2009—2010 学年 第一学期末试卷(A)

学号__________ 姓名___________ 成绩__________

考试科目：《 矩阵理论 》（**A**）

考试日期：2010 年 1 月 14 日

注意事项：1、考试 7 个题目共 8 页

2、考试时间 120 分钟

题目：

一、（本题 39 分）

二、（本题 20 分）

三、（本题 6 分）

四、（本题 9 分）

五、（本题 11 分）

六、（本题 8 分）

七、（本题 7 分）

八、（附加题）

H

姓名:　　　　　　　　　　　　学号:　　　　　　　　　　　A

一. 填空(39 分)　(注: $\mathbf{I}$ 代表单位阵, A^H 表示 H 转置, det(A) 指行列式)

(1) $e^{-tr(A)}\cdot\det(e^{A})=$ __1__ , $(e^{A})^{+}e^{-A}-e^{-A}(e^{A})^{-1}=$ __0__

(A-I)(A-2I)

(2)若 $A^2-3A+2I=0$，则 A 有一个无重根零化式为 $f(x)=$ __(x-1)(x-2)__

$(A^HA)^+A^H=A^+$　A^HAA^H

(3)若 $A=A^2=A^H$ ，则 $A^+=$ __A__

AA^+A　A^H　A^H　AA^+　$(AA^H)^H=AA^H$　$=(x+1)^2$

(4)若 3 阶阵 $\mathbf{A}\neq-\mathbf{I}$，且 $A^2+2A+I=0$，则 Jordan 形 $\mathbf{J_A}=$ __$\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&1\\&0&-1\end{pmatrix}$__

3,3　a,b

(5) $A=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}a&1\\0&b\end{pmatrix}$, $A\otimes B$ 的特征根为 __3a, 3b, 3a, 3b__

$\mathbf{tr}(A\otimes B)=($ __6(a+b)__ $)$

trA·trB

(6) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{4}&\frac{2}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$, $x=\begin{bmatrix}i\\i\\i\end{bmatrix}$, $i=\sqrt{-1}$ ，则谱半径

$\frac{4}{5}$　$\frac{4}{5}$　1　1　1

$Ax=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}i\\i\\i\end{bmatrix}$　$\|Ax\|_1$　$\frac{4}{5}+2$

$\rho(A)$ 取值范围是 __$(\frac{4}{5},1)$__ ; 且 $\|Ax\|_1=$ __$\frac{14}{5}$__ ; $\|A\|_\infty=$ __1__

(7) $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, 则 $e^{tA}=\begin{pmatrix}(\cos t)&-\sin t\\(\sin t)&\cos t\end{pmatrix}$, $e^{\pi A}=$ __$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$__

$A\varepsilon_1=\lambda\varepsilon_1$　(ε_1)

(8) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ 则 $\mathbf{A}x=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 的最佳极小二乘解是 __$x=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$__; $\mathbf{A}^+=$ __$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$__..

A^+b　$\frac{\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}}{4}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$　0 0　p　A=BC

(9)矩阵 A 中各列都可用 B 的列线性表示($\mathbf{R(A)}\subset\mathbf{R(B)}$)，则有矩阵 P 使 $\mathbf{BP}=$ __A__

$\rho(A)\le\|A\|$

(10) n 阶阵 A 的特征根 λ，谱半径 $\rho(A)$ 与范数 $\|A\|$ 的大小关系是 __$|\lambda|\le\rho(A)\le\|A\|$__.

(11) n 阶阵 A (k 是自然数), $\rho(A^k)$, $\rho(A)^k$, $\|A^k\|$, $\|A\|^k$ 之间关系为 ____

$\rho(A^k)=\rho(A)^k\le\|A^k\|\le\|A\|^k$

(12) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&-2&3\end{pmatrix}$ 的满秩分解为 __$A=BC=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$__; $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

$(A\varepsilon_1\ A\varepsilon_2\ A\varepsilon_3)$　$(\varepsilon_2\ \varepsilon_3\ \varepsilon_3)$　$A(x-x)=0$

(13)设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 R^3 的基，$A\in\mathbf{R}^{3\times3}$ 满足: $A\varepsilon_1=\varepsilon_2, A\varepsilon_2=\varepsilon_3, A\varepsilon_3=2\varepsilon_2-\varepsilon_3$.

$\varepsilon_1 A=\varepsilon_2$　$A\varepsilon_2=\varepsilon_3$

则有矩阵 B 使得 $A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\boxed{\varepsilon_1},\varepsilon_2,\varepsilon_3)\mathbf{B}$ ， B = ____ .

$0\cdot\varepsilon_1+1\cdot\varepsilon_2+0\varepsilon_3$　1×3　3×3

$0\varepsilon_1+0\varepsilon_2+1$

$0+2\quad-1$

$y=Ax$

$\underbrace{A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}_{3\times1}=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$

$x_1\alpha_1+\dots+x_n\alpha_n$

$(\varepsilon_2\ \varepsilon_3\ 2\varepsilon_2-\varepsilon_3)$

A

二.(20 分)计算下列各题

1. 设列满(高)阵 $A = A_{m\times n}$ 的 QR 分解为 $A = QR$，Q 为次酉阵($Q^H Q = I_n$).

验证：$X = R^{-1}Q^H$ 满足 A^+ 的 4 个条件.

$A^{-1} = R^{-1}Q^H$

$AA^+A = AR^{-1}Q^HA$ $\quad QRR^{-1}Q^HA = A$

$A^+AA^+ = R^{-1}Q^HAR^{-1}Q^H$ $\quad R^{-1}Q^HQRR^{-1}Q^H$

$AA^+ = QR\cdot R^{-1}Q^H = QQ^H$

$A^+A = R^{-1}Q^HQR =$

2.设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (1)求 A^2, A^3，(2)由 $e^{tA} \triangleq I + tA + \frac{(tA)^2}{2} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots$ 直接计算 e^{tA}

，并求 $(e^{tA})^+ = e^{-tA}$.

$A^2 = \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\1&0&0 \end{bmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0 \end{bmatrix}$

$e^{tA} = I + tA + \frac{(tA)^2}{2}$

$= I + \begin{bmatrix} 0&0&0\\t&0&0\\0&t&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\\frac{t^2}{2}&0&0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1&&\\t&1&\\\frac{t^2}{2}&t&1 \end{bmatrix}$

$e^{-tA} = \begin{bmatrix} 1&&\\-t&1&\\\frac{t^2}{2}&-t&1 \end{bmatrix}$

3.设 $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$，计算：$(I-A)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right)^2$

$\rho(A) = 0.5 < 1$ $\quad \sum A^k = (I-A)^{-1}$

$\therefore (I-A)(I-A)^{-2} = (I-A)^{-1}$

$= \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}^{-1}$

$= \frac{1}{0.25}\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4.已知 8 阶阵 A 适合：$rank(A-2I)=4$, $rank(A-2I)^2=1$, $(A-2I)^3=0$.求 A 的 Jordan 形 J.

$m(x) = (x-2)^3$

$r_0 = 8 > d_0 = 4 > l_0 = 1$
$r_1 = 4 > d_1 = 3$
$r_2 = 1 > d_2 = 1 > l_2 = 2$
$r_3 = 0$

$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{matrix} &&& \\ & \begin{matrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{matrix} && \\ && 2 & \\ &&& 2 \end{pmatrix}$

5. (1)画出矩阵 **A** 的盖尔圆盘; (2)说明 A 有 3 个互异特征根.

$$A=\begin{pmatrix}18 & 1 & 2\\ 1 & 9 & 1\\ 1 & i & 9i\end{pmatrix}.$$

$|\lambda-18|\le 3$
$|\lambda-9|\le 2$
$|\lambda-9i|\le 2$

三.(6 分)设 **A** 是 n 阶正规矩阵, $\sigma(\mathrm{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$(全体特征根).

(1)写出正规阵 **A** 的含有对角阵与两个 U(酉)阵的乘积分解公式;

(2)若 **A** 是 2 阶正规矩阵, $\sigma(\mathrm{A})=\{1, i\}$, $X=\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$ 使得 $\mathrm{A}X=X$, 求一个 U(酉)阵 **Q**, 将 **A** 写成 **Q**, $\mathbf{Q}^H$ 与对角阵的乘积形式.

四.(任选 3 题共 9 分)简证下列各题

1.设 $\|\bullet\|$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上相容的矩阵范数, 列向 $\alpha\in\mathbb{C}^n,\alpha\ne 0$. 任取 $x\in\mathbb{C}^n$, 令 $\|x\|$ 如下:

$\|x\|$ 定义为 $\|x\alpha^H\|$, $x\in\mathbb{C}^n$. 证明: $\|\mathrm{A}x\|\le\|\mathrm{A}\|\cdot\|x\|$, ($\mathrm{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$).

$\|Ax\|=\|Ax\alpha^H\|$
$\le\|A\|\|x\alpha^H\|$
$=\|A\|\|x\|$

2.设$\|\bullet\|$是矩阵范数，$x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0$ 使得$Ax=\lambda x$；令 $B=(x,0,0,\cdots,0)_{n\times n}$

证明： $AB=\lambda B$，且有 $|\lambda|\|B\|\le\|A\|\|B\|$(由此你能否推出一个结论？).

$A(x\ 0 \cdots 0) = (Ax\ 0 \cdots 0) = (\lambda x\ 0 \cdots 0) = \lambda B$

$\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$

$\|AB\| = \|\lambda B\| = |\lambda|\,\|B\|$

3. 设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\|A\|$是相容的矩阵范数，证明

(1) $\|I\|\ge 1$（I 是单位矩阵）；(2)若A可逆， 则$\|A^{-1}\|\ge\frac{1}{\|A\|}$

4. 若A为n阶正规阵，$\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$(全体特征根),

证明 $\sigma(A^H)=\{\overline{\lambda_1},\ \cdots,\overline{\lambda_n}\}$($A^H$的全体特征根).

$\theta^H A\theta = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)$

$\theta^H A^H\theta = (\bar\lambda_1 \cdots \bar\lambda_n)$

五.(11 分) 1.设$A_1=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$, $b=(2\ \ 1\ \ 0\ \ 1)^T$，$A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}_{4\times5}$.

求 A^+ 与 $Ax=b$ 的极小范数解或最佳极小二乘解

$Ax=b$

$x=A^+b$

$A^+ = (A_1^+ \quad A_2^+)$

$A_1^+ = \frac{1}{15}\begin{pmatrix}1&-2\\1&-2\\-1&2\end{pmatrix}$

$A_2^+ = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

2.已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$， (1)求 A 的短奇异值分解; (2)求奇异值分解.

$A^HA=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ $\lambda_1=6,\ \lambda_2=3$

六.(8 分) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. 求 A 的极小式；计算 e^{tA} 与 $\rho(A\otimes e^{B})$

$m(x)=(x-2)^2$

$f(A)=f(2)I+f'(2)(A-2I)$

$=e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+te^{2t}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}e^{2t} & te^{2t} & 0\\ 0 & e^{2t} & 0\\ 0 & te^{2t} & e^{2t}\end{pmatrix}$

$\rho=2e$

$\begin{pmatrix}e & e-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

七. (7 分)设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，求一个矩阵 B (具有正的特征根)，使得 $B^2=A$.

附加题(8 分)

1.设 $A\in\mathbb{C}^{m\times m}, B\in\mathbb{C}^{n\times n}, X=X(t)\in\mathbb{C}^{m\times n}$，验证 $X=e^{At}Ce^{Bt}$ 是微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX+XB\text{ ， }X(0)=C$$

的唯一解.

2.设单位列向量$\varepsilon \in \mathbb{C}^3$ ($|\varepsilon|^2=\varepsilon^H\varepsilon=1$). 令$A=\varepsilon\varepsilon^H$， $B=I-2\varepsilon\varepsilon^H$

(1)求$A=\varepsilon\varepsilon^H$的特征多项式，验证$A^2=A=A^H$，并且求$A$的极小式与$A^+$ ；

(2)求B的谱$\sigma(B)$与谱半径$\rho(B)$，验证$B^2=I$.

(3)f(x)是解析函数，求谱分解公式$f(B)=f(\lambda_1)G_1+f(\lambda_2)G_2$中的谱阵$G_1,G_2$

$|\lambda I-\varepsilon\varepsilon^H|=$

$A^2-A=0$

$m(x)=x(x-1)$

$A^+=A$

$(\varepsilon\varepsilon^H)^2$

$\varepsilon\varepsilon^H\varepsilon\varepsilon^H$

$=\varepsilon\varepsilon^H=A$

$\varepsilon\varepsilon^H=A^H$.

$A(A-I)$

$A^2(A-I)$

A^3-A^2

$A^3=A^2$

$A(A-I)^2$

$A(A^2+I-2A)$

A^3+A-2A^2

A^2+A-2A^2

$A-A^2$

(1) $m(x)=x(x-1)$

$A^+=A$

$f(x)=x^2(x-1)$

(2) $|\lambda I-(I-2\varepsilon\varepsilon^H)|=$

$\sigma(2A)=(0,0,2)$

$\sigma(I-2A)=(1,1,-1)=\sigma(B)$

$\rho(B)=1$

$|\lambda I_3-\varepsilon\varepsilon^H|$

$\lambda^2(\lambda-\varepsilon^H\varepsilon)$

$\lambda^2(\lambda-1)=0$

$(0,0,1)$

$(I-2\varepsilon\varepsilon^H)(I-2\varepsilon\varepsilon^H)$

$=I-2\varepsilon\varepsilon^H-2\varepsilon\varepsilon^H+4\varepsilon\varepsilon^H$

$=I$

$(0,0,-1)$

$(1,1,-1)$

$G_1=\dfrac{B+I}{2}=\dfrac{2I-2\varepsilon\varepsilon^H}{2}=I-\varepsilon\varepsilon^H$

插值公式

$G_2=\dfrac{B-I}{-2}=\varepsilon\varepsilon^H$

$\lambda I-\varepsilon^H\varepsilon$

$|\lambda I_3-\varepsilon\varepsilon^H|$

$=\lambda^2(\lambda-\varepsilon^H\varepsilon)=0$

$=\lambda^2(\lambda-1)=$

$(0,0,1)$

书上 P87. T.6. ( )

2009-2010 学年第一学期期末考试试卷

学号__________ 姓名__________ 成绩________

考试科目：《矩阵理论》（B）

P86. T3 $A^{(k)}$

考试日期：2010 年 1 月 14 日

注意事项：1、考试 8 个题目共 6 页

2、考试时间 120 分钟

习题

题目：

一 （本题 15 分）

二 （本题 15 分）

三 （本题 10 分）

四 （本题 15 分）

五 （本题 10 分）

六 （本题 15 分）

七 （本题 15 分）

八 （本题 5 分）

姓名：　　　　　　　　　　学号：　　　　　　　　　　B

一、设 $A=\begin{bmatrix}6 & i & 1+i\\ 3 & 3+i & 0\\ 2 & 1-i & 4\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}1\\ i\\ 0\end{bmatrix}$，$(i^2=-1)$ （1）计算 $\|A\|_1$ 及 $\|A\|_\infty$；

（2）计算 $\|Ax\|_1$，$\|Ax\|_2$ 及 $\|Ax\|_\infty$；（3）写出 A 的盖尔圆，A 是否可逆？

解：(1) $\|A\|_1=11$，$\|A\|_\infty=7+\sqrt{2}$.

(2) $Ax=\begin{bmatrix}5\\ 2+3i\\ 3+i\end{bmatrix}$　$\|Ax\|_1=5+\sqrt{13}+\sqrt{10}$.　$\|Ax\|_2=4\sqrt{3}$　$\|Ax\|_\infty=5$.

(3). $G_1: |z-6|\le 1+\sqrt{2}$.　$G_2: |z-3-i|\le 3$.　$G_3: |z-4|\le 2+\sqrt{2}$.

由于 $G_1\cup G_2\cup G_3$ 不包含原点 ⇒ A 非奇异 ⇒ A 可逆.

