

Computación y Estructuras Discretas I

Andrés A. Aristizábal P.

Universidad Icesi
Facultad de Ingeniería
2024-2



Agenda del día

1

Árboles AVL

- Control de lectura
- Introducción
- Rotaciones en ABB
- Casos de desbalanceo
- Inserción
- Ejemplos
- Eliminación
- Ejemplos
- Ejercicios

Control de lectura

Instrucciones

- 1 Ingresar a <https://www.socrative.com>
- 2 Log in
- 3 Student Login
- 4 Room name: FTJF5SP
- 5 Nombre
- 6 Comenzar

Agenda del día

1

Árboles AVL

- Control de lectura
- **Introducción**
- Rotaciones en ABB
- Casos de desbalanceo
- Inserción
- Ejemplos
- Eliminación
- Ejemplos
- Ejercicios

Introducción

¿Qué es un árbol AVL?

Introducción

¿Qué es un árbol AVL?

- Es un árbol binario de búsqueda balanceado en altura.
- Su nombre proviene de las iniciales de sus dos creadores, Adelson-Velskii y Landis.
- Fue el primer ABB balanceado publicado en la historia.
- Este árbol permite implementar las operaciones de diccionario, todas en tiempo logarítmico, gracias a la noción de balanceo que utiliza.

Introducción

¿Cuál sería un concepto clave a la hora de hablar de balanceo en altura?

Introducción

¿Cuál sería un concepto clave a la hora de hablar de balanceo en altura?

Definición de factor de balanceo

Se define el factor de balanceo de un nodo v de un árbol binario como:

$$fb(v) = \text{altura del subárbol derecho de } v - \text{altura del subárbol izquierdo de } v.$$

Mientras cada nodo de un árbol rojinegro tiene un color, en el AVL cada nodo tiene un fb.

Introducción

Entonces, ¿cuándo estaría balanceado en altura un árbol binario?

Introducción

Entonces, ¿cuándo estaría balanceado en altura un árbol binario?

- Estaría balanceado en altura si para cada nodo v , $|fb(v)| \leq 1$.
- En particular, cada nodo de un AVL tendría un factor de balanceo 0, 1 o -1.

Introducción

Ahora, ¿qué propiedades debe cumplir un ABB para ser un árbol AVL?

Introducción

Ahora, ¿qué propiedades debe cumplir un ABB para ser un árbol AVL?

- 1 Los subárboles de cada nodo difieren en altura en 1 como máximo
- 2 Cada subárbol es un árbol AVL.

Introducción

¿Qué beneficios brinda un árbol AVL?

Introducción

¿Qué beneficios brinda un árbol AVL?

- Gracias al balanceo se garantiza que sus operaciones tengan un coste logarítmico

Introducción

¿Qué beneficios brinda un árbol AVL?

- Gracias al balanceo se garantiza que sus operaciones tengan un coste logarítmico

¿Qué operaciones difieren entre un árbol de búsqueda binaria y un AVL?

Introducción

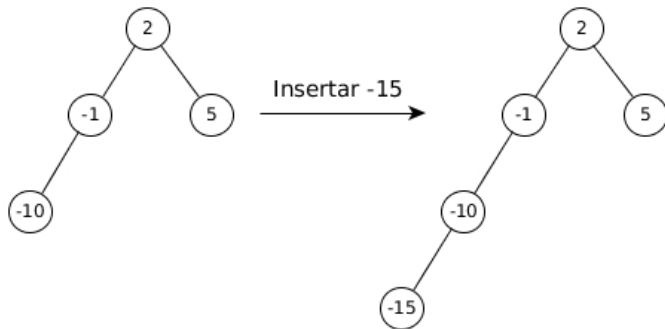
¿Qué beneficios brinda un árbol AVL?

- Gracias al balanceo se garantiza que sus operaciones tengan un coste logarítmico

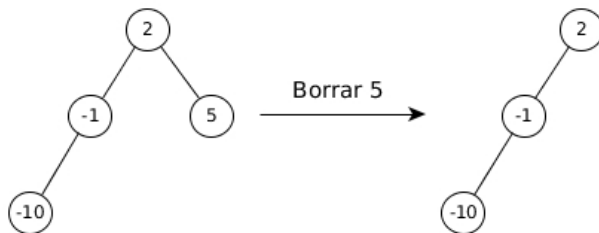
¿Qué operaciones difieren entre un árbol de búsqueda binaria y un AVL?

