

Zadanie 1.10.12

Łukasz Magnuszewski

Treść

Udowodnić że jeśli A jest nieskończonym σ -ciałem to A ma przynajmniej c elementów

1 Rozwiązanie

Rozważamy sigma-ciało rozpiętę nad jakąś przestrzenią, oznaczmy ją jako V . Weźmy $B \subseteq A$ taki że $|B| = \aleph_0$.

Przyjmijmy następujące oznaczenia

$$C_x = \left(\bigcap \{X \in B : x \in X\}\right) \cup \left(\bigcap \{X \in B : x \notin X\}\right)$$

Zauważmy że dla każdego x : C_x powstaje w przeliczalnej liczbie operacji mnogościowych ze zbiorów należących do A , czyli każdy taki zbiór należy do A .

Rozważmy teraz rodzinę $C = \{C_v : v \in V\}$. Zauważmy że zbiory z tej rodziny są parami rozłączne. Oraz że każdy zbiór z B da się rozpisać w następujący sposób $b = \bigcup_{x \in b} C_x$. Czyli w takim razie $|A| \geq |C| \geq |B| = \aleph_0$.

Rozważmy teraz $E = \{\bigcup x : x \in P(C)\}$. Jako że C jest rodziną zbiorów rozłącznych parami, to $|E| = |P(C)|$ czyli continuum. Oraz $E \subseteq A$ czyli moc A wynosi co najmniej continuum.