二、设 $A\in\mathbb{C}^{8\times 8}$，且 $\lambda I-A$ 等价于准对角阵

$$diag\left\{\begin{bmatrix}\lambda^2-1 & 1\\ 0 & \lambda+2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\lambda+1 & 0\\ \lambda-1 & \lambda-1\end{bmatrix},(\lambda+2)^2,\lambda+2,1,1\right\}$$

(1)试求 $\lambda I-A$ 的初等因子，不变因子；　(2)给出 $\lambda I-A$ 的 Smith 标准形
(3)写出 A 的最小多项式及 Jordan 标准形.

$$\begin{bmatrix}-2 &&&&&&&\\ & -2 &&&&&&\\ && -1 &&&&&\\ &&& 1 &&&&\\ &&&& -1 &&&\\ &&&&& 1 &&\\ &&&&&& -2 &\\ &&&&&&& \end{bmatrix}$$

(1) $\begin{bmatrix}\lambda^2-1 & 1\\ 0 & \lambda+2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & \lambda^2-1\\ \lambda+2 & 0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}\lambda+1 & 0\\ \lambda-1 & \lambda-1\end{bmatrix}\sim\cancel{\begin{bmatrix}2 & 1-\lambda\\ \lambda-1 & \lambda-1\end{bmatrix}}\ \begin{bmatrix}\lambda+1 & 0\\ 0 & \lambda-1\end{bmatrix}$

初等因子：$(\lambda+1)$，$(\lambda+1)$，$(\lambda+2)$，$(\lambda+1)$，$(\lambda-1)$，$(\lambda+2)^2$，$(\lambda+2)$.

$(\lambda+2)^2$　$\lambda+2$　$\lambda+2$　1　1　1　1　1

$\lambda+1$　$\lambda+1$　1　1　1　1　1　1

$\lambda-1$　$\lambda-1$　1　1　1　1　1　1

$$\begin{bmatrix}1 &&&&&&&\\ & 1 &&&&&&\\ && 1 &&&&&\\ &&& 1 &&&&\\ &&&& 1 &&&\\ &&&&& \lambda+2 &&\\ &&&&&& 2 &\\ &&&&&&& (\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda \end{bmatrix}$$

$m(\lambda)=\underbrace{(\lambda+2)^2(\lambda+1)(\lambda-1)}$　$(\lambda+2)(\lambda+1)(\lambda-1)$　$(\lambda+2)$　1　1　1　1　1　$(\lambda+2)^2(\lambda$

三、已知 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 证明（1）$\left(e^{A}\right)^{+}=e^{-A}$;

（2）$A^{+}=A\Leftrightarrow A^{2}$ 是幂等的 Hermite 阵且秩$\left(A^{2}\right)=$秩 A

四、设 $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&2&0\\-2&-2&-1\end{bmatrix}$.（1）证明 A 可对角化; (2)求 A 及 e^{A} 的谱分解;

(3)求谱半径 $\rho(A)$ 及 $\rho\left(e^{A}\right)$.

解: (1) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&0\\0&\lambda-2&0\\2&2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&0\\2&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=2.$ 互异特征值⇒A可对角化.

(2). $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}$ $\quad P=\begin{bmatrix}1&0&2\\0&0&1\\-1&1&-2\end{bmatrix}\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$

$E_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&0&0\\-1&2&0\end{bmatrix}$

$E_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&1\end{bmatrix}$

$E_3=\begin{bmatrix}2\\1\\-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&0\\0&1&0\\0&-2&0\end{bmatrix}$

$A=E_1-E_2+2E_3$

$e^{A}=eE_1+e^{-1}E_2+e^{2}E_3$

$\rho(A)=2$

$\rho(e^{A})=e^{2}.$

五、已知 $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，试求 A 的奇异值分解.

解: $A^H A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 0\\ 0 & \lambda-5\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda_1=2,\ \lambda_2=5.$

$x_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\quad x_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\qquad V=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$U=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt2} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\\ 0 & \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5} & 0\\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}\qquad A=U\begin{bmatrix}\sqrt2 & 0\\ 0 & \sqrt5\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}V^H$

六、已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$. (1) 证明方程组 $A^TAx=A^Tb$ 相容; (2) 求 $A^TAx=A^Tb$ 的通解及极小范数解.

解: $\cancel{r(A\,\vdots\,b)\neq r(A)}$ (1) $A^TA=\begin{bmatrix}5 & 10\\ 10 & 20\end{bmatrix}\quad A^Tb=\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}$

$r(A^TA\,\vdots\,A^Tb)=r(A^TA)\Rightarrow A^TAx=A^Tb$ 相容.

(2) $(A^TA)^+=\dfrac{(A^TA)^H}{(25+100+100+400)}=\dfrac{1}{125}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}\qquad (A^TA)^+A^TA=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

通解: $x=(A^TA)^+A^Tb+(I-(A^TA)^+A^TA)y,\ y\in C^2$

极小范数解: $(A^TA)^+A^Tb=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}$

$x=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}3\\ 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac45 & -\frac25\\ -\frac25 & \frac15\end{bmatrix}y.$

七、已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 2\end{bmatrix}$．(1) 计算 e^{At}；(2) 试求 $f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}(A^2+A)^n$．

解：$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -3\\ -2 & \lambda-2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=4$

$x_1=\begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix}\quad x_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\quad P=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & \frac{-1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$

(1) $e^{At}=P\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{4t}\end{bmatrix}P^{-1}$

$f(A)=P\begin{bmatrix}f(-1) & 0\\ 0 & f(4)\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}3f(-1) & f(4)\\ -2f(-1) & f(4)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}f(-1)+\frac{2}{5}f(4) & \frac{3}{5}f(4)-\frac{3}{5}f(-1)\\ \frac{-2f(-1)}{5}+\frac{2}{5}f(4) & \frac{2}{5}f(-1)+\frac{3}{5}f(4)\end{bmatrix}$

$f(-1)=0.$ $\quad f(4)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}(\overset{16}{\cancel{8}}+4)^n=\sum_{n=0}^{\infty}20^n\frac{(n+1)}{n!}$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{20^n}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{20^n}{n!}\cdot n$

$=e^{20}+20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{20^{n-1}}{(n-1)!}$

$=e^{20}+20\cdot e^{20}=21e^{20}$

八、$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$. 证明 $\lim\limits_{m\to\infty}A^{m}=0\Leftrightarrow\rho(A)<1$.

七. (7 分)设 $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，求一个矩阵 B (具有正的特征根)，使得 $B^2=A$.

$\sigma(A)=\{1,1,1\}$ $\quad m(A)=(x-1)^3$

$f(A)=f(1)G_1+f'(1)G_2+f''(1)G_3$

$f(x)=x-1$

$A-I=G_2$

$f(x)=1$

$I=G_1$

$f(x)=(x-1)^2$

$(A-I)^2=2G_3$

$f(A)=f(1)I+f'(1)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+f''(1)\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$A^{\frac{1}{2}}=I+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{8}\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$

附加题(8 分)

1.设 $A\in\mathbb{C}^{m\times m}, B\in\mathbb{C}^{n\times n}, X=X(t)\in\mathbb{C}^{m\times n}$，验证 $X=e^{At}Ce^{Bt}$ 是微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX+XB,\ X(0)=C \text{ 的唯一解.}$$

$\frac{dX}{dt}=\frac{d}{dt}\left(e^{At}Ce^{Bt}\right)$

$=Ae^{At}Ce^{Bt}+e^{At}Ce^{Bt}B$

$=AX+XB$

$X(0)=e^0Ce^0=C$

$\therefore X=e^{At}Ce^{Bt}$ 是 $\frac{dX}{dt}=AX+XB$ 的解.

2.设单位列向量 $\varepsilon \in \mathbb{C}^3$ $(|\varepsilon|^2 = \varepsilon^H \varepsilon = 1)$. 令 $A = \varepsilon\varepsilon^H$， $B = I - 2\varepsilon\varepsilon^H$

(1)求 $A = \varepsilon\varepsilon^H$ 的特征多项式，验证 $A^2 = A = A^H$，并且求 A 的极小式与 A^+ ；

(2)求 B 的谱 $\sigma(B)$ 与谱半径 $\rho(B)$，验证 $B^2 = I$.

(3) $f(x)$ 是解析函数，求谱分解公式 $f(B) = f(\lambda_1)G_1 + f(\lambda_2)G_2$ 中的谱阵 G_1, G_2

(1) $A^2 = \varepsilon\varepsilon^H\varepsilon\varepsilon^H = \varepsilon(\varepsilon^H\varepsilon)\varepsilon^H = \varepsilon\varepsilon^H = A$

$A^H = (\varepsilon\varepsilon^H)^H = \varepsilon\varepsilon^H = A$

$\therefore A^2 = A = A^H$

$\sigma(A) = \{1, 0, 0\}$

当 $\lambda_1 = 1$ 时

$(A-I)A = A^2 - A = 0$

$\therefore m(x) = x(x-1)$

$A^+ = (\varepsilon\varepsilon^H)^+ =$

$= (\varepsilon^H)^+ \varepsilon^+ = \varepsilon(\varepsilon^H\varepsilon)^{-1}(\varepsilon^H\varepsilon)^{-1}\varepsilon^H$

$= \varepsilon\varepsilon^H = A$

(2)

$\sigma(B) = \{1, 1, -1\}$

$B^2 = (I - 2\varepsilon\varepsilon^H)(I - 2\varepsilon\varepsilon^H)$

$= I - 2\varepsilon\varepsilon^H - 2\varepsilon\varepsilon^H + 4\varepsilon\varepsilon^H\varepsilon\varepsilon^H$

$= I$

(3)

$(B+I)(B-I) = (2I - 2\varepsilon\varepsilon^H)(-2\varepsilon\varepsilon^H)$

$= -4\varepsilon\varepsilon^H + 4\varepsilon\varepsilon^H\varepsilon\varepsilon^H = 0$

$\therefore m(x) = (x+1)(x-1)$

$G_1 = \dfrac{B-I}{-1-1} = \dfrac{-2\varepsilon\varepsilon^H}{-2} = \varepsilon\varepsilon^H$

$G_2 = \dfrac{B+I}{1-(-1)} = \dfrac{2I - 2\varepsilon\varepsilon^H}{2} = I - \varepsilon\varepsilon^H$

2010—2011 学年 第一学期末试卷(B)

学号__________ 姓名__________ 成绩__________

考试科目:《 矩阵理论 》(B)

考试日期:2011 年 1 月 10 日

注意事项:1、考试 7 个题目共 6 页

2、考试时间 120 分钟

题目: 一 (本题 20 分)

二 (本题 15 分)

三 (本题 18 分)

四 (本题 14 分)

五 (本题 17 分)

六 (本题 16 分)

七 (本题 16 分)

注意:六、七两题只需任选做一题

(注:I 表示单位矩阵,A^H 表示 H 转置,det(A) 代表行列式)

姓名：　　　　　　　　学号：　　　　　　　　B

一、(20 分) 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 2i \end{pmatrix}$，$x=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(1)求列范数 $\|A\|_1$ 与行范数 $\|A\|_\infty$．　(2)求向量范数 $\|Ax\|_1$，$\|Ax\|_2$ 及 $\|Ax\|_\infty$．

(3)画出 A 的盖尔园（估计特征值范围)，判断 A 是否可逆

二、(15 分)设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 2a_1 & 2a_2 & \cdots & 2a_n \\ \cdots & & \cdots & \\ na_1 & na_2 & \cdots & na_n \end{pmatrix}$，$\mathbf{tr}A\neq 0$，(1)求 A 的满秩分解

(2)计算 $A^2-(\mathbf{tr}A)A$ 与 A^{100}；(3) 证明 A 可对角化(A 为单阵).

三、(18 分)设 $A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 5 & 3\end{pmatrix}$(1)求 A 的谱分解；(2) 求 $e^{t\sin A}$ 的谱分解

(3)求谱半径 $\rho(e^{A})$ 与行列式 $\det(e^{\sin A})$.

四.(14 分)设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$, (1)用公式 $\begin{pmatrix}D\\ 0\end{pmatrix}^{+}=(D^{+},\ 0)$ 或满秩分解求 A^{+}；

(2)证明 $Ax=b$ 相容，并求其极小范数解.

五、(17 分)设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -2\end{pmatrix}$(1)写出 A 的最小式，初等因子，不变因子；

(2)求 A 与 $\frac{A}{2}$ 的 Jordan 形；(3)考查 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(\frac{A}{2}\right)^n$ 的收敛性

注意：以下的六、七两题只需任选做一题

六、(16 分)(1) 设矩阵 A 的最小式 $m(x)=(x-2)^2$ 且 $f(A)$ 收敛，用台乐公式导出 $f(A)$ 的计算公式，并计算 $\cos(\pi A)$

(2)求 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ 的正奇异值与奇异值分解，并写出 A^+ 的简化奇异分解式

七、(16 分) 设 $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ -2 & 3 & 1\\ -2 & 2 & 2\end{pmatrix}$，$b(t)=\begin{pmatrix}e^t\\ 0\\ e^{2t}\end{pmatrix}$，$x=x(t)=\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\end{pmatrix}$，

(1)求 e^{At}

(2)求解齐次微分方程组 $\dfrac{dx}{dt}=Ax$，初始条件为 $x(0)=C=(0,\ 1,\ 0)^T$

(3)试推导出微分方程 $\dfrac{dx}{dt}=Ax+b(t)$ 满足条件 $x(0)=C$ 的求解公

式：$x(t)=e^{At}C+e^{At}\int_0^t e^{-A\tau}b(\tau)d\tau$ （若求出具体解可得附加分）.

（1）分别写出 A， A^+ 及 (A^HA) 的Schur(许尔)分解公式

（2）写出 A 的奇异值； 证明，谱半径 $\rho(A)=\|A\|_2$

8.（任选 3 个小题 12 分）

（1）设有方程组 $Ax=b$, 证明 $A^+b\perp y$, 其中 $Ay=0$ $(A^+b,y)=y^H(A^+Ax)=y^HA^HA^{+H}=0$

（2）若定义矩阵 $Y=(y_{ij})$ 的长度为 $\|Y\|=\sqrt{\sum|y_{ij}|^2}$，证明矩阵方程：

$AYB=D$ 的最佳极小二乘解为 $Y=A^+DB^+$

（3）求方程 $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 的最佳极小二乘解 $Y=\frac{1}{20}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$

（4）证明：若方阵A, B无公共特征值,则 $\begin{pmatrix}A&O\\D&B\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}$ 相似 $P=\begin{pmatrix}I&0\\X&I\end{pmatrix}$ $P^{-1}=\begin{pmatrix}I&0\\-X&I\end{pmatrix}$

补充题 设 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, $rank(A)=r$，奇异值分解为

$$A=U\begin{bmatrix}S&0\\0&0\end{bmatrix}V^H,\ \mathrm{S=diag}\{\sigma_1,\cdots,\sigma_r\},(\sigma_1>0,\cdots,\sigma_r>0)$$

其中 U, V分别是m阶与n价酉矩阵．再设

$$U=[\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m],\ V=[v_1,\cdots,v_n].$$

（1）证明：$A=\sum_{k=1}^{r}\sigma_k\varepsilon_k v_k^H$

（2）证明： $\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r\}$ 构成值域 R（A） 的正交基 $\dim R(A)=r(A)$ 设 ε_1 --- ε_r 线无

矩阵理论（B）(2007.01)

一、设 $A=\begin{pmatrix}5&1&i\\-i&1+2i&1\\1&2&4i\end{pmatrix}$，$(i^2=-1)$，$x=\begin{pmatrix}0\\i\\1\end{pmatrix}$， (1)计算 $\|A\|_1$ 与 $\|A\|_\infty$.

(2)计算 $\|Ax\|_1$，$\|Ax\|_2$ 及 $\|Ax\|_\infty$. (3)画出 A 的盖尔圆，A 是否可逆？

二设 $A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&3&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ (1)计算, $\sin(At)$ (2)求 A 的谱分解,(3)求谱半径 $\rho(\sin A)$.

三设线性方程组 $Ax=b$，$A\in\mathbb{C}^{m\times n}$，$b\in\mathbb{C}^m$. (1)若方程组相容，证明：方程

2008

（2）取 $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&2&0\end{bmatrix}$. 求A的奇异值分解，并且写出 $R(A)$ 的一组标准正交基

四、(15分) $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，证明

（1）若 $A^H=A^2=A$，则 $A^+=A$

（2）若A是正规矩阵，则 $(A^k)^+=(A^+)^k$ （k是任意自然数）

五、(15分) 设 $A=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\2&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\\-2\end{bmatrix}$ (1)求A的满秩分解；(2)计算 A^+；

(3)判断方程组 $Ax=b$ 是否相容，并求其极小范数解或极小最小二乘解.