- Inserción
- Eliminación

Introducción



Introducción



Introducción

¿Cuál sería el esquema de operaciones para la inserción y la eliminación en un árbol AVL?

Introducción

¿Cuál sería el esquema de operaciones para la inserción y la eliminación en un árbol AVL?

- 1 Realizar la operación como en un ABB.
- 2 Rebalancear aquellos nodos desbalanceados.

Agenda del día

1

Árboles AVL

- Control de lectura
- Introducción
- Rotaciones en ABB
- Casos de desbalanceo
- Inserción
- Ejemplos
- Eliminación
- Ejemplos
- Ejercicios

Rotaciones en ABB

¿Cómo solucionamos el problema de los nodos desbalanceados?

Rotaciones en ABB

¿Cómo solucionamos el problema de los nodos desbalanceados?

- Se realiza, sobre ciertos nodos, una clase de operaciones que se conocen como rotaciones.
- El objetivo es recuperar la condición de AVL
 - Arreglar los factores de balanceo
 - Mantener el invariante de ABB

Rotaciones en ABB

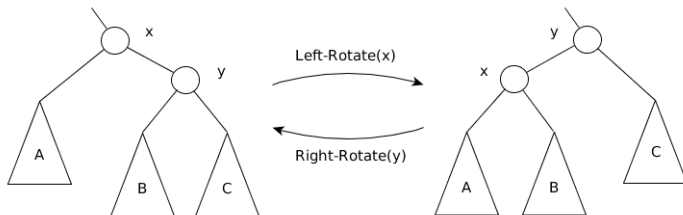
¿Qué operaciones de rotación se utilizan?

Rotaciones en ABB

¿Qué operaciones de rotación se utilizan?

- Rotación a la izquierda
- Rotación a la derecha

Rotaciones en ABB



Rotaciones en ABB

¿Qué se ha de notar con respecto a estas rotaciones?

Rotaciones en ABB

¿Qué se ha de notar con respecto a estas rotaciones?

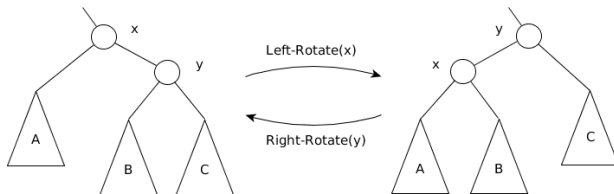
- Estas operaciones son independientes de cualquier noción de balanceo.
- Son aplicables en cualquier ABB, puesto que preservan el invariante de representación de estos árboles.
- Al aplicar cualquiera de las rotaciones a un ABB, el resultado es otro ABB.
- Las dos operaciones son una inversa de la otra.

Rotaciones en ABB

¿Qué hace `LEFT-ROTATE(x)`?

Rotaciones en ABB

¿Qué hace `LEFT-ROTATE(x)`?



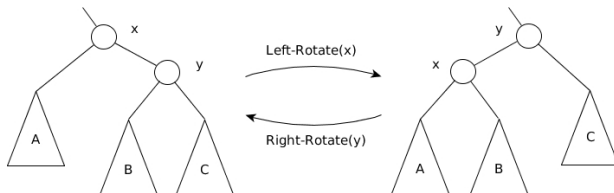
- Toma un nodo x , que debe tener un hijo derecho y
- Rota hacia la izquierda a x , dejando a y como raíz del subárbol
- Cuelga a la derecha de x el subárbol izquierdo de y (si hubiera uno).
- Nótese que al rotar a x a la izquierda, estamos bajando a este nodo y levantando al nodo y .

Rotaciones en ABB

¿Qué hace `RIGHT-ROTATE (y)` ?

Rotaciones en ABB

¿Qué hace `RIGHT-ROTATE(y)`?



