

# Lista 4

Łukasz Magnuszewski

## Zadanie 1

### Treść

Niech  $\{P_k\}$  będzie ciągiem standardowych wielomianów ortogonalnych w przedziale  $[a, b]$ , z wagą  $p(x)$ . Wykazać że zachodzi związek rekurencyjny

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - c_1,$$

$$P_k(x) = (x - c_k)P_{k-1}(x) - d_k P_{k-2}(x) \quad (k = 2, 3, \dots)$$

gdzie

$$c_k = \frac{\langle x P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}$$

$$d_k = \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle}$$

### Rozwiązanie

Przeprowadźmy silną indukcję po  $k$ :

#### Baza indukcji

Dla  $k = 0$  w oczywisty sposób zachodzi zależność. Rozpatrzmy więc  $k = 1$ . Jako że  $P_0 \perp P_1$  to:

$$0 = \langle P_0, P_1 \rangle = \langle 1, x - c_1 \rangle = \langle 1, x \rangle - c_1 \langle 1, 1 \rangle$$

Więc

$$c_1 = \frac{\langle x, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} = \frac{\langle P_0 x, P_0 \rangle}{\langle P_0, P_0 \rangle}$$

#### Krok indukcyjny

Pokażmy że ta zależność zachodzi dla  $k$  wielomianu. Rozpiszmy  $P_k$  w następujący sposób

$$P_k = x P_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i P_i$$

Teraz wiemy że  $P_k$  ortogonalne z poprzednimi wielomianami. Rozpatrzmy  $j \leq k-3$

$$\langle P_k, P_j \rangle = \langle xP_{k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i P_i, P_j \rangle = \langle xP_{k-1}, P_j \rangle + \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \langle P_i, P_j \rangle$$

Korzystając z tego że  $\{P_x\}$  to ciąg ortogonalny, otrzymujemy

$$\langle xP_{k-1}, P_j \rangle + \alpha_j \langle P_j, P_j \rangle$$

Udowodnijmy teraz krótki lemat 1

$$\langle xf, g \rangle = \int_b^a p(x)xf(x)g(x)dx = \int_b^a p(x)f(x)g(x)dx = \langle f, xg \rangle$$

Używając tego lematu otrzymujemy

$$\langle xP_{k-1}, P_j \rangle + \alpha_j \langle P_j, P_j \rangle = \langle P_{k-1}, xP_j \rangle + \alpha_j \langle P_j, P_j \rangle$$

Wielomian  $xP_j$  ma mniejszy stopień niż  $P_{k-1}$  więc są one ortogonalne. Czyli wychodzi

$$0 = \langle P_k, P_j \rangle = \alpha_j \langle P_j, P_j \rangle$$

Wielomian  $P_j$  nie jest zerowy więc jego iloczyn skalarny z samym sobą jest niezerowy więc  $\alpha_j = 0$ . Usuając zera z sumy w wzorze na  $P_k$  wychodzi

$$P_k = xP_{k-1} + \alpha_{k-1}P_{k-1} + \alpha_{k-2}P_{k-2}$$

Rozpatrzmy teraz  $j = k-2$

$$\langle P_k, P_{k-2} \rangle = \langle xP_{k-1} + \alpha_{k-1}P_{k-1} + \alpha_{k-2}P_{k-2}, P_{k-2} \rangle$$

Można to porozbijać z liniowości

$$\langle xP_{k-1}, P_{k-2} \rangle + \langle \alpha_{k-1}P_{k-1}, P_{k-2} \rangle + \alpha_{k-2} \langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle$$

Środkowy wyraz się zeruje z ortogonalności

$$\langle xP_{k-1}, P_{k-2} \rangle + \alpha_{k-2} \langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle = 0$$

Korzystając z lematu 1 wychodzi wzór na  $\alpha_{k-2}$

$$\alpha_{k-2} = -\frac{\langle P_{k-1}, xP_{k-2} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle}$$

Mamy już prawie dobrą postać, ale trzeba naprawić licznik, rozpiszmy w tym celu  $P_{k-1}$  podobnie jak rozpisaliśmy  $P_k$

$$P_{k-1} - xP_{k-2} = \sum_{i=0}^{k-2} \beta_i P_i$$

Czyli wychodzi

$$xP_{k-2} = P_{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} \beta_i P_i$$

Możemy to podstawić

$$\langle P_{k-1}, xP_{k-2} \rangle = \langle P_{k-1}, P_{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} \beta_i P_i \rangle =$$

Z liniowości wychodzi

$$\langle P_{k-1}, P_{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} \beta_i P_i \rangle = \langle P_{k-1}, \rangle + \sum_{i=0}^{k-2} \beta_i \langle P_{k-1}, P_i \rangle$$

Z ortogonalności  $P_i \perp P_{k-1}$  wychodzi

$$\langle P_{k-1}, xP_{k-2} \rangle = \langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle + \sum_{i=0}^{k-2} \beta_i \langle P_{k-1}, P_i \rangle = \langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle$$

Podstawiając to do wzoru na  $\alpha_{k-2}$  wychodzi

$$\alpha_{k-2} = -\frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle}$$

Co zgadza się z wzorem na  $d_k$ .