六、(15分) 设 $A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$, $b(t)=\begin{bmatrix}e^t\\2e^t\\e^t\end{bmatrix}$, $X(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}$, (1)计算 e^{At}；

（2）求微分方程 $\frac{dX(t)}{dt}=AX(t)+b(t)$ 满足条件 $X(0)=(-1,0,1)^T$ 的解.

补充题:

1 设 $V=\mathbb{C}^n$，对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in V$

令 $\varphi(x)=(0,x_1,\cdots,x_{n-1})^T\in V$，

（1）证明 $\varphi:V\to V$ 是 V 上的线性变换，且 $\varphi^n=0$ (零变换);

（2）求矩阵 A 使得 $\varphi(x)=Ax$；（3)求核空间 $N(\varphi)$ 与秩数 $\operatorname{rank}\varphi=\dim R(\varphi)$.

2 设 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，（1）证明 $tr(C^HC)=tr(CC^H)=\sum_{i,j}|c_{ij}|^2$.

（2）若 $tr(C^HC)=0$ 则 $C=0$.

3 若 $M=\begin{pmatrix}B&C\\0&D\end{pmatrix}$ 为正规矩阵，则 $C=0$.

4 若 A 为正规阵且 Q 为酉矩阵，证明 $Q^HAQ=Q^{-1}AQ$ 也是正规阵.

5 设正规阵 $A=A_{n\times n}\in\mathbb{C}^{n\times n}$，它的不变子空间为 $W\subset\mathbb{C}^n$，则 W 是 A^H 的不变子空间，且 $W^\perp$ 也是 A 的不变子空间.

（提示：利用3，4题即可；也可用 A 的谱分解公式）.

2007年答案出品人：唐忠光 ；2008年答案出品人：王灏宇

矩阵理论(B) (2007.01) 校核：余快 版本：SY08152

一.(1) $\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}(|a_{ij}|)=7$ (列范数)

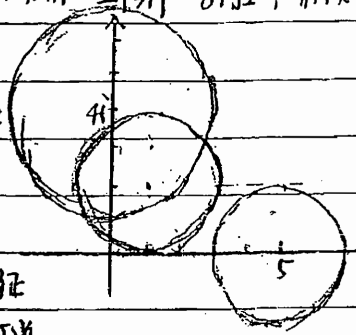
$\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|)=7$ (行范数)

(2) $Ax=\begin{bmatrix}2i\\ i-1\\ 6i\end{bmatrix}$ $\|Ax\|_1=\sum|\xi_i|=8+\sqrt{2}$; $\|Ax\|_2=\left(\sum|\xi_i|^2\right)^{1/2}=\sqrt{42}$; $\|Ax\|_\infty=\max|\xi_i|=6$

(3) $|z-5|\le 2$

$|z-(1+2i)|\le 2$

$|z-4i|\le 3$



特征值范围中不包括原点，即0不是矩阵特征值 $\therefore$ A非奇异，A可逆.

二.(1) $|\lambda I-A|=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-2)$ $\therefore m_A(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-3)(\lambda-2)$

$m_A(\lambda)$无重根，A可逆.

$\lambda=-1$时 $\eta_1=(1,0,0)^T$

$\lambda=2$时 $\eta_2=(1,0,3)^T$

$\lambda=3$时 $\eta_3=(0,1,0)^T$

$$\therefore P=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&3&0\end{bmatrix}=[Z_1\ Z_2\ Z_3],\quad P^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-3&0&1\\0&0&-1\\0&-3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Y_1\\Y_2\\Y_3\end{bmatrix}$$

$A=P\,\mathrm{diag}\{-1,2,3\}P^{-1}$; $f(At)=P\,\mathrm{diag}\{f(-t),\ f(2t),\ f(3t)\}P^{-1}$

$f(At)=\sin At$

$$\sin At=P\begin{bmatrix}\sin(-t)&&\\&\sin(2t)&\\&&\sin(3t)\end{bmatrix}P^{-1}=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}3\sin t&0&-\sin t-\sin 2t\\0&-3\sin 3t&0\\0&0&-3\sin 2t\end{bmatrix}$$

[illegible]

(2) A的谱分解：

法1: $\varphi_1(\lambda)=(\lambda-2)(\lambda-3)$; $\varphi_2(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-3)$; $\varphi_3(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-2)$

$$E_1=\frac{\varphi_1(A)}{\varphi_1(\lambda_1)}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}12&0&-4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix};\quad E_2=-\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&1/3\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$E_3=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&4&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\qquad A=-E_1+2E_2+3E_3$$

法2: $$E_1=Z_1Y_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{3}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix};\quad E_2=Z_2Y_2=\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$E_2=\begin{bmatrix}0&0&\frac{1}{5}\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix};\quad E_3=Z_3Y_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$A=-E_1+2E_2+3E_3$.

(3) 谱半径 $\rho(\sin A)$

由(1)得 $\sin A$ 的特征值：$-\sin 1$，$\sin 2$，$\sin 3$；

$\therefore \rho(\sin A)=\max\{|-\sin 1|,\sin 2,\sin 3\}=\sin 2$.

三 证明：(1) 方程相容，解唯一 $\Leftrightarrow$ A 列满秩 $\therefore A_{m\times n}$

"$\Leftarrow$"(充分)：若 A 列满秩，$A^+=(A^HA)^{-1}A^H$

方程通解形式：$x=A^+b+(I-A^+A)y=A^+b+[I-(A^HA)^{-1}A^H\cdot A]y=A^+b$

$\therefore$ 由 A^+ 的唯一性 $\Rightarrow$ 解唯一，且解 $x=A^+b$.

"$\Rightarrow$"(必要性)：由通解形式：$x=A^+b+(I-A^+A)y$.

解唯一 $\Rightarrow$ $I-A^+A=0$ $\Rightarrow A^+A=I_n$.

$\operatorname{rank}(A^+A)=n\le \operatorname{rank}(A)\le n$ $\quad\therefore \operatorname{rank}(A)=n$ (列满秩)

(2) 方程不相容，最小二乘解唯一 $\Leftrightarrow$ A 列满秩. $A_{m\times n}$.

最小二乘解通式也为：$x=A^+b+(I-A^+A)y$. (与(1)形式相同) $\therefore$ 证明同(1).

四.(1) $|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-6)$. $m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-6)$ $\quad A$ 可对角化.

$\lambda=1\quad \eta_1=(0,0,1)^T$

$\lambda=2\quad \eta_2=(3,1,0)^T$

$\lambda=6\quad \eta_3=(1,-1,0)^T$

$$\therefore P=\begin{bmatrix}0&3&1\\0&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix};\quad P^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\\frac14&\frac14&0\\\frac14&-\frac34&0\end{bmatrix}$$

$$\therefore e^{At}=P\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}&&\\&e^{\lambda_2 t}&\\&&e^{\lambda_3 t}\end{bmatrix}P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac34e^{2t}+\frac14e^{6t}&\frac34e^{2t}-\frac34e^{6t}&0\\\frac14e^{2t}-\frac14e^{6t}&\frac14e^{2t}+\frac34e^{6t}&0\\0&0&e^{t}\end{bmatrix}$$

(2) $f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(2A^{n+1}-3A^n)=2Ae^A-3e^A=(2A-3I)e^A$

$$=\begin{bmatrix}3&-6&0\\-2&7&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac34e^2+\frac14e^6&\frac34e^2-\frac34e^6&0\\\frac14e^2-\frac14e^6&\frac14e^2+\frac34e^6&0\\0&0&e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac34e^2+\frac94e^6&\frac34e^2-\frac{27}{4}e^6&0\\\frac14e^2-\frac94e^6&\frac14e^2+\frac{27}{4}e^6&0\\0&0&-e\end{bmatrix}$$

(3) 通解形式：$X(t)=e^{At}\cdot X(0)=\begin{bmatrix}\frac34e^{2t}+\frac14e^{6t}\\\frac14e^{2t}-\frac14e^{6t}\\-e^{t}\end{bmatrix}$

五: (1) $B=AA^+ \Rightarrow B^H=(AA^+)^H = AA^+ = B$ ∴ B是Hermite阵;

$B^2=(AA^+)(AA^+)=(AA^+A)A^+ = AA^+ = B$ ∴ B是幂等阵

∴ B是幂等Hermite阵.

(2) ∵ B为幂等阵 $B^2-B=0 \Rightarrow B(B-I)=0$ ∴ $f(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$ 被最小多项式整除;

∴ B的特征值为0或1 ∴ $\rho(B)=1$

(3) $\|B\|_2=\sqrt{\lambda_1}$; λ_1为B^HB的最大特征值.

$B^HB=B^2=B$ ∴ $\lambda_1=1$ ∴ $\|B\|_2=1$

六 (1) $A=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\1&-2&-3&-1\\-1&4&5&3\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ ∴ $F=\begin{bmatrix}1&0\\1&-2\\-1&4\end{bmatrix}$ $G=\begin{bmatrix}1&0&-1&1\\0&1&&1\end{bmatrix}$

$A=FG$

(2) $A^+=G^H(GG^H)^{-1}(F^HF)^{-1}F^H=\frac{1}{216}\begin{bmatrix}60&24&12\\18&0&18\\-42&-24&6\\78&24&30\end{bmatrix}=\frac{1}{36}\begin{bmatrix}10&4&2\\3&0&3\\-7&-4&1\\13&4&5\end{bmatrix}$

(3) $\mathrm{rank}(A \vdots b)=\mathrm{rank}(A)=2$. ∴ 方程相容

极小范数解: $x=A^+b=[1, 0, -1, 1]^T$

$\boxed{\text{矩阵理论(B)} \quad (2008.01)}$

一.(1) $\mathrm{diag}\{\lambda(\lambda-1)^2, (\lambda-1+i)(\lambda-1-i), \lambda^2(\lambda-1), 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$

初等因子: λ, $\underline{(\lambda-1)^2}_{3}$, $\underline{(\lambda-1+i)}_{3}$, $\underline{(\lambda-1-i)}_{3}$, $\underline{\lambda^2}_{3}$, $\underline{\lambda-1}_{2}$

不变因子 $\begin{cases} d_3 = (\lambda-1)^2(\lambda-1+i)(\lambda-1-i)\lambda^2 \\ d_2=\lambda(\lambda-1) \\ d_1 = 1 \end{cases}$

∴ $\text{Smith} = \mathrm{diag}\begin{bmatrix}1&&&&&&&\\&1&&&&&&\\&&1&&&&&\\&&&1&&&&\\&&&&1&&&\\&&&&&1&&\\&&&&&&\lambda(\lambda-1)&\\&&&&&&&(\lambda-1)^2(\lambda-1+i)(\lambda-1-i)\lambda^2\end{bmatrix}$

$m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-1+i)(\lambda-1-i)\lambda^2$

$J_1=\begin{bmatrix}1&1\\&1\end{bmatrix}$ $J_2=[1-i]$ $J_3=[1+i]$

$J_4=\begin{bmatrix}0&1\\&0\end{bmatrix}$. $\rho(A)=|1+i|=\sqrt{2}$.

二).

$$\|A\|_1 = \max_j\left(\sum_{i=1}^{3}|a_{ij}|\right)$$

$$\sum_{i=1}^{3}|a_{i1}| = 4+\sqrt{1+4} = 5+\sqrt{5}$$
$$\sum_{i=1}^{3}|a_{i2}| = 1+\sqrt{5}+1 = 2+\sqrt{5}$$
$$\sum_{i=1}^{3}|a_{i3}| = 1+2 = 3$$

$\therefore \|A\|_1 = 5+\sqrt{5}$

$$\|A\|_\infty = \max_i\left(\sum_{j=1}^{3}|a_{ij}|\right)$$

$$\sum_{j=1}^{3}|a_{1j}| = 4+1+1 = 6$$
$$\sum_{j=1}^{3}|a_{2j}| = \sqrt{5}+\sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$
$$\sum_{j=1}^{3}|a_{3j}| = 1+1+2 = 4.$$

$\therefore \|A\|_\infty = 6$

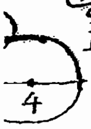
$$AX = \begin{pmatrix} 3 \\ 1+2i \\ 2+i \end{pmatrix}.$$

$$\|AX\|_1 = \sum_i |\xi_i| = 3+\sqrt{5}+\sqrt{5} = 3+2\sqrt{5}$$
$$\|AX\|_2 = \left(\sum_i |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = (3^2+5+5)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{19}$$
$$\|AX\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|\xi_i| = 3$$

~~或通过变换改变圆大小~~

$D = $ [illegible]

$D^{-1} = $ [illegible]



其盖尔圆均不包含原点 ∴ A 可逆

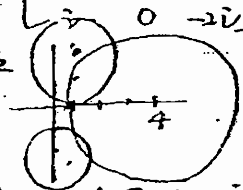
DAD^{-1} 与 A^T 有相同的特征值

∵ A^T 与 A 特征值相同

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 1+2i & i \\ 1 & 1+2i & 1 \\ i & 0 & -2i \end{bmatrix}$$

其盖氏圆盘

$$G_1 = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-4| \le 2\}$$
$$G_2 = \{z\in\mathbb{C} \mid |z-(1+2i)| \le \sqrt{5}\}$$
$$G_3 = \{z\in\mathbb{C} \mid |z+2i| \le 2\}.$$



均不包含原点

∴ A 为可逆阵

三). 证明 $A = \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \varepsilon_k v_k^H$

7

由已知 $A = U\begin{bmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H \Rightarrow A = \underset{1\times m}{(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m)} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^H \\ \vdots \\ v_n^H \end{bmatrix}$

$$= \underset{1\times n}{(\varepsilon_1\sigma_1, \cdots, \varepsilon_r\sigma_r, 0, \cdots, 0)} \begin{pmatrix} v_1^H \\ \vdots \\ v_n^H \end{pmatrix}$$

$$= \varepsilon_1\sigma_1 v_1^H + \cdots + \varepsilon_r\sigma_r v_r^H + 0 + \cdots + 0$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \sigma_k \varepsilon_k v_k^H$$

$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 由A奇异值分解.

设 $A=V\begin{bmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^H$ $\sigma_r^2=\lambda_r$ 为 A^HA 特征值

$U=(U_1, U_2)$ $U_1=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_r)$ 其中 α_i 为 $\sigma_r^2>0$ 对应的标准正交特征向量

$U_2=(\alpha_{r+1},\cdots\alpha_n)$ 其中 α_i 为 0

$V_1=AU_1S_r^{-1}$

$V_2=N(A^H)$.

先求 $A^HA=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$|\lambda I-A^HA|=\begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-4 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\lambda(\lambda^2-10\lambda+21)=\lambda(\lambda-7)(\lambda-3)$

$\therefore \lambda_1=3;\ \lambda_2=7,\ \lambda_3=0$

$\sigma_2=\sqrt{7},\ \sigma_3=0$

$\sigma_1=\sqrt{3}$

$\lambda_1=3.\quad \lambda I-A^HA=\begin{pmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=0 \Rightarrow \eta_1=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\lambda_2=7\quad \lambda I-A^HA=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.\quad \Rightarrow \eta_2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3=0\quad (\lambda I-A^HA)=\begin{pmatrix} -5 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \eta_3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

属不同特征值的特征向量正交

只需标准化：$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\quad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\quad \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$\therefore U=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & \frac{-2}{\sqrt{21}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{4}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}\quad U_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{7} & 0 \end{pmatrix}$

$V_1=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{14}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{7}} \end{bmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{14}} \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$V_2=N(A^H)$ 而 $A^Hx=0$ 有且仅有唯一零解. $\therefore V_2$ 不存在

二) 奇异值分解: $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{21}} \end{bmatrix}^H$

$R(A)=\{y \mid y=Ax,\ x\in C^2\}$

$R(A)=span(a_1,a_2,a_3)$. 显然 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 为 $span(a_1,a_2,a_3)$ 的一组~~标准正交~~基 即 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 与一组标准正交基

证明:

(1) 设 $A^+=X$, 只需验证 (1) $AXA=A$; (2) $XAX=X$; (3) $(AX)^H=AX$, (4) $(XA)^H=XA$.

显然 $A^+=X=A$ 满足以上四式. $\Rightarrow A^+=A$.

(2) 若A为正规阵, 即 $AA^H=A^HA$.

∵ A是正规阵 ∴ ∃U为酉阵使 $A=U(diag(\lambda_1,\cdots\lambda_n))U^H$.

