Computación y Estructuras Discretas I

Andrés A. Aristizábal P.

Universidad Icesi
Facultad de Ingeniería
2024-2

Agenda del día

1. **Introducción a grafos**
   - Representación
   - Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos
   - Ejercicios

Representación

¿Cómo representar un grafo?

Representación

¿Cómo representar un grafo?

- Existen muchas maneras útiles de representación de Grafos.

Representación

¿Cómo representar un grafo?

- Existen muchas maneras útiles de representación de Grafos.
- Al trabajar con un grafo conviene tener la posibilidad de elegir su representación mas conveniente.

Representación

¿Cómo representar un grafo?

- Existen muchas maneras útiles de representación de Grafos.
- Al trabajar con un grafo conviene tener la posibilidad de elegir su representación mas conveniente.
- Entre las posibilidades de representación se encuentran:

Representación

¿Cómo representar un grafo?

- Existen muchas maneras útiles de representación de Grafos.
- Al trabajar con un grafo conviene tener la posibilidad de elegir su representación mas conveniente.
- Entre las posibilidades de representación se encuentran:
  - Listas de Aristas

Representación

¿Cómo representar un grafo?

- Existen muchas maneras útiles de representación de Grafos.
- Al trabajar con un grafo conviene tener la posibilidad de elegir su representación mas conveniente.
- Entre las posibilidades de representación se encuentran:
  - Listas de Aristas
  - Listas de Adyacencia

Representación

¿Cómo representar un grafo?

- Existen muchas maneras útiles de representación de Grafos.
- Al trabajar con un grafo conviene tener la posibilidad de elegir su representación mas conveniente.
- Entre las posibilidades de representación se encuentran:
  - Listas de Aristas
  - Listas de Adyacencia
  - Matrices de Adyacencia

Representación

¿Cómo representar un grafo?

- Existen muchas maneras útiles de representación de Grafos.
- Al trabajar con un grafo conviene tener la posibilidad de elegir su representación mas conveniente.
- Entre las posibilidades de representación se encuentran:
  - Listas de Aristas
  - Listas de Adyacencia
  - Matrices de Adyacencia
  - Matrices de Incidencia

Representación

¿Qué es una lista de adyacencia?

Representación

¿Qué es una lista de adyacencia?

- Es una forma de representar grafos sin aristas múltiples.

Representación

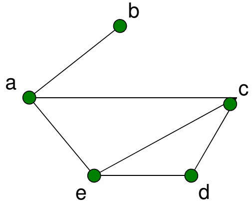
¿Qué es una lista de adyacencia?

- Es una forma de representar grafos sin aristas múltiples.
- Especifican los vértices que son adyacentes a cada uno de los vértices del grafo.

Representación

¿Qué es una lista de adyacencia?

- Es una forma de representar grafos sin aristas múltiples.
- Especifican los vértices que son adyacentes a cada uno de los vértices del grafo.



Vértices	Vértices Adyacentes
a	b, c, e
b	a
c	a, d, e
d	c, e
e	a, c, d

Representación

¿Qué ocurre cuando el grafo es dirigido?

Representación

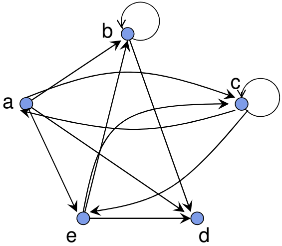
¿Qué ocurre cuando el grafo es dirigido?

- Cuando el grafo es dirigido, una representación por listas de adyacencia enumera todos los vértices finales de las aristas que salen de cada uno de los vértices del grafo.

Representación

¿Qué ocurre cuando el grafo es dirigido?

- Cuando el grafo es dirigido, una representación por listas de adyacencia enumera todos los vértices finales de las aristas que salen de cada uno de los vértices del grafo.



Vértices Iniciales	Vértices Finales
a	b, c, d, e
b	b, d
c	a, c, e
d	
e	b, c, d

Representación

¿Qué es una matriz de adyacencia?

Representación

¿Qué es una matriz de adyacencia?

- Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n$.

Representación

¿Qué es una matriz de adyacencia?

- Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n$.
- Se enumeran los vértices de G de manera arbitraria como $v_1, v_2, ..., v_n$.

Representación

¿Qué es una matriz de adyacencia?

- Sea $G = (V, E)$ un grafo simple con $|V| = n$.
- Se enumeran los vértices de G de manera arbitraria como $v_1, v_2, ..., v_n$.
- La matriz de adyacencia A (o A_G) de G con respecto a este listado de los vértices es la matriz booleana $n \times n$ que tiene un 1 en la posición (i, j), si v_i y v_j son adyacentes, y tiene un 0 en la posición (i, j), si v_i y v_j no son adyacentes.

Representación

- También se expresa como: si la matriz de adyacencia es $A = [a_{ij}]$, entonces:

Representación

- También se expresa como: si la matriz de adyacencia es $A = [a_{ij}]$, entonces:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si } \{v_i, v_j\} \text{ es una arista de G,} \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Representación

¿Qué más se puede decir sobre una matriz de adyacencia?

Representación

¿Qué más se puede decir sobre una matriz de adyacencia?

- Las matrices de adyacencia pueden usarse para representar grafos dirigidos con bucles y con aristas múltiples.

Representación

¿Qué más se puede decir sobre una matriz de adyacencia?

- Las matrices de adyacencia pueden usarse para representar grafos dirigidos con bucles y con aristas múltiples.
- Un bucle en el vertice a_i se representa por medio de un 1 en la posición (i, i) de la matriz de adyacencia.

Representación

¿Qué más se puede decir sobre una matriz de adyacencia?

- Las matrices de adyacencia pueden usarse para representar grafos dirigidos con bucles y con aristas múltiples.
- Un bucle en el vertice a_i se representa por medio de un 1 en la posición (i, i) de la matriz de adyacencia.
- Cuando hay aristas múltiples, la matriz de adyacencia deja de ser booleana, ya que el elemento en la posición (i, j) de esta matriz es igual al número de aristas asociadas con $\{a_i, a_j\}$

Representación

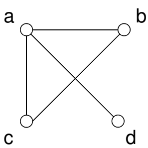
- Todos los gráfos no dirigidos, incluyendo multigrafos y pseudografos, tienen matrices de adyacencia simétricas.

Representación

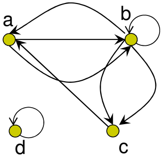
- Todos los gráfos no dirigidos, incluyendo multigrafos y pseudografos, tienen matrices de adyacencia simétricas.
- La matriz de un grafo dirigido $G = (V, E)$ tiene un 1 en su posición (i, j) si hay una arista de v_i a v_j, siendo $v_1, v_2, ..., v_n$ un listado arbitrario de los vértices del grafo dirigido.

Representación

- Todos los gráfos no dirigidos, incluyendo multigrafos y pseudografos, tienen matrices de adyacencia simétricas.
- La matriz de un grafo dirigido $G = (V, E)$ tiene un 1 en su posición (i, j) si hay una arista de v_i a v_j, siendo $v_1, v_2, ..., v_n$ un listado arbitrario de los vértices del grafo dirigido.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Representación

¿Qué es una matriz de incidencia?

Representación

¿Qué es una matriz de incidencia?

- Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido y $v_1, v_2, ..., v_n$ los vértices y $e_1, e_2, ..., e_m$ las aristas de G.

Representación

¿Qué es una matriz de incidencia?

- Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido y $v_1, v_2, ..., v_n$ los vértices y $e_1, e_2, ..., e_m$ las aristas de G.
- Entonces la matriz de incidencia con respecto a este ordenamiento de V y de E es la matriz $M = [m_{ij}]$ de $n \times m$ dada por:

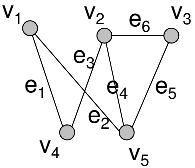
Representación

¿Qué es una matriz de incidencia?

