Lista 11

Łukasz Magnuszewski

Zadanie 12

Pokazmy z twierdzenia Ore'a że jest to graf hamiltonowski.

Ustalmy dowolne $x, y \in V(G)$ takie że $\{x, y\} \notin E(G)$. Teraz każdy z pozostałych $n-2$ wierzchołków jest połączony zarówny z x jak i y. Udowdnijmy to szybko. Ustalmy dowolne v. Z założeń zadania. Przynajmniej 3 krawędzię z następującego zbioru są w grafie. $\{\{x, y\}, \{x, v\}, \{y, v\}\}$. Ale wiemy że x i y nie są połączone. Więc v jest połączone z x i y. Co oznacza że

$$deg(x) = deg(y) = n - 2$$

.

$$deg(x) + deg(y) = n + n - 4 > n$$

. Czyli twierdzenie Ore'a zachodzi dla n $>$ 3.

Zadanie 8

Przyjmijmy następujące oznaczenie $A_a = \{b \in G : \{a, b\} \in E(G)\}$

Niech $n = max\{out(v) : v \in G\}$ wtedy $\exists x \in G : out(x) = n$. Pokażmy teraz że z wierzchołka x można dojśc do każdego innego maksymalnie w dwóch krokach.

Ustalmy dowolny $v \in G : v \neq x$,

Wiemy że $|A_x| = n$ oraz że $|A_v| \leq n$. W takim razie $n + 1 = |A_x \cup \{x\}| > n \geq |A_v|$ Czyli $\exists z \in A_x \cup \{x\} : z \notin A_v$, w takim razie jako że nie ma krawędzi z v do z, to istnieje krawędź z do v. I mamy ścieżke od długości 2: $x \to z \to v$ (Albo 1 jeśli $x = z$). Czyli $d(x, v) \leq 2$.

Zadanie 10

Droga hamiltona

Tutaj jest przykładowa droga skoczka po szachownicy:

7	12	17	22	5
18	23	6	11	16
13	8	25	4	21
24	19	2	15	10
1	14	9	20	3

Cykl hamiltona

Zauważmy że jak potrakujemy szachownicę jako graf, którego wierzchołkami są pola szachownicy, a krawędzią są połączone te pola między którymi można się przemieścić skoczkiem w jednym ruchu. To będzie to graf dwudzielny: czarne pola to jeden podzbiór wierzchołków, zaś białe to drugi.

Kolor pola można wyznaczyć wzorem $color(x, y) = (x + y) \mod 2$. Zaś skoczek w swoim ruchu zmienia jedną współrzędną o 2, a drugą o 1. Czyli w takim razie zmienia parzystość sumy swoich współrzędnych. Co oznacza że zmienia kolor pola na którym stoi. I rzeczywiście jest to graf dwudzielny.

W grafie dwudzielnym mogą istnieć tylko parzyste cykle. A cykl po 25 wierzchołkach ma długość 25, czyli nieparzystą. Co oznacza że nie może on istnieć.

Zadanie 9

Indukcja po liczbie wierzchołków w grafie

Pooooooosadzka indukcyjna (n=1)

Śmigaaaaaaa

Suuuuus indukcjny $(n - 1 \implies n)$

Jak z naszego grafu o n wierzchołkach usuniemy 1 wierzchołkach, to otrzymamy graf o $n - 1$ wierzchołkach który wciąż jest turniejem, więc z założenia indukcyjnego jest w nim droga hamiltona. Teraz rozpatrzmy 3 przypadki:

Ten wierzchołek który usunęliśmy ma łuk do niego od wszystkich pozostałych wierzchołków, wtedy dostawiamy go na koniec drogi hamiltona (dla grafu n-1).

Ten wierzchołek który usunęliśmy ma łuk z niego do wszystkich pozostałych wierzchołków, wtedy dostawiamy go na początek drogi hamiltona (dla grafu n-1).

W pozostałych przypadkach wklejamy go po najdalszym wierzchołku w drodze hamiltona (dla grafu n-1), z którego wychodzi łuk do niego.

Na jeden z tych trzech sposobów otrzymaliśmy drogę hamiltona dla naszego grafu o n wierzchołkach. Co kończy krok indukcyjny

Zadanie 7

Pytanie po przetrawieniu historyjki sprowadza się do odpowiedzenia na pytanie, dla jakich n-ów W grafie K_n istnieje cykl eulera. Klika jest grafem spójnym więc by istniał cykl eulera wystarczy by każdy wierzchołek miał parzysty stopień. W klice każdy wierzchołek ma stopień równy $n-1$. Czyli by stopień każdego był parzysty n musi być nieparzyste.

Zadanie 15

Rozważmy graf Z który powstaje przez dodanie do grafu G nowego wierzchołka który jest połączony z wszystkimi pozostałymi. Wtedy w grafie Z zachodzi

$$\forall u, v \in V(Z) : deg_Z(u) + deg_Z(v) = deg(u) + 1 + deg(v) + 1 \geq n(Z) = n(G) - 1 + 1$$

Czyli z twierdzenie Ore'a w grafie Z jest cykl hamiltona. Usuwając z niego nowy wierzchołek, otrzymujemy drogę hamiltona w grafie G.