

Computación y Estructuras Discretas I

Andrés A. Aristizábal P.
aaaristizabal@icesi.edu.co

Departamento de Computación y Sistemas Inteligentes



2024-2

Agenda del día

1 Caminos de longitud mínima

- Algoritmo de Floyd-Warshall
- Ejercicios

Algoritmo de Floyd-Warshall

¿Qué es el algoritmo de Floyd-Warshall?

Algoritmo de Floyd-Warshall

¿Qué es el algoritmo de Floyd-Warshall?

- Es un algoritmo de análisis sobre grafos para encontrar el camino mínimo en grafos ponderados.
- Los grafos ponderados pueden tener pesos positivos o negativos pero no ciclos con pesos negativos.
- El algoritmo encuentra el valor del camino mínimo entre todos los pares de vértices en una única ejecución.
- El algoritmo de Floyd-Warshall es un ejemplo de programación dinámica.

Algoritmo de Floyd-Warshall

¿Puede el algoritmo de Floyd-Warshall dar los caminos mínimos a modo de secuencia de vértices?

Algoritmo de Floyd-Warshall

¿Puede el algoritmo de Floyd-Warshall dar los caminos mínimos a modo de secuencia de vértices?

- Aunque el algoritmo original no retorna detalles de los caminos como tales, es posible reconstruirlos con simples modificaciones al algoritmo.

Algoritmo de Floyd-Warshall

¿Qué hace el algoritmo de Floyd-Warshall?

Algoritmo de Floyd-Warshall

¿Qué hace el algoritmo de Floyd-Warshall?

- El algoritmo de Floyd-Warshall compara todos los caminos posibles entre cada par de vértices del grafo.
- Puede hacer esto con $\Theta(|V|^3)$ comparaciones en el grafo.
- Hace esto mejorando incrementalmente un estimado del camino mínimo entre dos vértices hasta que el estimado sea óptimo.

Algoritmo de Floyd-Warshall

¿Cuál es la intuición detrás del algoritmo de Floyd-Warshall?

Algoritmo de Floyd-Warshall

¿Cuál es la intuición detrás del algoritmo de Floyd-Warshall?

- Considere un grafo G con V vértices numerados de 1 a n .
- Considere una función $menorCamino(i, j, k)$ que retorna el menor camino posible de i a j usando vértices sólo del conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$ como puntos intermedios del camino.
- Ahora, dada esta función, el objetivo es encontrar el menor camino de i a j usando sólo vértices del conjunto $\{1, 2, \dots, k + 1\}$
- Para estos pares de vértices el verdadero menor camino puede ser:
 - Un camino que sólo utiliza vértices del conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$ o
 - Un camino que va de i a $k + 1$ y luego de $k + 1$ a j (ambos sólo utilizando vértices del conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$)

Algoritmo de Floyd-Warshall

- Se sabe que el menor camino de i a j que sólo utiliza vértices de $\{1, 2, \dots, k\}$ está definido por $menorCamino(i, j, k)$.
- Es claro que si hubiese un camino más corto de i a $k + 1$ a j entonces la longitud de este camino sería la concatenación del camino más corto de i a $k + 1$ (usando vértices en $\{1, 2, \dots, k\}$) y el menor camino de $k + 1$ a j (usando vértices en $\{1, 2, \dots, k\}$)
- Si $w(i, j)$ es el peso de la arista entre i y j , podemos definir $menorCamino(i, j, k)$ en términos de la siguiente formula recursiva:
 - Caso base: $menorCamino(i, j, k) = w(i, j)$
 - Caso recursivo:
$$menorCamino(i, j, k + 1) = \min(menorCamino(i, j, k), menorCamino(i, k + 1, k) + menorCamino(k + 1, j, k))$$
- Esta fórmula es la base del algoritmo de Floyd-Warshall.

Algoritmo de Floyd-Warshall

¿Cómo funciona el algoritmo?

Algoritmo de Floyd-Warshall

¿Cómo funciona el algoritmo?

- Este algoritmo funciona computando el *menorCamino*(i, j, k) para todas las parejas (i, j) para $k = 1, k = 2$, etc.
- Este proceso continua hasta que $k = n$ y hayamos encontrado el menor camino para todas las parejas (i, j) usando vértices intermedios.

