Computación y Estructuras Discretas I

Andrés A. Aristizábal P.
aaaristizabal@icesi.edu.co

Departamento de Computación y Sistemas Inteligentes

2024-2

Agenda del día

1. **Funciones**
   - Presentación del tema
   - Ejercicios

Agenda del día

1. **Funciones**
   - Presentación del tema
   - Ejercicios

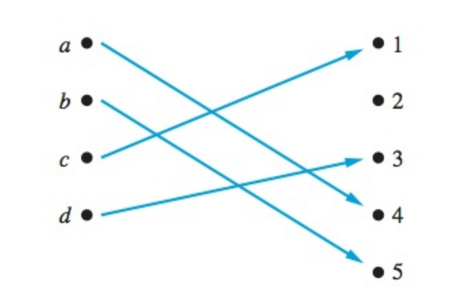
Funciones

¿Qué es una función inyectiva?

¿Qué es una función inyectiva?

Definición

Se dice que una función f es inyectiva si, y sólo si, $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$ para x e y en el dominio de f. Una función se dice que es una inyección si es inyectiva. $\forall x \forall y\, ((f(x) = f(y)) \rightarrow (x = y))$.



Ejemplo

Determine si la función $f(x) = x + 1$ *del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros es inyectiva.*

Ejemplo

Determine si la función $f(x) = x + 1$ *del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros es inyectiva.*
Suponemos que $f(x) = f(y)$, *luego* $x + 1 = y + 1 = x = y$ *y probamos que es inyectiva.*

Ejemplo

Determine si la función $f(x) = x + 1$ *del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros es inyectiva.*
Suponemos que $f(x) = f(y)$, *luego* $x + 1 = y + 1 = x = y$ *y probamos que es inyectiva.*

Ejemplo

Determine si la función $f(x) = x^2$ *del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros es inyectiva.*

Ejemplo

Determine si la función $f(x) = x + 1$ *del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros es inyectiva.*
Suponemos que $f(x) = f(y)$, *luego* $x + 1 = y + 1 = x = y$ *y probamos que es inyectiva.*

Ejemplo

Determine si la función $f(x) = x^2$ *del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros es inyectiva.*
La función $f(x) = x^2$ *no es inyectiva pues, por ejemplo,* $f(1) = f(-1)$ *pero* $1 \neq -1$.

¿Cuándo decimos que una función es estrictamente creciente?

¿Cuándo decimos que una función es estrictamente creciente?

Definición

Una función f cuyo dominio y codominio son subconjuntos del conjunto de los números reales se denomina estrictamente creciente si $f(x) < f(y)$ siempre que $x < y$ y tanto x como y estén en el dominio de f.

¿Cuándo decimos que una función es estrictamente creciente?

Definición

Una función f cuyo dominio y codominio son subconjuntos del conjunto de los números reales se denomina estrictamente creciente si $f(x) < f(y)$ siempre que $x < y$ y tanto x como y estén en el dominio de f. Una función es estrictamente creciente si
$\forall x \, \forall y \, ((x < y) \rightarrow (f(x) < f(y)))$.

¿Cuándo decimos que una función es estrictamente decreciente?

¿Cuándo decimos que una función es estrictamente decreciente?

Definición

Una función f cuyo dominio y codominio son subconjuntos del conjunto de los números reales se denomina estrictamente decreciente si $f(x) > f(y)$ siempre que $x < y$ y tanto x como y estén en el dominio de f.

¿Cuándo decimos que una función es estrictamente decreciente?

Definición

Una función f cuyo dominio y codominio son subconjuntos del conjunto de los números reales se denomina estrictamente decreciente si $f(x) > f(y)$ siempre que $x < y$ y tanto x como y estén en el dominio de f. Una función es estrictamente decreciente si $\forall x \, \forall y \, ((x < y) \rightarrow (f(x) > f(y)))$.

Funciones

¿Qué es una función sobreyectiva?

¿Qué es una función sobreyectiva?

Definición

Se dice que una función f es sobreyectiva o sobre si, y sólo si, para todo elemento $b \in B$ hay un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

¿Qué es una función sobreyectiva?