- Toma un nodo y , que debe tener un hijo izquierdo x
- Rota hacia la derecha a y , dejando a x como raíz del subárbol
- Cuelga a la izquierda de y el subárbol derecho de x (si hubiera uno).
- Nótese que al rotar a y a la derecha, estamos bajando a este nodo y levantando al nodo x .

Rotaciones en ABB

Intuitivamente, ¿cómo se utilizarán estas operaciones?

Rotaciones en ABB

Intuitivamente, ¿cómo se utilizarán estas operaciones?

- Utilizaremos `LEFT-ROTATE(x)` para trasladar un poco del peso del subárbol derecho hacia el izquierdo.
- `RIGHT-ROTATE(y)`, contrariamente, para llevar peso del subárbol izquierdo hacia el derecho.
- En este caso, cuando hablamos de peso, no nos referimos a una cantidad de nodos sino a una altura, que es aquello que intentamos balancear.

Agenda del día

1

Árboles AVL

- Control de lectura
- Introducción
- Rotaciones en ABB
- Casos de desbalanceo
- Inserción
- Ejemplos
- Eliminación
- Ejemplos
- Ejercicios

Casos de desbalanceo

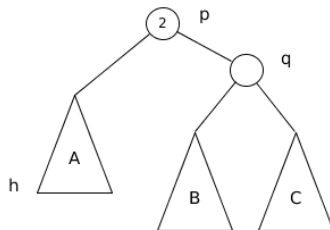
¿Qué se debe hacer cuando al realizar una inserción o eliminación algunos factores de balanceo son estrictamente mayores que 1?

Casos de desbalanceo

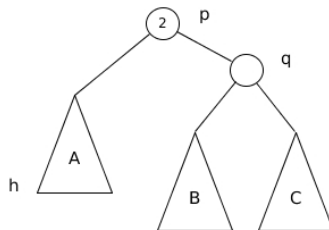
¿Qué se debe hacer cuando al realizar una inserción o eliminación algunos factores de balanceo son estrictamente mayores que 1?

- Resulta conveniente resolver cada uno de estos problemas progresivamente.
- Rebalanceando los nodos más profundos.
- Continuando hacia los más cercanos a la raíz.
- Por esta razón, es útil plantearse los distintos escenarios en los que tenemos un subárbol cuya raíz está desbalanceada en una unidad (es decir, tiene factor de balanceo -2 o 2), pero tal que todo otro nodo debajo de dicho nodo está balanceado.

Casos de desbalanceo



Casos de desbalanceo



- Llamemos p a la raíz de un subárbol.
- Se toma el caso $fb(p) = 2$.
- Supongamos que el subárbol izquierdo de p tiene altura h .
- El subárbol derecho de p tiene altura $h + 2$.
- Este subárbol derecho debe tener al menos dos nodos, con lo cual podemos nombrar q a su raíz.

Casos de desbalanceo

¿Qué hacemos ahora?

Casos de desbalanceo

¿Qué hacemos ahora?

- Dividimos nuevamente en casos
- Según el valor de $fb(q)$.
- Como asumimos que todos los nodos debajo de p están balanceados, debe ser $fb(q) \in \{-1, 0, 1\}$.

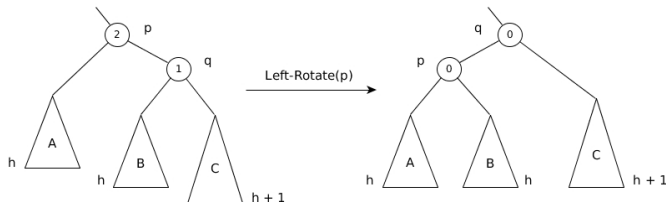
Casos de desbalanceo

¿Cuál es el caso A?

Casos de desbalanceo

¿Cuál es el caso A?

- Se supone a $fb(q) = 1$.
- Esto determina las alturas de ambos subárboles de q .
- Como el subárbol derecho de p es mucho más alto que el izquierdo, debemos realizar algún tipo de rotación que traslade peso desde la derecha hacia la izquierda.
- Se ejecuta `LEFT-ROTATE(p)` y se reestablece el balance.



