

Graphenalgorithmen 2

Aufgaben

Silas Alexander Kraume
sikra111

1 Aufgabe 79

Theorem 1.

Für jeden chordalen Graphen $G = (V, E)$ gilt

$$\kappa(G) = \alpha(G)$$

wobei $\kappa(G)$ die minimale Anzahl von Cliquen in einer Cliquenüberdeckung und $\alpha(G)$ die Größe einer maximalen unabhängigen Menge ist.

Proof.

Ungleichung 1 ($\alpha(G) \leq \kappa(G)$).

Dies gilt für alle Graphen, nicht nur chordale Graphen. Sei $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ eine beliebige Cliquenüberdeckung von G . Eine unabhängige Menge I kann höchstens einen Knoten aus jeder Clique C_i enthalten, da sonst zwei Knoten der unabhängigen Menge adjazent wären. Also gilt für jede unabhängige Menge $I \subseteq V$ in G :

$$|I| \leq k = |\mathcal{C}|$$

Da $|\mathcal{C}| = \kappa(G)$ minimal ist, folgt

$$\alpha(G) \leq \kappa(G)$$

Ungleichung 2 ($\alpha(G) \geq \kappa(G)$).

Es gilt:

Ein Graph G ist genau dann chordal, wenn er eine perfekte Eliminationsordnung besitzt.

Das bedeutet, es existiert eine Ordnung der Knoten $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ so, dass für jeden Knoten v_i die späteren Nachbarn

$$N^+(v_i) = \{v_j \mid j > i, \{v_i, v_j\} \in E\}$$

eine Clique bilden, also alle v_i simplizial sind.

Mithilfe der Eliminationsordnung lässt sich eine Cliquenüberdeckung konstruieren. Wir definieren für jeden Knoten v_i die Clique

$$C_i = \{v_i\} \cup N^+(v_i).$$

Die Menge der Cliquen $\{C_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ mit der Menge $\mathcal{I} = \{i \mid v_i \notin C_j, j < i\}$ aller Indizes bildet eine Cliquenüberdeckung von G , da jeder Knoten v_i entweder in seiner eigenen Clique C_i oder in einer vorherigen Clique C_j mit $j < i$ enthalten ist.

Sei

$$\mathcal{S} = \{v_i \mid i \in \mathcal{I}\}$$

eine unabhängige Menge in G mit den entsprechenden v_i als Repräsentanten ihrer jeweiligen Clique C_i . \mathcal{S} ist unabhängig, denn angenommen, es gäbe zwei Knoten $v_i, v_j \in \mathcal{S}$ mit $i < j$ und $\{v_i, v_j\} \in E$. Dann gilt $v_j \in N^+(v_i)$ und somit $v_j \in C_i$, was im Widerspruch dazu steht, dass $j \in \mathcal{I}$. Also existiert keine Kante zwischen zwei Knoten aus \mathcal{S} .

Da \mathcal{S} unabhängig ist, gilt:

$$|\mathcal{S}| \leq \alpha(G).$$

Die Cliquen $\{C_i \mid v_i \in \mathcal{S}\}$ bilden eine Cliquenüberdeckung der Größe $|\mathcal{S}|$. Somit gilt:

$$\kappa(G) \leq |\mathcal{S}| \leq \alpha(G).$$

Beweisschluss ($\alpha(G) = \kappa(G)$).

Aus den beiden Ungleichungen folgt:

$$\alpha(G) \leq \kappa(G) \leq \alpha(G)$$

Also gilt:

$$\alpha(G) = \kappa(G)$$

■