Definición

Se dice que una función f es sobreyectiva o sobre si, y sólo si, para todo elemento $b \in B$ hay un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Una función se dice que es una sobreyección si es sobreyectiva.

Funciones

¿Qué es una función sobreyectiva?

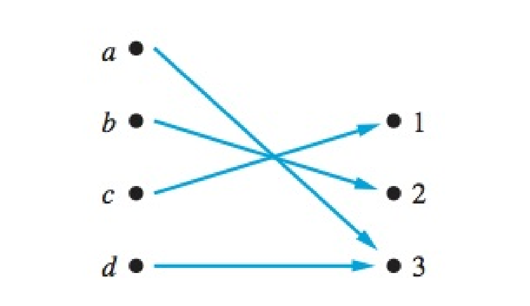
Definición

Se dice que una función f es sobreyectiva o sobre si, y sólo si, para todo elemento $b \in B$ hay un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Una función se dice que es una sobreyección si es sobreyectiva.
$\forall b \, \exists a \, f(a) = b$.

¿Qué es una función sobreyectiva?

Definición

Se dice que una función f es sobreyectiva o sobre si, y sólo si, para todo elemento $b \in B$ hay un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Una función se dice que es una sobreyección si es sobreyectiva.
$\forall b \exists a\, f(a) = b$.



Funciones

Ejemplo

Determine si la función $f(x) = x + 1$ *del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros es sobreyectiva.*

Ejemplo

Determine si la función $f(x) = x + 1$ *del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros es sobreyectiva.*
Debemos mostrar que para todo y *existe un* x *tal que* $f(x) = y$. *Como* $f(x) = y$ *entonces* $x + 1 = y$ *y* $x = y - 1$, *que cumple* $f(x) = y$ *ya que* $f(y - 1) = y - 1 + 1 = y$.

Ejemplo

Determine si la función $f(x) = x + 1$ *del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros es sobreyectiva.*
Debemos mostrar que para todo y *existe un* x *tal que* $f(x) = y$. *Como* $f(x) = y$ *entonces* $x + 1 = y$ *y* $x = y - 1$, *que cumple* $f(x) = y$ *ya que* $f(y - 1) = y - 1 + 1 = y$.

Ejemplo

Determine si la función $f(x) = x^2$ *del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros es sobreyectiva.*

Ejemplo

Determine si la función $f(x) = x + 1$ *del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros es sobreyectiva.*
Debemos mostrar que para todo y *existe un* x *tal que* $f(x) = y$*. Como* $f(x) = y$ *entonces* $x + 1 = y$ *y* $x = y - 1$, *que cumple* $f(x) = y$ *ya que* $f(y - 1) = y - 1 + 1 = y$.

Ejemplo

Determine si la función $f(x) = x^2$ *del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros es sobreyectiva.*
La función $f(x) = x^2$ *no es sobreyectiva porque, por ejemplo, no hay ningún entero* x *tal que* $x^2 = -1$.

¿Qué es una función biyectiva?

¿Qué es una función biyectiva?

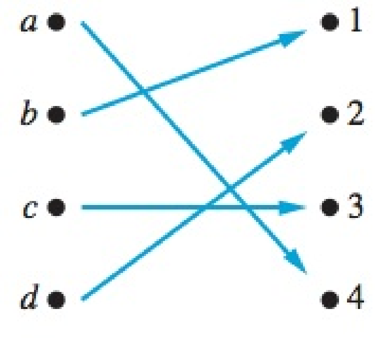
Definición

La función f es una biyección o función biyectiva si es tanto inyectiva como sobreyectiva.

¿Qué es una función biyectiva?

Definición

La función f es una biyección o función biyectiva si es tanto inyectiva como sobreyectiva.



Funciones

¿Qué es una función inversa?

¿Qué es una función inversa?

Definición

Sea f una función biyectiva del conjunto A en el conjunto B. La función inversa de f es la función que asigna a un elemento b que pertenece a B el único elemento a de A tal que $f(a) = b$. La función inversa de f se denota por f^{-1}. Así, $f^{-1}(b) = a$ cuando $f(a) = b$.

