A	1	2	3	4	Σ
P	3,5	4	4	4	15,5

Christopher Schmidt
Marc Goedecke

Mi 12-14
A 7b
Gruppe 2

Prof. Dr. Reinhard Klein
Elena Trunz, Dennis den Brok

Universität Bonn
Institut für Informatik II
11.1.2017

Wintersemester 2016/2017

Übungen zu Angewandte Mathematik: Numerik - Blatt 9

Abgabe schriftlich vor der Vorlesung am Mittwoch, den 18.1. um 10:00 (c.t.). Bitte die Gruppennummer mit angeben.

Aufgabe 1 (Kondition von Funktionen, *2+2=4 Punkte*)

Absolute und relative Konditionszahlen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ am Punkt x sind definiert durch

$$K_{\text{abs}} := |f'(x)|, \qquad K_{\text{rel}} := \left|\frac{f'(x) \cdot x}{f(x)}\right|.$$

a) Berechne jeweils die absoluten und relativen Konditionszahlen für die Funktionen $\exp(x)$ und $\ln(x)$. Für welche x sind diese Funktionen jeweils schlecht konditioniert?

b) Beweise, dass für zwei Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die absolute Konditionszahl der Verkettung $f(g(x))$ sich als Produkt der absoluten Konditionszahlen von f und g berechnet. Zeige die analoge Aussage für die relativen Konditionszahlen.

Hinweis: Wenn man die Kondition von $f(g(x))$ am Punkt x betrachtet heißt das natürlich, dass man die Kondition von f am Punkt $g(x)$ verwenden muss.

Aufgabe 2 (IEEE Fließkommazahlen, *2+2=4 Punkte*)

Wir betrachten Fließkommazahlen gemäß IEEE Standard.

a) Seien $x, y > 0$ zwei aufeinander folgende Zahlen mit einfacher Genauigkeit. Wie viele Zahlen z mit doppelter Genaugkeit und $x \leq z < y$ gibt es?

b) Was ist die kleinste natürliche Zahl $x \in \mathbb{N}$, die nicht ohne Rundungsfehler mit einfacher Genauigkeit darstellbar ist?

Hinweis: Bei einfacher Genauigkeit hat die Mantisse 24 bit, bei doppelter Genauigkeit sind es 53 bit.

Aufgabe 3 (Kondition der Normalengleichung, *4 Punkte*)

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit $m > n$ eine Matrix mit vollem Rang. Wir betrachten die Matrix $B := A^*A$ aus der Normalengleichung. Zeige

$$K_2(B) = (K_2(A))^2.$$

Dabei bezeichnet K_2 die Kondition der Matrizen bezüglich der 2-Norm. Was bedeutet das für die Lösung linearer Ausgleichsprobleme anhand der Normalengleichung?

Hinweis: Verwende die Formel zur Berechnung der Matrixkondition anhand der Singulärwertzerlegung (Bemerkung 7.3 im Skript). Lassen sich aus der Singulärwertzerlegung von A Eigenschaften der Singulärwertzerlegung von B ableiten?

1. a) für $\exp(x)$:

$$K_{abs} := |\exp'(x)| = |\exp(x)| = |e^x| \checkmark \Rightarrow$$ abs. Konditionszahl ist schlecht für $x \gg 0$

$$K_{rel} := \left|\frac{\cancel{e^x} \cdot x}{\cancel{e^x}}\right| = |x| \checkmark \Rightarrow$$ rel. Konditionszahl ist schlecht für $x \gg 1$ ✓

für $\ln(x)$:

$$K_{abs} := \left|\frac{1}{x}\right|$$ $\Rightarrow$ abs. Konditionszahl ist schlecht für $|x| < 1$ (✓)

$$K_{rel} := \left|\frac{\frac{1}{x} \cdot x}{\ln(x)}\right| = \left|\frac{1}{\ln(x)}\right| \Rightarrow$$ schlecht für $|x| < 1$ (

1,5/2

Christopher Schmidt, Marc Goedecke

Blatt 9

Aufgabe 1: Kondition von Funktionen

b) $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

~~$\kappa_{abs}(f(g(x))) = \kappa_{abs}(g(x)) \cdot \kappa_{abs}($~~

~~$\kappa_{abs}(g(x))$~~ absolute Konditionszahl der Verkettung $f(g(x))$:

$$\kappa_{abs} \overset{\text{Kettenregel}}{=} |f'(g(x)) \cdot g'(x)| = |f'(g(x))| \cdot |g'(x)| = \kappa_{abs\,f} \cdot \kappa_{abs\,g} \checkmark$$

relative Konditionszahl der Verkettung $f(g(x))$

$$\kappa_{rel} \underset{\text{Kettenregel}}{=} \left| \frac{f'(g(x)) \cdot g'(x) \cdot x}{f(g(x))} \right| \underset{\text{mit } \frac{g(x)}{g(x)} \text{ erweitern}}{=} \left| \frac{f'(g(x)) \cdot g(x) \cdot g'(x) \cdot x}{f(g(x)) \cdot g(x)} \right|$$

$$= \left| \frac{f'(g(x)) \cdot g(x)}{f(g(x))} \right| \cdot \left| \frac{g'(x) \cdot x}{g(x)} \right| = \kappa_{rel\,f} \cdot \kappa_{rel\,g}$$

