Chapter 1

陈氏定理

1.1 2024 年 9 月 26 日

1.1.1 陈氏定理证明的第一步

我们给出以下约定：

- 令 $\mathcal{C}$ 为一列正整数(可重复).
- 令 $P_N(z) = \prod\limits_{\substack{p<z \\ p\nmid N}} p$，其中 p 为素数.
- q 满足 $(q, NP_N(z)) = 1$.
- $S_N(\mathcal{C}, q, z) = \{n\colon n \in \mathcal{C}, q \mid n, (n, P_N(z)) = 1\}$.

我们从一个例子去理解：

Example 1.1.1. 令 $\mathcal{C} = \{1, 2, \cdots, n\}$，其中 $\sqrt{n} \notin \mathbb{Z}$，再令 $N = 1$，$q = 1$，$z = \sqrt{n}$.

Solution. 我们来研究一下此时的 $S_N(\mathcal{C}, q, z)$：此时 $P_1\sqrt{n} = \prod\limits_{p<\sqrt{n}, p\nmid 1} p = \prod\limits_{p<\sqrt{n}} p$，则

$$S_1\left(\{1,2,\cdots,n\}, 1, \sqrt{n}\right) = \left\{m \in \mathbb{Z}\colon 1 \leq m \leq n, (m, \prod_{p<\sqrt{n}} p) = 1\right\}$$

也就是 m 的素因子都大于 $\sqrt{n}$，再考虑到 $m < n$，从而我们知道 m 为素数，所以此刻的集合即

$$S_1\left(\{1,2,\cdots,n\}, 1, \sqrt{n}\right) = \left\{m\colon \sqrt{n} < m \leq n,\ m \text{ 为素数}\right\}$$

$\square$

Eratosthenis 筛：找到 $1 \sim \sqrt{n}$ 中所有的素数，并在 $1 \sim n$ 中划去他们的倍数，剩下的就是 $1 \sim n$ 中所有的素数.

回到定理的第一步：令 N 为大偶数，$\mathcal{A}=\{N-p\colon p\nmid N\}$，再令 $q=1$，$z=N^{\frac{1}{10}}$，则

$$P_q(z)=P_1(N^{\frac{1}{10}})=\prod_{p<N^{\frac{1}{10}},p\nmid N}p$$

有

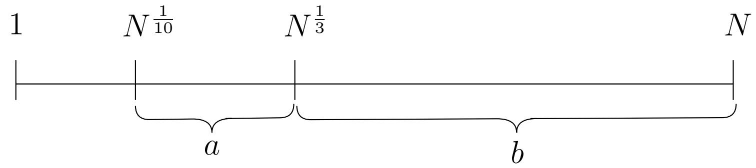
$$S_N(\mathcal{A},1,N^{\frac{1}{10}})=\left\{m\in\mathcal{A}\colon m=N-p,(m,P_1(N^{\frac{1}{10}}))=1\right\}$$

而 $(\overbrace{N-p'}^{=m},\prod\limits_{p<N^{\frac{1}{10}},p\nmid N}p)=1$ 说明 $N-p'$ 的素因子大于等于 $N^{\frac{1}{10}}$ 或者整除 N，但是我们考虑到

- 若存在 $N-p'$ 的素因子 $p''\mid N$，有 $p''\mid N-p'$，则 $p''\mid p'$，告诉我们 $p'=p''\mid N$，矛盾.
- 若存在 $N-p'$ 的素因子 $p''=N^{\frac{1}{10}}\mid N-p'$，则有 $p''\mid p'$，告诉我们 $p'=p''\mid N$，矛盾.

所以我们知道 $N-p'$ 的素因子都大于 $N^{\frac{1}{10}}$，那么我们知道：$\boxed{\text{这样的 } N-p \text{ 至多有 } 9 \text{ 个素因子.}}$
这是因为若有超过 9 个素因子，那么由于每一个素因子都大于 $N^{\frac{1}{10}}$，则有 $N-p>(N^{\frac{1}{10}})^{10}=n$，从而导致矛盾.

我们下面从 $S_N(\mathcal{A},1,N^{\frac{1}{10}})$ 中筛掉有 $3\sim 9$ 个素因子的数[1].