Funciones

¿Qué es una función inversa?

Definición

Sea f una función biyectiva del conjunto A en el conjunto B. La función inversa de f es la función que asigna a un elemento b que pertenece a B el único elemento a de A tal que $f(a) = b$. La función inversa de f se denota por f^{-1}. Así, $f^{-1}(b) = a$ cuando $f(a) = b$.

¿Cuándo se puede obtener la inversa de una función?

¿Qué es una función inversa?

Definición

Sea f una función biyectiva del conjunto A en el conjunto B. La función inversa de f es la función que asigna a un elemento b que pertenece a B el único elemento a de A tal que $f(a) = b$. La función inversa de f se denota por f^{-1}. Así, $f^{-1}(b) = a$ cuando $f(a) = b$.

¿Cuándo se puede obtener la inversa de una función?

Cuando dicha función es biyectiva

Funciones

¿Qué es una función inversa?

Definición

Sea f una función biyectiva del conjunto A en el conjunto B. La función inversa de f es la función que asigna a un elemento b que pertenece a B el único elemento a de A tal que $f(a) = b$. La función inversa de f se denota por f^{-1}. Así, $f^{-1}(b) = a$ cuando $f(a) = b$.

¿Cuándo se puede obtener la inversa de una función?

Cuando dicha función es biyectiva

¿Por qué no se puede invertir una función que no es biyectiva?

Funciones

¿Qué es una función inversa?

Definición

Sea f una función biyectiva del conjunto A en el conjunto B. La función inversa de f es la función que asigna a un elemento b que pertenece a B el único elemento a de A tal que $f(a) = b$. La función inversa de f se denota por f^{-1}. Así, $f^{-1}(b) = a$ cuando $f(a) = b$.

¿Cuándo se puede obtener la inversa de una función?

Cuando dicha función es biyectiva

¿Por qué no se puede invertir una función que no es biyectiva?

Si la función no es una biyección, no podemos asignar a cada elemento b del codominio un único elemento a del dominio tal que $f(a) = b$, ya que para algún b hay o bien más de un elemento a o ninguno.

Funciones

¿Qué es una función invertible?

Funciones

¿Qué es una función invertible?

Es una función biyectiva. Se le denomina invertible ya que se puede definir su inversa.

Funciones

¿Qué es una función invertible?

Es una función biyectiva. Se le denomina invertible ya que se puede definir su inversa.

¿Cuándo una función es no invertible?

Funciones

¿Qué es una función invertible?

Es una función biyectiva. Se le denomina invertible ya que se puede definir su inversa.

¿Cuándo una función es no invertible?

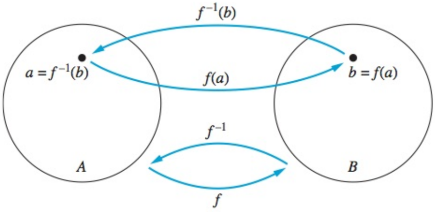
Cuando dicha función no es biyectiva, ya que la inversa de tal función no existe.

¿Qué es una función invertible?

Es una función biyectiva. Se le denomina invertible ya que se puede definir su inversa.

¿Cuándo una función es no invertible?

Cuando dicha función no es biyectiva, ya que la inversa de tal función no existe.



Ejemplo

Sea f la función de $\{a, b, c\}$ en $\{1, 2, 3\}$ definida por $f(a) = 2$, $f(b) = 3$ y $f(c) = 1$. ¿Es f invertible? Si lo es, ¿cuál es su inversa?

Ejemplo

Sea f *la función de* $\{a, b, c\}$ *en* $\{1, 2, 3\}$ *definida por* $f(a) = 2$, $f(b) = 3$ *y* $f(c) = 1$. *¿Es* f *invertible? Si lo es, ¿cuál es su inversa?*

Solución

La función f *es invertible puesto que es una biyección.*

Ejemplo

Sea f la función de $\{a, b, c\}$ en $\{1, 2, 3\}$ definida por $f(a) = 2$, $f(b) = 3$ y $f(c) = 1$. ¿Es f invertible? Si lo es, ¿cuál es su inversa?

