III

Christopher Schmidt
Marc Goedecke
Gruppe 2; Mi 12-14

Aufgabe 1: Parabel fitten

$u_1 = -1 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 1 \quad u_4 = 2$

$v_1 = 1 \quad v_2 = 0 \quad v_3 = 2 \quad v_4 = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & u_1^2 \\ 1 & u_2 & u_2^2 \\ 1 & u_3 & u_3^2 \\ 1 & u_4 & u_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} ; \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left\| A \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} - v \right\|_2^2 \to \min \quad \Rightarrow \quad \left\| A \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} - v \right\|_2 \to \min$$

$\Rightarrow$ Gaußsche Normalengleichung $A^* A x = A^* v$, wobei $x = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ ✓

$$A^* A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 6 & 8 & 18 \end{pmatrix}$$

Berechne $(A^*A)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 18 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1/2) \quad \cdot(-6/4)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 9 & -6/4 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot(-1)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \cdot(-5/4) \quad \cdot(-6/4)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & +5/2 & 6/4 & -6/4 \\ 0 & 5 & 0 & +3/4 & 9/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-2/5) \\ \cdot 1/4 \end{array}$$

Nebenrechnungen:

$$\frac{6}{4} - \frac{18}{20} = \frac{30}{20} - \frac{18}{20} = \frac{12}{20}$$

$$\frac{14}{20} - \frac{10}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 11/5 & 3/5 & -1 \\ 0 & 5 & 0 & +3/4 & 9/4 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 & +1/4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 1/4 \\ \cdot 1/5 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11/20 & 3/20 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & +3/20 & 9/20 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{array}\right) \Rightarrow (A^*A)^{-1} = \begin{pmatrix} 11/20 & 3/20 & -1/4 \\ 3/20 & 9/20 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x = (A^*A)^{-1} A^* v = \begin{pmatrix} 11/20 & 3/20 & -1/4 \\ 3/20 & 9/20 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 19 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 9/20 \\ 7/20 \\ 3/4 \end{pmatrix} ✓$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{3}{4} x^2 + \frac{7}{20} x + \frac{9}{20}$$

6/6

A	1	2	3	4	Σ
P	6	3	4	2	15

Aufgabe 2: Lineare Gleichungssysteme mit QR lösen

$A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^m$, $x \in \mathbb{C}^n$

a) Überbestimmte Gleichungssysteme

$m > n$; $\|Ax-b\|_2 \to \min$ x die Lösung des Ausgleichproblems

$Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ unitär, $R \in \mathbb{C}^{m\times n}$ obere Dreiechsmatrix mit $A = QR$

$R_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $c := Q^* b$, $c_1 \in \mathbb{C}^n$, $c_2 \in \mathbb{C}^{m-n}$, $R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

z.z. $R_1 x = c_1$; $\|Ax-b\|_2 = \|c_2\|_2$.

Beweis: Da x das Ausgleichsproblem löst, gilt

$$A^*Ax = A^*b$$

$$\Leftrightarrow (QR)^*(QR)x = (QR)^* b$$

$$\Leftrightarrow R^*Q^*QRx = R^*Q^*b \qquad \text{! } Q \text{ ist unitär} \Rightarrow Q^* = Q^{-1}$$

$$\Leftrightarrow R^*Rx = R^*Q^*b$$

$$\Leftrightarrow Rx = Q^*b$$

$$\Leftrightarrow Rx = c$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow R_1 x = c_1 \quad \checkmark$$

$$\|b-Ax\|_2 = \|Q^*(b-Ax)\|_2 = \|Q^*b - Q^*QRx\|_2 = \|c - Rx\|_2$$

$$\|b-Ax\|_2^2 = \underbrace{\|c_1 - R_1x\|_2^2}_{=0} + \|c_2 - 0x\|_2^2 = \|c_2\|_2^2$$

$$\Rightarrow \|b-Ax\|_2 = \|c_2\|_2 \quad \checkmark$$

b) Unterbestimmte Gleichungssysteme

$m<n$

$R_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}$ ~~obere Drei~~ , $y_1 \in \mathbb{C}^m$ mit $R_1^* y_1 = b$

$y_2 \in \mathbb{C}^{n-m}$ beliebig

Z $x = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ist Lösung für $Ax=b$ mit passenden y_2 ✓

$Ax = b$ $\quad\quad$ $R \cancel{= R_1 \in \mathbb{C}^{m \times m}}$

$\Leftrightarrow Ax = R_1^* y_1$

$\Leftrightarrow A^* A x = A^* R_1 y_1$

$\Leftrightarrow (QR)^*(QR)x = (QR)^* R_1 y_1$

$\Leftrightarrow R^* Q^* Q R x = R^* Q^* R_1 y_1$

$\Leftrightarrow R^* R x = R^* R_1 y_1$

$\Leftrightarrow R^* R Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = R^* R_1 y_1$

$\Leftrightarrow RQ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = R_1 y_1$ ✓

