Egzamin Teoria Katagorii

Łukasz Magnuszewski

7 lutego 2024

1 Zadanie 1

1.1 Kandydat na izomorfizm

Zdefiniujmy lambda term który odpowiada morfizmowi z A^{1+1} do $A \times A$.

$$F := \lambda f.\ < fL(1), fR(1) >$$

Oraz jego potencjalną odwrotność:

$$G := \lambda p.\ \lambda t.\ match\ t\ with\ \{L(x) \mapsto \pi_1\ p, R(x) \mapsto \pi_2\ p\}$$

1.2 $G \circ F = \lambda x.\ x$

Wszystkie przejścia łączymy przechodniością β, η-redukcji.

$$\lambda x.\ (\lambda p.\ \lambda t.\ match\ t\ with\ \{L(x) \mapsto \pi_1\ p, R(x) \mapsto \pi_2\ p\})\ ((\lambda f.\ < fL(1), fR(1) >)\ x)$$

$$(\beta - abs)$$

$$\lambda x.\ (\lambda p.\ \lambda t.\ match\ t\ with\ \{L(x) \mapsto \pi_1\ p, R(x) \mapsto \pi_2\ p\})\ (\ < xL(1), xR(1) >)$$

$$(\beta - abs)$$

$$\lambda x.\ (\lambda t.\ match\ t\ with\ \{L(x) \mapsto \pi_1\ (\ < xL(1), xR(1) >), R(x) \mapsto \pi_2\ (\ < xL(1), xR(1) >)\})$$

$$(\beta - proj_{1,2})$$

$$\lambda x.\ (\lambda t.\ match\ t\ with\{L(x) \mapsto xL(1), R(x) \mapsto xR(1)\})$$

(równosciowa definicja koproduktu)

$$\lambda x.\ x$$

1.3 $F \circ G = \lambda x.\ x$

Wszystkie przejścia łączymy przechodniością β, η-redukcji.

$$\lambda x.\ (\lambda f.\ < fL(1), fR(1) >)\ ((\lambda p.\ \lambda t.\ match\ t\ with\ \{L(x) \mapsto \pi_1\ p, R(x) \mapsto \pi_2\ p\})\ x)$$

$$(\beta - abs)$$

$$\lambda x.\ (\lambda f.\ < fL(1), fR(1) >)\ (\ \lambda t.\ match\ t\ with\ \{L(x) \mapsto \pi_1\ x, R(x) \mapsto \pi_2\ x\})$$

$$(\beta - abs)$$

$$\lambda x. < (\lambda t. match\, t\, with\{L(x) \mapsto \pi_1 x, R(x) \mapsto \pi_2 x\})L(1), (\lambda t.\ match\, t\, with\{L(x) \mapsto \pi_1 x, R(x) \mapsto \pi_2 x\})R(1) >$$

$$(\beta - abs)$$

$$\lambda x. < (match\ L(1)\ with\{L(x) \mapsto \pi_1 x, R(x) \mapsto \pi_2 x\}), (\ match\ R(1)\ with\{L(x) \mapsto \pi_1 x, R(x) \mapsto \pi_2 x\}) >$$

$$(\beta - match_{L,R})$$

$$\lambda x.\ < \pi_1\ x, \pi_2\ x >$$

(równosciowa definicja produktu)

$$\lambda x.\ x$$

Izomorfizm

Z tego że pokazaliśmy powyższe β, η-równosci, oraz z twierdzenia o poprawności interpretacji Rachunku Lambda, możemy stwierdzić, że $F \circ G = id$ oraz $G \circ F = id$ czyli F, G są izomorfizmami. Co pokazuje, że $A^{1+1} \cong A \times A$.

2 Zadanie 2

2.1 Informacje z wykładu i ćwiczeń

Przypomijmy następujące fakty z wykładu i ćwiczeń:

- W kategorii $Sets_*$, singletony to jednocześnie obiekty początkowe i końcowe.
- Dowolne dwa obiekty początkowe są izomorficzne, podobnie jak dwa obiekty końcowe.

2.2 $1 + 1$ to Obiekt początkowy

Ustalmy dowolny obiekt X w $Sets_*$ i pokażemy, że istnieje dokładnie jeden morfizm z $1 + 1$ do X.

$$
\begin{tikzcd}
& X & \\
1 \arrow[ur, "X_0"] \arrow[r, "L_1"'] & 1+1 \arrow[u, dashed, "U"] & 1 \arrow[ul, "X_0"'] \arrow[l, "R_1"]
\end{tikzcd}
$$

2.2.1 Istnienie

Korzystając z diagramu powyżej, konstruujemy morfizm U z $1+1$ do X następująco: Skoro 1 jest obiektem początkowym, to istnieje morfizm z 1 do X, oznaczmy go X_0. I wstawmy X_0 do diagramu, jako morfizm z 1 do X, na obu ramionach. I teraz z definicji koproduktu istnieje morfizm U z $1+1$ do X taki, że $U \circ L_1 = X_0$ i $U \circ R_1 = X_0$.

2.2.2 Unikalność

Załóżmy, że istnieją dwa morfizmy U_1 i U_2 z $1 + 1$ do X. Pokażemy, że $U_1 = U_2$.

Korzystając z tego samego diagramu (Ważne jest to że istnieje dokładnie jeden morfizm z 1 do X), zauważmy że oba morfizmy muszą spełniać równość $U_1 \circ L_1 = X_0$ oraz $U_2 \circ L_1 = X_0$. Bo 1 jest obiektem początkowym. Analogicznie dla R_1.

Czyli oba morfizmy sprawiają, że diagram komutuje, więc $U_1 = U_2$. Bo istnieje dokładnie jeden morfizm by diagram koproduktu komutował.

2.3 $1 + 1 \cong 1$

Jako że 1, oraz $1 + 1$ są obiektami początkowymi, to są izomorficzne.