$\Rightarrow (A^+)^k=U\,diag(\lambda_1^{+k}\cdots\lambda_n^{+k})U^H$ ① $A^k=U\,diag(\lambda_1^k,\cdots\lambda_n^k)U^H$, $\Rightarrow (A^k)^+=U\,diag(\lambda_1^{k+},\cdots\lambda_n^{k+})U^H$ ②

由①② $\Rightarrow (A^+)^k=(A^k)^+$

五

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}=FG$$

$$A^+=G^H(GG^H)^{-1}(F^HF)^{-1}F^H$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac12 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac14 & -\frac14 \\ -\frac14 & \frac32 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -\frac14 & \frac14 & \frac14 & \frac14 \\ \frac38 & -\frac18 & \frac18 & -\frac18 \\ -\frac38 & \frac18 & -\frac18 & \frac18 \end{bmatrix}=\frac18\begin{bmatrix} -2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 判断 $Ax=b$ 是否相容只需判断 $AA^+b=b$ 是否成立

$$左=\begin{bmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\2&1&-1\\1&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{3}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{3}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\\-2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{6}{8}&-\frac{2}{8}&\frac{2}{8}&-\frac{2}{8}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{2}{8}&\frac{2}{8}&\frac{6}{8}&\frac{2}{8}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\\-2\end{bmatrix}.$$

$\Rightarrow Ax=b$ 相容. 具有唯一极小范数解

$$x=A^+b$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{3}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\\frac{3}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\Rightarrow x=\begin{bmatrix}-2\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

六(1) $|\lambda I-A|=(\lambda-1)^3$

经验算: $m_A(\lambda)=(\lambda-1)^2$.

$\therefore f(At)=\alpha_1 A+\alpha_0$; $f(\lambda t)=\alpha_1\lambda+\alpha_0$; $tf'(\lambda t)=\alpha_1$

将λ=1代入: $\begin{cases}\alpha_1+\alpha_0=e^t\\\alpha_1=te^t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_0=(1-t)e^t\\\alpha_1=te^t\end{cases}$

$$\therefore e^{At}=\alpha_1 A+\alpha_0 I=\begin{bmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{bmatrix}te^t+\begin{bmatrix}(1-t)e^t&&\\&(1-t)e^t&\\&&(1-t)e^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2t&-2t&6t\\-t&1-t&3t\\-t&-t&1+3t\end{bmatrix}e^t$$

(2) $x=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}f(\tau)d\tau$

$t_0=0$ $\quad x=e^{At}\cdot x(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}b(\tau)d\tau.$

$$=\begin{bmatrix}1-2t&-2t&6t\\-t&1-t&3t\\-t&-t&1+3t\end{bmatrix}e^t\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}1-2(t-\tau)&-2(t-\tau)&6(t-\tau)\\-(t-\tau)&1-(t-\tau)&3(t-\tau)\\-(t-\tau)&-(t-\tau)&1+3(t-\tau)\end{bmatrix}e^{t-\tau}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}e^{\tau}d\tau$$

$$=\begin{bmatrix}8t-1\\4t\\4t+1\end{bmatrix}e^t+\begin{bmatrix}t\\2t\\t\end{bmatrix}e^t=\begin{bmatrix}9t-1\\6t\\5t+1\end{bmatrix}e^t$$

NO.

Date

附：作业题答案纠错：

P196. 8. 若一个正规矩阵若为三角阵，则一定是对角阵.

证：用数学归纳法证明：（以上三角阵为例）.

$n=2$时 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ $A^H=\begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & 0 \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{bmatrix}$

$AA^H=A^HA$；$AA^H=\begin{bmatrix} a_{11}\bar{a}_{11}+a_{12}\bar{a}_{12} & a_{12}\cdot\bar{a}_{22} \\ a_{22}\cdot\bar{a}_{12} & a_{22}\cdot\bar{a}_{22} \end{bmatrix}$；$A^HA=\begin{bmatrix} a_{11}\cdot\bar{a}_{11} & \bar{a}_{11}\cdot a_{12} \\ \bar{a}_{12}\cdot a_{11} & \bar{a}_{22}\cdot a_{22} \end{bmatrix}$

$\because AA^H=A^HA$；由$a_{11}.a_{12}.a_{22}$的任意性：

$a_{12}\cdot\bar{a}_{12}=0 \Rightarrow a_{12}=0$

$\therefore A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ 成立.

假设$n=k-1$时成立

$n=k$时：$A=\begin{bmatrix} B_{(k-1)(k-1)} & \alpha \\ 0 & a_{kk} \end{bmatrix}$. $B_{(k-1)(k-1)}$是上三角阵. $A^H=\begin{bmatrix} B^H & 0 \\ \alpha^H & \bar{a}_{kk} \end{bmatrix}$

$AA^H=\begin{bmatrix} BB^H+\alpha\alpha^H & \alpha\bar{a}_{kk} \\ a_{kk}\alpha^H & a_{kk}\bar{a}_{kk} \end{bmatrix}$. $A^HA=\begin{bmatrix} B^HB & B^H\alpha \\ \alpha^HB & \alpha^H\alpha+\bar{a}_{kk}a_{kk} \end{bmatrix}$

$AA^H=A^HA \Rightarrow a_{kk}\cdot\bar{a}_{kk}=\alpha^H\alpha+\bar{a}_{kk}a_{kk} \Rightarrow \alpha=0$

$\Rightarrow BB^H=B^HB$ 由假设$n=k-1$成立$\Rightarrow$ B是对角阵

$\therefore$ A是对角阵

Masillo®

矩阵理论试题（年份未知） 98

答案在P16

班级__________ 姓名__________

一、设 Y 和 Z 都是线性空间 X 的子空间，又 $\dim Y=\dim Z, Y\subset Z$，证明 $Y=Z$

二、在 R^3 中，定义线性变换 T 为：对任意 $x=(x_1,x_2,x_3)^T\in R^3$，$Tx=(x_1-x_2, x_2-x_3, 2x_3)^T$，解答下面问题：

1. 求 T 的特征值及各特征值的几何重数和代数重数； OK. $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&2\end{bmatrix}$
2. 试判断 T 是否可对角化的线性变换； OK 不可
3. 求 $\dim R(T)$ 及 $\dim N(T)$ OK. 3 + 0
4. 求 $R(T)$ 的一组基底。（提示：取定 R^3 底一组基底讨论之）

三、设 E 为定义了内积 $(\cdot|\cdot)$ 的欧氏空间，试证对任意 $x,y\in E$ 都有

$$(x|y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2)$$

四、设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，试证若存在正整数 $K\geq 2$，使得 $A^K=0$，必有 $A=0$。

五、求矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}0&i&1\\-i&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$$

的谱分解式，又设 t 为实数，试求矩阵 At 的正弦函数 $\sin At$

六、试证：$H^+=H$ 的充要条件为：H^2 为幂等的 Hermite 矩阵，且 $\operatorname{rank} H^2=\operatorname{rank} H$。

$H^4=(H^2)^2=H^2$. 幂等.

$(H^2)^H=H^2$.

七、求矛盾方程组 $Ax=b$ 的最小范数最小二乘解，其中：

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\\2&4\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

$A^+=\frac{1}{25}\begin{bmatrix}1&0&2\\2&0&4\end{bmatrix}$

八、设 E 为幂等的 Hermite 矩阵，证明：$X\in E\{2,3,4\}$ 的充要条件为 X 为幂等的 Hermite 矩阵且满足 $R(X)\subset R(E)$

九、用盖氏圆盘定理证明矩阵：

$$A=\begin{bmatrix}9&1&-2&1\\0&8&1&1\\-1&0&4&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

至少有两个实特征根。

9 − 4
8 − 2
4 − 1
1 − 1

$A=\sqrt{2}Z_1-\sqrt{2}Z_2$

$\sin At=(\sin\sqrt{2}t)Z_1-\sin\sqrt{2}t\,Z_2$

Dolphin

只有用求$f(\lambda)$或$f(A)$时 $P_e(\lambda)$，$P_e(\lambda)$时用A的特征值 } 其它
和 奇异值分解求的A^HA的特征值 } 都直接求
A的特征值

矩阵理论试题（2001）

班级__________ 姓名__________

OK 一、用盖氏圆盘定理证明矩阵

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0.8 & 0.4\\ 0.2 & 6 & 0.8\\ 0.2 & 0.2 & 8\end{bmatrix}$$

有三个互异的特征值。（12 分）

二、证明数域F上的线性空间X与它的任意子空间S有相同的零向量。（10 分）

OK 三、已知X为数域F上的线性空间，且$\dim X=3$，$T\in L(x,x)$，$B_x=\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$，线性变换$T$在基底$B_x$下的矩阵表示为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

试求$R(T)$、$N(T)$及其维数。（12 分）

四、设A为正规矩阵，W为A的不变子空间，试证$W^\perp$也为A的不变子空间。（12 分）

OK 五、设$A\in C^{5\times5}$，又知$\lambda I-A$的初等因子组为$\lambda-1,\lambda-2,\lambda-3,\lambda-4,\lambda-5$，试求$\lambda I-A$的不变因子组，各阶行列式因子及$A$的最小多项式，并证明矩阵$A$可对角化。（12 分）

六、证明，若A为正规矩阵，则$A^+A=AA^+$，$(A^n)^+=(A^+)^n$其中n为正整数。（12 分）

OK 七、设$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求$A$的谱分解。（15 分）

OK 八、设$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，计算$e^{At}$。（15 分）

矩阵理论试题（1997） P21答案

班级__________ 姓名__________

一、给定$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，规定义线性变换：

$$T: C^{2\times2}\to C^{2\times2}$$
$$X\mapsto PX$$

取$C^{2\times2}$中的基底：$B_1=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$，

$$B_2=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right\}$$

1、求T关于基底B_1的矩阵表示A；

OK 2、设X在基底B_1下的坐标为$(1,2,1,1)^T$，求X在基底B_2下的坐标。

$B_2=B_1P \to P\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$ $X=B_1\alpha_1=B_2\alpha_2=B_1P\alpha_2$

$\alpha_1=P\alpha_2$, $\alpha_2=P^{-1}\alpha_1$

$=P^{-1}(1,2,1,1)^T$

Dolphin

OK 1、设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$，试求 $f(A)=2A^4-12A^3+19A^2-29A+37I$，其中 I 二阶单位矩阵。

OK 用盖氏圆盘定理估计矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -0.5 & 0.5 & 0\\ -0.5 & 1.5 & i & 0\\ 0 & -0.5i & 5 & 0.5i\\ -1 & 0 & 0 & 5i\end{bmatrix}$$

的特征值分布的范围，并在复平面上作出示意图。

OK 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$ 试求 A 的谱分解式。

OK 设 $t\in R$，$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$ 试求 ~~A的谱分解式~~ e^{At}

OK 求方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=1\\ -x_1+2x_2=2\end{cases}$ 的最小范数解。

六、设 T 是 R^3 中的线性变换，$\forall x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^T\in R^3$，$Tx=(0,\xi_1,\xi_2)^T$，分别求 $R(T^2)$、$N(T^2)$ 的基底和维数。

七、设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为 n 维线性空间 V 的一组基底。

1．试证下列向量组，$u_1=x_1$，$u_2=x_1+x_2$，$\cdots$，$u_k=x_1+x_2+\cdots+x_k$，$\cdots$，$u_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$ 也是 V 的一组基底；

2．求由基底 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 到基底 $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 的过渡矩阵。

3．试问 P 是否可对角化，为什么？

八、设 $A\in C^{m\times n}$，证明：　$A^{H}A=I_n$

1．$A^{+}A=I_n \Leftrightarrow \operatorname{rank} A=n$。 $\Rightarrow$ √ $\Leftarrow$

2．$AA^{+}=I_m \Leftrightarrow \operatorname{rank} A=m$

九、证明：幂等的正规矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 必为 Hermite 矩阵（即 $A^H=A$）

十、（仅 A 班做此题，B 班不做）

设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，$W\subset C$ 为 C 的子空间，试证若 W 为 A 的不变子空间，则 $W^{\perp}$ 也是 A^H 的不变子空间。

十一、（仅 B 班做此题，A 班不做）

设 X 为 R 上的线性空间，$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为 X 的一组基底，试在 X 下定义一种内积，使 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 在这样定义的内积之下成为一组标准正交基底。

矩阵理论试题（2000）

班级__________　　姓名__________

Dolphin

13

OK 画出矩阵 $A=\begin{bmatrix} 7-2i & i & 0.5i & 0 \\ 0.6+0.8i & 4+1.5i & 0.25 & -0.125 \\ 0 & 1-0.5i & 1+4i & 1 \\ i & 0 & -2 & -4+3i \end{bmatrix}$ 的所有盖氏圆盘，并问 A 有几个实特征根几个虚特征根。

二、设 V 为数域 F 上的线性空间，试严格由线性空间的定义推出：

若 $x\in V$，且 $x+x=x$，则 $x=\theta$（θ 为 V 中的零向量）。

√ 三、给定矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$，$R^2$ 空间中的二元函数 $(x|y)$ 定义为 $(x|y)=y^T Ax$。

1、试证：$(x|y)$ 为 R^2 上的内积。

2、按 1 中的内积 $(\cdot|\cdot)$，$\left(R^2,(\cdot|\cdot)\right)$ 构成内积空间，试由 R^2 的自然基底 $e_1=(0,1)^T$ 和 $e_2=(1,0)^T$ 用 $G-S$ 过程求出标准正交基底。

√ 四、设 X 为复数域上的 4 维线性空间，给定 X 的基底 $B_X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$T\in L(x,x)$，

T 在 B_X 下的矩阵表示为 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，求

1、T 的特征值及特征空间；

2、$R(T)$ 和 $N(T)$ 的维数；

3、判断 T 是否可对角化。

五、给定 $A=\begin{bmatrix} 0 & i & 2\sqrt{2} \\ -i & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，求 A 的谱分解，并求 $Ax=b$ 的最小范数最小乘解。

若 $x\in W$ 有 $Ax\in W$

六、设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，W 为 $\left(C^n,(\cdot|\cdot)\right)$，试证若 W 为 A 的不变子空间，则 $W^\perp$ 也为 A 的不变子空间，其中内积 $(\cdot|\cdot)$ 取 C^n 空间的标准内积。

七、设 $A\in C^{m\times n}$，$P\in C_m^{m\times m}$，$Q\in C_n^{n\times n}$，$B\in C^{m\times n}$ 且 $PAQ=B$，证明：

$A\{1,2\}=\{G\mid G=QB^{(1,2)}P,\ B^{(1,2)}\in B\{1,2\}\}$

OK 设 n 阶方阵 $A=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，计算矩阵函数 e^{At} 的值。

P13

矩阵理论期终试题 （2000 年秋）

姓名________ 学号_________

一、画出矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 7-2i & i & \frac{i}{2} & 0 \\ \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i & 4+\frac{3}{2}i & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1-\frac{1}{2}i & 1+4i & 1 \\ i & 0 & -2 & -4+3i \end{bmatrix}$$

的所有盖氏圆盘，并问 A 有几个实特征根？有几个虚特征根？

二、设 V 为数域 F 上的线性空间，试严格由线性空间的定义推出：若 $x\in V$,且 $x+x=x$，则 $x=\theta$，（θ为 V 的零向量）。

三、给定矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$，$R^2$ 空间中的二元函数$(x\,|\,y)$定义为$(x\,|\,y)=y^TAx$

1° 试证$(x\,|\,y)$为 R^2 上的内积

2° 按 1°中给定的内积$(\cdot\,|\,\cdot)$，$(R^2,(\cdot\,|\,\cdot))$构成一个内积空间，试由 R^2 的自然基底 $e_1=(1,0)^T$，$e_2=(0,1)^T$ 用 G－S 过程求出标准正交基底。 $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

四、设 X 为复数域 C 上的 4 维线性空间，给定 X 的基底 $B_X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$T\in L(X,X)$，T 在 B_X之下的矩阵表示为

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

求：1° T 的特征值及特征子空间 $\lambda_{1,2,3,4}=1$

2° 求 R(T)、N(T)的基底与维数 R(T)维 ∵ 有 $rank(A)=4$ $\dim R(T)=4$ $\dim N(T)=0$

3° 判断 T 是否可对角化

不可对角化

五、给定

$$A=\begin{bmatrix}0 & i & 2\sqrt{2}\\ -i & 0 & 0\\ 2\sqrt{2} & 0 & 0\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

