Lista 1

Łukasz Magnuszewski

25 lutego 2023

1	2	3	4	5	6	7
-	-	+	-	-	-	+

Zadanie 1

Zbiór spójników $\{\land, \neg\}$ jest funkcjonalnie pełny, więc wystarczy przedstawić te spójniki przy pomocy kreski Sheffera.

$$\neg\alpha \overset{\text{def}}{=} \alpha|\alpha$$

Teraz używając negacji

$$\alpha \land \beta \overset{\text{def}}{=} \neg(\alpha|\beta)$$

Zadanie 2

Mamy następujący zbiór aksjomatów

$$\{p \to q \lor r, \neg q \to s, s \land p \to \neg r\}$$

A naszym celem jest $r \to \neg s \lor \neg p$. Poniżej jest dowód w notacji sekwentowej

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\neg s \lor \neg p) \vdash \neg(\neg s \lor \neg p)}\,\text{(Ass)}}{\neg(\neg s \lor \neg p) \vdash s \land p}\,\text{(De Morgan)} \quad \dfrac{}{s \land p \to \neg r}\,\text{(Ax)}}{\neg(\neg s \lor \neg p) \vdash \neg r}\,(\to E) \quad \dfrac{}{r \vdash r}\,\text{(Ass)}}{\dfrac{r, \neg(\neg s \lor \neg p) \vdash \bot}{r \vdash \neg s \lor \neg p}\,\text{(RAA)}}\,(\neg E)}{\vdash r \to \neg s \lor \neg p}\,(\to I)$$

Zadanie 3

Wprowadźmy następujące oznaczenia:

$p \overset{\text{def}}{=}$ oskarżony jest winny

$q \overset{\text{def}}{=}$ oskarżony miał wspólnika

Wtedy wypowiedź oskarżyciela można zapisać jako

$$p \to q$$

zaś obrońcy jako

$$\neg(p \to q)$$

co jest równoważne

$$p \land \neg q$$

Czyli twierdzi on że oskarżony jest winny, oraz nie miał wspólnika. Co raczej nie zapowiada zbyt krótkiego wyroku. ☕

Zadanie 4

A)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\alpha \land \psi \vdash \alpha \land \psi}(Ass)}{\alpha \land \psi \vdash \psi}(\land E_2) \quad \dfrac{\dfrac{}{\alpha \land \psi \vdash \alpha \land \psi}(Ass)}{\alpha \land \psi \vdash \alpha}(\land E_1)}{\alpha \land \psi \vdash \psi \land \alpha}(\land I) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\psi \land \alpha \vdash \psi \land \alpha}(Ass)}{\psi \land \alpha \vdash \alpha} \quad \dfrac{\dfrac{}{\psi \land \alpha \vdash \psi \land \alpha}(Ass)}{\psi \land \alpha \vdash \psi}(\land E_1)}{\psi \land \alpha \vdash \alpha \land \psi}(\land I)}{\alpha \land \psi \iff \psi \land \alpha}(\iff I)$$

B)

$$\dfrac{}{(\alpha \land \psi) \land \sigma \iff \alpha \land (\psi \land \sigma)}(\iff I)$$

Zadanie 7

Niech α będzie formułą rachunku zdać. Niech $L(\alpha)$ i $P(\alpha)$ oznaczają odpowiednio liczbę lewych i prawych nawiasów w formule α. Udownijmy że dla każdej formuły zdaniowej $L(\alpha) = P(\alpha)$.

Przeprowadźmy dowód przez indukcję strukturalną:

1. Zmienne zdaniowe

Ustalmy dowolną zmienną zdaniową p, wtedy $L(p) = 0 = P(p)$.

2. $\top, \bot$

$L(\bot) = 0 = P(\bot)$ oraz $L(\top) = 0 = P(\top)$

3. Negacja

Ustalmy dowolną formułę α taką że $P(\alpha) = L(\alpha)$, wtedy

$$P((\neg\alpha)) = P(\alpha) + 1 \overset{\text{ind}}{=} L(\alpha) + 1 = L((\neg\alpha))$$

4. Koniunkcja

Ustalmy dowolne formuły α, β takie że $P(\alpha) = L(\alpha)$ oraz $P(\beta) = L(\beta)$, wtedy

$$P((\alpha \wedge \beta)) = P(\alpha) + P(\beta) + 1 \overset{\text{ind}}{=} L(\alpha) + L(\beta) + 1 = L((\alpha \wedge \beta))$$

Dowód dla pozostałych przypadków(impikacja, alternatywa, równoważność) analogiczny do tego dla koniunkcji

Zadanie 5

$(RAA) \to (\neg\neg)$

By to pokazać nastepującą formułe $\neg\neg\alpha \to \alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\alpha \vdash \neg\alpha}\,(Ass) \qquad \dfrac{}{\neg\neg\alpha \vdash \neg\neg\alpha}\,(Ass)}{\neg\alpha, \neg\neg\alpha \vdash \bot}\,(\neg E)}{\neg\neg\alpha \vdash \alpha}\,RAA}{\neg\neg\alpha \to \alpha}\,(\to I)$$

$(\neg\neg) \to (TND)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \vdash \neg(\alpha \vee \neg\alpha)}\,(Ass)}{\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \vdash \neg\alpha \wedge \alpha}\,(DeMorgan)}{\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \vdash \neg\alpha}\,(\wedge E_1) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \vdash \neg(\alpha \vee \neg\alpha)}\,(Ass)}{\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \vdash \neg\alpha \wedge \alpha}\,(DeMorgan)}{\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \vdash \alpha}\,(\wedge E_2)}{\neg(\alpha \vee \neg\alpha) \vdash \bot}\,(\neg E)}{\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)}\,(\neg I)}{\alpha \vee \neg\alpha}\,(\neg\neg)$$