdot T^*$$ ✓

b) z.z. $\forall j \in \{2, \dots, m\}: T_{1,j} = 0$

1/4