Numerik - Blatt 10

A1d

- Für normalisierte Zahlen [1, 30 720] ist $\delta_n < 0{,}07$
- Für Zahlen > 30.720 wird δ_n "bel." groß
- Für d. denormalisierten Zahlen [0, 1] wird δ_n sehr groß
  Es handelt sich sozusagen um Festkomma-zahlen → bei 0 ist δ_n max.

Numerik - Blatt 10 - Korrektur

A2

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \sin(x) \cdot y^2 - x^2 \cdot y$$

a) $\partial_x f(x,y) = \cos(x) \cdot y^2 - 2xy$

$\partial_y f(x,y) = 2\sin(x) \cdot y - x^2$

$\Rightarrow \partial_x f, \partial_y f$ zusammengesetzt aus stetige Fkt

$\Rightarrow \partial_x f, \partial_y f$

$\Rightarrow f$ diff'bar auf $\mathbb{R}^2$

b) $p_1 = (\pi, 2)$ in Richtung $v_1 = (1,0), v_2 = (0,1), v_3 = (1,1)$

$p_2 = (0,1)$ " " $v_4 = (2,-1), v_5 (-4,2)$

$\partial x(p_1) = -1 \cdot 4 - 2 \cdot \pi \cdot 2 = -4(1+\pi)$

$\partial y(p_1) = 2 \cdot 0 \cdot 2 - \pi^2$

$D_{v_1} f(p_1) = f'(p_1) \cdot v_1 = \partial_x f(p_1) \cdot 1 + \partial_y f(p_1) \cdot 0$

$= -4(1+\pi) + 0 = -4(1+\pi)$

$D_{v_2} f(p_1) = \partial_x f(p_1) \cdot 0 + \partial_y f(p_1) \cdot 1 = -\pi^2$

$D_{v_3} f(p_1) = \partial_x f(p_1) \cdot 1 + \partial_y f(p_1) \cdot 1$

$= -4(1+\pi) - \pi^2$

~~p2~~ -

$P_2 = (0,1)$

$\partial_x f(P_2) = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 = 1$

$\partial_y f(P_2) = 2 \cdot 0 \cdot 1 - 0^2 = 0$

$D_{v_4} f(P_2) = 2 \cdot \partial_x f(P_2) - 1 \cdot \partial_y f(P_2)$

$= 2 - 0 = 2$

$D_{v_5} f(P_2) = -4 \; \partial_x f(P_2) + 2 \partial_y f(P_2) = -4$

c) $f'(x,y) = (\partial_x f(x,y), \partial_y f(x,y))$

$= (\cos(x) \cdot y^2 - 2xy; \; 2\sin(x) y - x^2)$

"Funktionalmatrix" auch: Jacobi - Matrix

$\operatorname{grad} f = f'(x,y)^T = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y) \\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix}$

<u>A3</u>

a) Berechne grad g, $g(p) = \|p - \mu\|_2^2$

$g(p) = \sum_{i=1}^{n} (p_i - \mu_i)^2 = \cancel{\;}$

$\partial_i g(p) = 2(p_i - \mu_i) \cdot 1$

$\operatorname{grad} g(p) = \begin{pmatrix} \partial_1 g(p) \\ \vdots \\ \partial_n g(p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(p_1 - \mu_1) \\ \vdots \\ 2(p_n - \mu_n) \end{pmatrix}$

b) Berechne Differential von $h(r) = \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{\sigma^2}\right)$

$h'(r) = \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{r}{\sigma^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\right)$

c) Berechne Grad $f = \text{grad}(h \circ g)$

$$\text{grad } f(p) = \text{grad}(g(p)) \cdot h'(g(p))$$
$$= -\frac{p-\mu}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\|p-\mu\|_2^2}{\sigma}\right)$$
$$= -\frac{f(p)}{\sigma^2}(p-\mu)$$

<u>A4</u> Gesucht: FA. $n : H \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ s.d.

$$\forall p \in H : n(p) \perp H$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$$
$$H = f^{-1}(\{1\})$$
$$n(x, y, z) = \text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, y, z) \\ \partial_y f(x, y, z) \\ \partial_z f(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix}$$

$$n(p) = 0 \Leftrightarrow p = 0$$
$$\Rightarrow n(p) \neq 0 \quad \forall p \in H$$

Kapitel 8.4 $\Rightarrow n(p) \perp f^{-1}(\{1\}) = H$