Rozpatrzmy teraz  $j = k - 1$ . Możemy też rozpisać  $P_k$

$$\langle P_k, P_{k-1} \rangle = \langle xP_{k-1} + \alpha_{k-1}P_{k-1} + \alpha_{k-2}P_{k-2}, P_{k-1} \rangle$$

Z liniowości wychodzi

$$\langle P_k, P_{k-1} \rangle = \langle xP_{k-1}, P_{k-1} \rangle + \langle \alpha_{k-1}P_{k-1}, P_{k-1} \rangle + \langle \alpha_{k-2}P_{k-2}, P_{k-1} \rangle$$

Z  $P_{k-2} \perp P_{k-1}$  wychodzi

$$\langle P_k, P_{k-1} \rangle = 0 = \langle xP_{k-1}, P_{k-1} \rangle + \langle \alpha_{k-1}P_{k-1}, P_{k-1} \rangle$$

Wychodzi więc następujący wzór na  $\alpha_{k-1}$

$$\alpha_{k-1} = -\frac{\langle xP_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}$$

Czyli wychodzi dokładnie  $-c_k$  Podstawiając alphy do wzory na  $P_k$  wychodzi

$$P_k = xP_{k-1} + \alpha_{k-1}P_{k-1} + \alpha_{k-2}P_{k-2} = P_{k-1} \left( x - \frac{\langle xP_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle} \right) + \frac{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}{\langle P_{k-2}, P_{k-2} \rangle} P_{k-2} = P_{k-1}(x - c_k) - d_k P_{k-2}$$

## Zadanie 2

Niech  $\bar{T}_k(x)$  będzie standardowymi wielomianami ortogonalnymi w przedziale  $[-1, 1]$  z wagą  $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ . Znaleźć związek rekurencyjny spełniany przez te wielomiany

Zgadujemy na podstawie zadania 1 z listy 7, że ten ciąg wielomianów to podkreślone wielomiany Czybeszewa. Czyli są spełnione następujące własności

$$\bar{T}_0(x) = 1 \quad \bar{T}_1(x) = x$$

$$\bar{T}_k(x) = \bar{T}_{k-1}(x) - \frac{1}{2}\bar{T}_{k-2}(x) = 2^{-(k-1)}T_k(x)$$

Z zadania 17.1 wiemy że dla  $k \neq l$

$$\langle T_k, T_l \rangle = \int_b^a (1 - x^2)^{(-1/2)} T_k(x) T_l(x) dx = 0$$

W takim razie

$$\langle \bar{T}_k \bar{T}_l \rangle = \langle T_k 2^{-(k-1)}, T_l 2^{-(l-1)} \rangle = \int_b^a (1 - x^2)^{-1/2} T_k(x) 2^{-(k-1)} T_l(x) 2^{-(l-1)} dx$$

Wyciągając stałe przed nawias wychodzi

$$2^{-(k-1)} 2^{-(l-1)} \int_b^a (1 - x^2)^{-1/2} T_k(x) T_l(x) dx = 0 = \langle \bar{T}_k \bar{T}_l \rangle$$

Czyli rzeczywiście nasz zgadnięty ciąg jest standardowym ciągiem wielomianów, dla tego przedziału i wagi.

## Zadanie 3

Jakim wzorem wyraża się n-ty wielomian optymalny dla funkcji  $f$  w sensie normy

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-1/2} f^2(x) dx}$$

Zauważmy że jest to taka sama norma jak w poprzednim zadaniu, więc skorzystajmy z wzoru na wykładzie dla ortogonalnego ciągu  $\bar{T}_k$

$$w_n^* = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k$$

Dowód: analogicznie do zadania 7 z poprzedniej listy Korzystając z zadania 5 z poprzedniej listy wystarczy pokazać że

$$\forall w \in \Pi_n \langle f - w_n^*, w \rangle = 0$$

Możemy się ograniczyć do wektorów bazowych, bo każdy wektor można przedstawić jako kombinację liniową wektorów bazowych. Rozważmy jako bazę nasz ciąg ortogonalny obcięty do  $n$ . Wtedy korzystając z liniowości wychodzi

$$\langle f - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} P_k, P_j \rangle = \langle f, P_j \rangle - \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} \langle P_k, P_j \rangle$$

Korzystając że  $P_k \perp P_l$  dla  $k \neq l$  wychodzi

$$\langle f, P_j \rangle - \frac{\langle f, P_j \rangle}{\langle P_j, P_j \rangle} \langle P_j, P_j \rangle = 0$$

## Zadanie 4

Niech  $p_n, q_n \in \Pi_n$  będą wielomianami optymalnymi dla funkcji ciągłej na odcinku  $[a, b]$  w sensie normy jednostajnej. Udowodnić że  $p_n \equiv q_n$ . Co z tego wynika?

Dla  $n = 1$  trywialne. Od tego momentu rozpatrujemy  $n > 1$ . Z twierdzenia Czybeszewa o Alternansie. Istnieją takie punkty  $x_i, y_i$  dla  $i \leq n+1$  Że zachodzą następujące własności

$$f(x_i) - p_n(x_i) = (-1)^i spE \quad f(y_i) - q_n(y_i) = (-1)^i sqE$$