Teoretyczne podstawy języków programowania

Lista 1

1. Na zbiorze $\mathbb{B}$ zdefiniujmy funkcje $f_|, f_\downarrow : \mathbb{B} \times \mathbb{B} \to \mathbb{B}$ za pomocą poniższej tablicy:

x	y	$f_\vert(x,y)$	$f_\downarrow(x,y)$
F	F	T	T
F	T	T	F
T	F	T	F
T	T	F	F

Opisują one dwa spójniki logiczne (funktory zdaniotwórcze) $|$ oraz $\downarrow$ o następującej semantyce:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[\![(\varphi \mid \psi)]\!]\sigma &= f_|(\mathcal{E}[\![\varphi]\!]\sigma, \mathcal{E}[\![\psi]\!]\sigma) \\ \mathcal{E}[\![(\varphi \downarrow \psi)]\!]\sigma &= f_\downarrow(\mathcal{E}[\![\varphi]\!]\sigma, \mathcal{E}[\![\psi]\!]\sigma)\end{aligned}$$

Pierwszy z nich nosi nazwę kreski Sheffera, a zdanie $\varphi \mid \psi$ należy czytać " nie φ lub nie ψ" (por. bramka NAND w elektronice). Drugi to strzałka Peirce'a, a zdanie $\varphi \downarrow \psi$ należy czytać "ani φ ani ψ" (por. bramka NOR w elektronice). Pokaż, że zbiór $\{|\}$ jest funkcjonalnie pełny. (To samo można udowodnić dla $\{\downarrow\}$).

2. Pokaż, że formuła $r \to \neg\, s \vee \neg p$ (*jeśli wzrośnie bezrobocie, to podatki nie zostaną obniżone lub inwestycje nie pozostaną na tym samym poziomie*) jest twierdzeniem teorii $\mathcal{SGL}$, przedstawionej na końcu wykładu. Przedstaw drzewo wywodu w notacji sekwentowej. Można użyć reguł wtórnych, wyprowadzinych na wykładzie.

3. Przypadek niedokształconego (w logice) obrońcy.
Sądzono człowieka za udział w rabunku. Oskarżyciel i obrońca wygłosili następujące zdania.
Oskarżyciel: Jeśli oskarżony jest winny, to ma on wspólnika.
Obrońca: To nieprawda!
Dlaczego jest to najgorsza rzecz, jaką mógł powiedzieć obrońca?

4. Udowodnij, że poniższe formuły są twierdzeniami intuicjonistycznego rachunku zdań. Dowody przedstaw w systemie dedukcji naturalnej ($\leftrightarrow$ wymaga udowodnienia implikacji w obie strony). Można używać notacji "sekwentowej" lub "założeniowej".

(a) $\vdash \varphi \wedge \psi \leftrightarrow \psi \wedge \varphi$

(b) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \wedge \sigma \leftrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \sigma)$

(c) $\vdash \varphi \vee (\psi \wedge \sigma) \leftrightarrow (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \sigma)$

5. System dedukcji naturalnej dla logiki klasycznej można otrzymać, dodając do systemu dla logiki intuicjonistycznej jedną z poniższych reguł wnioskowania:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\neg\varphi]^n \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\varphi}\,{}_n(RAA) \qquad \text{lub} \qquad \dfrac{\neg\neg\varphi}{\varphi}\,(\neg\neg) \qquad \text{lub} \qquad \dfrac{}{\varphi \vee \neg\varphi}\,(TND)$$

Udowodnij równoważność tych reguł.

6. W systemie dedukcji naturalnej dla odpowiednich logik udowodnij poniższe twierdzenia.

	logika intuicjonistyczna		logika klasyczna
(a)	$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$	(a')	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$
(b)	$\vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg\neg\varphi$		
(c)	$\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \to (\varphi \to \psi)$	(c')	$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \vee \psi)$
(d)	$\vdash (\varphi \wedge \neg\psi) \to \neg(\varphi \to \psi)$	(d')	$\vdash \neg(\varphi \to \psi) \to (\varphi \wedge \neg\psi)$

Zauważ, że w dowodzie implikacji z prawej strony w lewą w logice klasycznej trzeba użyć reguły sprowadzenia do sprzeczności (RAA), reguły podwójnego zaprzeczenia ($\neg\neg$) lub reguły wykluczonego środka (TND).

7. Niech φ będzie formułą rachunku zdań. Niech $L(\varphi)$ i $P(\varphi)$ oznaczają odpowiednio liczbę lewych (otwierających) i prawych (zamykających) nawiasów w formule φ. Udowodnij przez indukcję strukturalną, że dla każdej formuły φ zachodzi równość $L(\varphi) = P(\varphi)$.