
1 公理集合论

1.1 集合论概念

朴素集合论

具有给定性质的对象的全体定义为集合，集合与元素直觉的关系叫做属于。

公理集合论

给定集合论语言 $L = \{\in\}$ 及该语言的一个模型 $\langle V, \in \rangle$ 。该模型的元素成为集合，二元谓词符号 \in 表示属于关系。

空集

\emptyset 表示空集： $\neg \exists x(x \in \emptyset)$

二元组

$\langle a, b \rangle$ 表示二元组： $\{\{a\}, \{a, b\}\}$

例题：给出三元组的定义，并证明其合理性，即：

$$\langle a, b, c \rangle = \langle x, y, z \rangle \text{ 当且仅当 } a = x, b = y, c = z$$

三元组定义： $\langle a, b, c \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$

假设存在另一个三元组 $\langle x, y, z \rangle = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$ 使得 $\langle a, b, c \rangle = \langle x, y, z \rangle$ ，即：

$$\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\} = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, y, z\}\}$$

则必有 $a = x$ ，因为只有 $\{a\}$ 和 $\{x\}$ 元素个数为 1，他俩必相等

又因为 $\{a, b\} = \{x, y\}$ (元素个数为 2), $a = x$ ，则必有 $b = y$

又因为 $\{a, b, c\} = \{x, y, z\}$, $a = x, b = y$ ，则必有 $c = z$

所以该三元组的合理性得证

函数

$\text{func}(a)$ 表示 a 是一个函数，满足以下两个公式： $\Phi_1 \wedge \Phi_2$

Φ_1 是公式： $\forall x(x \in a \rightarrow \exists uv(x = \langle u, v \rangle))$

Φ_2 是公式： $\forall uvw(\langle u, v \rangle \in a \wedge \langle u, w \rangle \in a \rightarrow v = w)$

定义域

$\text{dom}(a)$ 表示函数 a 的定义域：

$$\text{dom}(a) = \{u | \exists v(< u, v > \in a)\}$$

值域

$\text{ran}(a)$ 表示函数 a 的值域:

$$\text{ran}(a) = \{v | \exists u(< u, v > \in a)\}$$

自然数

$$0 = \emptyset$$

$$0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\} = 1$$

$$1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0, 1\} = 2$$

$$2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0, 1, 2\} = 3$$

...

平行公设:

第 5 公设也被称为平行公设, 它等价于:

在同一平面, 过直线外一点, 有且仅有一条直线与此直线平行

1.2 集合论的 10 条公理

1.2.1 外延公理

$$\forall x y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

若两个集合元素相同, 则这两个集合相等。

1.2.2 空集公理

$$\exists x \forall y (y \notin x)$$

记上述 x 为 \emptyset 。空集公理保证了空集的存在性, 根据外延公理可知, 空集是唯一的。

空集的唯一性证明:

假设存在另一集合 \emptyset' 是空集,

由 $\forall y (y \notin \emptyset)$ 可得: $\forall z (z \in \emptyset \rightarrow z \in \emptyset')$ (前提不成立, 所以整个式子成立)

由 $\forall y (y \notin \emptyset')$ 可得: $\forall z (z \in \emptyset' \rightarrow z \in \emptyset)$

所以 $\forall z (z \in \emptyset \leftrightarrow z \in \emptyset')$

所以 $\emptyset = \emptyset'$

1.2.3 偶对公理

$$\forall x y \exists u \forall z (z \in u \leftrightarrow z = x \vee z = y)$$

记 u 为 $\{x, y\}$, 由此可知: 对于集合 x, y 存在一个仅以它们为元素的集合 $\{x, y\}$ 。

例: $x = \{a, b\}, y = \{b, c\} \quad \{x, y\} = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$

1.2.4 并集公理

$$\forall x \exists u \forall y (y \in u \leftrightarrow (\exists z (z \in x \wedge y \in z)))$$

由集合 S 的所有元素的元素组成的集合, 叫做集合的并集 $\cup S$ 。

例: $S = \{\{a, b\}, \{b, c\}\} \cup S = \{a, b, c\}$

$$S = \{\{a\}, \{a, b\}\}, \{c\}, \{c, d\}\}$$

$$\cup S = \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{c, d\}\} \cup \cup S = \{a, a, b, c, c, d\} \text{(可以有重复元素)}$$

一般意义下的 $A \cup B$ 在严格意义下被写为 $\cup \{A, B\}$, 即 A 和 B 的元素组成的集合:

$$\forall \{A, B\} \exists u \forall y (y \in u \leftrightarrow (\exists z (z \in x \wedge y \in z)) \leftrightarrow (((z \in A \vee z \in B) \wedge y \in z)))$$

$$\cup \emptyset = \emptyset$$

证明: 将 $x = \emptyset$, $u = \cup \emptyset$ 代入并集公式可知:

$$\forall y (y \in \cup \emptyset \leftrightarrow (\exists z (z \in \emptyset \wedge y \in z)))$$

因为 $\exists z (z \in \emptyset \wedge y \in z)$ 是永假的, 所以 $\forall y (y \notin \cup \emptyset)$

