Graphenalgorithmen 2
Aufgaben

Silas Alexander Kraume
sikra111

1 Aufgabe 79

Theorem 1.
Für jeden chordalen Graphen $G = \left(V, E\right)$ gilt

$$\kappa\left(G\right) = \alpha\left(G\right)$$

wobei $\kappa\left(G\right)$ die minimale Anzahl von Cliquen in einer Cliquenüberdeckung und $\alpha\left(G\right)$ die Größe einer maximalen unabhängigen Menge ist.

Proof.
Ungleichung 1 ($\alpha\left(G\right) \leqslant \kappa\left(G\right)$).
Dies gilt für alle Graphen, nicht nur chordale Graphen. Sei $\mathscr{C} = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ eine beliebige Cliquenüberdeckung von G. Eine unabhängige Menge I kann höchstens einen Knoten aus jeder Clique C_i enthalten, da sonst zwei Knoten der unabhängigen Menge adjazent wären. Also gilt für jede unabhängige Menge $I \subseteq V$ in G:

$$|I| \leqslant k = |\mathscr{C}|$$

Da $|\mathscr{C}| = \kappa\left(G\right)$ minimal ist, folgt

$$\alpha\left(G\right) \leqslant \kappa\left(G\right)$$

Ungleichung 2 ($\alpha\left(G\right) \geqslant \kappa\left(G\right)$).
Es gilt:

> Ein Graph G ist genau dann chordal, wenn er eine perfekte Eliminationsordnung besitzt.

Das bedeutet, es existiert eine Ordnung der Knoten $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ so, dass für jeden Knoten v_i die späteren Nachbarn

$$N^+\left(v_i\right) = \{v_j \mid j > i, \{v_i, v_j\} \in E\}$$

eine Clique bilden, also alle v_i simplizial sind.

Mithilfe der Eliminationsordnung lässt sich eine Cliquenüberdeckung konstruieren. Wir definieren für jeden Knoten v_i die Clique

$$C_i = \{v_i\} \cup N^+\left(v_i\right).$$

Die Menge der Cliquen $\{C_i \mid i \in \mathscr{I}\}$ mit der Menge $\mathscr{I} = \{i \mid v_i \notin C_j, j < i\}$ aller Indizes bildet eine Cliquenüberdeckung von G, da jeder Knoten v_i entweder in seiner eigenen Clique C_i oder in einer vorherigen Clique C_j mit $j < i$ enthalten ist.

Sei

$$\mathscr{S} = \{v_i \mid i \in \mathscr{I}\}$$

eine unabhängige Menge in G mit den entsprechenden v_i als Repräsentanten ihrer jeweiligen Clique C_i. $\mathscr{S}$ ist unabhängig, denn angenommen, es gäbe zwei Knoten $v_i, v_j \in \mathscr{S}$ mit $i < j$ und $\{v_i, v_j\} \in E$. Dann gilt $v_j \in N^+\left(v_i\right)$ und somit $v_j \in C_i$, was im Widerspruch dazu steht, dass $j \in \mathscr{I}$. Also existiert keine Kante zwischen zwei Knoten aus $\mathscr{S}$.

Da $\mathscr{S}$ unabhängig ist, gilt:

$$|\mathscr{S}| \leqslant \alpha\left(G\right).$$

Die Cliquen $\{C_i \mid v_i \in \mathscr{S}\}$ bilden eine Cliquenüberdeckung der Größe $|\mathscr{S}|$. Somit gilt:

$$\kappa\left(G\right) \leqslant |\mathscr{S}| \leqslant \alpha\left(G\right).$$

Beweisschluss ($\alpha\left(G\right) = \kappa\left(G\right)$).
Aus den beiden Ungleichungen folgt:

$$\alpha\left(G\right) \leqslant \kappa\left(G\right) \leqslant \alpha\left(G\right)$$

Also gilt:

$$\alpha\left(G\right) = \kappa\left(G\right)$$

$\blacksquare$