Aufgabe 1: Gewichtetes Filtern von Funktionen

z.z. $E(x) = \|b - A\cdot x\|_2^2$ mit $A = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_1} f_1(u_1) & \cdots & \sqrt{\omega_1} f_n(u_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\omega_m} f_1(u_m) & \cdots & \sqrt{\omega_m} f_n(u_m) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_1} v_1 \\ \vdots \\ \sqrt{\omega_m} v_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

Christopher Schmidt
Marc Goedecke
Mi 12-14
Gruppe 2

A1	1	2	3	4	Σ
?	4	4	2,5	1	11,5

Beweis:

$$E(x) = \sum_{i=1}^m \omega_i \cdot \left| v_i - \sum_{j=1}^n x_j f_j(u_i) \right|^2$$

$$= \sum_{i=1}^m \left| \sqrt{\omega_i} \left(v_i - \sum_{j=1}^n x_j f_j(u_i) \right) \right|^2$$

$$= \cancel{\sum_{i=1}^m} \sum_{i=1}^m \left| \sqrt{\omega_i} v_i - \sum_{j=1}^n \sqrt{\omega_i} f_j(u_i) x_j \right|^2$$

$$= \sum_{i=1}^m \left| \sqrt{\omega_i} v_i - \cancel{\sum_j} \left(\sqrt{\omega_i} f_1(u_i) \cdots \sqrt{\omega_i} f_n(u_i) \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \left(\sqrt{\omega_1} v_1 - \left(\sqrt{\omega_1} f_1(u_1) x_1 + \ldots + \sqrt{\omega_1} f_n(u_1) x_n \right) \right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{\omega_m} v_m - \left(\sqrt{\omega_m} f_1(u_m) x_1 + \ldots + \sqrt{\omega_m} f_n(u_m) x_n \right) \right)^2$$

$$= \langle b - Ax, b - Ax \rangle$$

$$= \|b - Ax\|_2^2 \quad \checkmark$$

$\square$

Wie kann man nun f berechnen?

- Wir berechnen $x \in \mathbb{R}^n$: $\|b - Ax\|_2^2 \to \min$
  $\Rightarrow \|b - Ax\|_2 \to \min$
  $\Rightarrow A^* A x = A^* b$ (Gaußsche Normalengleichung)
- Löse Gaußsche Normalengleichung z.B. mit Singulärwertzerlegung $\Rightarrow$ Wir haben nun $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
- Berechne $f = \sum_{j=1}^n x_j f_j$ ✓

4/4

Aufgabe 2: Ausgleichsproblem mittels QR-Zerlegung

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & -1 \\ -i & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{5\times 3}, \quad R = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2i \\ 6 \\ 2i \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^5$$

Finde von Hand einen Vektor $x \in \mathbb{C}^3$, der das lineare Ausgleichsproblem $\|QRx - b\|_2 \to \min$ löst.

Berechnung:

- Spalten von Q sind paarweise orthonormal $\Rightarrow Q^*Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- R ist obere ("rechte obere") Dreiecksmatrix

$$\|QRx - b\|_2 = \|Q^*(QRx - b)\|_2 = \|Rx - Q^*b\|_2$$

$$Q^*b = \cancel{\left(\tfrac{1}{2}Q\right)^*} \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2i \\ 6 \\ 2i \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 - 2i + 2 + 8i \\ 12 \\ 4 + 2i - 2i - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3i \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -3i \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3i \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x_3 = -1 \,;\ x_2 = 7 \,;\ x_1 = 1 \ ✓$$

4/4

$$\cancel{\Rightarrow x_3 = -1 \Rightarrow x_2 = 7 \Rightarrow x_3 = 4}$$

Aufgabe 3: Exponenzial von Matrizen

a) Leite die Eigenwertzerlegung von A^n her.

warum?

$$A^n = \underbrace{(A \cdot \ldots \cdot A)}_{n\text{-mal}} = \underbrace{(V \Lambda V^{-1}) \cdot \ldots \cdot (V \Lambda V^{-1})}_{n\text{-mal}} = V \Lambda^n V^{-1}$$

Wie verhalten sich die Eigenvektoren und Eigenwerte von A^n zu V und Λ?

Sei λ Eigenwert von A und v der dazugehörige Eigenvektor: $Av = \lambda v$

$$\Rightarrow A^n v = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{n\text{-mal}} v = \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{(n-1)\text{-mal}} \cdot \lambda v = \lambda^2 \underbrace{A \cdot \ldots \cdot A}_{(n-2)\text{-mal}} v = \lambda^n \cdot v$$ (Kann man auch direkt an $V \Lambda^n V^{-1}$ sehen)

$\Rightarrow$ Eigenvektoren sind gleich, also V von A^n gleich V von A

$\Rightarrow$ Eigenwerte jeweils hoch n, also Λ von A^n ist gleich Λ^n von A (jeder Eigenwert hoch n) ✓

b)

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Leite die Eigenwertzerlegung von $\exp(A)$ aus der Reihenentwicklung und unter Ausnutzung des Ergebnisses aus Teilaufgabe a) her.

