Lista 4

Łukasz Magnuszewski

Zadanie 1

Treść

Niech $\{P_k\}$ będzie ciągiem standardowych wielomianów ortogonalnych w przedziale $[a, b]$, z wagą $p(x)$. Wykazać że zachodzi związek rekurencyjny

$$P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x - c_1,$$

$$P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x)\ (k = 2, 3, \ldots)$$

gdzie

$$c_k = \frac{\langle xP_{k-1}, P_{k-1}\rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1}\rangle}$$

$$d_k = \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1}\rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2}\rangle}$$

Rozwiązanie

Przeprowadźmy silną indukcję po k:

Baza indukcji

Dla $k = 0$ w oczywisty sposób zachodzi zależność. Rozpatrzmy więc $k = 1$. Jako że $P_0 \perp P_1$ to:

$$0 = \langle P_0, P_1\rangle = \langle 1, x - c_1\rangle = \langle 1, x\rangle - c_1\langle 1, 1\rangle$$

Więc

$$c_1 = \frac{\langle x, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle} = \frac{\langle P_0 x, P_0\rangle}{\langle P_0, P_0\rangle}$$

Krok indukcyjny

Pokażmy że ta zależność zachodzi dla k wielomianu. Rozpiszmy P_k w następujący sposób

$$P_k = xP_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i P_i$$

Teraz wiemy że P_k ortogonalne z poprzednimi wielomianami. Rozpatrzmy $j \leq k-3$

$$\langle P_k, P_j \rangle = \langle xP_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i P_i, P_j \rangle = \langle xP_{k-1}, P_j \rangle + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \langle P_i, P_j \rangle$$

Korzystając z tego że $\{P_x\}$ to ciąg ortogonalny, otrzymujemy

$$\langle xP_{k-1}, P_j \rangle + \alpha_j \langle P_j, P_j \rangle$$

Udowodnijmy teraz krótki lemat 1

$$\langle xf, g \rangle = \int_b^a p(x)xf(x)g(x)dx = \int_b^a p(x)fx(x)g(x)dx = \langle f, xg \rangle$$

Używając tego lematu otrzymujemy

$$\langle xP_{k-1}, P_j \rangle + \alpha_j \langle P_j, P_j \rangle = \langle P_{k-1}, xP_j \rangle + \alpha_j \langle P_j, P_j \rangle$$

Wielomian xP_j ma mniejszy stopień niż P_{k-1} więc są one ortogonalne. Czyli wychodzi

$$0 = \langle P_k, P_j \rangle = \alpha_j \langle P_j, P_j \rangle$$

Wielomian P_j nie jest zerowy więc jego iloczyn skalarny z samym sobą jest niezerowy więc $\alpha_j = 0$. Usuwając zera z sumy w wzorze na P_k wychodzi

$$P_k = xP_{k-1} + \alpha_{k-1} P_{k-1} + \alpha_{k-2} P_{k-2}$$

Rozpatrzmy teraz $j = k-2$

$$\langle P_k, P_{k-2} \rangle = \langle xP_{k-1} + \alpha_{k-1} P_{k-1} + \alpha_{k-2} P_{k-2}, P_{k-2} \rangle$$

Można to porozbijać z liniowości

$$\langle xP_{k-1}, P_{k-2} \rangle + \langle \alpha_{k-1} P_{k-1}, P_{k-2} \rangle + \alpha_{k-2} \langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle$$

Środkowy wyraz się zeruje z ortogonalności

$$\langle xP_{k-1}, P_{k-2} \rangle + \alpha_{k-2} \langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle = 0$$

Korzystając z lematu 1 wychodzi wzór na α_{k-2}

$$\alpha_{k-2} = -\frac{\langle P_{k-1}, xP_{k-2} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle}$$

Mamy już prawie dobrą postać, ale trzeba naprawić licznik, rozpiszmy w tym celu P_{k-1} podobnie jak rozpisaliśmy P_k

$$P_{k-1} - xP_{k-2} = \sum_{i-0}^{k-2} \beta_i P_i$$

Czyli wychodzi

$$xP_{k-2} = P_{k-1} - \sum_{i-0}^{k-2} \beta_i P_i$$

Możemy to podstawić

$$\langle P_{k-1}, xP_{k-2} \rangle = \langle P_{k-1}, P_{k-1} - \sum_{i-0}^{k-2} \beta_i P_i \rangle =$$

Z liniowości wychodzi

$$\langle P_{k-1}, P_{k-1} - \sum_{i-0}^{k-2} \beta_i P_i \rangle = \langle P_{k-1}, \rangle + \sum_{i-0}^{k-2} \beta_i \langle P_{k-1}, P_i \rangle$$

Z ortogonalności $P_i \perp P_{k-1}$ wychodzi

$$\langle P_{k-1}, xP_{k-2} \rangle = \langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle + \sum_{i-0}^{k-2} \beta_i \langle P_{k-1}, P_i \rangle = \langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle$$

Podstawiając to do wzoru na α_{k-2} wychodzi

$$\alpha_{k-2} = -\frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle}$$

Co zgadza się z wzorem na d_k.