$\checkmark$

2/2

② a) $x, y > 0$ mit 24-bit Mantisse

$x \leq z < y$ mit 53-bit Mantisse

x und y sind zwei aufeinander folgende Zahlen

=> Unterscheiden sich in niederwertigstem Bit

Double precision hat $53 - 24 = 29$ zusätzliche Bits.

=> 2^{29} zusätzliche Zahlen die zw. x und y unterschieden werden können (536.870.912) ✓

b) Aufbau einer Floatingpointzahl x: $x = \underset{\text{Vorzeichen}}{s} \cdot m \cdot b^e$

$= s \cdot \underset{\text{Mantisse}}{m} \cdot 2^e$ ← basis und Exponent

- Für $e=0$ und $s = 1 \lor -1$ sind alle ganzen Zahlen m darstellbar: $m \cdot 2^0 = m \cdot 1$
- m ist maximal 2^{24}

=> $2^{24} + 1 = 16.777.217$ ist die erste ✓ nicht ~~darstellbare~~ exakt darstellbare FP-Zahl

4/4

Blatt 9 Christopher Schmidt, Marc Goedecke

Aufgabe 3: Kondition der Normalform

$A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ mit $m > n$ mit vollem Rang (also Rang$(A) = n$)

$B = A^*A$ SVD von A ist $U\Sigma V^*$

z.z. $\kappa_2(B) = (\kappa_2(A))^2$

Beweis: $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nicht singulär $A = U\Sigma V^*$

$$\kappa_2(B) = \|B\|_2 \cdot \|B^{-1}\|_2 = \|A^*A\|_2 \cdot \|(A^*A)^{-1}\|_2 = \|V\Sigma^*\Sigma V^*\|_2 \cdot \|(V\Sigma^*\Sigma V^*)^{-1}\|$$

V orthonormal

$$= \|\Sigma^*\Sigma\|_2 \cdot \|(\Sigma^*\Sigma)^+\|_2 = \sigma_1^2 \cdot \frac{1}{\sigma_n^2} = \left(\sigma_1 \cdot \frac{1}{\sigma_n}\right)^2$$

$$= (\|\Sigma\|_2 \cdot \|\Sigma^+\|_2)^2 = (\|U\Sigma V^*\|_2 \cdot \|V\Sigma^+U^*\|_2)^2$$

U, V orthonormal

$$= (\|A\|_2 \cdot \|A^+\|_2)^2 = (\kappa_2(A))^2$$

(✓) 4/4

□

Bem: σ_1 der größte Singulärwert von A und σ_n der kleinste Singulärwert von A

Aufgabe 4: Tikhonov-Regulierung

z.z. $\kappa_2(T) = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \lambda^2}{\sigma_n^2 + \lambda^2}}$, wobei σ_1 und σ_n wie in Aufgabe 3

Beweis:

Sei $A = U\Sigma V^*$ eine SVD von A

$$\Rightarrow T^*T = \begin{pmatrix} A \\ \lambda I \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} A \\ \lambda I \end{pmatrix} = (A^* \;\; \lambda I)\begin{pmatrix} A \\ \lambda I \end{pmatrix} = (A^*A + \lambda^2 I) \checkmark$$

SVD

$$= V\Sigma^*\Sigma V^* + \lambda^2 I = V\Sigma^*\Sigma V^* + \lambda^2 \cdot VIV^*$$

$$= V\Sigma^*\Sigma V^* + V(\lambda^2 I)V^* = V\underbrace{(\Sigma^*\Sigma + \lambda^2 I)}_{\Sigma_T = \Sigma^*\Sigma + \lambda^2 I}V^*$$

$$\Rightarrow \kappa_2(T) = \sqrt{\kappa_2(T^*T)} = \sqrt{\|\Sigma_T\|_2 \cdot \|\Sigma_T^+\|_2} = \sqrt{(\sigma_1 + \lambda^2) \cdot \frac{1}{(\sigma_n + \lambda^2)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sigma_1 + \lambda^2)}{(\sigma_n + \lambda^2)}}$$

✓ □

4/4