Algoritmo de Floyd-Warshall

¿Cuál es el pseudocódigo de este algoritmo?

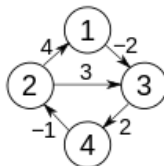
Algoritmo de Floyd-Warshall

¿Cuál es el pseudocódigo de este algoritmo?

```
1 let dist be a  $|V| \times |V|$  array of minimum distances initialized to  $\infty$  (infinity)
2 for each vertex  $v$ 
3    $\text{dist}[v][v] \leftarrow 0$ 
4 for each edge  $(u,v)$ 
5    $\text{dist}[u][v] \leftarrow w(u,v)$  // the weight of the edge  $(u,v)$ 
6 for  $k$  from 1 to  $|V|$ 
7   for  $i$  from 1 to  $|V|$ 
8     for  $j$  from 1 to  $|V|$ 
9       if  $\text{dist}[i][j] > \text{dist}[i][k] + \text{dist}[k][j]$ 
10          $\text{dist}[i][j] \leftarrow \text{dist}[i][k] + \text{dist}[k][j]$ 
11       end if
```

Algoritmo de Floyd-Warshall

¿Cómo sería el seguimiento de este algoritmo para este grafo dirigido ponderado?



Algoritmo de Floyd-Warshall

$k = 0$		j			
		1	2	3	4
i	1	0	∞	-2	∞
	2	4	0	3	∞
	3	∞	∞	0	2
	4	∞	-1	∞	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

$k = 0$		j			
		1	2	3	4
i	1	0	∞	-2	∞
	2	4	0	3	∞
	3	∞	∞	0	2
	4	∞	-1	∞	0

$k = 1$		j			
		1	2	3	4
i	1	0	∞	-2	∞
	2	4	0	2	∞
	3	∞	∞	0	2
	4	∞	-1	∞	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

$k = 1$		j			
		1	2	3	4
i	1	0	∞	-2	∞
	2	4	0	2	∞
	3	∞	∞	0	2
	4	∞	-1	∞	0

$k = 2$		j			
		1	2	3	4
i	1	0	∞	-2	∞
	2	4	0	2	∞
	3	∞	∞	0	2
	4	3	-1	1	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

$k=2$		j			
		1	2	3	4
i	1	0	∞	-2	∞
	2	4	0	2	∞
	3	∞	∞	0	2
	4	3	-1	1	0

$k=3$		j			
		1	2	3	4
i	1	0	∞	-2	0
	2	4	0	2	4
	3	∞	∞	0	2
	4	3	-1	1	0

Algoritmo de Floyd-Warshall

$k = 3$		j			
		1	2	3	4
i	1	0	∞	-2	0
	2	4	0	2	4
	3	∞	∞	0	2
	4	3	-1	1	0

$k = 4$		j			
		1	2	3	4
i	1	0	-1	-2	0
	2	4	0	2	4
	3	5	1	0	2
	4	3	-1	1	0

Agenda del día

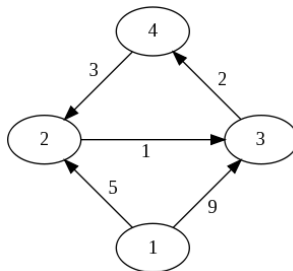
1 Caminos de longitud mínima

- Algoritmo de Floyd-Warshall
- Ejercicios

Ejercicios

Ejercicio

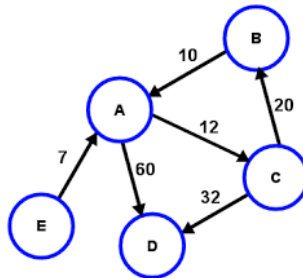
Realice el seguimiento al algoritmo de Floyd-Warshall sobre este grafo.



Ejercicios

Ejercicio

Realice el seguimiento al algoritmo de Floyd-Warshall sobre este grafo.



Ejercicios

Ejercicio

Continúe su implementación genérica de grafos (matriz de adyacencia y listas de adyacencia) e implemente el algoritmo de Floyd-Warshall (incluya el BFS, DFS y Dijkstra). Recuerde que la interface debe incluir todos los métodos del grafo.