Numerik - Blatt 11 - Korrektur

~~Taylor~~ -approx. ← wichtig für Klausur

Taylor approx d. Ordnung p von f an der Stelle a (Entwicklungspkt.)

$$T_p f(x; a) := \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} d^{(k)} f(a) \cdot (x-a)^k$$

$$= \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a) \cdot (x-a)^2}_{\text{Taylor.appr. zweiter Ordnung}} + \ldots$$

$T_p f(x; a)$ ist Polynom vom Grad $\leq p$, dass f um a gut approximiert

A1

a) Differential $f'(x,y) = (\partial_x f(x,y) \quad \partial_y f(x,y)) = \nabla f(x,y)$

$$\partial_x f(x,y) = \exp(-(x^2+y^2)) \cdot (-2x) + 2cx$$

$$\partial_y f(x,y) = \exp(-(x^2+y^2)) \cdot (-2y)$$

Hessematrix $H_f(x,y) = f''(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx} f(x,y) & \partial_{xy} f(x,y) \\ \partial_{yx} f(x,y) & \partial_{yy} f(x,y) \end{pmatrix}$

Satz von Schwarz wenn $\partial_{xy} f(x,y)$ stetig is

$$\Rightarrow \partial_{xy} f(x,y) = \partial_{yx} f(x,y)$$

$$\partial_{xx} f(x,y) = (-2x) \exp(-(x^2+y^2)) \cdot 2x + \exp(-(x^2+y^2)) \cdot (-2) + 2c$$

$$= 4x^2 \exp(-(x^2+y^2)) - 2\exp(-(x^2+y^2)) + 2c$$

$$= (4x^2-2) \exp(-(x^2+y^2)) + 2c$$

$$\partial_{yy} f(x,y) = (-2y) \cdot \exp(-(x^2+y^2)) \cdot (-2y) + \exp(-(x^2+y^2))(-2)$$

$$= (4y^2-2) \cdot \exp(-(x^2+y^2))$$

$$\partial_{xy} f(x,y) = (-2x) \cdot \exp(-(x^2+y^2)) \cdot (-2y)$$
$$= 4xy \exp(-(x^2+y^2)) \Rightarrow \text{Stetig}$$
$$(\text{Schwarz}) \quad = \partial_{yx} f(x,y)$$

b) $f(0,0) = 1$

$f'(0,0) = J_f(0,0) = (0\,0)$

$$f''(0,0) = H_f(0,0) = \begin{pmatrix} -2+2c & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$T_2 f((x,y),(0,0)) = 1 + (0\,0)\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}^T \cdot H_f(0,0) \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix}$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -2+2c & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 + (c-1)x^2 - y^2$$

A2 Extrema

Notw. Bed.: $f'(p) = 0$ $\rightsquigarrow$ p ist kritischer Punkt

d.h. $\partial_1 f(p) = \partial_2 f(p) = \ldots = \partial_n f(p) = 0$

Hinr. Bed.: $f''(p) > 0 \Rightarrow$ Minimum bei p

$f''(p) < 0 \Rightarrow$ Max. bei p

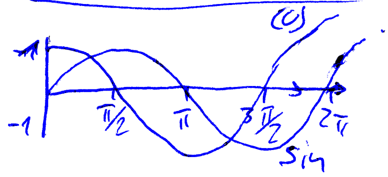
d.h. $f''(p) > 0 \Leftrightarrow f''(p)$ pos. def. $\Leftrightarrow$ alle EW > 0

$f''(p) < 0 \Leftrightarrow f''(p)$ neg. def. $\Leftrightarrow$ alle EW < 0

$f''(p) \gtrless 0 \Leftrightarrow$ Sattelpunkt bei p

> Tipp für $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
>
> A pos. def. wenn $\det A > 0$, $a > 0$
>
> A neg. def. wenn $\det A > 0$, $a < 0$

$\sin'(x) = \cos(x)$
$\cos'(x) = -\sin(x)$



A2

a) $f(x,y) = \sin(x)\cdot\sin(y)$

$\partial_x f(x,y) = \cos(x)\cdot\sin(y)$

$\partial_y f(x,y) = \sin(x)\cdot\cos(y)$

$f'(x,y) = (\cos(x)\sin(y) \quad \sin(x)\cos(y))$

$\partial_{xx} f(x,y) = -\sin(x)\cdot\sin(y)$

$\partial_{yy} f(x,y) = -\sin(x)\cdot\sin(y)$

$\partial_{xy} f(x,y) = \cos(x)\cos(y) = \partial_{yx} f(x,y)$

$f'(x,y) = 0$

$\Leftrightarrow \cos(x)\sin(y) = 0 \quad \wedge \quad \sin(x)\cos(y) = 0$

$\Leftrightarrow (\cos(x) = 0 \ \vee \sin(y) = 0) \wedge (\sin(x) = 0 \ \vee \cos(y) = 0)$

$\Leftrightarrow (x \in (\frac{\pi}{2} + \pi\cdot\mathbb{Z}) \vee y \in \pi\cdot\mathbb{Z})$

$\quad \wedge (x \in \pi\cdot\mathbb{Z} \vee y \in (\frac{\pi}{2} + \pi\cdot\mathbb{Z}))$

$\Leftrightarrow (x \in (\frac{\pi}{2} + \pi\cdot\mathbb{Z}) \wedge y \in (\frac{\pi}{2} + \pi\cdot\mathbb{Z})) \vee (x \in \pi \wedge y \in \pi\cdot\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow (x,y) \in (\pi(\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}) + \{(0,0), (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\})$

c) $\Rightarrow f$ ist 2π-periodisch, d.h. es reicht f auf $[0,2\pi]^2$ zu betrachten

$\Rightarrow \boxed{(0,0) \quad (0,\pi) \quad (\pi,0) \quad (\pi,\pi)}$

$(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \quad (\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \quad (\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

$f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \det < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$f''(0,\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ ~~de~~ $a = 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$f''(\pi,0) = f''(\pi,\pi) = \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{0} \end{pmatrix} \rightarrow \det < 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$f''(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ neg. def $\Rightarrow$ Hochpunkt

$f''(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ pos. def $\Rightarrow$ Min $\quad f''(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ neg. def $\Rightarrow$ Max.

A3 $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n \times n}$ diff.bar

Beh. $B'(t) = -B(t) \cdot A'(t) \cdot B(t)$

Bew $A(t) \cdot B(t) = I$

Abl. auf beiden Seiten $\Rightarrow \partial_t (A(t) \cdot B(t)) = \partial_t (I)$

$\Rightarrow A'(t) \cdot B(t) + A(t) \cdot B'(t) = 0$

$\Rightarrow A(t) \cdot B'(t) = -A'(t) B(t)$

B(t) von Links $\Rightarrow B'(t) = -B(t) A'(t) B(t)$