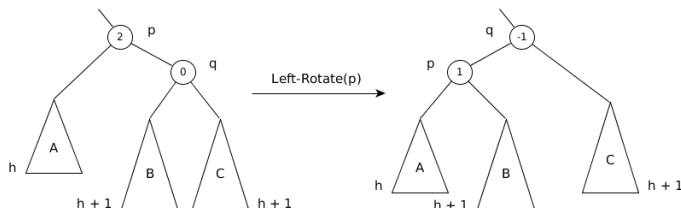
Casos de desbalanceo

¿Cuál es el caso B?

Casos de desbalanceo

¿Cuál es el caso B?

- Se supone a $fb(q) = 0$.
- Como el subárbol derecho de p es mucho más alto que el izquierdo, debemos realizar algún tipo de rotación que traslade peso desde la derecha hacia la izquierda.
- Se ejecuta `LEFT-ROTATE(p)` y se reestablece el balance.

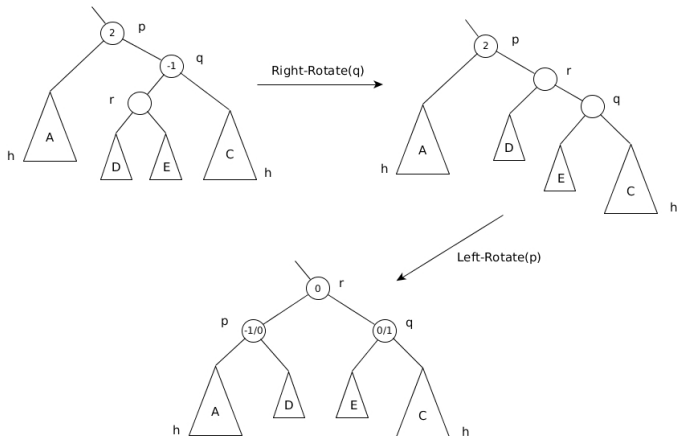


Casos de desbalanceo

¿Cuál es el caso C?

Casos de desbalanceo

¿Cuál es el caso C?



Casos de desbalanceo

¿Qué casos restan?

Casos de desbalanceo

¿Qué casos restan?

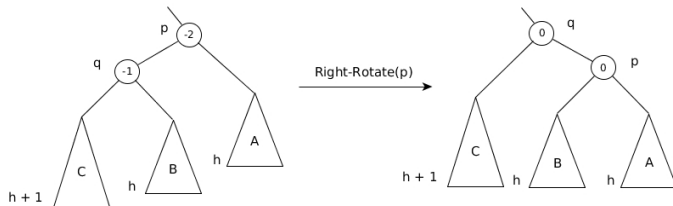
- Cuando $fb(p) = -2$
- Dividimos nuevamente en casos
- Según el valor de $fb(q)$.
- Como asumimos que todos los nodos debajo de p están balanceados, debe ser $fb(q) \in \{-1, 0, 1\}$.
- Estos casos son completamente simétricos a los tres previos

Casos de desbalanceo

¿Cuál es el caso D?

Casos de desbalanceo

¿Cuál es el caso D?

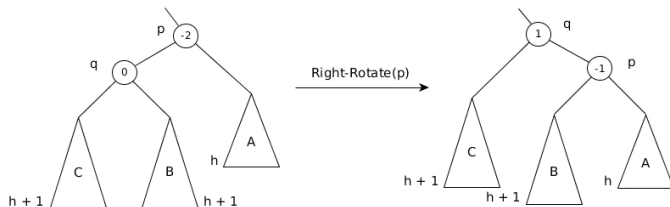


Casos de desbalanceo

¿Cuál es el caso E?

Casos de desbalanceo

¿Cuál es el caso E?

