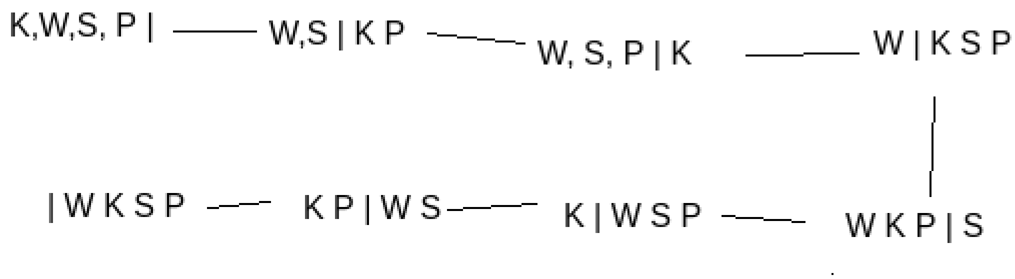
Lista 9

Łukasz Magnuszewski

Zadanie 1

Przyjmijmy następujące oznacznie K: koza, W: Wilk, S: Sałata, P: Przewoźnik
Oraz niech | rozdziela to co jest po lewej oraz prawej stronie rzeki.



Zadanie 2

Będę korzystał ze wzoru

$$|G| = |G_x||O_x|$$

W Rysunku pierwszym, przyjmijmy następująca numeracje wierzchołków, leksykograficznie według współrzędnych, przy czym nie nadajemy numeru dla x.

$$|O_x| = |\{1, 2, x, 6\}| = 4$$

Bo x może przejść na wszystkie wierzchołki po prawej i lewej stronie. Zaś

$$|G_x| = |\{id, (1, 2), (3, 5), (1, 2)(3, 5)\}| = 4$$

Więc $|G| = 4 * 4 = 16$

W rysunku drugim przyjmijmy analogiczne oznaczenia. Wtedy

$$|O_x| = |\{1, 2, 3, 4, 5, 6, x, 7\}| = 8$$

Z tego jak spermutujemy sąsiadów x czyli 1, 5, 7 wynikają jednoznacznie rozstawienie pozostałych wierzchołków.

$$|G_x| = 3!$$

Więc $|G| = 8 * 3! = 48$

Zadanie 3

Jest to graf 3 regularny więcx może przejśc na każdy wierzchołek

$$|O_x| = 10$$

Zaś

$$|G_x| = 3!2!$$

Bo najpierw permutujemy sąsiadów x a potem sąsiadów jednego z sąsiadów x, a reszta jest już wyznaczona jednoznacznie.

Zadanie 8

Zależności

$$n(Q_k) = 2^k$$

Oczywiste, liczba ciągów binarnych długości k.

$$m(Q_k) = k2^{k-1} = k\frac{2^k}{2}$$

Rozpatrujemy wszystkie możliwe ciągi stąd 2^k potem rozpatrujemy wszystkie pozycje na których moze być ta jedyna różnica stąd k. A potem dzielimy przez 2 bo to graf nieskierowany.

Dwudzielność

Niech A będzie takim zbiorem że $\forall a, b \in A$ a oraz b różnią się na parzystej liczbie pozycji. Zaś B niech będzie równe $Q_k \setminus A$. W oczywiste sposób $A \bigcup B = Q_k$.

A

Oraz to że między dowlnymi wierzchołkami z A nie ma krawędzi. Bo wierzchołki między którymi jest krawędź różnią się na 1 pozycji, czyli jest to nieparzysta liczba różnić.

B

Załóżmy niewprost $\exists x, y \in B$ takie że różnią się na dokładnie jednej pozycji. Ale weźmy wtedy $a \in A$ takie że a różni się z x na tej pozycji, na której x różni się z y. Ale wtedy a z y różnią się na parzystej liczbie pozycji, czyli y należy do A sprzeczność.

Zadanie 8

Graf dwudzielny można podzielić na dwa podzbiory wierzchołków A, B takie że $A \bigcup B = V, A \bigcap B = \emptyset$. Czyli $|A|+|B| = |V|$. Wtedy by zmaksymalizować liczbę krawędzi należy z każdego wierzchołka z A poprowadzić krawędź do każdego wierzchołka z B. Czyli maksymlna liczba krawędzi dla danych A i B wynosi $|A| * |B|$. Z prostej optymalizacji wynika że maksymalny wynik jest osiągany dla $|A| = |B|$ dla parzystych oraz $|A| = |B| + 1$ dla nieparzystych. co daje oszacowanie $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$

Zadanie 9

Załóżmy niewprost że G oraz jego dopełnienie są niespójne. Wtedy graf G ma przynajmniej 2 spójne. nazwjimy je A, B. Oraz w każdej z tych spójnych jest przynajmniej jeden wierzchołek, nazwijmy je a,b. W dopełnieniu a oraz b są połączone bo w G są w różnych spójnych. Rozważmy teraz wszystkie pozostałe wierzchołki. Może zachodzić jeden z 2 przypadków $x \in A$, wtedy x jest połączony z b w dopełenieniu. W przeciwnym wypadku x jest połączone z a. Czyli pokazaliśmy że dopełnienie grafu jest spójne. Sprzeczność!

Zadanie 9

Załóżmy niewprost że istnieją dwie rozłączne najdłuższe ścieżki proste A, B. Niech ich długość wynosi n. Ale jako że jest to graf spójny, to między pierwszym wierzchołkiem ścieżki A i pierwszym wierzchołkiem ścieżki B istnieje ścieżka C. Możemy teraz obciąć C tak by pozostał w niej tylko jeden wierzchołek z A oraz B. nazwijmy te wierzchołki a,b. Obcięte c zawiera przynajmniej jedną krawędź. Wierzchołki a,b dzielą ścieżki A, B na dwie części (w szczególności mogą być puste). Przynajmniej jedna z tych części ma długość większą równą od połowy długości orginalnej ścieżki. To jak weźmiemy te większe połówki z A,B i połączymy je obciętym C to wyjdzie nam prosta ścieżka o długości $z \geq \frac{n}{2} * 2 + 1 > n$. Sprzeczność.

Zadanie 7

podpunkt a

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Najpierw należy policzyć maksymalną liczbę krawędzi nieskierowanych między różnymi wierzchołkami czyli $\frac{n(n-1)}{2}$. I potem każda krawędź albo należy do grafu, albo nie. Czyli podnosimy 2 do potęgi $\frac{n(n-1)}{2}$.

podpunkt b

Z poprzedniego punktu wiemy że liczba możliwych różnych krawędzi między różnymi wierzchołkami to $\frac{n(n-1)}{2}$. Zaś liczba różnych pętli to n.