所以 $\cup \emptyset = \emptyset$

$$\cup \{\emptyset\} = \emptyset$$

证明: 将 $x = \{\emptyset\}$, $u = \cup \{\emptyset\}$ 代入并集公式可知:

$$\forall y (y \in \cup \{\emptyset\} \leftrightarrow (\exists z (z \in \{\emptyset\} \wedge y \in z)))$$

$\exists z (z \in \{\emptyset\} \wedge y \in z)$ 等值于 $y \in \emptyset$, 是永假的, 所以 $\forall y (y \notin \cup \{\emptyset\})$

所以 $\cup \{\emptyset\} = \emptyset$

1.2.5 子集公理

假设 ϕ 是集合论语言的一个公式, 仅出现自由变元 x_1, \dots, x_n, z , 不出现变元 y , 则:

$$\forall x_1, \dots, x_n \forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \phi)$$

对于给定的 x_1, \dots, x_n, z ，这样定义的集合 y 被记为：

$$y = \{z \in x \mid \phi\}$$

这样定义的集合 y 是 x 子集($y \subseteq x$)，可以理解为集合 x 中满足公式 ϕ 的元素构成的集合成为 x 的子集。

1.2.6 幂集公理

$$\forall x \exists y (\forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x))$$

集合 x 的所有子集 z 构成的集合 y 称为 x 的幂集，记为 $\rho(x)$ 。

1.2.7 无穷公理

$$\exists x (\emptyset \in x \wedge (\forall y (y \in x \rightarrow y^+ \in x)))$$

y^+ 表示集合 $y \cup \{y\}$

1.2.8 替换公理

假设 θ 是命题逻辑中的公式，仅出现自由变元 x_1, \dots, x_n, u, z , 不出现变元 y ，则：

$$\forall x_1, \dots, x_n \forall x (\psi \rightarrow \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists u \in x \wedge \theta[u, z]))$$

ψ 是以下公式：

$$\forall u \in x \forall z_1 z_2 (\theta[u, z_1] \wedge \theta[u, z_2] \rightarrow z_1 = z_2)$$

这里的集合 y 就是替换公理得到的新集合，记为：

$$\{z \mid \exists u (u \in x \wedge \theta[u, z])\}$$

语言说明：基于一个已知集合 x 与一个特殊的单射函数 θ ，可以得到一个新集合 y 。
 $\theta[x, y]$ 表示输入为 x 输出为 y 。

1.2.9 正规公理

$$\forall x (x \neq \emptyset \rightarrow \exists y (y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

正规公理保证了**不存在**这样的集合： $x = \{x\}$

1.2.10 选择公理

通俗来讲：根据一个由非空集合组成的集合 S ，从 S 的元素集合中分别抽出一个元

素组成的集合。

1.3 公理的应用

1. 外延公理用于判定集合相等
2. 正规公理用于判定集合属于关系
3. 其他公理用于证明集合存在性，常用替换公理

1.4 例题

例 1：证明可数符号表上有限长字符串的集合是可数的

证明：假设给定的可数符号表是集合 A ，则：

长度为 1 的字符串集合 $S_1 = A$

长度为 2 的字符串集合 $S_2 = \{ab | a, b \in A\}$

...

每个 S_i 都是可数的，并且 S_i 的个数也是可数的，所以可数个可数集合的并集也是可数的。

例 2：证明空集是函数

$\text{func}(a)$ 表示 a 是一个函数，满足以下两个公式： $\Phi_1 \wedge \Phi_2$

Φ_1 是公式： $\forall x(x \in a \rightarrow \exists uv(x = \langle u, v \rangle))$

Φ_2 是公式： $\forall uvw(\langle u, v \rangle \in a \wedge \langle u, w \rangle \in a \rightarrow v = w)$

若 a 为空集，则 Φ_1 和 Φ_2 的前提都不成立，所以 Φ_1 和 Φ_2 成立，所以空集是个函数。

例 3：对于集合 a 及 b ，则它们的交集是集合

由子集公理可知：

$$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \phi)$$

令 $x = a$, ϕ 为 $z \in b$, 得

$$\forall a \forall b \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in a \wedge z \in b)$$

此时的集合 y 就是集合 a 及 b 的交集

例 4: 对于集合 x 及 y , 它们的卡氏积 $x \times y = \{ \langle u, v \rangle \mid u \in x, v \in y \}$ 是集合
根据子集定理可知, 存在这样的集合 u

$$x \times y = \{w \mid w \in c \wedge \phi(w)\}$$

其中:

c 是集合: $\rho(\rho(x) \cup \rho(x \cup y))$

$\phi(w)$ 是公式: $\exists uv(u \in x \wedge v \in y \wedge w = \langle u, v \rangle)$

例 5: 证明: 存在无限集合 $\{0, \{1\}, \{\{2\}\}, \{\{\{3\}\}\}, \dots\}$

已知自然数集合 ω , 根据替换公理, 只要构造一个从 ω 到上述集合的单射函数即可证明上述集合存在。

定义函数 $\theta[x, y]$ 满足以下条件:

$$(x = 0 \rightarrow y = x) \wedge (x \neq 0 \rightarrow \exists f(\Psi_1 \wedge \Psi_2 \wedge y = f(x)))$$

其中:

Ψ_1 是公式: $\text{func}(f) \wedge (x = \min(\text{dom}(f)) \rightarrow f(x) = x)$

Ψ_2 是公式: $\forall u(u \in \text{dom}(f) \wedge u^+ \in \text{dom}(f) \rightarrow f(u^+) = \{f(u)\})$

则对任意 $n \in \omega$, 都存在唯一的一个 f

对任意 $n \in \omega$, 存在唯一 a , 满足 $\theta[n, a]$

则根据选择公理可知, 存在集合 u :

$$u = \{a \mid n \in \omega \wedge \theta[n, a]\}$$

u 即为要证集合

说明:

公式 Ψ_1 定义了 f 的定义域与初值 $f(0) = 0$

公式 Ψ_2 定义了 $f(n) = \{f(n-1)\} = \{\{f(n-1)\}\} = \{\dots \{f(n-k)\} \dots\}$

比如: $\{1\} = f(2)$, $\text{dom}(f) = \{1, 2\}$

$$\{\{2\}\} = f(4), \text{dom}(f) = \{2, 3, 4\}$$

例 6: 证明: $\forall mn(m \in \omega \wedge n \in \omega \wedge m^+ = n^+ \rightarrow m = n)$

假设 m, n 是两个自然数, 满足 $m^+ = n^+$, 则根据定义可知:

$$m \cup \{m\} = n \cup \{n\}$$

若 $m \neq n$:

由 $m \in m \cup \{m\}$ 知 $m \in n \cup \{n\}$, 又因为 $m \neq n$, 所以 $m \notin \{n\}$, 所以 $m \in n$

同理可知: $n \in m$

这时集合 $x = \{m, n\}$ 不满足正规公理:

$$\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

因为 $m \cap x = \{n\}, n \cap x = \{m\}$

所以 x 不是一个集合, 所以 $m = n$

例 7: 证明 $\omega \notin \omega$

假设 $\omega \in \omega$, 则存在集合 $x = \{\omega\}$ 不满足正规公理:

$$\forall x(x \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in x \wedge y \cap x = \emptyset))$$

因为 $\omega \cap \{\omega\} = \omega$

所以假设不成立

2 自然数逻辑理论

2.1 归纳集

2.1.1 定义

满足以下两个条件的集合 \mathbf{u} 称为归纳集：

$$\emptyset \in \mathbf{u} \wedge (\forall a(a \in \mathbf{u} \rightarrow a^+ \in \mathbf{u}))$$

其中 a^+ 表示集合 $a \cup \{a\}$

2.1.2 公式

以 $\text{Ind}(\mathbf{x})$ 表示以下公式：

$$\emptyset \in \mathbf{x} \wedge \forall y(y \in \mathbf{x} \rightarrow y^+ \in \mathbf{x})$$

所以 \mathbf{x} 是一个归纳集当且仅当 $\text{Ind}(\mathbf{x})$ 成立。

2.1.3 性质

1. 两个归纳集的并集以及交集还是归纳集。
2. 若存在集合 $\{0,1,2,\dots\}$ ，则它是一个归纳集。
3. 归纳集也是一个无限集，无穷公理保证这样无限集合是存在的，且不唯一。

2.1.4 自然数集合

自然数集合是最小的归纳集 ω ，满足以下公式：

$$\text{Ind}[\omega] \wedge \forall \mathbf{x}(\text{Ind}[\mathbf{x}] \rightarrow \omega \subseteq \mathbf{x})$$

Eg：证明： $\cup \omega = \omega$

证明：

$$\forall n \in \omega, \text{ 因为 } n \in n^+, n^+ \in \omega \rightarrow n \in \cup \omega$$

$$\forall x \in \cup \omega, \exists n \in \omega, \text{ 使得 } x \in n, \text{ 所以 } x \in \omega$$

2.2 第一归纳法

2.2.1 推论

假设 $\Phi(x)$ 是集合论的一个语句，只包含一个自由变元 x ，且

$$\Phi[0] \wedge \forall x(x \in \omega \wedge \Phi[x] \rightarrow \Phi[x^+])$$

则对任意自然数 n ，都有 $\Phi[n]$ 成立。

即只要证明 $\Phi[0]$ 成立，并且在假设 $\Phi[x]$ 成立的情况下能够证明 $\Phi[x^+]$ 成立，则 Φ 对于自然数集合恒成立。

2.2.2 例题

例 1：证明对任意的 $n \in \omega$ 有 $n^+ \neq 0$

证明：

考虑以下公式 $\Phi[x]$ ：

$$\neg x^+ = 0$$

$\Phi[0]$ 显然成立，因为 $0^+ = \{0\}$ ，不是空集 0 。

若 $m \in \omega$ 且 $\Phi[m]$ 成立，则 m^+ 不是空集， $(m^+)^+ = m^+ \cup \{m^+\}$ 也不是空集，所以 $\Phi[m^+] = \neg((m^+)^+ = 0)$ 也成立。