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(V \cdot \Lambda^k V^{-1})}{k!} = V \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Lambda^k}{k!} \right) \cdot V^{-1}$$

$= V \exp(\Lambda) V^{-1}$, wobei $\exp(\Lambda) = \mathrm{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n})$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind EW von A

$\Rightarrow$ Eigenwert λ von A $\Rightarrow$ Eigenwert $\exp(\lambda)$ von $\exp(A)$ ✓

c) Wie lässt sich nun ~~für~~ A^t für $t \in \mathbb{R}$ verallgemeinern?

Wie sieht die Eigenwertzerlegung aus?

$A^t = V \Lambda^t V^{-1}$

$\Lambda^t = \mathrm{diag}(\lambda_1^t, \ldots, \lambda_n^t)$ wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ EW von A sind

$\Rightarrow \lambda_1^t, \ldots, \lambda_n^t$ EW von A^t

Nur reell?

2,5 / 4

Aufgabe 4: Eigenwertzerlegung einer hermiteschen Blockmatrix

$A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ mit SVD $A = U\Sigma V^*$

Finde Eigenwertzerlegung für die $2m\times 2m$ hermitesche Blockmatix $M = \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}$

$$H^*\Lambda H = \begin{pmatrix} G^* & C^* \\ B^* & D^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

wobei F und E Diagonalmatrizen sind.

$$H^*\Lambda H = \begin{pmatrix} G^*F & C^*E \\ B^*F & D^*E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^*FG + C^*EC & G^*FB + C^*ED \\ B^*FG + D^*EC & B^*FB + D^*ED \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^*FG + C^*EC & G^*FB + C^*ED \\ B^*FG + D^*EC & B^*FB + D^*ED \end{pmatrix} = H^*\Lambda H \quad \checkmark$$

$$A = B^*FG + D^*EC \quad \wedge \quad A = B^*F^*G + D^*E^*C$$

$$A^*A = (U\Sigma V^*)^*(U\Sigma V^*) = V\Sigma U^* U\Sigma V^* = V\Sigma V^*$$

$$A^*A = (G^*FB + C^*ED)\cdot(B^*FG + D^*EC)$$

$$= G^*FBB^*FG + G^*FBD^*EC + C^*EDB^*FG + C^*EDD^*EC$$

$$= G^*F^2G + G^*FBD^*EC + C^*EDB^*FG + C^*E^2C$$

$$\begin{pmatrix} 0 & U\Sigma U^* \\ U\Sigma V^* & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^*FG + C^*EC & G^*FB + C^*ED \\ B^*FG + D^*EC & B^*FB + D^*ED \end{pmatrix}$$

~~$V\Sigma U^*$~~

$$U\Sigma V^* = B^*FG^* + D^*EC = (G^*FB + C^*ED)^* = B^*F^*\cancel{G} + D^*E^*C$$

-/1/4

Übung 4 - Ergänzung

3 c) $A^t \quad t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} A^t &= \exp(t \log(A)) \\ &= \exp(t \log(V\Lambda V^{-1})) \\ &= \exp(t V \log(\Lambda) V^{-1}) \\ &= V \exp(t \log(\Lambda)) V^{-1} \\ &= V \exp(\log(\Lambda^t)) V^{-1} \\ &= V \Lambda^t V^{-1} \end{aligned}$$

4:

$$H^* \Lambda H = \begin{pmatrix} G^*FG + C^*EC & G^*FB + C^*ED \\ B^*FG + D^*EC & B^*FD + D^*ED \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix} = M$$

$$\begin{pmatrix} 0 & V\Sigma U^* \\ U\Sigma V^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} G^*FG + C^*EC & G^*FB + C^*ED \\ B^*FG + D^*EC & B^*FD + D^*ED \end{pmatrix}$$

$C = -G \quad ; \quad D = B$

$$\Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} G^*(F+E)G & G^*(F-E)B \\ B^*(F-E)G & B^*(F+E)B \end{pmatrix}$$

$E = -F$

$$\Rightarrow \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 2G^*FB \\ 2B^*FG & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & V\Sigma U^* \\ U\Sigma V^* & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad B = \alpha U^* \quad , \quad G = \beta V^* \quad , \quad F = \frac{2}{\alpha\beta} \Sigma$$

α, β werden so gewählt, dass H unitär wird

$$H = \begin{pmatrix} G & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta V^* & \alpha U^* \\ -\beta V^* & \alpha U^* \end{pmatrix} \qquad HH^* = \begin{pmatrix} \beta V^* & \alpha U^* \\ -\beta V^* & \alpha U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta V^* & -\beta V \\ \alpha U & \alpha U \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta^2 V^*V + \alpha^2 U^*U & -\beta^2 V^*V + \alpha^2 U^*U \\ -\beta^2 V^*V + \alpha^2 U^*U & \beta^2 V^*V + \alpha^2 U^*U \end{pmatrix}$$

Setze $\beta = \alpha$

$$\begin{pmatrix} 2\alpha^2 I & 0 \\ 0 & 2\alpha^2 I \end{pmatrix}$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Nachrechnen, das gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} V & -V \\ U & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & -\Sigma \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} V^* & U^* \\ V^* & U^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & V\Sigma^* U^* \\ U\Sigma V^* & 0 \end{pmatrix}$$