Lista 8

Łukasz Magnuszewski

Zadanie 1

Oblicz sumę $\sum 2^{-k}$ braną po wszystkich takich $k \in \mathbb{N}$, że 2,3,5,7 nie dzielą k.

Z zasady włączeń i wyłączeń, ta suma wynosi:

$$\sum 2^{-k} - \sum 2^{-k*2} - \sum 2^{-k*3} - \sum 2^{-k*5} - \sum 2^{-k*7} + \sum 2^{-k*2*5} + \sum 2^{-k*2*3} + \sum 2^{-k*2*7} + \sum 2^{-k*3*5} + \sum 2^{-k*3*7} + \sum 2^{-k*5*7} - \sum 2^{-k*2*3*5} - \sum 2^{-k*2*3*7} - \sum 2^{-k*3*5*7} + \sum 2^{-k*2*3*5*7} \tag{1}$$

Żeby policzyć taką sumę możemy w każdej sumie przeprowadzić następującą operację, z wzoru na szereg geometryczny

$$\sum 2^{-k*a} = \sum (2^{-a})^k = \frac{1}{1-2^{-n}} = \frac{2^n}{2^n-1}$$

Podstawiając do wcześniej wyznaczonej sumy wychodzi

$$\frac{2^1}{2^1-1} - \frac{2^2}{2^2-1} - \frac{2^3}{2^3-1} - \frac{2^5}{2^5-1} - \frac{2^7}{2^7-1} + \frac{2^{2*3}}{2^{2*3}-1} + \frac{2^{2*5}}{2^{2*5}-1} + \frac{2^{2*7}}{2^{2*7}-1} + \frac{2^{5*3}}{2^{5*3}-1} + \frac{2^{7*3}}{2^{7*3}-1} + \frac{2^{5*7}}{2^{5*7}-1} - \frac{2^{2*3*5}}{2^{2*3*5}-1} - \frac{2^{2*3*7}}{2^{2*3*7}-1} - \frac{2^{2*7*5}}{2^{2*7*5}-1} - \frac{2^{3*7*5}}{2^{7*3*5}-1} + \frac{2^{2*3*5*7}}{2^{2*3*5*7}-1} \tag{2}$$

Zadanie 4

Użyjmy wzoru taylora dla funkcji x^α w punkcie 1

$$(x+1)^\alpha = \sum_{n=0}^{\text{inf}} \frac{f^{(n)}(1)}{k!} * (x)^n$$

Wzór na n-tą pochodną x^α policzoną w punkcie 1 wynosi

$$\alpha * (\alpha-1) * (\alpha-2) \ldots (\alpha-n+1)$$

Podstawiając do wzoru taylora wychodzi wzór dany w zadaniu

Zadanie 12

Na wykładzie były podane wzory na $P(x)$ oraz $R(x)$.

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^i}$$

$$R(x) = \sum_{i=1}^{\infty} 1 + x^i$$

Korzystając z tego otrzymujemy

$$R(x) * P(x^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 + x^i}{1 - x^{2i}}$$

Korzystając z wzorów skróconego mnożenia wychodzi

$$R(x) * P(x^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1 + x^i}{(1 + x^i)(1 - x^i)}$$

Skracając wychodzi nam $P(x)$

$$R(x) * P(x^2) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - x^i)} = P(x)$$

Zadanie 6

Wartość d dla jedynki wynosi 0, bo jedyna permutacja jednoelementowa nie jest nieporządkiem. Zaś zbiór pusty dokładnie na jeden sposób można pomieszać, nie robiąc nic. stad $d_0 = 1$. Teraz pokażmy następujący wzór

$$d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1})$$

Najpierw wybieramy który element pójdzie na n+1-szą pozycję, stąd razy n. Potem rozpatrujemy 2 niezależne możliwości, albo n+1 liczba pozostanie na miejscu wybranej liczby, i pozostałe elementy poszuflujemy, stąd wychodzi d_{n-1}. Albo n+1 wyraz też poszuflujemy stąd d_n.

Indukcyjnie udowodnijmy następujący wzór.