由归纳法可知 $\Phi[x]$ 对任意自然数恒成立。

例 2：对于任意的 $m \in \omega$ ，若 $n \in m$ ，则 $n \in \omega$ 。

证明：

考虑以下公式 $\Phi[x]$ ：

$$\forall y(y \in x \rightarrow y \in \omega)$$

因为 0 是空集，所以 $y \in 0$ 是假的，所以 $\Phi[0]$ 成立

若 $m \in \omega$ 且 $\Phi[m]$ 成立，

对于 $y \in m^+ = m \cup \{m\} \rightarrow y = m$ 或 $y \in m$

若 $y = m$ ，由 $m \in \omega$ 可知， $y \in \omega$

若 $y \in m$ ，由 $\Phi[m]$ 可知， $y \in \omega$

所以 $\Phi[m^+]$ 也成立

例 3：对于任意的 $a, b, c \in \omega$ ，若 $a \in b, b \in c$ ，则 $a \in c$ 。

证明：

考虑以下公式 $\Phi[x]$ ：

$$\forall yz(y \in z \wedge z \in x \rightarrow y \in x)$$

$\Phi[0]$ 显然成立，因为0是空集，前提是假的。

若 $m \in \omega$ 且 $\Phi[m]$ 成立

对于 $z \in m^+ = m \cup \{m\} \rightarrow z = m$ 或 $z \in m$

若 $z = m$ ，则 $y \in z = m$ ，所以 $y \in m^+$

若 $z \in m$ ，由 $\Phi[m]$ 可知， $y \in m$ ，所以 $y \in m^+$

所以 $\Phi[m^+]$ 也成立

2.3 第二归纳法

2.3.1 定义

假设 $\Phi(x)$ 是集合论的一个语句，只包含一个自由变元 x ，且

$$\forall x \left(\forall y (y \in x \rightarrow \Phi(y)) \rightarrow \Phi(x) \right)$$

成立，则对任意自然数 n ，都有 $\Phi(n)$ 成立

证明：考虑集合

$$\mathbf{u} = \{n \in \omega \mid \forall y(y \in n \rightarrow \Phi(n))\}$$

只要证明任意自然数都属于集合 \mathbf{u} ，这样对任意 $n \in \omega$ ， $\Phi(n)$ 都成立

当 $n = 0$ 时， $\forall y(y \in 0 \rightarrow \Phi(n))$ 恒成立，所以 $0 \in \mathbf{u}$

当 $n \in \mathbf{u}$ 时， $\Phi(n)$ 成立

2.4 递归定义

2.4.1 递归定义的合理性

假设 a 是一个集合， f 是一个函数，则存在一个函数 r 满足：

- 1) $\text{dom}(r) = \omega$
- 2) $r(0) = a$
- 3) $\forall m \in \omega$ ，都有 $r(m^+) = f(r(m))$

2.4.2 例题

例 1：证明存在集合 $\{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \dots\}$

证明:

取 $a = 0$, 公式 f 为 $f(x) = \{x\}$

由递归定义的合理性可知, 存在函数 r 满足:

$$r(0) = 0$$

$$r(1) = f(r(0)) = \{0\}$$

$$r(2) = f(r(1)) = \{\{0\}\}$$

...

所以 r 的值域即为上述集合

2.4.3 推广

假设 $\Phi(x, y)$ 是集合论语言的一个函数型公式, 即满足:

$$1) \quad \forall x \exists y \Phi(x, y)$$

$$2) \quad \forall xyz (\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, z) \rightarrow y = z)$$

这时记相应于 x 的 y 为 x_Φ 。

多元迭代函数:

假设 a 是一个集合, $f(x, y)$ 是二元函数, 则存在一个函数 r 满足:

$$1) \quad \text{dom}(r) = \omega$$

$$2) \quad r(0) = a$$

$$3) \quad \forall m \in \omega, \text{ 都有 } r(m^+) = f(r(m), m)$$

3 命题逻辑的两个推理系统

3.1 Hilbert 推理系统

公理:

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$

规则:

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B} \text{ (即 } A, A \rightarrow B \vdash B \text{)}$$

推演序列:

假设 Γ 是公式集合, 公式序列 $\langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle$ 被称为 Γ -推演序列, 当且仅当:

1. 或者 $A_i \in \Gamma$
2. 或者 A_i 是公理
3. 或者存在 $j, k < i$, A_i 可由 A_j, A_k 应用规则得到

可证性:

若存在 Γ -推演序列, 它的最后一个公式是 A , 则称 A 是 Γ 可证的, 记为 $\Gamma \vdash A$ 。

Eg1: 证明: $\vdash A \rightarrow A$

- | | |
|---------------------------------------------------------------|------|
| 1. $A_1: A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$ | 公理 1 |
| 2. $A_2: A \rightarrow (A \rightarrow A)$ | 公理 1 |
| 3. $A_3: A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow (A \rightarrow A))$ | 公理 2 |
| 4. $A_4: A_2 \rightarrow (A \rightarrow A)$ | 规则 |
| 5. $A_5: A \rightarrow A$ | 规则 |

所以 $\vdash A \rightarrow A$

3.2 推理系统二

公理:

$A \vdash A$

规则(只列了常用的几个):

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $\cdot \frac{\Sigma \vdash A}{\Sigma, \Sigma' \vdash A}$ | 单调性: 若 $A \vdash B$, 则 $A, C \vdash B$ |
| $\cdot \frac{\Sigma, \neg A \vdash B \text{ 且 } \Sigma, \neg A \vdash \neg B}{\Sigma \vdash A}$ | 反证法: $(\Sigma, \neg A)$ 矛盾 |
| $\cdot \frac{\Sigma \vdash A \text{ 且 } \Sigma \vdash A \rightarrow B}{\Sigma \vdash B}$ | 三段论 |
| $\cdot \frac{\Sigma, A \vdash B}{\Sigma \vdash A \rightarrow B}$ | 演绎定理 |