$\lambda_1=0$ $\lambda_2=3$ $\lambda_3=-3$

$P_1=\frac{(A-3I)(A+3I)}{(-9)}$ $P_2=\frac{A(A+3I)}{18}$

$P_3=\frac{-(A)(A-3I)}{18}$

$A=\lambda_1P_1+\lambda_2P_2+\lambda_3P_3$

2000 a)

99年试题

答案在20页 P20

研究生《矩阵论》试题

班级 [redacted] 姓名 [redacted] 成绩______

一、给定 $P=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$，现定义线性变换

$$T: C^{2\times2}\longrightarrow C^{2\times2}$$
$$X\longmapsto PX$$

求 $C^{2\times2}$ 中的基底 $\mathscr{B}_1=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$

$$\mathscr{B}_2=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$$

1. 求 T 关于基底 $\mathscr{B}_1$ 的矩阵表示 A；
2. 设 X 在基底 $\mathscr{B}_1$ 下的坐标为 $(1,2,1,1)^T$，求 X 在基底 $\mathscr{B}_2$ 下的坐标。

1. 设 $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&5\end{bmatrix}$，试求 $f(A)=2A^4-12A^3+19A^2-29A+37I$，其中 I 为二阶单位矩阵。

用盖尔斯果林圆盘定理估计矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}&i&0\\0&-\frac{i}{2}&5&\frac{i}{2}\\-1&0&0&5i\end{bmatrix}$$

的特征值的分布范围，并在复平面上作出示意图。

设

$$A=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{bmatrix},\quad |\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2,&-2,&-1\\-1,&\lambda-3,&-1\\-1,&-2,&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2,&-2,&-1\\-1,&\lambda-3,&-1\\0,&1-\lambda,&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}0&(\lambda-2)(\lambda-3)-2,&1-\lambda\\-1&\lambda-3&-1\\0&1-\lambda&\lambda-1\end{vmatrix}$$

试求 A 的谱分解式。

设 $t\in R$，

$$A=\begin{bmatrix}4&0&1\\2&3&2\\1&0&4\end{bmatrix},$$

$= (\lambda-1)\{[(\lambda-2)(\lambda-3)-2]-(1-\lambda)\}$

$=\cancel{\lambda^3-\ldots-6\quad\ldots\lambda-1}$

试求矩阵函数 e^{At} 的有限形式。

求方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=1\\-x_1+2x_3=2\end{cases}$$

$=\lambda^3-7\lambda^2+11\lambda-5$

$(\lambda-5)(\lambda-1)^2$

$\lambda_{1,2}=1$ $Ax=b$ $A\{1,4\}$

Dolphin

的最小范数解。

六、设 T 是 R^3 中的线性变换，$\forall x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^T\in R^3$，$Tx=(0,\xi_1,\xi_2)^T$，分别求 $R(T^2)$ 和 $N(T^2)$ 的基底和维数。

七、设 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为 n 维线性空间 V 的一组基底，

1. 试证下列向量组 $u_1=x_1,u_2=x_1+x_2,\cdots,u_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$ 也是 V 的一组基底；
2. 求由基底 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 到基底 $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ 的过渡矩阵 P；
3. 试问 P 是否可对角化，为什么？

八、设 $A\in C^{m\times n}$，证明

1. $A^-A=I_n\Leftrightarrow \mathrm{rank}A=n$；
2. $AA^-=I_m\Leftrightarrow \mathrm{rank}A=m$。

九、证明：特征值为实数的正规矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 必为 Hermite 矩阵(即 $A^H=A$)。

十、(仅 A 班做此题，B 班不做)

设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，$W\subset C^n$ 为 C^n 的子空间，试证：若 W 为 A 的不变子空间，则 W 也是 A^H 的不变子空间。

十一、(仅 B 班做此题，A 班不做)

设 X 为 R 上的线性空间，$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为 X 的一组基底，试在 X 中定义一种内积，使 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 在这样定义的内积之下，成为 X 的一组标准正交基底。

六 设基 $\{e_1,e_2,e_3\}$

$T^2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(0,0,\xi_1)$

$T^2e_1=(0,0,1)=0e_1+0e_2+e_3$

$T^2e_2=(0,0,0)=0e_1+0e_2+0e_3$

$T^2e_3=(0,0,0)=0e_1+0e_2+0e_3$

$\therefore$ 矩阵 $A^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

$R(T^2)=\mathrm{span}\,R(A^2)$ $R(A^2)=\mathrm{span}\{(0,0,1)\}$ $\dim=1$

$A^2x=0\Rightarrow x_1=0$

$N(T^2)=\mathrm{span}\{(0,1,0)^T,(0,0,1)\}$ $\dim=2$

Dolphin

矩阵论期终试题　　（2002 年秋季）

姓名__________ 学号__________ 成绩__________

一、选择填空，在下列各题中选择一个正确的答案填入空白处。

1．设 V 是数域 F 上的线性空间，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 V 中的一组向量，如果存在一组____B____的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$，使得 $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots\alpha_n x_n=0$，则称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为空间 V 的线性相关向量组。

A．不全为零　　　　　　B．不全为零的 F 中

C．至少含有一个零的 F 中　　D．至多有一个不为零的 F 中

2．设 V 是数域 F 上的线性空间，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 V 中的向量，如果 $n>\dim V$，则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 必____C____。

A．线性无关　B．全为零向量　C．线性相关　D．有一个为零向量

3．n 维线性空间中的向量____B____有 n 个分量。

A．不一定　　B．一定　　C．肯定没　　D．A，B，C 都不对

4．设 X 是数域 F 上的线性空间，S 是 X 的真子空间，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 X 的基底，则 S 的基底____B____。

A．一定是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中的某些向量

B．不一定是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的子集

C．一定不是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的子集

D．中每个向量均必不可由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性表出

5．设 V 为数域 F 上的线性空间，$B_V=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为 V 的一个基底，$B\in F_r^{n\times r}$，$r<n$，如果 V 中向量 $y_1, y_2, \cdots, y_r$ 满足 $[y_1, y_2, \cdots, y_r]=[x_1, x_2, \cdots, x_n]B$，则____A____。

A．$y_1, y_2, \cdots, y_r$ 线性相关　　B．$y_1, y_2, \cdots, y_r$ 线性无关

C．$[y_1, y_2, \cdots, y_r]$ 是列满秩的 $F^{n\times r}$ 中的矩阵

D．$[y_1, y_2, \cdots, y_r]$ 是行满秩的 $F^{r\times n}$ 中的矩阵

6．设 $T\in L(X, X)$，X 为数域 F 上的线性空间，B_X 为 X 中给定的基底，则 T 在基底 B_X 之下的矩阵表示是____A____。

Delphin

1

A．唯一的　B．不唯一的　C．任意的　D．可逆的

7. $N(T)=\{x\in X \mid Tx=0\}$

$N(A)=\{\alpha\in F \mid A\alpha=0\}$

$x=B_x\alpha$

$Tx=TB_x\alpha=0$

$=B_xA\alpha=0$

满秩

$\therefore A\alpha=0$

$\therefore N(A)$与$N(T)$同构

$\therefore$ 维数相等

7．设 X 为数域 F 上的线性空间，$T\in L(X,X)$，又设 A 是 T 在基底 B_X 之下的矩阵表示，则__D__。

A．$dimR(T)+dimN(T)=dimX$，且 $X=R(T)+N(T)$。

B．$dimR(A)+dimN(A)=dimX$，且 X 是 $R(T)+N(T)$ 的补空间。

C．$dimR(A)+dimN(A)=dimX$，且 $R(A)$ 与 $N(A)$ 均为 X 的子空间。

D．$dimR(A)+dimN(A)=dimX$，且 $R(T)$ 与 $N(T)$ 均为 T 的不变子空间。

8．设 V 为数域 F 上的线性空间，S_1、S_2 均为 V 的子空间，又设 $dimS_1=m$，$dimS_2=n$，$dim(S_1\cap S_2)=k$，则 $dim(S_1+S_2)=$__D__。

A．$m+n$　B．$m-n+k$　C．$m-n-k$　D．$m+n-k$

9．设 $A\in\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}$，则 $A^{100}=$__B__。

$m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-4)$

A．$\begin{pmatrix}100&2^{100}\\0&4^{100}\end{pmatrix}$　B．$\begin{pmatrix}1&\frac{2(4^{100}-1)}{3}\\0&4^{100}\end{pmatrix}$　C．$\begin{pmatrix}1&\frac{4^{100}-1}{3}\\0&4^{100}\end{pmatrix}$

D．A、B、C 全不对。　$A^{100}=\beta_1 I+\beta_2 A$

10．设 $A\in C^{7\times7}$，而 $\lambda I-A$ 的初等因子组为 $\lambda-1$，$\lambda-1$，$(\lambda-2)^3$，$(\lambda-3)^2$，则 A 的若当标准形为__C__。

$\varphi_7=(\lambda-1)(\lambda-2)^3(\lambda-3)^2$　$\varphi_6=(\lambda-1)$　$\varphi_5=\cdots=\varphi_1=1$

A．$J=\begin{bmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&J_3&\\&&&J_4\end{bmatrix}$，其中 $J_1=[1]$，$J_2=[1]$，$J_3=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$，$J_4=[3]$。

B．$J=\begin{bmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&J_3&\\&&&J_4\end{bmatrix}$，其中 $J_1=[1]$，$J_2=[1]$，$J_3=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$，$J_4=[3]$。

C．$J=\begin{bmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&J_3&\\&&&J_4\end{bmatrix}$，其中 $J_1=[1]$，$J_2=[1]$，$J_3=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$，

Dolphin

$$\begin{cases} 4x_1^2+2x_1x_2+x_2^2=1 \\ y_1+y_2=0 \end{cases}$$

$$J_4=\begin{bmatrix}3&1\\0&3\end{bmatrix}$$

D. $J=\begin{bmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&J_3&\\&&&J_4\end{bmatrix}$，其中 $J_1=[1]$，$J_2=[1]$，$J_3=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$，

$$J_4=\begin{bmatrix}1&3\\0&1\end{bmatrix}$$

略 设 $A=\begin{bmatrix}9&1&-2&1\\0&8&1&1\\-1&0&4&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}$

$|z-9|\le 4$

$|z-8|\le 2$

1）画出 A 的所有盖氏圆盘，并指出 A 的特征值在各盖氏圆盘中的分布情况。

2）说明 A 至少有两个实特征值。

三、已知 $A=\begin{bmatrix}4&1\\1&1\end{bmatrix}$，并且定义 R^2 上的函数为 $(x|y)=y^TAx$，试证 $(x|y)$ 为 R^2 上的一个内积，进而求内积空间 $(R^2,(\cdot|\cdot))$ 的一个标准正交基底。

四、设 P 是 C^n 中的正交投影算子，证明对 C^n 中任意向量 X 有 $(PX|X)=\|PX\|^2$，其中 $(\cdot|\cdot)$ 为 C^n 中标准内积，范数 $\|\cdot\|$ 是由此内积诱导出的范数。

五、设 $T\in L(R^3,R^3)$，且对任意 $x\in R^3$，若 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^T$，则 $Tx=(4\xi_1+\xi_3,2\xi_1+3\xi_2+2\xi_3,\xi_1+4\xi_3)^T$，试求① $R(T)$，$N(T)$ 及其基底；②求 $dimR(T)$ 和 $dimN(T)$；③T 是否可对角化？并说明理由。

略 设 $A=\begin{bmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{bmatrix}$，求 A 的谱分解式。

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-4&-6&0\\3&\lambda+5&0\\3&6&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

$$\varphi_1=\frac{\lambda-1}{-3}\quad Z_1=\frac{A-I}{-3}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}3&6&0\\-3&-6&0\\-3&-6&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&2&0\\1&2&0\end{bmatrix}$$

$$\varphi_2=\frac{\lambda+2}{3}\quad Z_2=\frac{1}{3}(A+2I)=\begin{bmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\-1&-2&1\end{bmatrix}$$

$$A=-2Z_1+Z_2=-2\begin{bmatrix}-1&-2&0\\1&2&0\\1&2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\-1&-2&1\end{bmatrix}$$

Dolphin

3

七、已知 $A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，试求 $\sin At$。

八、给定线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+x_2-x_3=1\\ 2x_1+2x_2-2x_3=2\\ 2x_1+2x_2-2x_3=1\end{cases}$$

试求其最小二乘最小范数解。

九、设 $A=A^H$，试证 i) $A^+A=AA^+$；ii) $A^+A^2=A^2A^+$。

$A^+A=(A^+A)^H=A^H(A^+)^H=A(A^+)^H=AA^+AA^+=AA^+\ldots$

十、如果 A 是一个正规矩阵，W 是 A 的一个不变子空间，试证 W 的正交补 $W^\perp$ 也是 A 的不变子空间（限用谱分解理论证明）。

$A^+A^2=A^+AA=A^+A^HA^H=(A^+A)^HA^H=A^HA^{+H}A^H=A(AA^+)^H=AA^+\ldots$

十一、设 $A\in C^{n\times n}$，且 $C^n=R(A)+N(A)$，证明：$rankA^2=rankA$ 的充要条件是 $C^n=R(A)\dotplus N(A)$。

$\Rightarrow$：$rank\,A^2=rank\,A=k$ $\Rightarrow \dim R(A^2)=\dim R(A)$

$\because C^n=R(A)+N(A)$ $\therefore \dim N(A)=\dim N(A^2)=n-k$

$\forall x\in N(A)$，$Ax=0\rightarrow A\cdot Ax=0\rightarrow A^2x=0\rightarrow x\in N(A^2)$

$\therefore N(A)\subset N(A^2)$ 又 $\dim N(A)=\dim N(A^2)$ $\Rightarrow N(A)=N(A^2)$.

设 $x\in R(A)\cap N(A)$ $\therefore Ay=x$，$Ax=0$

$\therefore AAy=Ax=0$

$\therefore y\in N(A^2)$

$\therefore N(A^2)=N(A)$

$\therefore y\in N(A)$

$\therefore Ay=0$

$\therefore x=0$

$\therefore R(A)\cap N(A)=0$

$\therefore C^n=R(A)\dotplus N(A)$.

$\Leftarrow$：设 $x\in N(A)$

$\therefore Ax=0$

$\therefore AAx=0$

$\therefore x\in N(A^2)$

$\therefore N(A)\subset N(A^2)$

设 $y\in N(A^2)$

$\therefore A^2y=0$

$AAy=0\Rightarrow Ay\in N(A)$

又 $Ay\in R(A)$

因 $C^n=R(A)\dotplus N(A)$

$R(A)\cap N(A)=0$

$\therefore Ay=0$

$\therefore y\in N(A)$

$\therefore N(A^2)\subset N(A)$

$\therefore N(A^2)=N(A)$.

$\therefore N(A)=n-rank(A)$

$\therefore N(A^2)=n-rank(A^2)$

$\therefore rank(A)=rank(A^2)$.