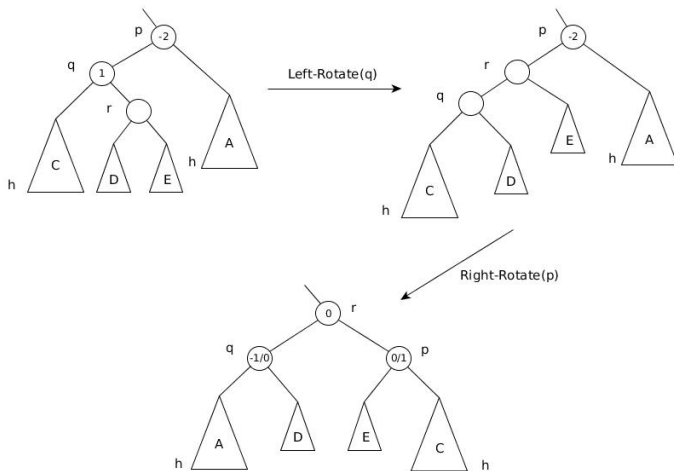


Casos de desbalanceo

¿Cuál es el caso F?

Casos de desbalanceo

¿Cuál es el caso F?



Agenda del día

1

Árboles AVL

- Control de lectura
- Introducción
- Rotaciones en ABB
- Casos de desbalanceo
- **Inserción**
- Ejemplos
- Eliminación
- Ejemplos
- Ejercicios

Inserción

¿Cómo es la inserción de un nodo en un árbol AVL?

Inserción

¿Cómo es la inserción de un nodo en un árbol AVL?

- La inserción en un AVL agrega un nuevo nodo como una hoja del árbol.
- Esto implica que sólo pueden cambiar los factores de balanceo de nodos que se encuentren en el camino entre la raíz y el nodo agregado.
- Si se logra rebalancear cada factor desbalanceado a lo largo de este camino, se reestablecería el balance en todo el árbol.
- Esta idea motiva el algoritmo de inserción sobre AVLs.

Inserción

¿Cuál es el pseudocódigo para el algoritmo de inserción en un árbol AVL?

Inserción

¿Cuál es el pseudocódigo para el algoritmo de inserción en un árbol AVL?

```
1 AVL-INSERT(T, k)
2 begin
3   Insertar k en T como en un ABB
4   Sea  $x$  el nodo agregado
5   AVL-REBALANCE(T,  $x$ )
6 end
```

Inserción

¿Cuál es el pseudocódigo para el rebalanceo en un árbol AVL?

Inserción

¿Cuál es el pseudocódigo para el rebalanceo en un árbol AVL?

```
1 AVL-REBALANCE(T, x)
2 begin
3   foreach p nodo en el camino entre x y la raíz de T do
4     if |fb(p)| > 1 then
5       Rebalancear el subárbol con raíz en p como en alguno de los casos A,
6         ..., F
7     end
8 end
```

Agenda del día

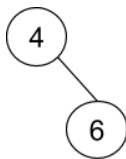
1

Árboles AVL

- Control de lectura
- Introducción
- Rotaciones en ABB
- Casos de desbalanceo
- Inserción
- **Ejemplos**
- Eliminación
- Ejemplos
- Ejercicios

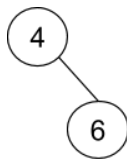
Inserción

Dado T siga el algoritmo AVL-TREE-INSERT(T,7)



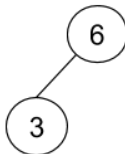
Inserción

Dado T siga el algoritmo AVL-TREE-INSERT(T,5)



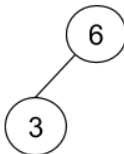
Inserción

Dado T siga el algoritmo AVL-TREE-INSERT(T,1)



Inserción

Dado T siga el algoritmo AVL-TREE-INSERT(T,4)



Agenda del día

1

Árboles AVL

- Control de lectura
- Introducción
- Rotaciones en ABB
- Casos de desbalanceo
- Inserción
- Ejemplos
- **Eliminación**
- Ejemplos
- Ejercicios

Eliminación

¿Cómo es la eliminación de un nodo en un árbol AVL?

Eliminación

¿Cómo es la eliminación de un nodo en un árbol AVL?

- Al igual que en la inserción, el borrado de nodos sólo modifica, a lo sumo en una unidad, los factores de balanceo de nodos entre cierto nodo particular (que depende del caso de borrado del ABB) y la raíz.
- Si se logra rebalancear cada factor desbalanceado a lo largo de este camino, se reestablecería el balance en todo el árbol.