Rozpatrzmy teraz $j = k-1$. Możemy też rozpisać P_k

$$\langle P_k, P_{k-1} \rangle = \langle xP_{k-1} + \alpha_{k-1} P_{k-1} + \alpha_{k-2} P_{k-2}, P_{k-1} \rangle$$

Z liniowości wychodzi

$$\langle P_k, P_{k-1} \rangle = \langle xP_{k-1}, P_{k-1} \rangle + \langle \alpha_{k-1} P_{k-1}, P_{k-1} \rangle + \langle \alpha_{k-2} P_{k-2}, P_{k-1} \rangle$$

Z $P_{k-2} \perp P_{k-1}$ wychodzi

$$\langle P_k, P_{k-1} \rangle = 0 = \langle xP_{k-1}, P_{k-1} \rangle + \langle \alpha_{k-1} P_{k-1}, P_{k-1} \rangle$$

Wychodzi więc następujący wzór na α_{k-1}

$$\alpha_{k-1} = -\frac{\langle xP_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}$$

Czyli wychodzi dokładnie $-c_k$ Podstawiając alphy do wzory na P_k wychodzi

$$P_k = xP_{k-1} + \alpha_{k-1} P_{k-1} + \alpha_{k-2} P_{k-2} = P_{k-1}(x - \frac{\langle xP_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}) + \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle} P_{k-2} = P_{k-1}(x - c_k) - d_k P_{k-2}$$

Zadanie 2

Niech $\overline{T}_k(x)$ będzie standardowymi wielomianami ortogonalnymi w przedziale $[-1,1]$ z wagą $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Znaleźć związek rekurencyjny spełniany przez te wielomiany

Zgadujemy na podstawie zadania 1 z listy 7, że ten ciąg wielomianów to podkręcone wielomiany Czybeszewa. Czyli są spełnione następujące własności

$$\overline{T}_0(x) = 1 \qquad \overline{T}_1(x) = x$$

$$\overline{T}_k(x) = \overline{T}_{k-1}(x) - \frac{1}{2}\overline{T}_{k-2}(x) = 2^{-(k-1)}T_k(x)$$

Z zadania l7.1 wiemy że dla $k \neq l$

$$\langle T_k, T_l \rangle = \int_b^a (1-x^2)^(- 1/2) T_k(x) T_l(x) dx = 0$$

W takim razie

$$\langle \overline{T}_k \overline{T}_l \rangle = \langle T_k 2^{-(k-1)}, T_l 2^{-(l-1)} \rangle = \int_b^a (1-x^2)^{-1/2} T_k(x) 2^{-(k-1)} T_l(x) 2^{-(l-1)} dx$$

Wyciągając stałe przed nawias wychodzi

$$2^{-(k-1)} 2^{-(l-1)} \int_b^a (1-x^2)^{-1/2} T_k(x) T_l(x) dx = 0 = \langle \overline{T}_k \overline{T}_l \rangle$$

Czyli rzeczywiście nasz zgadnięty ciąg jest standardowym ciągiem wielomianów, dla tego przedziału i wagi.

Zadanie 3

Jakim wzorem wyraża się n-ty wielomian optymalny dla funkcji f w sensie normy

$$||f||_2 := \sqrt{\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-1/2} f^2(x) dx}$$

Zauważmy że jest to taka sama norma jak w poprzednim zadaniu, więc skorzystajmy z wzoru na wykładzie dla ortogonalnego ciągu $\overline{T}_k$

$$w_n^* = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k$$

Dowód: analogicznie do zadania 7 z poprzedniej listy Korzystając z zadania 5 z poprzedniej listy wystarczy pokazać że

$$\forall w \in \Pi_n \langle f - w_n^*, w \rangle = 0$$

Możemy sie ograniczyć do wektorów bazowych, bo każdy wektor można przedstawić jako kombinację liniową wektorów bazowych. Rozważmy jako bazę nasz ciąg ortogonalny obcięty do n. Wtedy korzystając z liniowości wychodzi

$$\langle f - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k, P_j \rangle = \langle f, P_j \rangle - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} \langle P_k, P_j \rangle$$

Korzystając że $P_k \perp P_l$ dla $k \neq l$ wychodzi

$$\langle f, P_j \rangle - \frac{\langle f, P_j \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle} \langle P_j, P_j \rangle = 0$$

Zadanie 4

Niech $p_n, q_n \in \Pi_n$ będą wielomianami optymalnymi dla funkcji ciągłej na odcinku $[a, b]$ w sensie normy jednostajnej. Udowodnić że $p_n \equiv q_n$. Co z tego wynika?

Analogicznie do zadania 7 z poprzedniej listy Korzystając z zadania 5 z poprzedniej listy wychodzi że

$$\langle f - p_n, q_n \rangle = 0 \qquad \langle f - q_n, p_n \rangle = 0$$

Czyli

$$0 = \langle f - p_n, q_n - p_n \rangle - \langle f - q_n, q_n - p_n \rangle = \langle f - p_n - f + q_n, q_n - p_n \rangle = \langle q_n - p_n, q_n - p_n \rangle$$

Iloczyn skalarny wektora z samym sobą jest równy zero tylko gdy ten wektor jest zerowy, czyli.

$$q_n - p_n = 0 \qquad q_n = p_n$$