Dolphin

矩阵论引论试题 2004 (B)

姓名 刘国栋

一、填空

1、设 $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&3&1\\1&1&10\end{bmatrix}$，则 A 的全部盖氏圆盘分别为 $D_1=\{z\,|\,|z|\le 2\}$ $D_2=\{z\,|\,|z-3|\le 2\}$ $D_3=\{z\,|\,|z-$ ；

且 A 的全部特征值都落在复平面上的 $D_1\cup D_2\cup D_3$ 上，又 A 至少有 3 个实特征值。

2、设 $W_1=\left\{\begin{bmatrix}a&0\\a&b\end{bmatrix}\middle|\,a,b\in R\right\}$

$W_2=\left\{\begin{bmatrix}x&0\\0&y\end{bmatrix}\middle|\,x,y\in R\right\}$

则 W_1+W_2 的一组基底为 ______，维数是 3 ；

$W_1\cap W_2$ 的一组基底为 $\left\{\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}$，维数是 1 。

3、设 $A=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$

则 $R(A^2)$ 的一组基底为 ______，维数是 0 ；

$N(A^2)$ 的一组基底为 ______，维数是 4 。

4、矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&2&-1\\0&0&2\end{bmatrix}$ 的 Jordan 标准形是 $\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$，

最小多项式是 $(\lambda-2)^3$ 。

5、已知 $\alpha_1=(1,1,1,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1,0)^T$，$W=span\{\alpha_1,\alpha_2\}$

则 $W^\perp=span\{$ ______ $\}$，其 $W^\perp$ 的一组标准正交基底为 ______ 。

6、设 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，则 A 的奇异值为 $\sqrt{3}$, 1, 0 。

7、已知 $A=\begin{bmatrix}1&2&-1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix}$，则 $A^{(1,2)}=$ ______ 。

8、已知 $A=\begin{bmatrix}0.1&0.3\\0.7&0.6\end{bmatrix}$，判断矩阵幂级数 $\sum_{k=1}^{\infty}A^k$ 收敛的根据是 $\rho(A)<1$，

矩阵幂级数的和是 ______（写出具体矩阵）

$\|A\|_1=0.9<1$

$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}z^k=\frac{z}{1-z}$

$f(A)=\sum_{k=1}^{\infty}A^k=(I-A)^{-1}A$

$\begin{bmatrix}5/3&2\\14/3&6\end{bmatrix}$

奇异值分解 $A=V\begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}U^H$

王亚超 ① 求 A^HA 的特征向量 λ_i，$\delta_i=\sqrt{\lambda_i}$

$U=(U_1,U_2)$ 为 λ_i 和 0 对应的特征向量(标准化)

② $V_1=AU_1S_r^{-1}$

③ $V_2=N(A^H)$

④ $A=V\begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}U^H$

极分值 $A=V_1\begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}U_1^H$

$=V_1\begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}V_1^H\cdot(V_1U_1^H)$

研究生矩阵理论试卷 (2005, 01)

$E_1=\begin{pmatrix} \frac{25}{45} & -\frac{10}{45} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{10}{45} & \frac{40}{45} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{5}{9}\end{pmatrix}$　$E_2=\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}$

姓名　　学号 $|\lambda I-A|=0$　　院系　$\boxed{\text{最小多项式}}$

根与系数关系 $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=tr(A)$，$\prod_{i=1}^{k}\lambda_i=|A|$

[redacted]

一. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ 求：(1) A的最小多项式，(2) A的若当标准形.

$m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$

初等因子组：$\lambda-1$，$(\lambda+1)^2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

谱分解

可对角矩阵

求A的[redacted]值 $\lambda_i\ (i=1,\cdots,k)$；

求 $E(\lambda_i)$ 的[redacted]$X_i\ (i=1,\cdots,k)$

$E_i=X_i\cdot X_i^H\ (i=1,\cdots,k)$

$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iE_i$

$A^H A$ 一定可对角化　$\lambda_1=5$，$\lambda_2=-4$.　$\frac{\varphi_i(A)}{\varphi_i(\lambda_i)}$　$\varphi_1=\lambda+4$，$\varphi_2=\lambda-5$　$\therefore\ 5\,\frac{A+4I}{9}=\frac{5}{9}(\cdots)$

二. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & 4 & -2 \\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix}$ 求 A 的谱分解.　没有特征向量正交　$\frac{A-5I}{-9}$

正规

$-4\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4\end{pmatrix}$　$\cancel{+5}$　$\begin{pmatrix} 1 & -2 & \\ -2 & 8 & -2 \\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$

单纯矩阵

求A的相异特征值 $\lambda_i\ (i=1,\cdots,k)$；

求 $E(\lambda_i)$ 的一组基，$X_i=(x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ik})$

$Y=X^{-1}=\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_k\end{pmatrix}$

$E_i=X_iY_i\ (i=1,2,\cdots,k)$

$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_iE_i$

$E_i=\frac{\varphi_i(A)}{\varphi_i(\lambda_i)}\quad i=1,\cdots,k$　最简单

$\varphi_i(\lambda)=\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{k}(\lambda-\lambda_l)$

矩阵函数

① 单纯阵 $A=P\,diag\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}P^{-1}$　$e^{At}=P\cdot f(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)P^{-1}$

② 谱分解 $A=\sum\lambda_iE_i$　$e^{At}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A^n}{n!}=\sum e^{\lambda_i t}E_i$

三. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求 e^{At}.

$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda(\lambda-2) & & \\ & & \lambda-2\end{vmatrix}$　$\therefore m_A(\lambda)=\lambda(\lambda-2)$　$A^H A$，正规阵.　$diag\{1,1,\lambda(\lambda-2),\lambda(\lambda-2)\}$

$\frac{\varphi_i(A)}{\varphi_i(\lambda_i)}$　$\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=\lambda_4=2$ 可对角化

$\begin{pmatrix} \frac{1+e^{2t}}{2} & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & t\cdot e^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t}\end{pmatrix}$

③ Jordan 标准形 $A=PJP^{-1}$

$e^{At}=P\cdot J_i(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)P^{-1}$

④ 谱上一致多项式 $p(\lambda)=p_0+p_1\lambda$　$\therefore 3\cdot e^{A}+A\cdot e^{A}$

一. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 8 & 2\end{pmatrix}$ 求：(1) e^A，(2) $f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(3A^n+A^{n+1})$，(3) $\sin(At)$

$\lambda_1=6$，$\lambda_2=-2$　$\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\frac{\varphi_i(A)}{\varphi_i(\lambda_i)}$

(1) $e^A=P\begin{pmatrix} e^6 & 0 \\ 0 & e^{-2}\end{pmatrix}P^{-1}$

(2) $e^A=\begin{pmatrix} \frac{e^{6}+e^{-2}}{2} & \frac{e^6-e^{-2}}{4} \\ e^6-e^{-2} & \frac{e^{6}+e^{-2}}{2}\end{pmatrix}$ 不存在

(3) $\sin(At)=P\begin{pmatrix} \sin 6t & 0 \\ 0 & \sin(-2t)\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sin 6t-\frac{1}{2}\sin 2t & \\ \sin 6t+\sin 2t & \frac{1}{2}\sin\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2\cdot e^6-7\cdot e^{-2} & 5\cdot\frac{e^6-e^{-2}}{4} \\ 5\cdot e^6+3\cdot e^{-2} & 2\cdot e^6\end{pmatrix}$

奇异值 $A=V\begin{pmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}U^H$

① $A=FG$

$A^+=G^H(G\cdot G^H)^{-1}\cdot(F^HF)^{-1}F^H$

$=G^H(F^HAG^H)^{-1}F^H$

四. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$ 求A的广义逆 A^+ 与奇异值分解.

$A^+=U_1\begin{pmatrix} S_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}V^H$　$A^+=U\begin{pmatrix} S_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}V^H$ 或 $U_1(\cdots)U_1^HA^H$

$A=FG=\begin{pmatrix} 1 \\ -1\end{pmatrix}_{2\times1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0\end{pmatrix}_{1\times3}$　$F=\begin{pmatrix} 1 \\ -1\end{pmatrix}_{2\times1}$　$G=(1\ 2\ 0)_{1\times3}$

$A^+=U_1\Lambda_r^{-1}U_1^HA^H$　$\Lambda_r^{-1}=diag\{\frac{1}{\lambda_1},\cdots,\frac{1}{\lambda_r}\}$

$A^+=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda_i}\frac{\varphi_i(A^HA)}{\varphi_i(\lambda_i)}A^H$

$A^+=G^H(G^HG)^{-1}(F^HF)^{-1}F^H=G^H\cdot(F^HAG^H)^{-1}F^H=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\lambda_i}\frac{\varphi_i(A^HA)}{\varphi_i(\lambda_i)}A^H$

$$A^HA=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$$

$\lambda_1=1,\ \lambda_2=3$

五. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$，(1) 求A的奇异值分解，(2) 求A的广义逆 A^+，(3) 求方程 $AX=b$ 极小范数解，或极小最小二乘解。

$$A^+=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

列满秩 $A^+=(A^HA)^{-1}A^H$

$AA^+b=b$　极小范数解　$A^+b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$x=A^+b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

六. 设A是n阶方阵，$B=\begin{pmatrix}A\\A\end{pmatrix}$，证明 $B^+=\frac{1}{2}(A^+,\ A^+)$.

BB^+B　B^+BB^+　$(BB^+)^H$　$(B^+B)^H$

七. 设 $A=(a_{ij})$ 是n阶方阵，定义 $\|A\|_G=n\cdot\max_{i,j}|a_{ij}|$，验证 $\|A\|_G$ 是 $R^{n\times n}$ 中与向量2范数相容的矩阵范数

非负性　齐次性　三角不等式　次乘性

③ 与2范数相容　$\|AX\|_2\le\|A\|_G\|X\|_2$

证明：(1) 若n阶方阵A适合 $A^k=I$，k是一正整数，则A必可对角化。

(2) 若n阶方阵 $A\neq O$，且有整数 $k\ge 2$ 使得 $A^k=O$，则A不可对角化。反证

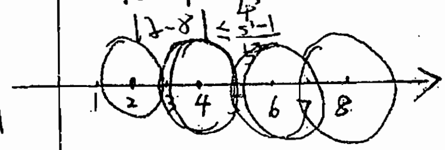
八. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1/2&1/2^2&1/2^3\\2/3&4&2/3^2&2/3^3\\3/4&3/4^2&6&3/4^3\\4/5&4/5^2&4/5^3&8\end{pmatrix}$，用 Gerschgorin 定理讨论A的实特征值个数，并说明A可否对角化。可

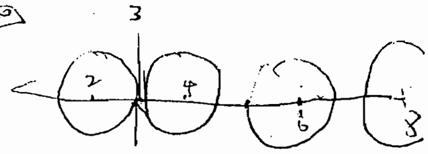
$G_1\ \{x\in C\mid |x-2|<\frac{7}{8}\}$

$|x-4|<\frac{38}{27}$

$|x-6|<\frac{147}{64}$

$|x-8|<\frac{119}{125}$





2007－2008 学年 第一学期期末试卷

学号__________　　　　姓名___________　　　　成绩__________

考试日期：2008 年 1 月 21 日

考试科目：《 矩阵理论 》(A)

注意事项：1、考试 8 个题目共 7 页

2、考试时间 120 分钟

题目：

一、(本题 18 分)

二、(本题 10 分)

三、(本题 20 分)

四、(本题 5 分)

五、(本题 5 分)

六、(本题 15 分)

七、(本题 15 分)

八、(本题 12 分)

姓名：　　　　　　　　　　　学号：

1. （18 分）填空

(1) 设 $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\\ 0 & \frac{2}{3}\end{pmatrix}$，则 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k=($ $\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ $)$

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $e^{tA}=($ $\begin{pmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2}\\ 0 & 1 & t\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $)$

(3) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a & 1 & 2\\ 0 & b & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$A\otimes B$ 的特征值为(0, a, b, 0, 2a, 2b)

迹 $tr(A\otimes B)=($ 3a+3b $)$

(4) $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

则 $\|A\|_\infty=($ 1 $)$，$\|Ax\|_1=($ $\frac{47}{20}$ $)$，谱半径 ρ(A) 范围是($\frac{3}{5}<\rho(A)<1$)

(5) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$，则 $A^+=($ $\frac{1}{22}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\\ -3 & 3\end{pmatrix}$ $)$

(6) $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，则 $Ae^{\frac{\pi}{2}A}=($ $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $)$

2. （10 分）设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$，(1)求 A 的满秩分解；(2)求 A^+

解 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$

$A^+=C^+B^+=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}[CC^H]^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$

$=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5}\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{5}\end{pmatrix}$

3.（20分） 设

$$A=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&3&1\\1&2&2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&1&2\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}A&\\&B\end{pmatrix}_{6\times 6}$$

(1) 分别求 A, B, D 的最小多项式， 写出 D 的 Jordan 标准形.

$=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(1\ 2\ 1)$ (2) 分别判断 A, B, D 能否对角化；计算行列式: $\left|e^{A}\otimes e^{B}\right|$.

(3) f(x)是解析函数，写出 f(A)与 f(B)的谱分解或广义谱分解公式，

$A-I=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}$ (4) 求 $\cos(\frac{\pi}{2}A)$ 与 $\cos(\frac{\pi}{2}B)$

(1) ~~(A)~~ $\sigma(A)=\{5,1,1\}$

$(A-5I)(A-I)=\begin{pmatrix}-3&2&1\\1&-2&1\\1&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}=0$

$\therefore m(x)=(x-5)(x-1)$

$\sigma(B)=\{2,2,2\}$

$(A-2I)(A-2I)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=0$

$\therefore m(x)=(x-2)^2$

$\sigma(D)=\{5,1,1,2,2,2\}$ $\quad m(x)=(x-5)(x-1)(x-2)^2$

$(A-I)=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}$ $\quad r(A-I)=1$

$(A-I)(A-I)=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&8&4\\4&8&4\\4&8&4\end{pmatrix}=1$

$\begin{matrix}3>2>2\\1>0\\1\end{matrix}$ 2个1阶阵 $\quad \begin{matrix}3>2>1\\1>0>1\\0\end{matrix}$

$$J=\begin{pmatrix}(5)&&&&\\&(1)&&&\\&&(1)&&\\&&&(2)&\\&&&&\begin{pmatrix}2&1\\&2\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

(2) A单阵 可对角化 B非单 不可对角化

D不可对角化

$\sigma(e^A\otimes e^B)=\{\lambda_i\lambda_j\}$

$|e^A\otimes e^B|=\prod_{i=1}^{9}\lambda_i$

$\sigma(e^A)=\{e^5\ e\ e\}$ $\quad \sigma(e^B)=\{e^2\ e^2\ e^2\}$

$\sigma(e^A\otimes e^B)=\{e^7\ e^7\ e^7\ e^3\ e^3\ e^3\ e^3\ e^3\ e^3\}$

$|e^A\otimes e^B|=e^{39}$

(3)

$f(A)=f(5)G_1+f(1)G_2$

$G_1=\frac{A-I}{5-1}=\frac{\begin{pmatrix}1&2&1\\1&2&1\\1&2&1\end{pmatrix}}{4}$ $\quad G_2=\frac{A-5I}{1-5}=\frac{\begin{pmatrix}-3&2&1\\1&-2&1\\1&2&-3\end{pmatrix}}{-4}$

$f(B)=f(2)G_1+f'(2)G_2$

令 $f(x)=1$ $\quad G_1=I$

令 $f(x)=x-2$ $\quad G_2=A-2I$

(4)

$\cos(\frac{\pi}{2}A)=f(5)G_1+f(1)G_2=0$

$\cos(\frac{\pi}{2}B)=f(2)G_1+f'(2)G_2=-I$

4.（5分）证明

（1）若 A 是反对称矩阵，求 $\det(e^{\sqrt{-1}A})$

（2）若 A 是反对称实矩阵，证明 e^{A} 为酉阵

$A^H=-A$

$\det(e^{iA})=\sqrt{e^{iA}(e^{iA})^H}$

$=e^{iA}$

$A^H=-A$

$e^A(e^A)^H=e^Ae^{-A}=I$

$(e^A)^He^A=e^{-A}e^A=I$

$\therefore e^A$ 为酉阵

5.（5分）设 n 价方阵 **A** 与单位阵 **I**，证明

（1）若 $\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}+2\mathbf{I}=0$，则 **A** 相似于对角阵

（2）若 $\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}+\mathbf{I}=0$ 且 $\mathbf{A}\neq\mathbf{I}$，则 $\mathbf{A}-\mathbf{I}$ 不能相似于对角阵

$(A-2I)(A-I)=0$

$\therefore A$ 有根式

$m(x)=(x-2)(x-1)$

$A\sim\begin{pmatrix}2I_s & \\ & I_t\end{pmatrix}$

$(A-I)^2=0 \quad A-I\neq 0$

$\therefore m(x)=(x-1)^2$ 不是单阵

$\therefore A-I$ 不能相似于对角阵.

