1. Algebry Boole'a

(a) $\mathcal{C} \subseteq P(X)$ ciało zbiorów, gdy:

- $\emptyset, X \in \mathcal{C}$
- $\mathcal{C}$ zamknięte na $\cup, \cap, {}^c$.

$C = (\mathcal{C}, \cup, \cap, {}^c, \underset{\emptyset}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{0}}}, \underset{X}{\underset{\shortparallel}{\mathbb{1}}})$ ciało zbiorów.

własności:

(*)
- $\cup, \cap$ przemienne, łączne, wzajemnie rozdzielne.
- $(a \cup b)^c = a^c \cap b^c$, $(a^c)^c = a$, $\mathbb{0}^c = \mathbb{1}$
- (prawa pochłaniania)
  $a \cup (a \cap b) = a$, $a \cap (a \cup b) = a$

Abstrahujemy: $L = \{\vee, \wedge, ', \mathbb{0}, \mathbb{1}\}$ język algebr Boole'a.

Algebra Boole'a:

$\mathbb{A} = (\mathbb{A}, \vee, \wedge, ', \mathbb{0}, \mathbb{1})$ spełniająca (*)

np. $(\mathcal{C}, \cup, \cap, {}^c, \mathbb{0}, \mathbb{1})$: algebra Boole'a

BA = "teoria algebr Boole'a" (aksjomaty : (*) równościowe)

$\mathcal{A}_{BA}$: rozmaitość algebr Boole'a.

Tw. (Stone). Jeśli $\mathbb{A}$: algebra Boole'a to istnieje ciało zbiorów $\mathcal{C}$ t.że $\mathbb{A} \cong \mathcal{C}$.

L: język, sygnatura algebry, $L = \{f_1, f_2, \ldots\}$
(zbiór symboli działań)
z przypisanymi arnościami

L-algebra:

$\mathbb{A} = (A, f_1^{\mathbb{A}}, f_2^{\mathbb{A}}, \ldots)$

działania w $\mathbb{A}$, interpretacje symboli
o zadanych $f_1, f_2, \ldots$
arnościach

$\sim$ na $\mathbb{A}$ relacja równoważności:

- kongruencja, gdy zgodna z działaniami f_i

tzn: gdy $x_1 \sim x_1', \ldots, x_{k_i} \sim x_{k_i}'$, to

$f_i^{\mathbb{A}}(x_1, \ldots, x_{k_i}) \sim f_i^{\mathbb{A}}(x_1', \ldots, x_{k_i}')$

Wtedy na $\mathbb{A}/_\sim$: naturalna struktura
L-algebry ilorazowej.

$f_i(x_1/\sim, \ldots, x_{k_i}/\sim) = f_i(x_1, \ldots, x_{k_i})/\sim.$

$\mathbb{A}$ rozmaitości algebr, w języku L, z teorią T.
(niertywialna)

Def $\mathbb{A} \in \mathcal{A}$, $X \subseteq \mathbb{A}$ jest zbiorem wolnych generatorów $\mathbb{A}$,

gdy $\forall \mathbb{B} \in \mathcal{A}\ \forall f_0 : X \longrightarrow \mathbb{B}\ \exists!\ \underset{f_0}{\overset{}{f}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{B}$ homomorfizm.

$$f \supseteq f_0$$

Konstrukcja algebry wolnej $\mathbb{A}$ nad X:

- $W(X) = \{$ wyrażenia algebraiczne o zmiennych z X, w języku L $\}$

np (algebry Boole'a):
gdy $a, b, c \in X$:
$a \vee (b \wedge c)$, $a \vee a'$, $(a \wedge (b \vee a')) \vee \mathbb{1}$, ...

- $\sim$ na $W(X)$; $\sigma, \tau \in W(X)$

$$\sigma \sim \tau \iff T \vdash \sigma = \tau$$

$$\iff \forall \mathbb{B} \in \mathcal{A}\ \forall f : X \longrightarrow \mathbb{B}$$

$$\mathbb{B} \models \sigma^f = \tau^f.$$

np (algebry Boole'a):

$$a \vee (b \wedge c) \sim (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \vee \mathbb{1} \sim \mathbb{1}.$$

$W(X)$: L-algebra. Dla $* \in L$, $\sigma, \tau \in W(X)$

$\sigma * \tau \in W(X)$ naturalnie.