可证性: 有限次应用公理和规则生成 $\Sigma \vdash A$, 则称 $\Sigma \vdash A$ 可证。

Eg1: 证明: $\neg\neg A \vdash A$

- | | |
|-------------------------------------------|-------------|
| 1. $\neg\neg A \vdash \neg\neg A$ | 公理 |
| 2. $\neg\neg A, \neg A \vdash \neg\neg A$ | 单调性 |
| 3. $\neg A \vdash \neg A$ | 公理 |
| 4. $\neg\neg A, \neg A \vdash \neg A$ | 单调性 |
| 5. $\neg\neg A \vdash A$ | 2,4 应用反证法规则 |

3.3 性质

3.3.1 紧致性

给定公式集合 Σ 和公式 A , 若 $\Sigma \vdash A$, 则存在有限的 $\Gamma \subseteq \Sigma$, 使得 $\Gamma \vdash A$

3.3.2 协调性

给定命题逻辑的公式集合 Σ , 若存在公式 A , 使得 $\Sigma \vdash A$ 且 $\Sigma \vdash \neg A$, 则称 Σ 是不协调的。

3.3.3 一些定义

公式的真值:

假设 v 是一个赋值, A 是公式, 可以根据真值表定义 $v(A) = 1$

集合的真值:

假设 Γ 是一个公式集合，定义 $v(\Gamma) = 1$ 为：对每个 $A \in \Gamma$, 都有 $v(A) = 1$

\vdash 定义：

假设 Γ 是一个公式集合， A 是公式， $\Gamma \vdash A$ 为：

对任意的赋值 v ，当 $v(\Gamma) = 1$ 时， $v(A) = 1$

3.3.4 可靠性和完备性

可靠性：若 $\Sigma \vdash A$ ，则 $\Sigma \models A$

完备性：若 $\Sigma \models A$ ，则 $\Sigma \vdash A$

3.4 规则的独立性证明

证明方式：

1. 修改逻辑联结词的定义，使得其他规则都成立，但该规则不成立。则该规则独立于其他规则。
2. 若某个规则可以证明一个推演，而不使用该规则，该推演不可证明。则称该规则是独立的

弱推演系统：

1. $A \rightarrow (B \rightarrow A)$
2. $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
3. $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)$

Eg1: 证明规则 1 独立于规则 2、3

证明：

重新定义规则：真值取值 $\{0,1,2\}$ ， \rightarrow 和 \neg 定义如下：

\rightarrow	0	1	2	\neg
0	0	2	2	2
1	2	2	0	0
2	0	0	0	0

定义: $\Gamma \vdash A$ 为 $v(\Gamma) = 0$ 且 $v(A) = 0$

当 $v(A) = 0, v(B) = 1$ 时, $v(A \rightarrow (B \rightarrow A)) = 2$

所以规则 1 不成立

在这种情况下, 规则 2、3 都成立, 但规则 1 不成立, 所以规则 1 独立于规则 2、3

Eg2: 证明规则 3 独立于规则 1、2

证明:

重新定义规则: \rightarrow 和 \neg 定义如下:

\rightarrow	0	1	\neg
0	0	1	0
1	0	0	0

定义: $\Gamma \vdash A$ 为 $v(\Gamma) = 0$ 且 $v(A) = 0$

当 $v(A) = 1, v(B) = 0$ 时, $v((\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow A)) = 1$

所以规则 3 不成立

在这种情况下, 规则 1、2 都成立, 但规则 3 不成立, 所以规则 3 独立于规则 1、2

3.5 例题

Eg1: 完备性证明: 若 $\vdash A$, 则 $\vdash A$

证明:

假设 A 中出现的所有命题变元 p_1, p_2, \dots, p_n , v 是一个真值赋值, 定义文字 $L_{v,i}$:

$$L_{v,i} = \begin{cases} p_i, & v(p_i) = 1 \\ \neg p_i, & v(p_i) = 0 \end{cases}$$

因为 $\vdash A$, 所以 A 永真, 所以 $v(A) = 1$, 所以 $L_{v,1}, \dots, L_{v,n} \vdash A$

对于任意赋值 v , $L_{v,1}, \dots, L_{v,n} \vdash A$

因为 A 永真, 所以: $L_{v,1}, \dots, L_{v,n-1}, p_n \vdash A$ $L_{v,1}, \dots, L_{v,n-1}, \neg p_n \vdash A$

所以 $L_{v,1}, \dots, L_{v,n-1} \vdash A$

由上可知，若 A 永真，则对任意赋值 v 都有：

$L_{v,1}, \dots, L_{v,n} \vdash A$

$L_{v,1}, \dots, L_{v,n-1} \vdash A$

...