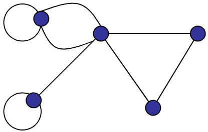
- Sea $G = (V, E)$ un grafo no dirigido y $v_1, v_2, ..., v_n$ los vértices y $e_1, e_2, ..., e_m$ las aristas de G.
- Entonces la matriz de incidencia con respecto a este ordenamiento de V y de E es la matriz $M = [m_{ij}]$ de $n \times m$ dada por:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ si la arista } e_j \text{ es incidente con } v_i, \\ 0 \text{ en caso contrario} \end{cases}$$

Representación



$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



Caminos, circuitos y conexión

¿Qué es un camino?

Caminos, circuitos y conexión

¿Qué es un camino?

- Un camino es una secuencia de aristas que comienzan en un vértice del grafo y recorre ciertas aristas del grafo siempre conectando pares de vértices adyacentes.

Caminos, circuitos y conexión

¿Qué es un camino?

- Un camino es una secuencia de aristas que comienzan en un vértice del grafo y recorre ciertas aristas del grafo siempre conectando pares de vértices adyacentes.
- Sea n un entero no negativo y sea G un grafo no dirigido.

Caminos, circuitos y conexión

¿Qué es un camino?

- Un camino es una secuencia de aristas que comienzan en un vértice del grafo y recorre ciertas aristas del grafo siempre conectando pares de vértices adyacentes.
- Sea n un entero no negativo y sea G un grafo no dirigido.
- Un camino de longitud n de u a v en G es una secuencia de n aristas $a_1, a_2, ..., a_n$ de G tal que $f(a_1) = \{x_0, x_1\}$, $f(a_2) = \{x_1, x_2\}, ...,$ $f(a_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$, donde $x_0 = u$ y $x_n = v$.

Caminos, circuitos y conexión

¿Qué es un camino?

- Un camino es una secuencia de aristas que comienzan en un vértice del grafo y recorre ciertas aristas del grafo siempre conectando pares de vértices adyacentes.
- Sea n un entero no negativo y sea G un grafo no dirigido.
- Un camino de longitud n de u a v en G es una secuencia de n aristas $a_1, a_2, ..., a_n$ de G tal que $f(a_1) = \{x_0, x_1\}$, $f(a_2) = \{x_1, x_2\}$, ..., $f(a_n) = \{x_{n-1}, x_n\}$, donde $x_0 = u$ y $x_n = v$.
- Si el grafo es simple, denotamos este camino por su secuencia de vértices: $x_0, x_1, ..., x_n$ (ya que el enumerar estos vértices determina el camino de forma única).

Caminos, circuitos y conexión

¿Qué es un circuito?

Caminos, circuitos y conexión

¿Qué es un circuito?

- El camino es un circuito si comienza y termina en el mismo vértice, esto es, si $u = v$, y tiene longitud mayor que cero.

Caminos, circuitos y conexión

¿Qué es un circuito?

- El camino es un circuito si comienza y termina en el mismo vértice, esto es, si $u = v$, y tiene longitud mayor que cero.
- Se dice que el camino o circuito pasa por los vértices $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ o también que recorre las aristas $a_1, a_2, ..., a_n$.

Caminos, circuitos y conexión

¿Qué es un circuito?

- El camino es un circuito si comienza y termina en el mismo vértice, esto es, si $u = v$, y tiene longitud mayor que cero.
- Se dice que el camino o circuito pasa por los vértices $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ o también que recorre las aristas $a_1, a_2, ..., a_n$.
- Un camino o circuito es simple si no contiene la misma arista mas de una vez.

Caminos, circuitos y conexión

¿Cómo es la conexión en grafos no dirigidos?

Caminos, circuitos y conexión

¿Cómo es la conexión en grafos no dirigidos?

- Se dice que un grafo no dirigido es conexo si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo.

Caminos, circuitos y conexión

¿Cómo es la conexión en grafos no dirigidos?

