Lista 6

Łukasz Magnuszewski

Zadanie 1

W lewej stronie rozważamy wszystkie możliwe rozmiary delegacji $\sum_{k=1}^{n}$. Następnie dla danego rozmiaru rozważamy wszystkie możliwe składy osobowe o tym rozmiarze $\binom{n}{k}$ oraz ich lidera k.

Z kolei po prawej stronie, rozważamy wszystkich możliwych liderów k. A następnie rozważamy dla każdego pozostałego pracownika czy będzie w delegacji lub nie 2^{n-1}.

Zadanie 2

Rozważmy 2 rozłączne przypadki i je zsumujmy.

Ciągi kończące się zerem:

W tym przypadku żeby były jakiekolwiek ciągi spełniające warunki, to 0 musi być co najmniej tyle co 1 $l \geq k$. Żeby nie było dwóch jedynek pod rząd, to możemy skleić każdą 1 z 0 po prawej stronie. Wtedy będziemy mieli k sklejonych 10 oraz $l-k$ pojedynczych 0. Czyli możemy teraz patrzeć że mamy ciąg długości $(l-k)+k$. I teraz wystarczy rozważyć które miejsca będą zajęte przez zera, a które przez sklejenia. Wychodzi więc $\binom{l}{l-k}$. Dolna część wyrazu newtona może wyjść ujemna gdy $l < k$. I wtedy przyjmuję że wartość symbolu newtona jest równa 0.

Ciągi kończące się jedynką:

Mamy więc ustaloną ostatnią pozycję ciągu. I przedostatnia pozycja ciągu musi być 0. Czyli ten przypadek można sprowadzić do poprzedniego przypadku z k zmniejszonym o 1. Wychodzi więc $\binom{l}{l-k+1}$.

Podsumowanie:

Oba przypadki są rozłączne więc wystarczy je dodać: $\binom{l}{l-k} + \binom{l}{l-k+1}$.

Zadanie 3

Będziemy przede wszystkim korzystać z tego że na przedziale $[1, n]$ jest $\lfloor \frac{n}{a} \rfloor$ liczb podzielnych przez a. Przyjmijmy następujące oznaczenia że X, Y Z, V to odpowiednio liczby podzielne prze 2, 3, 7, 5 na przedziale $[1, n]$. Wtedy:

$$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor = |Y|, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor = |X|, \lfloor \frac{n}{7} \rfloor = |Z|, \lfloor \frac{n}{5} \rfloor = |V|$$

Wtedy musimy policzyć:

$$|(X \cup Y) \setminus (((Z \cup V) \cap X) \cup ((Z \cup V) \cap Y))|$$

Z zasady włączeń i wyłączeń wychodzi:

$$\begin{aligned}(\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2*3} \rfloor) - ((\lfloor \frac{n}{2*5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2*7} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2*5*7} \rfloor) \\ +(\lfloor \frac{n}{3*5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3*7} \rfloor - \lfloor \frac{n}{3*5*7} \rfloor) \\ -(\lfloor \frac{n}{2*5*7} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3*5*7} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2*3*5*7} \rfloor))\end{aligned}$$

Zadanie 4

Liczba wszystkich permutacji n-elementowych wynosi $n!$. Wystarczy odjąć od tego te permutacje w których przynajmniej jedna z k liczb pojawia się na swoim miejscu.

$$n! - |P_1 \cup P_2 \cup P_3 \dots P_k|$$

Możemy skorzystać z zasady włączeń i wyłączeń by obliczyć co mamy odjąć.

$$|P_1 \cup P_2 \cup P_3 \dots P_k| = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i+1} \binom{k}{i} (n-i)!$$

W i-tym kroku rozpatrujemy te permutacje które mają przynajmniej i pozycji poprawnych dla zbioru k liczb. Czyli wybieramy wszystkie możliwe i liczby, stąd $\binom{k}{i}$ oraz permutujemy resztę, stąd $(n-i)!$.

Zadanie 6

Przyjmuję że w tym zadania rozróżniam każdy z przedmiotów. Oznaczmy przez Ω zbiór wszystkich rozłożeń przedmiotów. Jego moc wynosi $|\Omega| = 20^n$. Teraz oznaczmy przez S_i zbiór tych rozłożeń w których i-ta szafa jest pusta, moc takiego zbioru wynosi $|S_i| = (20-4)^n$ Bo nie możemy nic włożyć do 4 szuflad z i-tej szafy. Z kolei $(20-4i)^n$ to moc zbioru tych permutacji w których i konkretnych szaf jest pustych. Odpowiedzią na to zadanie jest wzór:

$$20^n - |S_1 \cup S_2 \dots \cup S_5|$$

Możemy to policzyć z zasady włączeń i wyłączeń:

$$20^n - \sum_{i=1}^{5} (-1)^(i+1) \binom{5}{i} (20-4i)^n$$

W i-tym kroku rozpatrujemy wszystkie rozłożenia w których co najmniej i szaf jest pustych.

Zadanie 10

Wszystkich ustawień gdzie na przemian siedzą kobieta i mężczyzna jest $2(n!)^2$, dwójka się bierze stąd że musimy ustalić która parzystość miejsc jest zajmowana przez którą płeć. $n!$ to liczba jak mogą sie ustawić mężczyźni, i kobiety.

Teraz od tej liczby należy odjąć te ustawienia w których przynajmniej jedna para siedzi koło siebie. Można to policzyć z zasady włączeń i wyłączeń.

Najpierw policzy wzór na te rozłożenia w których przynajmniej k par siedzi koło siebie.

$$P_k = 2\binom{n}{k} k!(n-k)!^2$$

2 analogicznie co w wzorze na wszystkie kombinację. Potem wybieramy wszystkie pary które muszą siedzieć, stad $\binom{n}{k}$, potem wybieramy ich kolejność $k!$, a na koniec ustalamy kolejność pozostałych osób $(n-k)!^2$. Czyli ostateczna odpowiedź to:

$$2(n!)^2 - \sum_{k=1}^{n} P_k$$

Zadanie 9

Policzmy najpierw liczbę wszystkich możliwych ustawień $(2n)!$. Teraz wystarczy odjąć wszystkie niepoprawne rozstawienia. Wyznaczmy wzór na rozstawienie w których przynajmniej k wrogów siedzi koło siebie:

$$\binom{n}{k} 2^k (2n-2k+k)!$$

Najpierw wybieramy te pary $\binom{n}{k}$ potem w każdej parze ustalamy która osoba jest pierwsza 2^k, od tego momentu traktujemy taką parę jak jedną osobą. To teraz musimy policzyć wszystkie rozłożenia pozostałych osób $2n-2k$ oraz naszych k par. Stąd wychodzi $(2n-2k+k)!$.
Teraz wystarczy skorzystać z zasady włączeń i wyłączeń.

$$(2n)! - \sum_{k=1}^{n} (-i)^{i+1} \binom{n}{k} 2^k (2n-2k+k)!$$