Solución

La función f es invertible puesto que es una biyección. La función inversa f^{-1} invierte la correspondencia dada por f, de tal forma que $f^{-1}(1) = c$, $f^{-1}(2) = a$ y $f^{-1}(3) = b$.

Ejemplo

Sea f la función de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x^2$, ¿Es f invertible?

Ejemplo

Sea f la función de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z}$ dada por $f(x) = x^2$, ¿Es f invertible?

Solución

Como $f(-1) = f(1) = 1$, f no es inyectiva. Si se definiese una función inversa, a 1 se le asignarían dos elementos. Por tanto f no es invertible.

¿Qué es una composición de funciones?

¿Qué es una composición de funciones?

Definición

Sea g una función del conjunto A al conjunto B y sea f una función del conjunto B al conjunto C. La composición de las funciones f y g, denotada por $f \circ g$, se define por

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Funciones

¿Qué es una composición de funciones?

Definición

Sea g una función del conjunto A al conjunto B y sea f una función del conjunto B al conjunto C. La composición de las funciones f y g, denotada por $f \circ g$, se define por

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

$f \circ g$ es la función que asigna al elemento a de A el elemento asignado por f a $g(a)$.

¿Qué es una composición de funciones?

Definición

Sea g una función del conjunto A al conjunto B y sea f una función del conjunto B al conjunto C. La composición de las funciones f y g, denotada por $f \circ g$, se define por

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

$f \circ g$ es la función que asigna al elemento a de A el elemento asignado por f a $g(a)$.

¿Cuándo se pueden componer dos funciones?

¿Qué es una composición de funciones?

Definición

Sea g una función del conjunto A al conjunto B y sea f una función del conjunto B al conjunto C. La composición de las funciones f y g, denotada por $f \circ g$, se define por

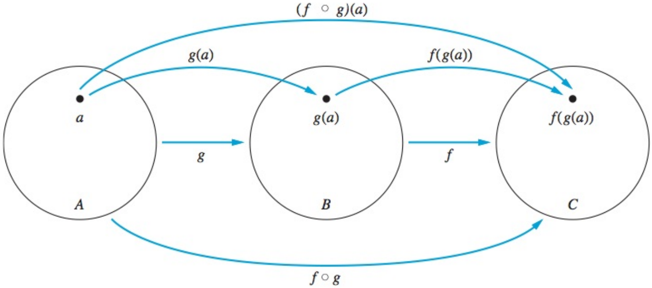
$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

$f \circ g$ es la función que asigna al elemento a de A el elemento asignado por f a $g(a)$.

¿Cuándo se pueden componer dos funciones?

La composición de dos funciones $f \circ g$ se puede definir, si, y sólo si, la imagen de g es un subconjunto del dominio de f.

Funciones



Ejemplo

Sea g la función del conjunto $\{a, b, c\}$ en sí mismo, definida por $g(a) = b$, $g(b) = c$ y $g(c) = a$. Sea f la función del conjunto $\{a, b, c\}$ en $\{1, 2, 3\}$ tal que $f(a) = 3$, $f(b) = 2$ y $f(c) = 1$. ¿Cuál es la composición de f y g? ¿Y la composición de g y f?

Ejemplo

Sea g la función del conjunto $\{a, b, c\}$ *en sí mismo, definida por* $g(a) = b$, $g(b) = c$ *y* $g(c) = a$. *Sea f la función del conjunto* $\{a, b, c\}$ *en* $\{1, 2, 3\}$ *tal que* $f(a) = 3$, $f(b) = 2$ *y* $f(c) = 1$. *¿Cuál es la composición de f y g? ¿Y la composición de g y f?*

Solución

La composición $f \circ g$ *se define como*
$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b) = 2$, $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(c) = 1$ *y*
$(f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(a) = 3$.

