Zadanie 1.11.A

Łukasz Magnuszewski

Treść

Udowodnić żu suma dowolnej (nawet nieprzeliczalnej) rodziny przedziałów na prostej, postaci $[a, b], a < b$, jest zbiorem borelowskim.

Rozwiązanie

Niech $A \subset P(\mathbb{R})$ będzie rodziną z treści zadania. Zdefinijmy na A następującą relację: $a \sim b \iff a \cap b \neq \emptyset$. W sposób oczywisty jest ona symetryczna oraz zwrotna. Jak weźmiemy jej przechodnie domknięcie to będzie ona dodatkowo przechodnia. Czyli będzie relacją równoważności. Oznaczmy to domknięcie jako $\smile$.

Rozważmy teraz zbiór klas abstrakcji zbiora A dla relacji $\smile$. Oznaczmy go jako D. A dokładniej rozważmy $C = \{\cup x : x \in D\}$ Zauważmy że jest to rodzina rozłącznych przedziałów na prostej.

Teraz jako że każda klasa abstrakcji D, ma przynajmniej jeden element będący przedziałem $[a, b], a < b$, czyli każdy przedział należący do C ma przynajmniej jeden punkt wymierny. Z tego faktu, oraz rozłączności elementów C, wynika przeliczalność C(Istnieje funkcja różnowartościowa z C w $\mathbb{Q}$). Jako żę $\cup A = \cup C$ która jest przeliczalną sumą zbiorów borelowskich, czyli $\cup A$ jest zbiorem borelowskim.