$L_{v,1} \vdash A$

$\vdash A$

4 命题逻辑的完备性

4.1 定义

完备性定理：在命题逻辑中，假设 A 是公式，有以下结论：

若 $\vdash A$ ，则 $\vdash A$

极大协调集合：

满足以下条件的公式集合 Σ 被称为极大协调的：

1. Σ 是协调的
2. 对任意的 $A \notin \Sigma$ ，公式集合 $\Sigma \cup \{A\}$ 是不协调的

证明： $\Sigma = \{A \mid v(A) = 1\}$ 是一个极大协调集

证：

若 $A \in \Sigma$ 且 $\neg A \in \Sigma$ ，则 $v(A) = 1$ 且 $v(\neg A) = 1$ ，这是不可能的，所以 Σ 是协调的。

若 $A \notin \Sigma$ ，则 $v(A) = 0$ ， $v(\neg A) = 1$ ，所以 $\neg A \in \Sigma$ ，所以 $\Sigma \cup \{A\}$ 是不协调的。

综上， Σ 是极大协调集。

4.2 性质

对任意公式集合 Σ 和公式 A, B ，若 Σ 是极大协调集合，有以下性质：

1. $A \in \Sigma$ 当且仅当 $\Sigma \vdash A$
2. $\neg A \in \Sigma$ 当且仅当 $A \notin \Sigma$

证明：先证若 $\neg A \in \Sigma$ 则 $A \notin \Sigma$

若 $A \in \Sigma$ ，此时 $A, \neg A \in \Sigma$ ，与 Σ 的协调性相矛盾

所以 $A \notin \Sigma$

再证明若 $A \notin \Sigma$ ，则 $\neg A \in \Sigma$

因为 $A \notin \Sigma$ ，所以 $\Sigma \cup \{A\}$ 是不协调的，所以 $\Sigma \vdash \neg A$ ，所以 $\neg A \in \Sigma$

3. $A \wedge B \in \Sigma$ 当且仅当 $A \in \Sigma$ 并且 $B \in \Sigma$

证明：先证充分性：

因为 $A \wedge B \in \Sigma$ ，所以 $\Sigma \vdash A \wedge B$

因为 $A \wedge B \vdash A$ ， $A \wedge B \vdash B$ ，所以 $\Sigma \vdash A$ ， $\Sigma \vdash B$ ，所以 $A \in \Sigma$ 并且 $B \in \Sigma$

再证必要性：

$A \in \Sigma, B \in \Sigma \rightarrow \Sigma \vdash A, \Sigma \vdash B \rightarrow \Sigma \vdash A \wedge B \rightarrow A \wedge B \in \Sigma$

4. $A \vee B \in \Sigma$ 当且仅当 $A \in \Sigma$ 或者 $B \in \Sigma$

若 Σ 是极大协调集合，定义赋值 v 使得：

$v(p) = 1$ 当且仅当 $p \in \Sigma$

则对任意的公式 A ， $v(A) = 1$ 当且仅当 $A \in \Sigma$

例题 1：假设 Σ 是协调的公式集合，则存在极大协调集 Σ' ，使得 $\Sigma \subseteq \Sigma'$

证明：

假设仅有可数个命题变元，则全部公式可以列举为： B_0, B_1, B_2, \dots

按照以下方式定义集合 Σ_n ：

1. $\Sigma_0 = \Sigma$

2. $\Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{B_n\}, & \text{若 } \Sigma_n \cup \{B_n\} \text{ 是协调的} \\ \Sigma_n & \text{, 否则} \end{cases}$

根据定义可知，所有 Σ_n 都是协调的。

定义 $\Sigma' = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots$

此时 $\Sigma \subseteq \Sigma'$ ，下面证明 Σ' 是极大协调集

假设 Σ' 是不协调的

则 $\Sigma' \vdash A \wedge \neg A$

则存在公式 $A_1, \dots, A_m \in \Sigma'$, 使得 $A_1, \dots, A_m \vdash A \wedge \neg A$

假设这些 A_1, \dots, A_m 都属于某个 Σ_n , 则 $\Sigma_n \vdash A \wedge \neg A$, 这与定义中 Σ_n 的协调性相矛盾, 所以 Σ' 是协调的

对于任意公式 $A \notin \Sigma'$, 可以假设它是 B_n , 则 $\Sigma_n \cup \{B_n\}$ 是不协调的, $\Sigma' \cup \{A\}$ 是不协调的, 所以 Σ' 是极大的。

例题 2: 完备性证明: 对任意公式集合 Σ 与公式 A , 若 $\Sigma \vdash A$, 则 $\Sigma \models A$

证明: 假设 $\Sigma \vdash A$ 不成立, 这时 $\Sigma \cup \{\neg A\}$ 是协调的, 因而可以扩充为极大协调集 Σ'

由 Σ' 可以定义赋值: $v(A) = 1$ 当且仅当 $A \in \Sigma'$

赋值 v 具有以下性质:

1. $v(\Sigma) = 1$, 因为 $\Sigma \subseteq \Sigma'$
2. $\neg A \in \Sigma'$, 所以 $v(\neg A) = 1$, 所以 $v(A) = 0$

这与 $\Sigma \vdash A$ 相矛盾, 所以 $\Sigma \models A$

5 命题直觉主义逻辑

5.1 公理系统

在命题逻辑的自然推演系统中, 将反证法规则替换为两个规则:

直觉反证法:

若 $\Sigma, A \vdash B$ 及 $\Sigma, A \vdash \neg B$, 则 $\Sigma \vdash \neg A$

不协调前提:

若 $\Sigma \vdash A$ 及 $\Sigma \vdash \neg A$, 则 $\Sigma \vdash B$

其中 Σ 是命题逻辑公式的集合, 上述两条规则是相互独立的。

5.2 c_-

Σ 是命题逻辑公式集合, A 是命题逻辑公式, 称 $\Sigma \vdash A$ 是 c_- 可演算的, 当且仅当存在:

$\Sigma_i \vdash A_i (i = 0, 1, \dots, n)$, 使得 $\Sigma_n \vdash A_n$ 是 $\Sigma \vdash A$, 并且对每个 i , 有 $\Sigma_i \vdash A_i$ 满足:

- 1) 或者是某种规则
- 2) 或者存在 $j < i$, $\Sigma_i \vdash A_i$ 是通过 $\Sigma_j \vdash A_j$ 应用规则推导出的
- 3) 或者存在 $j, k < i$, $\Sigma_i \vdash A_i$ 是通过 $\Sigma_j \vdash A_j$ 和 $\Sigma_k \vdash A_k$ 应用规则推导出的

若 $\Sigma \vdash A$ 是 c_- 可演算的, 记为 $\Sigma \vdash_c A$

若 $\Sigma \vdash_c A$ 且 $\Sigma \vdash_c \neg A$, 则称 Σ 是不协调的

Eg1: 证明 $A \vdash_c \neg \neg A$

1. $A \vdash A$

2. $A, \neg A \vdash A$

$A \vdash B$ 可推出 $A, C \vdash B$

3. $\neg A \vdash \neg A$

4. $A, \neg A \vdash \neg A$

5. $A \vdash_c \neg \neg A$

2,4 直觉反证法: $A \vdash_c \neg(\neg A)$

Eg2: 证明 $A \rightarrow B \vdash_c \neg B \rightarrow \neg A$

1. $A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$

2. $A \rightarrow B, A \vdash A \rightarrow B$

3. $A \vdash A$

4. $A \rightarrow B, A \vdash A$

5. $A \rightarrow B, A \vdash B$ 2,4

6. $A \rightarrow B, A, \neg B \vdash B$

7. $\neg B \vdash \neg B$

8. $A \rightarrow B, A, \neg B \vdash \neg B$

9. $A \rightarrow B, \neg B \vdash \neg A$ 6,8 直觉反证法

10. $A \rightarrow B \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ 左侧可以当右侧的前提

5.3 不协调性的应用

若公式集合 $\Sigma \cup \{A\}$ 是不协调的, 则 $\Sigma \vdash \neg A$

Eg1: $\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

$$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg A \wedge \neg B$$

$$A \vee B \vdash A \vee B$$

$$\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash (\neg A \wedge A) \vee (\neg B \wedge B)$$

所以集合 $\{\neg A \wedge \neg B, A \vee B\}$ 不协调

$$\text{所以 } \neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$$

5.4 分层模型

直觉主义逻辑的一个模型 K 是指一个二元组 $\langle V, R \rangle$, 其中:

- 1) 非空集合 V 是每个命题变元元素对应于命题逻辑的一个赋值
- 2) R 是 V 上的一个二元关系，具有自反性和传递性
- 3) 对于任意的命题变元 p 及赋值 $v_1, v_2 \in K$ ，有：若 $v_1(p) = 1$ 且 $v_1 R v_2$ ，则 $v_2(p) = 1$ 。

注意：分层模型的赋值情况并不是任意取值的，要满足对于 (v, w) ， $w(p) \geq v(p)$

自反性：对任意 $v \in V$, $(v, v) \in R$

传递性：对任意 $a, b, c \in V$ ，若 $(a, b), (b, c) \in R$ ，则 $(a, c) \in R$

记 $v(p) = p^{K,v}$

在分层模型下，真值的计算比较特殊：

对于给定的分层模型 $K = \langle V, R \rangle$ ，假设 $v \in V$, $(v, w) \in R$ 对于命题变元的任意公式：

1. $(A \wedge B)^{K,v} = 1$ 当且仅当 $A^{K,v} = 1$ 且 $B^{K,v} = 1$
2. $(A \vee B)^{K,v} = 1$ 当且仅当 $A^{K,v} = 1$ 或 $B^{K,v} = 1$
3. $(A \rightarrow B)^{K,v} = 1$ 当且仅当对任意 $v R w$ 的 w ，若 $A^{K,w} = 1$ 则 $B^{K,w} = 1$
4. $(A \leftrightarrow B)^{K,v} = 1$ 当且仅当对任意 $v R w$ 的 w ， $A^{K,w} = 1$ 等价于 $B^{K,w} = 1$
5. $(\neg A)^{K,v} = 1$ 当且仅当对任意 $v R w$ 的 w ， $A^{K,w} = 0$

与和或不需要考虑其他赋值 w

5.5 习题

例题 1: 证明 $\frac{\Sigma, A \vdash B \text{ 且 } \Sigma, A \vdash \neg B}{\Sigma \vdash \neg A}$

