Zadanie 2.6.D

Łukasz Magnuszewski

Treść

Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dowolną funkcją spełniają warunek $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Sprawdzić wtedy że $f(x) = ax$ dla wszystkich $q \in \mathbb{Q}$ gdzie $a = f(1)$.

x wymierne

Rozpatrzmy trzy przypadki

$\mathbf{x = 0}$

Wtedy $f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ Czyli $f(0) = 0 = 0 * a$.

$\mathbf{x > 0}$

Rozważmy najpierw x naturalne. $f(x) = f(x*1) = f(1+1+\dots) = \sum_{i=1}^{x} f(1) = xa$

Teraz rozważmy x mniejsze od 1. $x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N}$. W takim razie

$$ap = f(p) = \sum_{i=1}^{q} f(x) = qf(p) = qpf(1) = xa$$

$\mathbf{x < 0}$

$f(0) = f(x - x) = f(x) + f(-x)$ stąd wynika że $f(x) = -f(-x)$. Korzystając z poprzedniego przypadku otrzymujemy $f(x) = -a(-x) = ax$.

$\mathbb{R}$

Otrzymujemy dodatkowe założenie że f jest funkcją mierzalną.

Ciągłość f

Pokażmy ze f jest ciągła, najpierw w okolicy zery: $\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0$ taka że z $|x - 0| < \delta$ wynika $|f(x) - f(0)| < \epsilon$. Zaś $|f(x) - f(0)| = |f(x)|$.

Ustalmy teraz dowolne $\epsilon > 0$. Weźmy odpawiadająy temu zbiór $E = f^{-1}[(-\epsilon, \epsilon)]$. Jako że f jest funkcją mierzalną i przedział jest zbiorem mierzalnym to E także jest mierzalne.

Wtedy z twierdzenie Steinhausa $\exists \delta > 0$ taka że $(-\delta, \delta) \subseteq (E - E)$.

$$f[(-\delta, \delta)] \subseteq f[E - E] = f[\{x - y : x, y \in E\}] = \{f(x) - f(y) : x, y \in f^{-1}[(-\epsilon, \epsilon)]\}$$

Co jest równe $\{x - y : x, y \in (-\epsilon, \epsilon)\} = (-2\epsilon, 2\epsilon)$ Czyli do naszej definicji ciągłości możemy wziąc δ wynikającą z twierdzenie Steinhouse dla przedziału $(-\epsilon\frac{1}{209}, \epsilon\frac{1}{209})$ i ona na pewno wystarczy. Na razie pokazalismy tylko ciągłośc w okolicy 0. Jako że $f(x+y) = f(x) + f(y)$, to w oczywisty sposób ta ciągłość się rozszerza na całego $\mathbb{R}$.

Rozwiązanie

Ustalmy dowolnego x_0

Mając ciągłość wiemy że $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. W szczególności jak weźmiemy ciąg liczb wymiernych zbiegających do x_0. $\lim_{q \to x_0} f(q) = \lim_{q \to x_0} aq = ax_0 = f(x_0)$.