Ejemplo

Sea g la función del conjunto $\{a, b, c\}$ en sí mismo, definida por $g(a) = b$, $g(b) = c$ y $g(c) = a$. Sea f la función del conjunto $\{a, b, c\}$ en $\{1, 2, 3\}$ tal que $f(a) = 3$, $f(b) = 2$ y $f(c) = 1$. ¿Cuál es la composición de f y g? ¿Y la composición de g y f?

Solución

La composición $f \circ g$ se define como
$(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b) = 2$, $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(c) = 1$ *y*
$(f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(a) = 3$.
En cuanto a $g \circ f$, no se puede definir ya que la imagen de f no es subconjunto del dominio de g.

Funciones

¿Qué es la gráfica de una función?

¿Qué es la gráfica de una función?

Definición

Sea f una función del conjunto A al conjunto B. La gráfica de una función f es el conjunto de pares ordenados $\{(a, b) \mid \in\ a \in A \wedge f(a) = b\}$.

Funciones

¿Qué es la gráfica de una función?

Definición

Sea f una función del conjunto A al conjunto B. La gráfica de una función f es el conjunto de pares ordenados $\{(a, b) \mid \in a \in A \wedge f(a) = b\}$. La gráfica de una función f de A en B es el subconjunto de $A \times B$ que contiene los pares ordenados con la segunda entrada igual al elemento de B asignado por f a la primera entrada.

Funciones

Ejemplo

Dibuje la gráfica de la función $f(n) = 2n + 1$ *del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros.*

Ejemplo

Dibuje la gráfica de la función $f(n) = 2n + 1$ *del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros.*

Solución

La gráfica de f *es el conjunto de pares ordenados* $(n, 2n + 1)$, *donde* n *es un entero.*

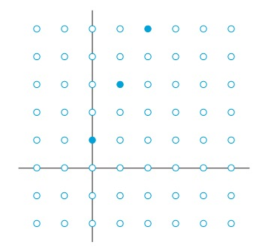
Funciones

Ejemplo

Dibuje la gráfica de la función $f(n) = 2n + 1$ del conjunto de los enteros al conjunto de los enteros.

Solución

La gráfica de f es el conjunto de pares ordenados $(n, 2n + 1)$, donde n es un entero.



¿Qué es la función parte entera?

¿Qué es la función parte entera?

Definición

La función parte entera o función piso, asigna a un número real x el mayor entero que es menor o igual que x.

¿Qué es la función parte entera?

Definición

La función parte entera o función piso, asigna a un número real x el mayor entero que es menor o igual que x. El valor de la función parte entera se denota por $\lfloor x \rfloor$.

Funciones

¿Qué es la función parte entera por exceso?

¿Qué es la función parte entera por exceso?

Definición

La función parte entera por exceso o función techo, asigna a un número real x el menor entero que es mayor o igual que x.

¿Qué es la función parte entera por exceso?

Definición

La función parte entera por exceso o función techo, asigna a un número real x el menor entero que es mayor o igual que x. El valor de la función parte entera por exceso se denota por $\lceil x \rceil$.

Ejemplo

Estos son algunos valores de las funciones parte entera y parte entera por exceso:

Ejemplo

Estos son algunos valores de las funciones parte entera y parte entera por exceso:

$$\lfloor \tfrac{1}{2} \rfloor = 0, \qquad \lceil \tfrac{1}{2} \rceil = 1, \qquad \lfloor -\tfrac{1}{2} \rfloor = -1, \quad \lceil -\tfrac{1}{2} \rceil = 0,$$

$$\lfloor \mathit{3.1} \rfloor = 3, \quad \lceil \mathit{3.1} \rceil = 4, \quad \lfloor 7 \rfloor = 7, \qquad \lceil 7 \rceil = 7.$$

¿Cómo se define un número real?

Funciones

¿Cómo se define un número real?

Definición

Sea x un número real, $x = n + \epsilon$ *tal que* $x \in \mathbb{Z}$ *y* $\epsilon \in \mathbb{R}$ *y* $0 < \epsilon < 1$

Agenda del día

1. **Funciones**
   - Presentación del tema
   - Ejercicios