证：假设 $\Sigma \vdash \neg A$ 不成立，则存在分层模型 $K = \langle V, R \rangle$ 及 $v \in V$ ，

使得： $\Sigma^{K,v} = 1$ 且 $(\neg A)^{K,v} = 0$

要使 $(\neg A)^{K,v} = 0$ ，则存在 $w \in V$ ， $A^{K,w} = 1$ ，此时 $\Sigma^{K,w} = 1$

所以 $(\Sigma \cup A)^{K,w} = 1$

再根据 $\Sigma, A \vdash B$ 且 $\Sigma, A \vdash \neg B$ 可知, $B^{K,w} = 1$ 且 $(\neg B)^{K,w} = 1$, 这显然是矛盾的
所以假设不成立

例题 2: 证明 $\frac{\Sigma \vdash A \text{ 且 } \Sigma \vdash A \rightarrow B}{\Sigma \vdash B}$

证: 要想证 $\Sigma \vdash B$, 等价于证对任意分层模型 $K = \langle V, R \rangle$ 及任意 $v \in V$,

当 $\Sigma^{K,v} = 1$ 时, $B^{K,v} = 1$

由 $\Sigma \vdash A$ 可知, $\Sigma^{K,v} = 1$, 则 $A^{K,v} = 1$

由 $\Sigma \vdash A \rightarrow B$ 可知, $\Sigma^{K,v} = 1$, 则 $(A \rightarrow B)^{K,v} = 1$

又因为 $A^{K,v} = 1$, 所以 $B^{K,v} = 1$

所以当 $\Sigma^{K,v} = 1$ 时, $B^{K,v} = 1$, 原式成立

非 c_1 可证明例题

例题 3 : 证明下式不可证: $\neg A \rightarrow B \vdash_c \neg B \rightarrow A$

假设 A, B 分别为命题变元 p, q , 构造模型 $K = \langle V, R \rangle$, 使得:

$V = \{v, w\}$ $R = \{(v, v), (v, w), (w, w)\}$

其中:

a) 赋值 v 使得 $v(p) = 0$ 及 $v(q) = 0$

b) 赋值 w 使得 $w(p) = 1$ 及 $w(q) = 0$

则真值情况如下:

	v	w
A	0	1
B	0	0
$\neg A$	0	0
$\neg B$	1	1
$\neg A \rightarrow B$	1	1

$\neg B \rightarrow A$	0	1
$\neg A \rightarrow B \vdash_c \neg B \rightarrow A$	0	1

所以存在赋值使得 $(\neg A \rightarrow B \vdash_c \neg B \rightarrow A)^{K,v} = 0$

所以原式不可证

例题 4: $\vdash_c \neg\neg A \rightarrow A$

假设A为命题变元p, 构造模型 $K = \langle V, R \rangle$, 使得:

$$V = \{v, w\} \quad R = \{(v, v), (v, w), (w, w)\}$$

其中:

a) 赋值 v 使得 $v(p) = 0$

b) 赋值 w 使得 $w(p) = 1$

c) 则真值情况如下:

	v	w
A	0	1
$\neg A$	0	0
$\neg\neg A$	1	1
$\neg\neg A \rightarrow A$	0	1

所以存在赋值使得 $(\neg\neg A \rightarrow A)^{K,v} = 0$

所以原式不可证

例题 5: $\vdash_c A \vee \neg A$ (与和或求真值时不需要考虑关系 R 对应的赋值w)

假设A为命题变元p, 构造模型 $K = \langle V, R \rangle$, 使得:

$$V = \{v, w\} \quad R = \{(v, v), (v, w), (w, w)\}$$

其中:

a) 赋值 v 使得 $v(p) = 0$

b) 赋值 w 使得 $w(p) = 1$

则真值情况如下:

	v	w
A	0	1
$\neg A$	0	0
$A \vee \neg A$	0	1

所以存在赋值使得 $(A \vee \neg A)^{K,v} = 0$

所以原式不可证

5.6 分层模型的相关性质

假设 Σ 是命题逻辑公式集合， A 是命题逻辑公式，定义 $\Sigma \models_c A$ 为：

对任意分层模型 $K = \langle V, R \rangle$ ， $v \in V$ ，当 $\Sigma^{K,v} = 1$ 时， $A^{K,v} = 1$

性质：

1. 真值的传递性

假设 A 是命题逻辑公式，对于给定的分层模型 $K = \langle V, R \rangle$ ，假设 $v, w \in V$

满足 vRw ，则：当 $A^{K,v} = 1$ 时 $A^{K,w} = 1$ (A 是一个公式)

证明：

1) 假设 A 是命题变元 p ，则由分层模型的定义可知当 $p^{K,v} = 1$ 时 $p^{K,w} = 1$

2) 令 $A = \neg B$ ，当 $A^{K,v} = 1$ 时 $\neg B^{K,v} = 1$ ，所以对所有的 vRv' ， $B^{K,v'} = 0$

对于赋值 w 而言，对于所有的 wRw' ，由关系的传递性可知： vRw' ，

所以 $B^{K,w'} = 0$ ，所以 $\neg B^{K,w} = 1$ ，即 $A^{K,w} = 1$

2. 直觉主义的可靠性

若 $\Sigma \vdash_c A$ ，则 $\Sigma \models_c A$