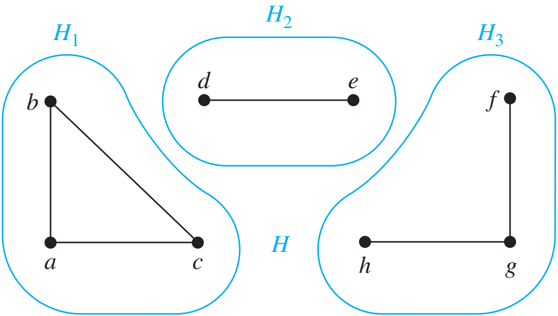
- Se dice que un grafo no dirigido es conexo si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo.
- Hay un camino simple entre cada par de vértices distintos de un grafo no dirigido conexo.

Caminos, circuitos y conexión

¿Cómo es la conexión en grafos no dirigidos?

- Se dice que un grafo no dirigido es conexo si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo.
- Hay un camino simple entre cada par de vértices distintos de un grafo no dirigido conexo.
- Un grafo que no es conexo, es la unión de dos o mas subgrafos conexos que dos a dos no tienen ningún vértice en común.

Caminos, circuitos y conexión

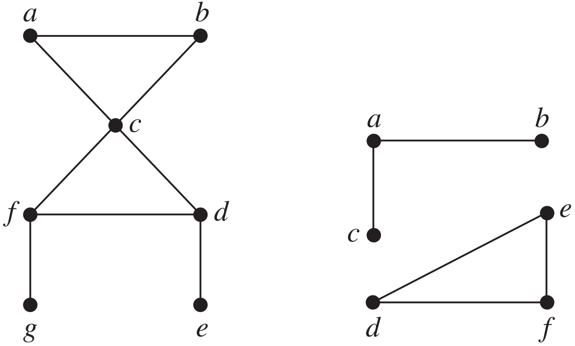


Caminos, circuitos y conexión

¿Son conexos los siguientes grafos?

Caminos, circuitos y conexión

¿Son conexos los siguientes grafos?



G_1 G_2

Caminos, circuitos y conexión

¿Qué es un vértice de corte?

Caminos, circuitos y conexión

¿Qué es un vértice de corte?

- Se le llama vértice de corte o punto de articulación a aquel que al ser eliminado junto a todas las aristas incidentes en él produce un subgrafo con mas componentes conexas.

Caminos, circuitos y conexión

¿Qué es un vértice de corte?

- Se le llama vértice de corte o punto de articulación a aquel que al ser eliminado junto a todas las aristas incidentes en él produce un subgrafo con mas componentes conexas.
- Eliminar un vértice de corte de un grafo conexo produce un grafo que no es conexo.

Caminos, circuitos y conexión

¿Qué es un vértice de corte?

- Se le llama vértice de corte o punto de articulación a aquel que al ser eliminado junto a todas las aristas incidentes en él produce un subgrafo con mas componentes conexas.
- Eliminar un vértice de corte de un grafo conexo produce un grafo que no es conexo.

¿Qué es una arista de corte?

Caminos, circuitos y conexión

¿Qué es un vértice de corte?

- Se le llama vértice de corte o punto de articulación a aquel que al ser eliminado junto a todas las aristas incidentes en él produce un subgrafo con mas componentes conexas.
- Eliminar un vértice de corte de un grafo conexo produce un grafo que no es conexo.

¿Qué es una arista de corte?

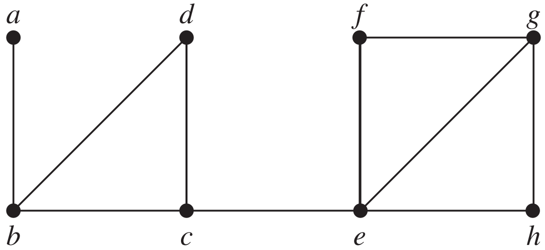
- Una arista cuya eliminación produce un grafo con mas componentes conexas que el grafo original se llama arista de corte o puente.

Caminos, circuitos y conexión

¿Cuáles son los vértices de corte y aristas de corte del siguiente grafo?

Caminos, circuitos y conexión

¿Cuáles son los vértices de corte y aristas de corte del siguiente grafo?



