考试日期：2017 年 6 月 15 日

考试科目：《矩阵理论 A》

考试注意事项：

1. 本次考试为闭卷形式，考试时间 120 分钟，总分 100 分.
2. 请将答案写在后面的答题纸上，填空题写入答题纸上的表格中，其余题目写明题号即可，无需抄题.
3. 请在答题纸每页写明学号和姓名.
4. 试卷中出现的符号含义：
   $\otimes$：矩阵直积； $rank$：矩阵的秩；I_m：$m\times m$的单位阵

   $i=\sqrt{-1}$；0 表示 0 元素或适合维数的零矩阵.

一、(24 分) 填空题

1. 若$A\in C^{4\times4}$，且$A^2=A$，$rank(A)=2$，则A的 Jordan 标准形$J=$ $\begin{bmatrix}1&&&\\&1&&\\&&0&\\&&&0\end{bmatrix}$，
$A\otimes I_3$的非零特征值个数为 6 ，矩阵函数$\sin A=$ $\sin 1\cdot A$（用A的多项式表示）.

2. 若A为三阶实对称矩阵，其特征值分别为 1，2，3. 已知特征值 1，2 对应的特征值向量分别为$(1,1,1)^T$，$(0,-1,1)^T$，则属于特征值 3 的特征向量为： ~~$(0,0,1)$~~^{T}

3. 设$A_n=\begin{bmatrix}\frac{2+(-1)^n}{n} & (1-\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}\\ \frac{n+1}{3n} & (\frac{2n+1}{2n-1})^{\frac{1}{n}}\end{bmatrix}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=$ $\begin{pmatrix}0&1\\ \frac{1}{3}&e\end{pmatrix}$.

4. 设$A=\begin{bmatrix}1+i&0&1-i\\2&2+i&1\end{bmatrix}$，$x=[1\quad 1+i\quad 0]^T$，则$\|x\|_2=$ $\sqrt{3}$，
$\|A\|_2=$ $\sqrt{7+\sqrt{19}}$，$\|A\|_\infty=$ $3+\sqrt{5}$.

二、(16 分) 选择题

1. 已知欧氏空间R^n的非零向量$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)^T$，定义矩阵$A=\alpha\alpha^T$，则矩阵$A$

（）单纯矩阵

A. 必定是　　　　B. 必定不是　　　　C. 可能是

2. 设$A=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&1&0&1\end{bmatrix}$，$V_1$和$V_2$分别为齐次线性方程组$Ax=0$，$Bx=0$的解空间，则$\dim(V_1\cap V_2)=$（）.

A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2

3. 设$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 1\\0 & -1 & -1\end{bmatrix}$，则$A^{2017}-2A^{2016}+A^{2015}=$（）.

A. 0　　　　B. A　　　　C. I_3

4. 若A为n阶 Hermite 矩阵，则以下不正确的是（）.

A. A的特征值均为实数　　　　B. A是单纯矩阵

C. 存在复向量$x\in C^n$使得x^HAx不为实数

三、（15 分）计算题. 设$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$，$a_i\in R$，$i=0$，1，2，定义多项式空间$P_3[t]$中的线性变换为$\mathrm{T}\big(f(t)\big)=-2a_0+(a_0+a_1+a_2)t-(a_0+3a_1+3a_2)t^2$，　≠L

$\forall f(t)\in P_3[t]$.

（1）求T在基1，t，t^2下的矩阵；

（2）若定义内积为$(f,g)=\int_{-1}^{1}f(t)g(t)dt$，其中$f$，$g\in P_3[t]$，求$P_3[t]$的一组标准正交基；

（3）是否存在$P_3[t]$的一个基底，使得T在该基底下的矩阵为对角阵. 若存在，给出该基底及在该基下的矩阵，若不存在，给出理由.

四、（15 分）计算题. 已知$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 2 & 1\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}-e^{2t}\\0\\e^{2t}\end{bmatrix}$，

（1）求矩阵指数函数e^{At}；

（2）求线性微分方程$\dot{x}(t)=Ax(t)+b(t)$满足初始条件$x(0)=[0\ 1\ 0]^T$的解.

五、（12 分）综合题. 已知$A=\begin{bmatrix}9 & 1 & 1\\1 & i & 1\\1 & 1 & 3\end{bmatrix}$，

（1）　试用圆盘定理估计矩阵A的特征值分布范围；

（2）　利用圆盘定理证明矩阵A是单纯矩阵（提示：适当选取对角阵. 其对角元素从集合$\{1,2,5,10\}$中选取）.

六、（12 分）综合题. 设$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

（1）　求A的伪逆A^+；

（2）　求使得线性方程组$Ax=b$有解的全体向量$b=[b_1\ \ b_2\ b_3]^T$，并求相容方程组$Ax=b$的极小范数解.

七、（6 分）证明题. 设A，$B\in C^{n\times n}$，$\|\cdot\|$为矩阵的某一算子范数. 若A为可逆矩阵，且$\|A\|^{-1}>\|A-B\|$. 试证明B为可逆矩阵.