$\sim$: kongruencja na $W(X)$.

· Algebra ilorazowa

$$\mathbb{A} := W(X)/\sim.$$

· $x \neq y \in X \Rightarrow x \not\sim y$ (bo $\mathcal{A}$: nietrywialna)

· X utożsamiamy z $\{x/\sim : x \in X\}$

· $X \subseteq \mathbb{A}$.

· $\mathbb{A} \in \mathcal{A}$, tzn: $\mathbb{A} \models T$.

<u>D-d</u>. Niech $\sigma(x_1, \dots, x_n)$, $\tau(x_1, \dots, x_n) \in W(X)$.

$w_1, \dots, w_n \in W(X)$.

Wtedy $\sigma(w_1, \dots, w_n)$, $\tau(w_1, \dots, w_n) \in W(X)$. i

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{A} \models \sigma(w_1, \dots, w_n)/\sim &= \sigma(w_1/\sim, \dots, w_n/\sim) \\ \tau(w_1, \dots, w_n)/\sim &= \tau(w_1/\sim, \dots, \tau_n/\sim) \end{aligned}\right)$$ indukcyjnie względem σ

Zał, że $\sigma(\vec{v}) = \tau(\vec{v})$: aksjomat równościowy teorii T,

Pdk, że $\mathbb{A} \models \sigma(\vec{v}) = \tau(\vec{v})$.

tzn: dla wszystkich $w_1, \dots, w_n \in W(X)$:

$$\mathbb{A} \models \sigma(w_1/\sim, \dots, w_n/\sim) = \tau(w_1/\sim, \dots, w_n/\sim$$

Ale: skoro

$$T \vdash \sigma(\vec{v}) = \tau(\vec{v})$$

to $T \vdash \sigma(w_1,\dots,w_n) = \tau(w_1,\dots,w_n)$

więc $\sigma(w_1,\dots,w_n) \sim \tau(w_1,\dots,w_n)$

czyli $\sigma(w_1,\dots,w_n)/_\sim = \tau(w_1,\dots,w_n)/_\sim$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \| \qquad\qquad\qquad\qquad \| \longleftarrow$ w $\mathbb{A}$, więc:

$$\mathbb{A} \models \sigma(w_1/_\sim,\dots,w_n/_\sim) = \tau(w_1/_\sim,\dots,w_n/_\sim).$$

- X: zbiór wolnych generatorów $\mathbb{A}$:

bo: niech $\mathbb{B} \in \mathcal{A}$, $f_0 : X \longrightarrow \mathbb{B}$ dowolne

$$f_0 \subseteq f_1 : W(X) \longrightarrow \mathbb{B}$$

homomorfizm L-algebr.

Lemat. Niech $\sigma, \tau \in W(X)$. Jeśli $\sigma \sim \tau$, to $f_1(\sigma) = f_1(\tau)$ w $\mathbb{B}$.

D-d. $\sigma \sim \tau \Rightarrow T \vdash \sigma = \tau$

$\Rightarrow \mathbb{B} \models f_1(\sigma) = f_1(\tau)$.

Dlatego: $\exists!\, f : W(X)/_\sim \longrightarrow \mathbb{B}$ homomorfizm

t. że

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\#"] & \mathbb{B} \\ W(X)/_\sim \arrow[ur, dashed, "?!\, f"'] & \end{tikzcd}$$

$$\boxed{f(\sigma/_\sim) = f_1(\sigma)}$$

Przypadek algebr Boole'a.

Które algebry Boole'a są wolne?

skończone?

Skończona algebra Boole'a $\cong \mathcal{P}(X)$

skończony

Uwaga 1. $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, {}^c, 0, 1)$: wolna algebra Boole'a $\Leftrightarrow |X|$: potęga 2.

2. Jeśli $\mathbb{A}, \mathbb{B}$: przeliczalne bezatomowe algebry Boole'a, to $\mathbb{A} \cong \mathbb{B}$.

3. Przeliczalna bezatomowa algebra Boole'a jest wolna, rangi $\aleph_0$.