G_1

Caminos, circuitos y conexión

¿Cómo es la conexión en grafos dirigidos?

Caminos, circuitos y conexión

¿Cómo es la conexión en grafos dirigidos?

- Considerando la dirección de las aristas, estos grafos pueden ser fuerte o débilmente conexos.

Caminos, circuitos y conexión

¿Cómo es la conexión en grafos dirigidos?

- Considerando la dirección de las aristas, estos grafos pueden ser fuerte o débilmente conexos.

¿Cuándo un grafo dirigido es fuertemente conexo?

Caminos, circuitos y conexión

¿Cómo es la conexión en grafos dirigidos?

- Considerando la dirección de las aristas, estos grafos pueden ser fuerte o débilmente conexos.

¿Cuándo un grafo dirigido es fuertemente conexo?

- Se dice que un grafo dirigido es fuertemente conexo si hay un camino de a a b y un camino de b a a para cualquiera dos vértices a y b del grafo.

Caminos, circuitos y conexión

¿Cómo es la conexión en grafos dirigidos?

- Considerando la dirección de las aristas, estos grafos pueden ser fuerte o débilmente conexos.

¿Cuándo un grafo dirigido es fuertemente conexo?

- Se dice que un grafo dirigido es fuertemente conexo si hay un camino de a a b y un camino de b a a para cualquiera dos vértices a y b del grafo.

¿Cuándo un grafo dirigido es débilmente conexo?

Caminos, circuitos y conexión

¿Cómo es la conexión en grafos dirigidos?

- Considerando la dirección de las aristas, estos grafos pueden ser fuerte o débilmente conexos.

¿Cuándo un grafo dirigido es fuertemente conexo?

- Se dice que un grafo dirigido es fuertemente conexo si hay un camino de a a b y un camino de b a a para cualquiera dos vértices a y b del grafo.

¿Cuándo un grafo dirigido es débilmente conexo?

- Se dice que un grafo dirigido es débilmente conexo si hay un camino entre cada dos vértices del grafo no dirigido subyacente.

Agenda del día

1. **Introducción a grafos**
   - Representación
   - Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos
   - Ejercicios

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Qué es un circuito euleriano?

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Qué es un circuito euleriano?

Definición

Un circuito euleriano de un grafo G es un circuito simple que contiene a todas las aristas de G.

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Qué es un circuito euleriano?

Definición

Un circuito euleriano de un grafo G es un circuito simple que contiene a todas las aristas de G.

¿Qué es un camino euleriano?

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Qué es un circuito euleriano?

Definición

Un circuito euleriano de un grafo G es un circuito simple que contiene a todas las aristas de G.

¿Qué es un camino euleriano?

Definición

Un camino euleriano es un camino simple que contiene a todas las aristas de G.

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Qué es un circuito euleriano?

Definición

Un circuito euleriano de un grafo G es un circuito simple que contiene a todas las aristas de G.

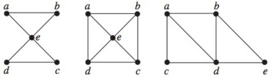
¿Qué es un camino euleriano?

Definición

Un camino euleriano es un camino simple que contiene a todas las aristas de G.

Ejemplo

¿Cuáles de los grafos no dirigidos de la siguiente figura contienen un circuito euleriano? Entre aquellos que no lo contienen. ¿cuáles contienen un camino euleriano?



G_1 G_2 G_3

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

Solución

El grafo G_1 contiene un circuito euleriano, por ejemplo, a, e, c, d, e, b, a. Ni G_2 ni G_3 contienen un circuito euleriano. No obstante, G_3 contiene un camino euleriano, a saber, a, c, d, e, b, d, a, b. El grafo G_2 no contiene ningún camino euleriano.

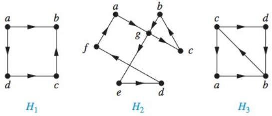
Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

Solución

El grafo G_1 contiene un circuito euleriano, por ejemplo, a, e, c, d, e, b, a. Ni G_2 ni G_3 contienen un circuito euleriano. No obstante, G_3 contiene un camino euleriano, a saber, a, c, d, e, b, d, a, b. El grafo G_2 no contiene ningún camino euleriano.