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n$$

Baza

$$d_2 = 2 * 0 + 1 = 1(1 + 0)$$

Krok indukcyjny

$$\begin{aligned} d_{n+1} = n(d_n + d_{n-1}) = n(nd_{n-1} + (-1)^n + d_{n-1}) \\ = n((n+1)d_{n-1} + (-1)^n) = n^2 d_{n-1} + n(-1)^n - nd_{n-1} - (-1)^n \\ = (n+1)d_n + (-1)^n \end{aligned} \quad (3)$$

Zadanie 10

Sprawdźmy najpierw czy zgadza się dla $n = 0$. Wtedy $C_0 = 1$ bo mamy dokładnie jeden sposób by połączyć 0 punktów przy pomocy 0 lini. Teraz rozpatrzmy pozostałe przypadki $n > 0$. Najpierw dla pierwszego punktu wybieramy z którym punktem go połączymy. Jako że mają to być nieprzecinające się linie, to to cięcie podzieli nam problem na 2 mniejsze niezależne problemy. Jednak wybór punktu nie jest dowolny, jeśli pod problemy będą miały nieparzystą liczbę punktów, to by otrzymać $2n$ liń, to musiałaby by istnień linia przecinająca tą właśnie wybraną. Skrajne podziały to $2n - 2, 0$ oraz $0, 2n - 2$ Czyli przecięcia z sąsiednimi punktami. Dochodzą dodatkowo wszystkie pośrednie podziały przeskakujące o 2. Czyli jest ich n. Po podzieleniu na pod problemy możemy skorzystać z wyników dla mniejszej liczby punktów. I jako że pod problemy są niezależne to wystarczy pomnożyć oba wyniki. Czyli ostatecznie wychodzi

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_j C_{n-j-1}$$

Zadanie 14

$$[n, k] = (n-1)[n-1, l] + [n-1, k-1]$$

$$[n, n] = 1$$

$$[n, 0] = 0$$

$$[0, 0] = 1$$

Oraz gdy $k > n$ to liczba sterlinga wynosi 0. Przeprowadźmy indukcję po n

Baza

Rozważmy $n = 1$, Wtedy

$$\overline{x} = 1 = [0, 0] = \sum_{k=0}^{\infty} [0, k] x^k$$

Krok indukcyjny

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1) = x^{\overline{n-1}} * (x+n-1) = \sum_{k=0}^{\infty}[n-1,k]x^k * (x+n-1) =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}[n-1,k]x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty}[n-1,k]x^k * (n-1) = \sum_{k=1}^{\infty}[n-1,k]x^k + \sum_{k=1}^{\infty}[n-1,k]x^k * (n-1) + [n-1,k]$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} x^k([n-1,k-1] + [n-1,k](n-1)) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k[n,k] + [n,0]x^0 = \sum_{k=1}^{\infty} x^k[n,k] \tag{4}$$

Zadanie 7

$$D'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{d_n x^n}{n!})' = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{nd_n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{d_n x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d_{n+2}x^{n+1}}{(n+1)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)d_{n+1}x^{n+1}}{(n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)d_n x^{n+1}}{(n+1)!} = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)d_{n+1}x^n}{(n+1)!} + x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)d_n x^n}{(n+1)!}$$
$$= xD'(x) + xD(x) \tag{5}$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{D'(x)}{D(x)} = (\ln D(x))'$$
$$\ln D(x) = \int_0^x \frac{z}{1-z}dz = -\ln|x-1| - x$$
$$D(x) = e^{-\ln|x-1|-x} = \frac{e^{-x}}{|x-1|}$$

Zadanie 3

Oblicz $a_n = \sum_{i=1}^n F_i F_{n-i}$

$$\begin{aligned} a_n = \sum_{i=1}^{n} F_i F_{n-i} &= \sum_{i=1}^{n-2} F_i(F_{n-i-1} + F_{n-2-i}) + F_{n-1} * 1 + F_n * 0 \\ &= \sum_{i=1}^{n-2} F_i F_{n-i-1} + \sum_{i=1}^{n-2} F_i F_{n-2-i} + F_{n-1} = \\ (a_{n-1} - F_{n-1}F_0) + a_{n-2} + F_{n-1} &= a_{n-1} + a_{n-2} + F_{n-1} = a_n \end{aligned} \tag{6}$$

$$(E^2 - E - 1)\langle a_{n-2}\rangle = \langle F_{n-1}\rangle$$