6.（15分）设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\2&0\end{pmatrix}$，先叙述奇异值分解公式，并求 **A** 与 $\mathbf{A}^T$ 的奇异值分解

$\sigma(A^TA)=\begin{pmatrix}5&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\{5,1\}$

$\lambda=5$ 时 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\lambda=1$ 时 $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \quad V=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$P=\left(\frac{A\alpha_1}{|A\alpha_1|},\frac{A\alpha_2}{|A\alpha_2|}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&0\\0&1\\\frac{2}{\sqrt5}&0\end{pmatrix}$

$U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&0&\frac{2}{\sqrt5}\\0&1&0\\\frac{2}{\sqrt5}&0&-\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix}$

$\therefore A=U\begin{pmatrix}\sqrt5&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}V^T$

7. (15 分) 设 A 是 n 阶正规矩阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是它的特征值

(1) 分别写出 A， A^+ 及 $(A^H A)$ 的 Schur(许尔)分解公式

(2) 写出 A 的奇异值；　证明，谱半径 $\rho(A)=\|A\|_2$　$\|A\|_2$ 是 A^HA 中最大特征值

(3) 证明，$(A^3)^+ = (A^+)^3$　汜 A√ (2)(3)(4)

(4) 若 $A^H = A^2 = A$，计算 $(A^+ - A) - A(A^+ - I)$

(1) $A = P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}P$

$A^+ = P^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \frac{1}{\lambda_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \frac{1}{\lambda_n}\end{pmatrix}P$

$A^HA = P^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}^2 & & \\ & \sqrt{\lambda_2}^2 & \\ & & \ddots \\ & & & \sqrt{\lambda_n}^2\end{pmatrix}P$

(4) 若 $A^H = A^2 = A$　则 $A^+ = A$

$(A^+ - A) - A(A^+ - I) = (A - A) - A(A - I)$

$= -A^2 + A = A - A = 0$

(2) A 的奇异值为 $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \cdots \sqrt{\lambda_n}$

(3) $A = \lambda_1 G_1 + \cdots + \lambda_n G_n$

$(A^3)^+ = (\lambda_1^3)^+ G_1 + \cdots + (\lambda_n^3)^+ G_n = \frac{G_1}{\lambda_1^3} + \cdots + \frac{G_n}{\lambda_n^3}$

$(A^+)^3 = (\lambda_1^+)^3 G_1 + \cdots + (\lambda_n^+)^3 G_n = \frac{G_1}{\lambda_1^3} + \cdots + \frac{G_n}{\lambda_n^3}$

$\therefore (A^3)^+ = (A^+)^3$

8．（任选 3 个小题，12 分）

（1）设有方程组 $Ax=b$, 证明 $A^+b \perp y$, 其中 $Ay=0$

（2）若定义矩阵 $Y=(y_{ij})$ 的长度为 $\|Y\| = \sqrt{\sum |y_{ij}|^2}$，证明矩阵方程：

$AYB = D$ 的最佳极小二乘解为 $Y = A^+DB^+$

（3）求方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的最佳极小二乘解

$A^+=A^H(AA^H)^+$

（4）证明：若方阵 A，B 无公共特征值，则 $\begin{pmatrix} A & O \\ D & B \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} A & \\ & B \end{pmatrix}$ 相似

$x^H(A^+A)^H = \ldots$

证明:

$x = A^+b$

$(A^+b)^H y = (A^+Ax)^H y = x^H A^+ A y = 0$

$\therefore A^+b \perp y$

(2)

(3)

$Y = A^+DB^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$

(4)

$A \otimes I - I \otimes B^T$

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ D & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} A & 0 \\ D+BX & B \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} I & 0 \\ X & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ AX & B \end{pmatrix}$

$D + BX = AX$

$AX - BX = D$

$(A \otimes I - I \otimes B)\vec{X} = \vec{D}$

参考题(5 分) 设 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $rank(A)=r$, 奇异值分解为

$$A = U\begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^H, \quad \mathrm{S=diag}\{\sigma_1,\cdots,\sigma_r\}, (\sigma_1 > 0,\cdots,\sigma_r > 0)$$

其中U, V分别是m阶与n价酉矩阵．再设

$$U=[\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_m], \mathrm{V}=[\mathrm{v}_1,\cdots,\mathrm{v}_n].$$

（1）证明：$A=\sum_{k=1}^{r}\sigma_k\varepsilon_k \mathrm{v}_k{}^H$

(2) 证明：$\{\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r\}$ 构成值域 **R（A）** 的正交基

1) ②

2009—2010 学年 第一学期末试卷(A)

学号__________ 姓名___________ 成绩__________

考试科目：《 矩阵理论 》（A）

考试日期：2010 年 1 月 14 日

注意事项：1、考试 7 个题目共 8 页

2、考试时间 120 分钟

题目：

一、（本题 39 分）

二、（本题 20 分）

三、（本题 6 分）

四、（本题 9 分）

五、（本题 11 分）

六、（本题 8 分）

七、（本题 7 分）

八、（附加题）

姓名： 学号： A

一. 填空(39 分) (注：I 代表单位阵, A^H 表示 H 转置, det(A) 指行列式)

(1) $e^{-tr(A)}\cdot\det(e^A)=$ 1，$(e^A)^+e^{-A}-e^{-A}(e^A)^{-1}=$ 0

(2)若 $A^2-3A+2I=0$，则 A 有一个无重根零化式为 f(x)= $(x-1)(x-2)$

(3)若 $A=A^2=A^H$，则 $A^+=$ A

(4)若 3 阶阵 $A\neq -I$，且 $A^2+2A+I=0$，则 Jordan 形 $J_A=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$

(5) $A=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a&1\\0&b\end{pmatrix}$，$A\otimes B$ 的特征根为 $3a,3b,3a,3b$

$\mathrm{tr}(A\otimes B)=($ $6a+6b$ $)$

(6) $A=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{4}&\frac{2}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}i\\i\\i\end{bmatrix}$，$i=\sqrt{-1}$，则谱半径

$\rho(A)$ 取值范围是 $\frac{4}{5}<\rho(A)<1$；且 $\|Ax\|_1=$ $\frac{14}{5}$；$\|A\|_\infty=$ 1

(7) $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，则 $e^{tA}=\begin{pmatrix}(\cos t)&-\sin t\\(\sin t)&\cos t\end{pmatrix}$，$e^{\pi A}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$

(8) A=$\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ 则 $Ax=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 的最佳极小二乘解是 $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$；$A^+=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$..

(9)矩阵 A 中各列都可用 B 的列线性表示($R(A)\subset R(B)$)，则有矩阵 P 使 BP= A

(10) n 阶阵 A 的特征根 λ，谱半径 $\rho(A)$ 与范数 $\|A\|$ 的大小关系是 $\rho(A)\leq\|A\|$.

(11) n 阶阵 A (k 是自然数), $\rho(A^k)$, $\rho(A)^k$, $\|A^k\|$, $\|A\|^k$ 之间关系为 $\rho(A^k)=\rho(A)^k\leq\|A^k\|\leq\|A\|^k$

$\lambda(\lambda+1)^2$

$(A+I)(A+I)=0$

(12) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ 的满秩分解为 $\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}$；

(13)设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 R^3 的基，$A\in\mathbf{R}^{3\times3}$ 满足：$A\varepsilon_1=\varepsilon_2, A\varepsilon_2=\varepsilon_3, A\varepsilon_3=2\varepsilon_2-\varepsilon_3$.

则有矩阵 B 使得 $A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\mathbf{B}$，B = $\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&2\\0&1&-1\end{bmatrix}$.

二.(20 分)计算下列各题

1. 设列满(高)阵 $A = A_{m\times n}$ 的 QR 分解为 $A = QR$，$\underset{m\times n}{Q}$ 为次酉阵($Q^H Q = I_n$).

验证：$X = R^{-1}Q^H$ 满足 A^+ 的 4 个条件.

$AXA = QRR^{-1}Q^HQR = QR = A$ $\quad (XA)^H = XA$

$XAX = R^{-1}Q^HQRR^{-1}Q^H = R^{-1}Q^H = X$

$(AX)^H = (QRR^{-1}Q^H)^H = I_n = AX$

2.设 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, (1)求 A^2, A^3，(2)由 $e^{tA} \triangleq I + tA + \frac{(tA)^2}{2} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots$ 直接计算 e^{tA}

$(e^{tA})^+ = e^{-tA} = I - tA + \frac{t^2A^2}{2}$

，并求 $(e^{tA})^+ = e^{-tA}$.

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & -t & 1 \end{bmatrix}$

$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore e^{tA} = I + tA + \frac{(tA)^2}{2} + \frac{(tA)^3}{3!} = I + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{bmatrix}$

3. 设 $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$, 计算：$(I - A)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right)^2$

$\rho(A) = 0.5 < 1$

$\therefore A$ 收敛

$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1}$

$(I-A)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right)^2 = (I-A)(I-A)^{-1}(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

4. 已知 8 阶阵 A 适合：$rank(A-2I) = 4$, $rank(A-2I)^2 = 1$, $(A-2I)^3 = 0$. 求 A 的 Jordan 形 J.

$\lambda = 2$ 时

$8 > 4 > 1$

$4 > 3 > 2$

$1 > 1$

0

1个1阶阵

2个2阶阵

4个块

$J = \begin{pmatrix} (2) & & & \\ & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & & \\ & & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} & \\ & & & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$

5．(1)画出矩阵 A 的盖尔圆盘; (2)说明 A 有 3 个互异特征根．

$$A=\begin{pmatrix}18 & 1 & 2\\ 1 & 9 & 1\\ 1 & i & 9i\end{pmatrix}.$$

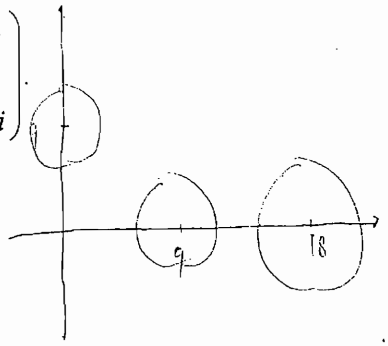
3个盖尔圆相离

∴A有3个互异特征根

$|z-18|\le 3$

$|z-9|\le 2$

$|z-9i|\le 2$



三.(6 分)设 **A**是 n 阶正规矩阵, $\sigma(\mathrm{A})=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$(全体特征根).

(1)写出正规阵**A**的含有对角阵与两个 U(酉)阵的乘积分解公式;

(2)若 **A**是 2 阶正规矩阵，$\sigma(\mathrm{A})=\{1, i\}$，$X=\begin{pmatrix} i\\ 1\end{pmatrix}$使得 $\mathrm{A}X=X$，求一个 U(酉)阵

Q，将**A**写成**Q**, $\mathbf{Q}^H$与对角阵的乘积形式.

(1) ∵A为正规阵 ($\lambda_1\cdots\lambda_n$互异)

$$A=U^H\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}U$$

(2) 当$\lambda=1$时 $X=\begin{pmatrix} i\\ 1\end{pmatrix}$ 单位化 $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}i\\ \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}$

取Y使 $Y^HX=0$ $Y=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}$ 单位化 $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2}i\end{pmatrix}$

$$\therefore Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt2}{2}i & \frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt2}{2} & \frac{\sqrt2}{2}i\end{pmatrix}\quad Q^HAQ=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$$

四.(任选 3 题共 9 分)简证下列各题

1.设$\|\bullet\|$是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 上相容的矩阵范数, 列向 $\alpha\in\mathbb{C}^n,\alpha\neq 0$. 任取 $x\in\mathbb{C}^n$，令$\|x\|$如下:

$\|x\|$ 定义为 $\|x\alpha^H\|$，$x\in\mathbb{C}^n$． 证明: $\|\mathrm{A}x\|\le\|\mathrm{A}\|\cdot\|x\|$, ($\mathrm{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$).

$$\|Ax\|=\|Ax\alpha^H\|\le\|A\|\|x\alpha^H\|=\|A\|\|x\|$$

2.设$\|\bullet\|$是矩阵范数，$x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0$ 使得 $Ax=\lambda x$；令 $B=(x,0,0,\cdots,0)_{n\times n}$

证明：　$AB=\lambda B$，且有 $|\lambda|\|B\|\le\|A\|\|B\|$(由此你能否推出一个结论？).

$AB=A(x,0,\cdots 0)=(Ax,\cdots 0)$　　$|\lambda|\|B\|=\|\lambda B\|=\|AB\|\le\|A\|\|B\|$

$=(\lambda x,0\cdots 0)$

$=\lambda(x,0\cdots 0)$

$=\lambda B$

3. 设$A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\|A\|$是相容的矩阵范数，证明

(1) $\|I\|\ge 1$ (I 是单位矩阵)；(2)若 A 可逆，　则$\|A^{-1}\|\ge\frac{1}{\|A\|}$

(1) $\rho(A)=1\le\|I\|$　　(2) $1\le\|I\|=\|AA^{-1}\|\le\|A\|\|A^{-1}\|$

$\therefore\|I\|\ge 1$　　$\Rightarrow\|A^{-1}\|\ge\frac{1}{\|A\|}$

4. 若 A 为 n 阶正规阵，$\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$(全体特征根)，

证明 $\sigma(A^H)=\{\overline{\lambda_1},\cdots,\overline{\lambda_n}\}$($A^H$的全体特征根).

A为正规阵　$AA^H=A^HA$

Schur　$P^HAP=\begin{Bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{Bmatrix}$　　$\sigma(A^H)=\{\overline{\lambda_1},\cdots\overline{\lambda_n}\}$

$P^HA^HP=\begin{Bmatrix}\overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n}\end{Bmatrix}$

五.(11 分) 1.设$A_1=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, b= $(2\ \ 1\ \ 0\ \ 1)^T$，$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}_{4\times 5}$.

求 A^+ 与 $Ax=b$ 的极小范数解或最佳极小二乘解

不相容 为最佳极小二乘解

$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & 0\\ -2 & -2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　　$A^+=\begin{pmatrix}A_1^+ & \\ & A_2^+\end{pmatrix}$　　$\therefore A^+=\begin{pmatrix}\frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & 0 & 0\\ \frac{1}{15} & -\frac{2}{15} & 0 & 0\\ -\frac{1}{15} & \frac{2}{15} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$　$\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

$(A|b)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 2\\ -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=4$

$r(A_1)=1$　$\therefore A_1^+=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$　　$x=A^+b=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$

$r(A)=2$

$A_2^+=(A_2^HA_2)^{-1}A_2^H=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

2.已知 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\2&-1\end{pmatrix}$， (1)求 A 的短奇异值分解; (2)求奇异值分解.

$\sigma(A^TA)=\{6,3\}$

当 $\lambda_1=6$ 时 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

当 $\lambda_2=3$ 时 $\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\therefore Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$P=\left\{\frac{A\alpha_1}{|A\alpha_1|},\frac{A\alpha_2}{|A\alpha_2|}\right\}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}\\\frac{2}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&\\&\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$\therefore A=P\begin{pmatrix}\sqrt6&\\&\sqrt3\end{pmatrix}Q^T$

$V=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{2}{\sqrt6}&-\frac{1}{\sqrt3}&0\end{pmatrix}$

$\therefore A=U\begin{pmatrix}\sqrt6&0\\0&\sqrt3\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

六.(8 分) $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$. 求 A 的极小式；计算 e^{tA} 与 $\rho(A\otimes e^B)$

$\sigma(A)=\{2,2,2\}$

$(A-2I)(A-2I)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

$=0$

$\therefore m(x)=(x-2)^2$

$f(A)=\cancel{2G}\,f(2)G_1+f'(2)G_2+f''(2)G_3$

$f(x)=x-2$

$A-2I=G_2 \quad G_2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

$f(x)=1$

$I=G_1 \quad G_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$f(x)=(x-2)^2$

$(A-2I)^2=2G_3$

$\Rightarrow G_3=0$

$\therefore f(A)=f(2)I+f'(2)G_2$

$e^{tA}=e^{2t}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+te^{2t}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

$=e^{2t}\begin{pmatrix}1&t&0\\0&1&0\\0&t&1\end{pmatrix}$

$\sigma(B)=\{0,1\} \quad \sigma(e^B)=\{e,1\}$

$\sigma(A\otimes e^B)=\{\lambda_i\lambda_j\}=\{2,2,2,2e,2e,2e\}$

$\therefore \rho(A\otimes e^B)=2e$.