Ejemplo

¿Cuáles de los grafos dirigidos de esta figura contienen un circuito euleriano? Entre aquellos que no lo contienen. ¿cuáles contienen un camino euleriano?



Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Para qué pueden utilizarse los caminos y circuitos eulerianos?

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Para qué pueden utilizarse los caminos y circuitos eulerianos?

- Los caminos y circuitos eulerianos pueden utilizarse para resolver muchos problemas prácticos.

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Para qué pueden utilizarse los caminos y circuitos eulerianos?

- Los caminos y circuitos eulerianos pueden utilizarse para resolver muchos problemas prácticos.
- Por ejemplo, en muchas aplicaciones se requiere hallar un camino o circuito que pase exactamente una vez por cada una de las calles de un barrio, por cada una de las carreteras de una red vial, por cada una de las conexiones de una red de distribución de agua o por cada uno de los enlaces de una red de comunicaciones.

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Para qué pueden utilizarse los caminos y circuitos eulerianos?

- Los caminos y circuitos eulerianos pueden utilizarse para resolver muchos problemas prácticos.
- Por ejemplo, en muchas aplicaciones se requiere hallar un camino o circuito que pase exactamente una vez por cada una de las calles de un barrio, por cada una de las carreteras de una red vial, por cada una de las conexiones de una red de distribución de agua o por cada uno de los enlaces de una red de comunicaciones.
- Hallar un camino o un circuito euleriano en un modelo apropiado de grafos puede resolver este tipo de problemas.

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Para qué pueden utilizarse los caminos y circuitos eulerianos?

- Los caminos y circuitos eulerianos pueden utilizarse para resolver muchos problemas prácticos.
- Por ejemplo, en muchas aplicaciones se requiere hallar un camino o circuito que pase exactamente una vez por cada una de las calles de un barrio, por cada una de las carreteras de una red vial, por cada una de las conexiones de una red de distribución de agua o por cada uno de los enlaces de una red de comunicaciones.
- Hallar un camino o un circuito euleriano en un modelo apropiado de grafos puede resolver este tipo de problemas.
- Por ejemplo, si un cartero puede hallar un camino euleriano en el grafo de las calles por las que debe repartir la correspondencia, este camino produce una ruta que pasa por cada calle exactamente una vez. Si no hay ningún camino euleriano, el cartero tendrá que pasar más de una vez por alguna de las calles.

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Para qué pueden utilizarse los caminos y circuitos eulerianos?

- Los caminos y circuitos eulerianos pueden utilizarse para resolver muchos problemas prácticos.
- Por ejemplo, en muchas aplicaciones se requiere hallar un camino o circuito que pase exactamente una vez por cada una de las calles de un barrio, por cada una de las carreteras de una red vial, por cada una de las conexiones de una red de distribución de agua o por cada uno de los enlaces de una red de comunicaciones.
- Hallar un camino o un circuito euleriano en un modelo apropiado de grafos puede resolver este tipo de problemas.
- Por ejemplo, si un cartero puede hallar un camino euleriano en el grafo de las calles por las que debe repartir la correspondencia, este camino produce una ruta que pasa por cada calle exactamente una vez. Si no hay ningún camino euleriano, el cartero tendrá que pasar más de una vez por alguna de las calles.
- Otras áreas en las que se aplican los circuitos y caminos eulerianos son el diseño de circuitos impresos, las redes de multidifusión y también la biología molecular, donde se utilizan los caminos eulerianos para secuenciar el ADN.

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Qué es un camino hamiltoniano?

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Qué es un camino hamiltoniano?

Se dice que un camino $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ del grafo $G = (V, E)$ es un camino hamiltoniano si $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ y $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i < j \leq n$.

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Qué es un camino hamiltoniano?

Se dice que un camino $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ del grafo $G = (V, E)$ es un camino hamiltoniano si $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ y $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i < j \leq n$.

¿Qué es un circuito hamiltoniano?

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Qué es un camino hamiltoniano?