设 $S_N(\mathcal{A},1,N^{\frac{1}{10}})$ 中的某个 $N-p$ 在 $(N^{\frac{1}{10}},N^{\frac{1}{3}})$ 中有 a 个素因子，在 $(N^{\frac{1}{3}},N)$ 中有 b 个素因子，我们讨论 (a,b) 可能的取值：

显然我们有 $b<3$，否则我们知道 $N-p>N$ 矛盾，故 $b=0,1,2$，我们按照 b 的取值分类：

- $b=0$：$(1,0)$，$(2,0)$，$(3,0)$，$(4,0)$，$(5,0)$，$(6,0)$，$(7,0)$，$(8,0)$，$(9,0)$
- $b=1$：$(0,1)$，$(1,1)$，$(2,1)$，$(3,1)$，$(4,1)$，$(5,1)$，$(6,1)$
- $b=2$：$(0,2)$，$(1,2)$，$(2,2)$，$(3,2)$

我们要排除 $a+b\geq 3$ 的数，则

$$R_{1,2}(N)>S_N(\mathcal{A},1,N^{\frac{1}{10}})-CN^{0.91}-\frac{1}{2}\sum_{N^{\frac{1}{10}}<p<N^{\frac{1}{3}}}S_N(\mathcal{A},p,N^{\frac{1}{10}})-\frac{1}{2}S_N(\mathcal{B},1,N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{-c})$$

将 $a+b\geq 3$ 的所有情况分为两部分，第一部分为 $a\geq 2$ 的所有情况，第二部分为 $(a,b)=(1,2)$，下面我们依次解释这些项：

- 我们在这里将 $S_N(\mathcal{A},1,N^{\frac{1}{10}})$ 看成是 $|S_N(\mathcal{A},1,N^{\frac{1}{10}})|$.

[1]注：对于陈氏定理，这里浪费了一些：只数了 $N-p$ 的素因子均大于 $N^{\frac{1}{10}}$ 的数这一部分.

- $CN^{0.91}$ 为有重复素因子的 $S_N(\mathcal{A},1,N^{\frac{1}{10}})$ 中的数的个数的上界(由素数定理)，从而剩下的 $N-p$ 中都无平方因子(square-free).

- 由
$$S_N(\mathcal{A},p,N^{\frac{1}{10}})=\left\{N-p'\colon p'\nmid N, p\mid N-p', N-p'\text{的素因子严格大于 } N^{\frac{1}{10}}\right\}$$
这告诉我们若 $N-p'$ 无平方因子，且在第一部分中，即 $a\geq 2$，则 $N-p'$ 至少有两个素因子落在 $(N^{\frac{1}{10}},N^{\frac{1}{3}})$ 上，则
$$N-p'=p_1p_2\cdots p_s$$
其中 $N^{\frac{1}{10}}<p_1,p_2<N^{\frac{1}{3}}$，这告诉我们 $N-p'$ 落在 $S_N(\mathcal{A},p_1,N^{\frac{1}{10}})$ 与 $S_N(\mathcal{A},p_2,N^{\frac{1}{10}})$ 中，故当 p 走遍 $N^{\frac{1}{10}}\sim N^{\frac{1}{3}}$ 时，第一部分中的每个数至少被算了两遍[2]，所以我们减去
$$\frac{1}{2}\sum_{N^{\frac{1}{10}}<p<N^{\frac{1}{3}}}S_N(\mathcal{A},p,N^{\frac{1}{10}})$$
也就至少把第一部分中的数全部筛去.
对于第二部分中的数 $N-p=p_1p_2p_3$，其中 $N^{\frac{1}{10}}<p_1<N^{\frac{1}{3}}$，告诉我们 $N-p\in S_N(\mathcal{A},p_1,N^{\frac{1}{10}})$，也就是说在减去第一部分的时候，第二部分也被减去了 $\dfrac{1}{2}$.

- 我们令
$$\mathcal{B}=\left\{N-p_1p_2p_3\;\middle|\;\begin{array}{l}p_1,p_2,p_3\nmid N\\ N^{\frac{1}{10}}<p_1<N^{\frac{1}{3}}\\ N^{\frac{1}{3}}<p_2<\left(\dfrac{N}{p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\\ p_3<\dfrac{N}{p_1p_2}\end{array}\right\}$$
则有
$$S_N(\mathcal{B},1,N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{-c})=\left\{m=N-p_1p_2p_3\in\mathcal{B}\colon (m,\prod_{p<N^{\frac{1}{2}}(\log N)^{-c},p\nmid N}p)=1\right\}$$
包含了所有 p 使得 $N-p$ 在第二部分中.

[2]注意到有很多数被算了很多遍，这是一个可以改进的地方.