Graphenalgorithmen 2
Aufgaben

Silas Alexander Kraume
sikra111

1 Aufgabe 47

Algorithm 1: Algorithmus zum Test der Existenz eines Hamilton-Kreises in einem 2-reduzierbaren Graphen

Input: 2-reduzierbarer Graph $G = (V, E)$
Output: **true** wenn Hamilton-Kreis existiert, sonst **false**

Function `CheckHamiltonCycleIn2ReducibleGraph(`G`):`
  while $|V| > 3$ **do**
    $u \leftarrow$ node in V with $\deg_G(u) \leqslant 2$;
    if $\deg_G(u) < 2$ **then**
      return false;
    Seien v, w die beiden Nachbarn von u in G;
    `// Führe 2-Reduktion durch:`
    $E \leftarrow E \setminus \{u, v\}$;
    $E \leftarrow E \setminus \{u, w\}$;
    $E \leftarrow E \cup \{v, w\}$ `// Insofern nicht bereits vorhanden`
    $V \leftarrow V \setminus \{u\}$;
  if $G \neq K_3$ **then**
    return false;
  return true;

Beweis der Korrektheit

Proof. Wir zeigen durch Induktion über die Anzahl der Knoten, dass der Algorithmus korrekt entscheidet, ob ein 2-reduzierbarer Graph G einen Hamilton-Kreis besitzt.

Invariante: In jedem Reduktionsschritt gilt: G hat einen Hamilton-Kreis $\Leftrightarrow$ G' (reduzierter Graph) hat einen Hamilton-Kreis.

Induktionsanfang: Für $|V| = 3$ gilt: G hat einen Hamilton-Kreis $\Leftrightarrow G = K_3$ (K_3 ist der kleinstmögliche Hamilton-Kreis).

Induktionsschritt: Angenommen, die Invariante gilt für Graphen mit k Knoten. Betrachte Graph G mit $k+1$ Knoten. Sei u ein Knoten mit $\deg(u) = 2$ und Nachbarn v, w. Sei G' der Graph nach 2-Reduktion von u.

($\Rightarrow$): Hat G einen Hamilton-Kreis H, so verwendet H beide Kanten $\{u, v\}$ und $\{u, w\}$ (da u Grad 2 in H haben muss). Nach Entfernung von u und Hinzufügen von $\{v, w\}$ entsteht

$$H' = H \setminus \{\{u, v\}, \{u, w\}\} \cup \{\{v, w\}\},$$

ein Hamilton-Kreis in G'.

($\Leftarrow$): Hat G' einen Hamilton-Kreis H' mit Kante $\{v, w\}$, so ersetzen wir $\{v, w\}$ durch den Pfad $v - u - w$ und erhalten

$$H = H' \setminus \{\{v, w\}\} \cup \{\{u, v\}, \{u, w\}\},$$

einen Hamilton-Kreis in G.

Somit gilt die Invariante auch für Graphen mit $k+1$ Knoten.

Korrektheit der Abbruchbedingungen:

Falls $\deg(u) < 2$: Knoten mit Grad < 2 können nicht in einem Hamilton-Kreis liegen $\Rightarrow$ kein Hamilton-Kreis existiert.

Falls $|V| < 3$: Ein Hamilton-Kreis benötigt mindestens 3 Knoten $\Rightarrow$ kein Hamilton-Kreis existiert / Die Schleife wird nie durchlaufen und der Algorithmus gibt **false** zurück, da $G \neq K_3$.

Durch vollständige Induktion folgt die Korrektheit des Algorithmus. ■

Laufzeitanalyse

- Jede Iteration entfernt genau 1 Knoten $\Rightarrow |V| - 3$ Iterationen bis Abbruchbedingung $|V| = 3$
- Jede Iteration: $O(1)$ zum Finden eines Knotens mit $\deg \leqslant 2$, $O(1)$ für 2-Reduktionsschritt
- **Gesamtzeitkomplexität:** $O(|V|)$