Se dice que un camino $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ del grafo $G = (V, E)$ es un camino hamiltoniano si $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ y $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i < j \leq n$.

¿Qué es un circuito hamiltoniano?

Se dice que un circuito $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_0$ con $n > 1$ del grafo $G = (V, E)$ es un circuito hamiltoniano si $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ es un circuito hamiltoniano.

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Qué es un camino hamiltoniano?

Se dice que un camino $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ del grafo $G = (V, E)$ es un camino hamiltoniano si $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ y $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i < j \leq n$.

¿Qué es un circuito hamiltoniano?

Se dice que un circuito $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_0$ con $n > 1$ del grafo $G = (V, E)$ es un circuito hamiltoniano si $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ es un circuito hamiltoniano.

¿Cuál es el origen de esta terminología?

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Qué es un camino hamiltoniano?

Se dice que un camino $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ del grafo $G = (V, E)$ es un camino hamiltoniano si $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ y $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i < j \leq n$.

¿Qué es un circuito hamiltoniano?

Se dice que un circuito $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_0$ con $n > 1$ del grafo $G = (V, E)$ es un circuito hamiltoniano si $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ es un circuito hamiltoniano.

¿Cuál es el origen de esta terminología?

- El origen de esta terminología es un juego, el juego icosiano, inventado en 1857 por el matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton.

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Qué es un camino hamiltoniano?

Se dice que un camino $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ del grafo $G = (V, E)$ es un camino hamiltoniano si $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ y $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i < j \leq n$.

¿Qué es un circuito hamiltoniano?

Se dice que un circuito $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_0$ con $n > 1$ del grafo $G = (V, E)$ es un circuito hamiltoniano si $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ es un circuito hamiltoniano.

¿Cuál es el origen de esta terminología?

- El origen de esta terminología es un juego, el juego icosiano, inventado en 1857 por el matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton.
- Consistía en un dodecaedro de madera, un poliedro de 12 caras, cada una de las cuales es un pentágono regular, como se ve en la siguiente figura, con un alfiler saliendo de cada vértice del dodecaedro y en un trozo de cuerda.

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

¿Qué es un camino hamiltoniano?

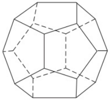
Se dice que un camino $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ del grafo $G = (V, E)$ es un camino hamiltoniano si $V = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ y $x_i \neq x_j$ para $0 \leq i < j \leq n$.

¿Qué es un circuito hamiltoniano?

Se dice que un circuito $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_0$ con $n > 1$ del grafo $G = (V, E)$ es un circuito hamiltoniano si $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$ es un circuito hamiltoniano.

¿Cuál es el origen de esta terminología?

- El origen de esta terminología es un juego, el juego icosiano, inventado en 1857 por el matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton.
- Consistía en un dodecaedro de madera, un poliedro de 12 caras, cada una de las cuales es un pentágono regular, como se ve en la siguiente figura, con un alfiler saliendo de cada vértice del dodecaedro y en un trozo de cuerda.



Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

- Los 20 vértices del dodecaedro estaban etiquetados con el nombre de distintas ciudades del mundo.

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

- Los 20 vértices del dodecaedro estaban etiquetados con el nombre de distintas ciudades del mundo.
- El objetivo del juego era comenzar en una ciudad, viajar siguiendo las aristas del dodecaedro visitando cada una de las otras 19 ciudades exactamente una vez y terminar el viaje en la primera ciudad.

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

- Los 20 vértices del dodecaedro estaban etiquetados con el nombre de distintas ciudades del mundo.
- El objetivo del juego era comenzar en una ciudad, viajar siguiendo las aristas del dodecaedro visitando cada una de las otras 19 ciudades exactamente una vez y terminar el viaje en la primera ciudad.
- El circuito seguido se marcaba utilizando la cuerda y los alfileres.