Eliminación

¿Cuál es el pseudocódigo para el algoritmo de eliminación en un árbol AVL?

Eliminación

¿Cuál es el pseudocódigo para el algoritmo de eliminación en un árbol AVL?

```
1 AVL-DELETE(T, k)
2 begin
3   Borrar k de T como en un ABB
4   Sea y el primer nodo posiblemente desbalanceado
5   AVL-REBALANCE(T, y)
6 end
```


Agenda del día

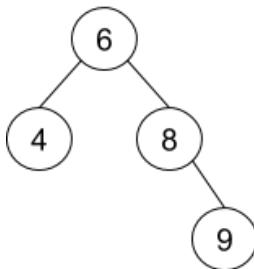
1

Árboles AVL

- Control de lectura
- Introducción
- Rotaciones en ABB
- Casos de desbalanceo
- Inserción
- Ejemplos
- Eliminación
- **Ejemplos**
- Ejercicios

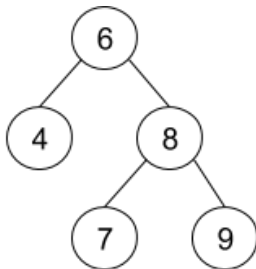
Eliminación

Dado T siga el algoritmo AVL-TREE-DELETE(T,4)



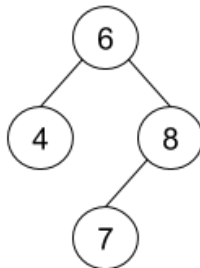
Eliminación

Dado T siga el algoritmo AVL-TREE-DELETE(T,4)



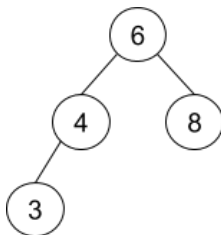
Eliminación

Dado T siga el algoritmo AVL-TREE-DELETE(T,4)



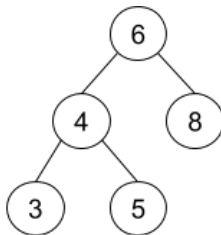
Eliminación

Dado T siga el algoritmo AVL-TREE-DELETE(T,8)



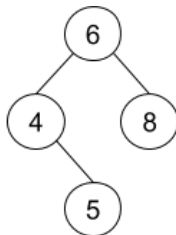
Eliminación

Dado T siga el algoritmo AVL-TREE-DELETE(T,8)



Eliminación

Dado T siga el algoritmo AVL-TREE-DELETE(T,8)



Agenda del día

1

Árboles AVL

- Control de lectura
- Introducción
- Rotaciones en ABB
- Casos de desbalanceo
- Inserción
- Ejemplos
- Eliminación
- Ejemplos
- Ejercicios

Ejercicios

El administrador de un pequeño negocio de compra y venta de vehículos usados ha decidido almacenar todos los datos de los automóviles que maneja en su establecimiento en un árbol AVL de manera que pueda acceder velozmente a sus registros. Los carros presentes en el árbol estarán ordenados por su placa. Si se inicia con un árbol AVL vacío, usted debe mostrar (dibujar) el estado del árbol AVL luego de la inserción (compra) o eliminación (venta), en el orden indicado, de cada uno de los siguientes vehículos:

- 1 Se compra el auto Ford Focus con placa JOK458
- 2 Se compra el auto Honda Civic con placa PZY526
- 3 Se compra el auto Mazda 3 con placa NOB512
- 4 Se compra el auto Renault Clio con placa AZX323
- 5 Se compra el auto Toyota Prius con placa BMO419
- 6 Se vende el auto Honda Civic con placa PZY526
- 7 Se compra el auto Mitsubishi Montero con placa ENN422
- 8 Se vende el auto Renault Clio con placa AZX323
- 9 Se compra el auto Audi A4 con placa GIC437
- 10 Se vende el auto Mazda 3 con placa NOB512

Ejercicios

Implemente el árbol AVL genérico.