Numerik - Blatt 7 - korrektur

1 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$

a) Beh. $\lambda \in \mathbb{C}$ EW von A

$\Leftrightarrow$ $P_A(\lambda) := \det(\lambda I - A)$

charakteristisches Polynom $= 0$

Bew Es gilt $Av = \lambda v$

$\Leftrightarrow (\lambda I - A)v = 0$

$\Leftrightarrow v \in \ker(\lambda I - A)$

"$\Rightarrow$" v ist EV $\Rightarrow$ $v \neq 0$

$\Rightarrow$ $P_A(\lambda) = 0$

"$\Leftarrow$" $P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \ker(\lambda I - A) \neq \{0\}$

$\Rightarrow \exists$ ein passender EV

b) $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{C}^n$ l.u. EV von A

mit EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ $\quad V = (v_1 | \cdots | v_n)$

Beh: $\Lambda = V^{-1}AV$ ist eine Diagonalmatrix.

Bew: Wohldefiniert, da $v_1, \dots, v_n$ l.u.

$\Rightarrow$ Spalten von V sind l.u.

$\Rightarrow$ rang V voll $\Rightarrow$ V invertierbar

Für $i \in \{1, \dots, n\}$:

$\Lambda e_i = V^{-1}AVe_i = V^{-1}Av_i$

$\overset{v_i \text{ EV}}{=} V^{-1}\lambda_i v_i = \lambda_i V^{-1} v_i = \lambda_i e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ i-ten Stelle

$\Rightarrow \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\square$

2 Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

$(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Folge von Koeffizienten

$A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ mit EVD $A = V \Lambda V^{-1}$

Verallgemeinerung: $g(B) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i B^i$

Beh $g(A) = V \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_m)) V^{-1}$

Bew Zeige erst $A^i = V \Lambda^i V^{-1}$ (*)

IV $i = 1$ klar

IA (*) gilt für festes $i \in \mathbb{N}$

IS $i \to i+1$

$$A^{i+1} = A^i \cdot A \overset{IA}{=} \overbrace{V \cdot \Lambda^i V^{-1}}^{IA} \overbrace{V \Lambda V^{-1}}^{EVD}$$

$$= V \Lambda^{i+1} V^{-1}$$

Es folgt

$$g(A) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i A^i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i (V \Lambda V^{-1})^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} c_i V \Lambda^i V^{-1}$$

(kann man sich drüber streiten) (Reihe müsste abs. konvergent sein)

$$= V \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i \Lambda^i \right) V^{-1}$$

$$= V \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1^i, \dots, \lambda_m^i) \right) V^{-1}$$

$$= V \operatorname{diag}\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda_1^i, \dots, \sum_{i=0}^{\infty} c_i \lambda_m^i \right) V^{-1}$$

$$= V \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_m)) V^{-1} \quad \square$$

Bemerkung:

a) Berechne EW, EV von $A \to \Lambda, V$

b) Wende f auf EW an

c) Berechne $V \cdot \underbrace{\mathrm{diag}\,(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_m))\, V^{-1}}_{\substack{\text{Löse } V^T x = f(\lambda_j)\, e_j \\ (\text{für } j = 1, \dots, m)}}$

3

$a_0 := 2 \qquad a_{n+1} = 5a_n - b_n$

$b_0 := 4 \qquad b_{n+1} = 6a_n + 12 b_n$

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \dots = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}}_{= A}{}^{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

Berechne EWD von A

$\rightsquigarrow$ Nullstellen $P_A(\lambda) = 0$

$\Rightarrow$ EW λ_1, λ_2

Löse: $(\lambda_1 I - A) v_1 = 0$, $(\lambda_2 I - A) v_2 = 0$

$\lambda_1 = 6$, $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 11$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix} \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} -6/5 & -1/5 \\ -1/5 & -1/5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$= V \Lambda^n V^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 11^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6/5 & -1/5 \\ -1/5 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{16}{5} 6^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{5} 11^n \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{16}{5} 6^n - \frac{6}{5} 11^n$$

$$b_n = -\frac{16}{5} 6^n + \frac{36}{5} 11^n$$

4 $A \in \mathbb{C}^{m \times m}$ normal, d.h. $A^* A = A A^*$

Schur-Faktorisierung $\cancel{A} = Q \, T \, Q^*$

Q: $m \times m$ unitär

T: $m \times m$ obere Δ-Mat.

Beh. Wenn A normal ist, ist die Schur-Fkt. eine EVD, d.h. T ist diagonal.

Bew Zeige a) T normal

b) In der ersten Zeile von T steht "nur" "auf der ~~Diag~~. Diagonale" ein Wert $\neq 0$

c) T ist diagonal

zu a) $A^* A = A A^*$

$\Leftrightarrow (Q T Q^*)^* Q T Q^* = Q T Q^* (Q T Q^*)^*$

$\Leftrightarrow Q T^* \underbrace{Q^* Q} T Q^* = Q T \underbrace{Q^* Q} T^* Q^*$

kürzen ($\Leftrightarrow Q^* \ldots Q = Q^* \ldots Q$)

$\Leftrightarrow T^* T = T T^*$ $\Leftrightarrow$ T normal

zu b) $T = \begin{pmatrix} T_{11} & v \\ 0 & S \end{pmatrix}$ $\quad v \in \mathbb{C}^{1\times(n-1)}$
$S \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$

T normal

$T^* T = T T^*$ $\quad \left(T^* = \begin{pmatrix} \overline{T_{11}} & 0 \\ v^* & S^* \end{pmatrix} \right)$

$\Rightarrow (T^* T)_{1,1} = (T T^*)_{1,1}$

$\Rightarrow T_{1,1}^2 = T_{1,1}^2 + v^* v$

$\Rightarrow v = 0$

Zu c) $\underline{\text{IV}}$ $n = 1$ klar

$\underline{\text{IA}}$ normale, obere ~~…~~ ∇-Mat der Größe $n-1$ ist diagonal

$\underline{\text{IS}}$ ~~n→n0~~ $n-1 \to n$ ~~…~~

T normal $\Rightarrow S^* S = S S^*$

$T = \begin{pmatrix} T_{1,1} & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \Rightarrow S$ normal, obere ∇-Mat
~~…~~ IA
$\Rightarrow T$ diagonal