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

- Los 20 vértices del dodecaedro estaban etiquetados con el nombre de distintas ciudades del mundo.
- El objetivo del juego era comenzar en una ciudad, viajar siguiendo las aristas del dodecaedro visitando cada una de las otras 19 ciudades exactamente una vez y terminar el viaje en la primera ciudad.
- El circuito seguido se marcaba utilizando la cuerda y los alfileres.

¿Qué pregunta puede ser equivalente a la planteada por este juego?

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

- Los 20 vértices del dodecaedro estaban etiquetados con el nombre de distintas ciudades del mundo.
- El objetivo del juego era comenzar en una ciudad, viajar siguiendo las aristas del dodecaedro visitando cada una de las otras 19 ciudades exactamente una vez y terminar el viaje en la primera ciudad.
- El circuito seguido se marcaba utilizando la cuerda y los alfileres.

¿Qué pregunta puede ser equivalente a la planteada por este juego?

- Se puede considerar la siguiente pregunta, que es equivalente: ¿hay algún circuito en el grafo, que se muestra en la siguiente figura, que pase por cada vértice exactamente una vez?

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

- Los 20 vértices del dodecaedro estaban etiquetados con el nombre de distintas ciudades del mundo.
- El objetivo del juego era comenzar en una ciudad, viajar siguiendo las aristas del dodecaedro visitando cada una de las otras 19 ciudades exactamente una vez y terminar el viaje en la primera ciudad.
- El circuito seguido se marcaba utilizando la cuerda y los alfileres.

¿Qué pregunta puede ser equivalente a la planteada por este juego?

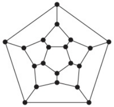
- Se puede considerar la siguiente pregunta, que es equivalente: ¿hay algún circuito en el grafo, que se muestra en la siguiente figura, que pase por cada vértice exactamente una vez?
- Esto resuelve el juego, puesto que este grafo es isomorfo al grafo que consta de los vértices y aristas del dodecaedro.

Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

- Los 20 vértices del dodecaedro estaban etiquetados con el nombre de distintas ciudades del mundo.
- El objetivo del juego era comenzar en una ciudad, viajar siguiendo las aristas del dodecaedro visitando cada una de las otras 19 ciudades exactamente una vez y terminar el viaje en la primera ciudad.
- El circuito seguido se marcaba utilizando la cuerda y los alfileres.

¿Qué pregunta puede ser equivalente a la planteada por este juego?

- Se puede considerar la siguiente pregunta, que es equivalente: ¿hay algún circuito en el grafo, que se muestra en la siguiente figura, que pase por cada vértice exactamente una vez?
- Esto resuelve el juego, puesto que este grafo es isomorfo al grafo que consta de los vértices y aristas del dodecaedro.

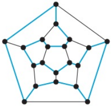


Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

- En la siguiente figura se presenta una solución del juego de Hamilton.

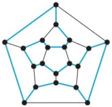
Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

- En la siguiente figura se presenta una solución del juego de Hamilton.



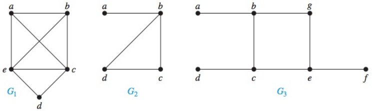
Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

- En la siguiente figura se presenta una solución del juego de Hamilton.



Ejemplo

¿Cuáles de los grafos simples de esta figura contienen un circuito hamiltoniano o, si no, un camino hamiltoniano?



Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos

Solución

G_1 contiene un circuito hamiltoniano: a, b, c, d, e, a. No hay circuitos hamiltonianos en G_2 (esto puede verse porque cualquier circuito que pase por todos los vértices tiene que contener dos veces a la arista $\{a, b\}$), pero G_2 contiene un camino hamiltoniano, que es a, b, c, d. El grafo G_3 no contiene ni un circuito hamiltoniano ni un camino hamiltoniano, ya que cualquier camino que pase por todos los vértices tiene que contener más de una vez a una de la aristas $\{a, b\}, \{e, f\}$ y $\{c, d\}$.

Agenda del día

1. **Introducción a grafos**
   - Representación
   - Caminos y circuitos Eulerianos y Hamiltonianos
   - Ejercicios

Ejercicios

Comience la implementación de su estructura grafo utilizando listas de adyacencia y matriz de adyacencia.