Zadanie 1.11.F

Łukasz Magnuszewski

Treść

Przeprowadzić następującą konstrukcję zbiori Vitali'ego: Dla $x, y \in [0, 1)$, niech $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Sprawdzić że $\sim$ jest relacją równoważności. Niech Z będzie zbiorem który z każdej klasy abstrakcji tej relacji wbyiera dokładnie jeden element. Sprawdzić że $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (Z \oplus q) = [0, 1)$, gdzie $\oplus$ oznacza dodawanie mod 1.

Rozwiązanie

Relacja równoważności

Sprawdźmy najpierw, czy $\sim$ jest relacją równoważności.

Symetryczność

Ustalmy dowolne a,b takie że $a \sim b$ wtedy $\exists q \in \mathbb{Q}, a - b = q$. Ale wtedy $b - a = -q \in \mathbb{Q}$ czyli $b \sim a$.

Zwrotność

Astalmy dowolne a, wtedy $a - a = 0 \in \mathbb{Q}$ czyli $a \sim a$

Przechodniość

Ustalmy dowolne a, b, c takie że $a \sim b \sim c$. Wtedy $\exists p, q \in \mathbb{Q}$ że $a - b = p, b - c = q$ Wtedy $p - q = a - b - (b - c) = a - c$. Czyli $a - c \in \mathbb{Q}$ czyli $a \sim c$.

Sprawdzenie

Weźmy selektor z rodziny klas abstrakcji $\sim$, nazwijmy go Z. Sprawdźmy teraz czy $\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (Z \oplus q) = [0, 1)$

$\subseteq$

Ustalmy dowolny $x \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (Z \oplus q)$ wtedy $\exists q, x \in Z \oplus q$ Czyli $\exists z \in Z \subseteq [0, 1), q \oplus z = x$ Wtedy $q \oplus z \in [0, 1)$ z własności dodawania modulo 1.

$\supseteq$

Ustalmy dowolny $x \in [0,1)$ Weźmy jego reprezentanta i oznaczmy go jako z. Jako że $z \sim x$ to $\exists q, x = z + p = z \oplus p \in Z$ Czyli $x \in \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (Z \oplus q)$

Niemierzalność Z

Lemat

Pokażmy że następująca suma jest rozłączna: $\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} Z \oplus q$ Załóżmy niewprost że $\exists q, p \in \mathbb{Q} : q \neq p$ takie że $Z \oplus p \cap Z \oplus q \neq \emptyset$. Wtedy $\exists a : a \in Z \oplus p$ oraz $a \in Z \oplus q$. Ale to oznaczna że $\exists z_p, z_q \in Z$ takie że $z_p \oplus p = x = z_q \oplus q$. Ale to by znaczyło że $z_p = z_q$. Czyli $p = q$, co oznacza sprzecznośc i kończy dowód lematu.

Dowód niewprost

Załóżmy niewprost że Z jest mierzalne w sensie Lebesguea. Ustalmy dowolne $q \in \mathbb{Q} \bigcap [0,1)$. Wtedy $\lambda(Z \oplus q) = \lambda(Z)$ z niezmienniczności miary Lebesguea. Korzystając z lematu: $\lambda([0,1)) = \lambda(\bigcup_{x \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} Z \oplus q) = \sum_{x \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \lambda(Z \oplus q) = \sum_{x \in \mathbb{Q} \cap [0,1)} \lambda(Z)$ Wtedy jeśli $\lambda(Z) > 1$ to cała suma wynosi nieskończoność. A w przeciwnym wypadku 0. A powinno wyjść 1. Czyli mamy sprzeczność z której wynika że Z nie jest mierzalne.