3/4

Aufgabe 3: QR-Zerlegung von Hand berechnen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Q orthonormale Spaltenvektoren

R rechte obere Dreiecksmatrix

Berechne Matrix Q (mittels Gram-Schmidt): $Q = (q_1 \; q_2 \; q_3)$

~~$Q^t = Q^{-1}$ Orthonormalmatrix~~

$$q_1' = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \|q_1'\|_2 = \sqrt{2^2+2^2+1} = \underline{3} \implies q_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$q_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \left\langle q_1, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \left(-\frac{4}{3} + \underline{2} + \frac{4}{3}\right) \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10/3 \\ 5/3 \\ 10/3 \end{pmatrix}$$

$$\implies q_2 = \frac{q_2'}{\underbrace{\|q_2'\|}_{5}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{100}{9} + \frac{100}{9} + \frac{25}{9}}} \begin{pmatrix} 10/3 \\ 5/3 \\ 10/3 \end{pmatrix} = \frac{3}{15} \begin{pmatrix} 10/3 \\ 5/3 \\ 10/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$q_3' = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \left\langle q_1, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle q_1 - \left\langle q_2, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle q_2$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \left(\underline{-2} + \cancel{\frac{2}{3}} - \cancel{\frac{2}{3}}\right) \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} - \left(\underline{2 + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/3 \\ 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$q_3 = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}{\underbrace{\left\|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right\|_2}_{3}} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} \implies Q = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \checkmark$$

Berechne Matrix R:

$$\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$QR = A$

$\iff$ $\implies r_{11} = 3$ $\quad Q^t = Q^{-1}$

$Q^{-1} \cdot Q \cdot R = Q^{-1} A$

$$\iff \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q \cdot R = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A \checkmark$$

4/4

Aufgabe 4: Orthogonalität des Residuums

$y = \arg\min_x \|Ax - b\|_2$

z.z. Residuum $r = b - Ay$ ist orthogonal zu Bild(A)

$A^*A\,x = A^*b \implies x = y \implies A^*A\,y = A^*b \iff A^*Ay - A^*b = 0$

$\iff A^*b - A^*Ay = 0$

Beweis: Ann. A hat n Spalten

z.z. $\forall j \in \{1, \dots, n\} : \langle a_j, r \rangle = 0 \implies$ z.z. $\langle A, r \rangle = 0$

$\cancel{\langle A, r \rangle = 0 \iff A^* r = 0}$

$\langle A, r \rangle = A^* r = A^*(b - Ay) = \underbrace{A^*b - A^*Ay}_{\text{Normalengleichung}} = 0$

$\implies$ Residuum ist orthogonal zu Bild(A)

$\square$ ✓

Bem: Für das Bild(A) gezeigt, da

$\langle \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n, r \rangle = \lambda_1 \langle a_1, r \rangle + \dots + \lambda_n \langle a_n, r \rangle$

und wir mit $\langle A, r \rangle = 0$ gezeigt haben, dass $\langle a_1, r \rangle = \dots = \langle a_n, r \rangle = 0$ sind

somit $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : \langle \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n, r \rangle = 0$ ✓

2/2

Blatt 3 - Ergänzung

Aufgabe 2:

a) $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $b \in \mathbb{C}^m$

$m > n$

x sei Lösung von $\|Ax-b\| \to \min$, $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ unitär

$R \in \mathbb{C}^{m\times n}$ obere Dreiecksmatrix

$A = QR$ $\quad R_1 \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $c = Q^* b$, $c_1 \in \mathbb{C}^n$, $c_2 \in \mathbb{C}^{m-n}$, $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

z.z. $R_1 x = c_1$ $\quad \|Ax-b\|_2 = \|c_2\|_2$

- $A^* A x = A^* b$

$\Leftrightarrow (QR)^* \, QR\, x = (QR)^* b$

$\Leftrightarrow R^* Q^* Q R x = R^* Q^* b$

$\Leftrightarrow (R_1^* \ 0) \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} = (R_1^* \ 0) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow R_1^* R_1 x = R_1^* c_1$

$\Rightarrow R_1 x = c_1$

- $\|Ax-b\|_2 = \| Q \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} x - Q \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \|_2 = \| \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \|_2 = \|c_2\|_2$

Algorithmus:
- berechne R_1, c_1
- berechne x aus $R_1 x = c_1$ mit Rücksubstitution

b) $m < n$: $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $R \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $A^* = QR$, $R_1 \in \mathbb{C}^{m\times m}$, $y_1 \in \mathbb{C}^m$

$R_1^* y_1 = b$, $y_2 \in \mathbb{C}^{n-m}$

$x = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$Ax = (QR)^* x = (R_1^* \ 0) Q^* x = (R_1^* \ 0) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = R_1^* y_1 = b$

$\Rightarrow x + \ker(A)$

$\dim(\ker(A)) = n - \operatorname{rang}(A) = n-m$

$x := Q \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Algorithmus:
- zuerst y_1 berechnen mit $R_1^* y_1 = b$ durch Rücksubstitution
- berechne x mit $x = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$