Lista 4

Łukasz Magnuszewski

Zadanie 3

Treść

Pokaż, że iloczyn dowolnych k kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez k!.

Rozwiązanie

Iloczyn w zadaniu możemy zapisać dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ jako:

$$\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)$$

Możemy domnożyć 1 zapisane jako $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$

$$\frac{(n-k)!}{(n-k)!}\prod_{i=0}^{k-1}(n-i) = \frac{1}{(n-k)!}\prod_{i=1}^{n} i = \frac{(n)!}{(n-k)!}$$

Żeby ta liczba była podzielna przez $k!$ to iloraz tej liczby oraz k! musi być naturalny

$$\frac{(n)!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \in \mathbb{N}$$

Zadanie 4

a)

Przyjmijmy że w turniej gra n drużyn. Wtedy każda drużyna rozegra w trakcie całego turnieju $n-1$ meczy. Rozpatrzmy 2 przypadki:

1'

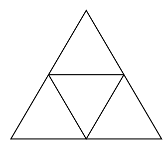
Przynajmniej jedna drużyna rozegrała wszystkie mecze. Wtedy zagrała ona mecz z każdą inna drużyną. Czyli każda drużyna rozegrała co najmniej jeden mecz. Czyli mamy $n-1$ szufladek możliwych liczby gier: $\{1, 2, \ldots, (n-1)\}$. Oraz n kulek(liczba drużyn), wtedy z zasady szufladkowej przynajmniej 2 drużyny mają taką samą liczbę meczy.

2'

Żadna drużyna nie rozegrała $n-1$ meczy. Wtedy tak samo mamy $n-1$ szufladek: $\{0, 1, \ldots, (n-2)\}$ Oraz n kulek. Czyli przynajmniej 2 drużyny rozegrały taką samą liczbę meczy.

b)

Połączmy środki boków odcinkami, podzieli nam to trójkąt na 3 mniejsze trójkąty równoboczne, o bokach długości $\frac{1}{2}$. Podział ten można zobaczyć na rysunku poniżej:



Naszymi szufladkami będą trójkąty (4), zaś kulkami punkty (5), wtedy z zasady szufladkowej w przynajmniej jednym trójkącie znajdują się 2 punkty. A maksymalna odległość między dwoma punktami w trójkącie to maksimum z długości boków. Jako że każdy trójkąt jest równoboczny o boku równym 0.5, to maksimum wynosi $\frac{1}{2}$. Czyli te dwa punkty oddalone są o co najwyżej $\frac{1}{2}$.

c)

Przyjmijmy że ten wielościan ma n ścian. Wtedy każda ściana ma przynajmniej 3 krawędzie i maksymalnie $n-1$ krawędzi, bo każda krawędź jest dzielona z dokładnie jedną ścianą. Więc mamy $n-1-3+1$ szufladek (możliwych liczb krawędzi), oraz n kulek (ścian). Czyli z zasady szufladkowej przynajmniej 2 ściany mają taką samą liczbę krawędzi.

Zadanie 6

Minimalna suma maksymalnie 10 liczb ze zbioru S wynosi co najmniej 0, zaś maksymalna co najwyżej 990. Daję to 991 możliwych sum. Zaś wszystkich podzbiorów S jest $2^{10} = 1024$ Czyli z zasady szufladkowej wynika że przynajmniej 2 podzbiory mają taką samą sumę.

Zadanie 10

a)

Liczba możliwych rozstawień figur szachowych na szachownicy:

$$\binom{64}{2}\binom{62}{2}\binom{60}{2}\binom{58}{1}\binom{57}{1}\binom{56}{8}\binom{48}{8}\binom{40}{2}\binom{38}{2}\binom{36}{2}\binom{34}{1}\binom{33}{1}$$

Gdzie najpierw z wszystkich pól wybieramy białe gońce, potem z pozostałych pól czarne gońce, dalej białe wieże, białego króla, białego hetmana, białe pionki, czarne pionki, czarne wieże, białe skoczki, czarne skoczki, czarnego króla, czarnego hetmana.

b)

Teraz zostało dodane ograniczenie że obaj gracze muszą mieć gońce na polach różnego koloru. Skorzystamy z poprzedniego wyniku tylko zmienimy wyrazy odpawiadające gońcom. Najpierw wybieramy gońce białego $\binom{32}{1}$ możliwości czarnopolowego gońca, oraz $\binom{32}{1}$ białopolowego gońca. Z kolei czarny gracz ma już mniej możliwości: $\binom{31}{1}$ możliwości czarnopolowego gońca, oraz $\binom{31}{1}$ białopolowego gońca. Po podstawieniu tych liczb za 2 pierwsze wyrazy wzoru z podpunktu a wychodzi:

$$\binom{32}{1}\binom{32}{1}\binom{31}{1}\binom{31}{1}\binom{60}{2}\binom{58}{1}\binom{57}{1}\binom{56}{8}\binom{48}{8}\binom{40}{2}\binom{38}{2}\binom{36}{2}\binom{34}{1}\binom{33}{1}$$

Zadanie 9

a)

$$10\sum_{i=2}^{5}(\binom{5}{i}\binom{9}{5-i}(5-i)!)$$

Po pierwsze 10 bierze się stad że musimy rozpatrzeć wszystkie możliwości dla cyfry która występuję więcej razy. Następnie rozpatrujemy wszystkie możliwości ile ta cyfra występuje w numerze, co najmniej 2 i co najwyżej 5. Dla każdego tego przypadku musimy rozważyć które z 5 pól będą zajmowane przez tą cyfrę: $\binom{5}{i}$. Następnie musimy rozważyć które z pozostałych cyfr pojawią się w numerze, i żadna nie może się powtórzyć, Stąd wychodzi $\binom{9}{5-i}$. Następnie trzeba ustalić w jakiej kolejności są ustawione na wolnych polach numeru, stąd $(5-i)!$.

b)

Policzmy najpierw liczbę wszystkich możliwych 5 cyfrowych numerów:

$$10^5$$

Teraz wystarczy policzyć te numery w których nie powtarza się żadna cyfra:

$$\binom{10}{5}5!$$

I po odjęciu otrzymamy te numery w których powtarza się co najmniej jedna cyfra

$$10^5-\binom{10}{5}5!$$

Zadanie 8

Liczba położonych wież musi być mniejsza równa od liczby pól na szachownicy, czyli

$$m(k-1)+1 \leq nm$$

Stąd wynika że $k < n \leq m$. Ponumerujmy teraz pola numerami od 0 do m, tak by w żadnym wierszu ani kolumnie nie powtarzały się numery. Można to zrobić, według wzoru $f(x,y) = (x+y)\%m$. Jest to możliwe gdyż $n \leq m$. Takie ponumerowanie gwarantuję że wieże stojące na polach o tym samym numerze się nie szachują. Przykład dla $n = 5, m = 7$ jest na rysunku.

0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	0
2	3	4	5	6	0	1
3	4	5	6	0	1	2
4	5	6	0	1	2	3

Naszymi szufladkami będą grupy pól o tym samym numerze, jest ich dokładnie m. Zaś naszymi kulkami będą wieże, jest ich $m(k-1)+1$. Czyli z zasady szufladkowej w przynajmniej jednej szufladce jest co najmniej k kulek. Czyli wieże odpowiadające kulkom z tej szufladki się nie szachują i jest ich co najmniej k.