$A=P^H\begin{bmatrix}f(\lambda_1)&&\\&\ddots&\\&&f(\lambda_n)\end{bmatrix}P$

98 年考题

1. 设 Y、Z 是线形空间 X 的子空间，又 dim Y=dim Z，$Y \subset Z$，试证：Y=Z。

2. 在 R^3 中定义线性变换 T 为：对任意 $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$，$Tx=(x_1-x_2,x_2-x_3,2x_3)^T$，

回答下列问题：

a) 求 T 的特征值及各特征值的几何重数和代数重数。

b) 试判断 T 是否是可对角化的线性变换。

c) 求 $\dim R(T)$ 及 $\dim N(T)$。

d) 求 $R(T)$ 的一组基底（提示：取 R^3 的一组基底讨论之）。

3. 设 E 为定义了内积 $(\cdot|\cdot)$ 的欧氏空间，试证对任意 $X,Y\in E$，都有

$$(X|Y)=\frac{1}{4}\left(\|X+Y\|^2-\|X-Y\|^2\right).$$

4. 设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，证若存在正整数 $K\geq 2$，使 $A^K=0$，则必有 A=0。

5. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & i & 1\\ -i & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 的谱分解式，又设 t 为实数，试求矩阵 At 的正弦函数 sin At。

6. 证 $H^*=H$ 的充要条件为 H^2 是幂等的 Hermite 阵且 $rankH^2=rankH$。

7. 求矛盾方程组 AX=b 的最小范数最小二乘解，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix}\qquad b=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

8. 若 E 为幂等 Hermite 阵，证 $X\in E\{2,3,4\}$ 的充要条件是 X 为幂等 Hermite 阵且满足 $R(X)\subset R(E)$。

9. 用盖氏圆盘定理证明 $A=\begin{bmatrix}9 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 8 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 至少有两个实特征值。

设 Z 的基底 β_X，则 $Z=span\{\ \ \}$

设 Y 的基底 $(\gamma_1\cdots\gamma_n)$，$Y=span\{\cdots\}$，对 $\forall x\in Y$，有 $x=\sum\beta_i\alpha_i$

而 $\gamma_1\cdots\gamma_n\in Z$ 且无关

也 $\dim Y=\dim Z=n$

由 Z 中任意 n 个无关向量可作为 Z 的基底

$\dim Y=\dim Z$，$\therefore\ \beta_X$ 也是 Y 的基底 $\therefore Y=Z$

2. $Te_1=(1,0,0)^T=e_1\cdot 1$

$Te_2=(-1,2,0)^T=e_1(-1)+e_2\cdot 2$

$Te_3=(0,-1,2)^T=e_1\cdot(-1)+e_3\cdot 3$

$\therefore T[e_1,e_2,e_3]=[e_1,e_2,e_3]\underbrace{\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}}_{A}$

$\therefore T$ 的矩阵表示为 A

$f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

$\lambda_1=1,\ d_1=1.\quad \lambda_2=2,\ d_2=2.$

$\dim E_T(\lambda_i)=\dim E_A(\lambda_i)=\dim N(\lambda_i I-A)$

$=3-\dim R(\lambda_i I-A)$

$=3-rank(\lambda_i I-A)$

$\dim E_T(\lambda_1)=1$

$\dim E_T(\lambda_2)=1$

$t_2\neq d_2$，故不可对角

$\dim R(T)=\dim R(A)=3$

$\therefore \dim N(T)=0$

取 R^3 的自然基底 由以上可知

$Te_1=\cdots$，$Te_2=\cdots$，$Te_3=\cdots$ $\in R(T)$

且 Te_1,Te_2,Te_3 线性无关

故可作为 $R(T)$ 的一组基底

6. $(H^2)^H=(H^H)^2=H^2$，$H^2H^2=H^2$

$rankH^HH=rankH$，$rankH^2=rankH$

$H^*=H\Rightarrow (H^2)^2=(H^HH)^2=H^HHH^HH=H^HH=H^2$ 幂等

$rankH^2=rankH$，$R(H^2)\subset R(H)$，$\therefore R(H)=R(H^2)$

$\exists A$，$\therefore H=H^2A$

$HHH=H^2H^2H^2A=H^2A=H$

$=H$，$\therefore H\in H\{1,2\}$

$(HH)^H=(H^2)^H=H^2=HH$

$\therefore H\in H\{3,4\}$，$\therefore H\in H\{1,2,3,4\}$

4. A 是正规阵 $\Rightarrow$ A 酉相似于对角阵，即 $\exists$ U s.t.

$A=U\begin{bmatrix}\lambda_i & \\ & \ddots\ \lambda_j\end{bmatrix}U^H$，且 $U^H=U^{-1}$

$A^K=\left(U\begin{bmatrix}\lambda_i & \\ & \ddots\ \lambda_j\end{bmatrix}U^H\right)\left[\cdots\right]$

$=U\begin{bmatrix}\lambda_i^k & \\ & \ddots\ \lambda_j^k\end{bmatrix}U^H$

$\because A^K=0$，则必有 $\begin{bmatrix}\lambda_i^k & \\ & \ddots\ \lambda_j^k\end{bmatrix}=0$，$\therefore \lambda_i^k=0$，$\Rightarrow \lambda_i=0$

$\therefore A=U[\ \ ]U^H=0$

3. 证 $\|X+Y\|^2-\|X-Y\|^2=(X+Y|X+Y)-(X-Y|X-Y)$

$=(X|X+X|Y+Y|X+Y|Y)-[X|X-Y|X-X|Y+Y|Y]$

$\because$ E 是欧氏空间，$\therefore X|Y=Y|X$

$\therefore \|\ \ \|^2-\|\ \ \|^2=4X|Y$，即 $(X|Y)=\frac{1}{4}(\cdots)$

6. 证 $A^+A = AA^+$，只需正规阵 $A^HA = AA^H$

$A^+ = (A^HA)^+A^H$ $\qquad A^+ = A^H(AA^H)^+$

$\therefore A^+A = (A^HA)^+A^HA = A^+(A^H)^+A^HA = A^H(A^H)^+A^HA$

$= A^+(AA^H)^HA$

$(GA)^H = GA = [(A^HA)^+A^HA]^H = (A^HA)^H[(A^HA)^+]^H$

$= (A^HA)((A^HA)^H)^+$ 注意 $A^HA = AA^H$

$= AA^H(AA^H)^+ = AA^+$

$= A^+$

8. 已知 E 是 Hermite 阵，且幂等，证 $X \in E\{2,3,4\} \Leftrightarrow X$ 幂等，Hermite 阵，$R(X) \subset R(E)$

证：E 是 Hermite 阵，且幂等，则以下关系成立

$E^2 = E^HE = EE^H = \boxed{E = E^H}$

若 $X \in E\{2,3,4\}$，则 $XEX = X$，$(EX)^H = EX$，$(XE)^H = XE$

$\therefore X^2 = XXEX = X(XE)^HX$

$= XE^HX^HX = XEX^HX$

$= XEE^HX^HX$

$= XE(XE)^HX$

$= XEXEX = XEX = X$

$\therefore X$ 幂等

$X = XEX = E^HX^HX = EE^HX^HX = EXEX = EX$

对于 $\forall y \in R(X)$ 有 $\exists x$ s.t. $y = Xx = EXx \in R(E)$

$\therefore R(X) \subset R(E)$

$X^H = (EX)^H = EX = X$，$\therefore X$ 是 Hermite 阵

若 $R(X) \subset R(E)$，$X^2 = X$，$X^H = X$，则

则 $\exists Y$ s.t. $X = EY$

$\therefore XEX = EYEEY = EYEY = X^2 = X$，$\therefore X \in E\{2\}$

$EX = EEY = EY = X = X^H = (EX)^H$ $\therefore X \in E\{3\}$

$XE = X^HE = Y^HE^HE = Y^HE$

$Y^HE = Y^HE^H = (EY)^H$

$= X^H = X = (XE)^H$ $\quad X \in E\{4\}$

综上 $X \in E\{2,3,4\}$

2

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1. 谱分解

$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = \sqrt{2}$

令 $\varphi_1(\lambda) = (\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})$

$\varphi_2(\lambda) = \lambda(\lambda-\sqrt{2})$ $\quad A^2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$\varphi_3(\lambda) = \lambda(\lambda+\sqrt{2})$

$$P_1 = \frac{\varphi_1(A)}{\varphi_1(0)} = \frac{(A+\sqrt{2}I)(A-\sqrt{2}I)}{(0+\sqrt{2})(0-\sqrt{2})} = \frac{A^2-2I}{-2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + I$$

$$P_2 = \frac{\varphi_2(A)}{\varphi_2(-\sqrt{2})} = \frac{A(A-\sqrt{2}I)}{-\sqrt{2}(-\sqrt{2}-\sqrt{2})} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{A^2-\sqrt{2}A}{2\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{A^2}{2\sqrt{2}} - \frac{A}{2} \boxed{\frac{A^2-\sqrt{2}A}{4}}$$

$$P_3 = \frac{\varphi_3(A)}{\varphi_3(\sqrt{2})} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{A^2+\sqrt{2}A}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})}$$

$$= \boxed{\frac{A^2+\sqrt{2}A}{4}} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{-1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

验 $P_1+P_2+P_3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$

$\therefore A = \sum \lambda_i P_i$

2、求 e^{At}. 由 $f(\lambda) = \lambda(\lambda^2-2)$

设 $\varphi(\lambda) = a_0(t) + a_1(t)\lambda + a_2(t)\lambda^2$

则
$$\begin{cases} a_0(t) + a_1(t)\cdot 1 + a_2(t) = e^{t} \\ \cancel{a_0(t) + 2a_2(t) = te^{t}} \\ a_0(t) + a_1(t)(-\sqrt{2}) + 2a_2(t) = e^{-\sqrt{2}t} \\ a_0(t) + a_1(t)\sqrt{2} + 2a_2(t) = e^{\sqrt{2}t} \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}t} \\ a_2 &= \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} - e^{t} \\ a_0 &= 2e^{t} - \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t} \end{aligned}$$

$\therefore f(A) = \varphi(A) = (2e^{t} - \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t})I + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}t}A + (\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}t} - e^{t})A^2$

3

99年考题

1、给定 $P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，现定义线性变换 T: $C^{2\times2}\to C^{2\times2}, X\alpha\ PX$

取 $C^{2\times2}$ 中的基底 $\beta_1=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$，

$\beta_2=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right\}$

1) 求T关于基底 β_1 的矩阵表示A；

2) 设x在基底 β_1 下的坐标为 $(1,2,1,1)^T$，求x在基底 β_2 下的坐标

1)、设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$，求 $f(A)=2A^4-12A^3+19A^2-29A+37I$，其中I为单位矩阵。

求多式

1) 用盖氏圆盘定理确定矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & i & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 5 & \frac{i}{2}\\ -1 & 0 & 0 & 5i\end{bmatrix}$ 的特征值分布范围，并在复平面上作出示意图。

设 $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$，求A的谱分解。

2

4、设 $t\in R$，$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$，求矩阵函数 e^{At} 的有限形式。

最小范数解 $X=A^{(1,4)}b$

$A^{(1,4)}=A^H(AA^H)^{-1}$

5、求 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=1\\ -x_2+2x_3=1\end{cases}$ 的最小范数解。矩阵形式 $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 4\\ 4 & 6\end{bmatrix}$

6、设T是 R^3 中的线性变换 $\forall x=(\rho_1,\rho_2,\rho_3)^T\in R^3$，$Tx=(0,\rho_1,\rho_2)^T$，分别求

$=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}5 & 4\\ 6 & 2\\ 3 & 8\end{bmatrix}$

$R(T^2)$ 和 $N(T^2)$ 的基底和维数。 求A

$X=A^{(1,4)}b$

4

$=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}5 & 4\\ 6 & 2\\ 3 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{14}[illegible]$

7、设$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是n维线性空间V的一组基底

1) 证下列向量组：$u_1=x_1, u_2=x_1+x_2, \cdots, u_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$ 是V的一组基底；

2) 求$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$到$\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$的过渡矩阵P；

3) P是否可对角化？为什么？

8、设$A\in C^{m\times n}$，证明：

1) $A^{(1)}A=I_n \Leftrightarrow rankA=n$

2) $AA^{(1)}=I_m \Leftrightarrow rankA=m$

$\because rank(A^{(1)}A)=rank(AA^{(1)})=rankA$.
若$A^{(1)}A=I_n$ 则$rank(A^{(1)}A)=n \Rightarrow rankA=n$
$\Rightarrow rankA=m$

若$rankA=n$ 则A列满秩. $A^{(1)}A$是幂等阵
$rank(A^{(1)}A)=rank(A)=n$.
$\therefore A^{(1)}A$也满秩 故$(A^{(1)}A)^{-1}$存在 则 $A^{(1)}A=(A^{(1)}A)^{-1}(A^{(1)}A)(A^{(1)}A)=(A^{(1)}A)^{-1}(A^{(1)}A)=I_n$

9、证明幂等的正规矩阵$A\in C^{n\times n}$必可化为Hermite阵.

A是正规阵. A酉相似于$diag[\lambda_i]$, A幂等. λ_i非0即1. $\therefore diag(\lambda_i)$是Hermite阵

10、设$A\in C^{n\times n}$为正规矩阵$\omega\subset C^n$为C^n的子空间。证：若ω为A的不变子空间，ω也是A^H的不变子空间。

$\forall y\in$
Ay
(x,Ay)
$x\in$
Ax (x,Ay)

证 A正规 $\Longrightarrow$ 可谱分解 $A=\sum\lambda_i P_i$ $P_i(A)=P_i(\lambda_i)P_i \Rightarrow A^H=\sum\bar{\lambda}_i P_i$
$\because$ W为A的不变子空间 $\Rightarrow$ 对$\forall x$. $P_i x\in W$
对$\forall x\in W$. $A^H x=\sum\bar{\lambda}_i P_i x\in W$
$\therefore$ W也是A^H的不变子空间

11、设X为R上线性空间. $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为X的一组基底. 试在X中定义一种内积，使$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$这种定义的内积下成为X的一标正交基底.

对$\forall x=B_x\alpha$. $(\alpha=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)^T)$
和$\forall y=B_x\beta$ $(\beta=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)^T)$
定义$(x|y)=\sum\alpha_i\beta_i$ 则易证$(x|y)$符合内积定义.
且 $(x_i|x_i)=1$.
$(x_i|x_j)=0$ $(i\neq j)$

10 $A=\sum\lambda_i G_i$

若$x\in\omega \Rightarrow Ax=\sum\lambda_i G_i x\in\omega$
$\therefore G_i x\in\omega$
$(x,Ay)=(Ay)^H x=y^H A^H x$
$=y^H\sum\bar{\lambda}_i G_i x$
$=\sum\bar{\lambda}_i y^H G_i x$
$\because y\in\omega^\perp$ $\therefore (x,Ay)=0$
$\therefore Ay\in\omega^\perp$
$\therefore$ 得证

5

2000 年考题

1、画出矩阵 $A=\begin{bmatrix} 7-2i & i & \frac{i}{2} & 0 \\ \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i & 4+\frac{3}{2}i & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1-\frac{1}{2}i & 1+4i & 1 \\ i & 0 & -2 & -4+3i \end{bmatrix}$ 的盖氏圆盘，问矩阵 A 有几个实特征根，几个虚特征根。

2、给定线性空间 V．试严格由线性空间的定义推出：若 $X\in V$，且 $X+X=X$，则 $X=0$（0为V中的零向量）。

1. 证零向量唯一 $\theta_1+\theta_2=\theta_1=\theta_2$.

2. 由唯一…⇒ X 就是零向量。

3、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$．在 R^2 中的二元函数 x、y 定义为 $(x\,|\,y)=y^T Ax$，试

$\lambda_i=3$.

a) 证 $(x\,|\,y)$ 为 R^2 上的内积；

$(x|x)=X^TAX$ … $(x|y)=y^TAX$

b) 就 a) 中给定的内积定义 $(\cdot|\cdot)$ 构成一个内积空间．试由 R^2 的自然基底 $e_1=(1,0)^T, e_2=(0,1)^T$ 用一个 G—S 过程求 R^2 标准正交基。

4、X 为 C^4 的线性空间．取一组基底为 $B_1=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$T\in L(X,X)$ 为 C^4 上的线性变换．T 关于 B_1 的矩阵表示为 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

$(\lambda-1)^4=0$

a) 求 T 的特征值及特征子空间； $\lambda=1$（四重）

b) 求 $R(T)$ 和 $N(T)$ 的基底和维数； $= R(A)=4$．$N(T)=0$

c) 判断 T 是否可对角化。不是…

5、已知 $A=\begin{bmatrix}0 & i & 2\sqrt{2}\\ -i & 0 & 0\\ 2\sqrt{2} & 0 & 0\end{bmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$．求 A 的谱分解并求 AX=B 的最小范数最小二乘解。

$A^H=A$．A 是 Hermite 矩阵 ⇒ A 正规 ⇒ 可谱分解.

6、设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵．W 为 C^n 的子空间．若 W 为 A 的不变子空间，则 $W^{\perp}$ 也是 A 的不变子空间．其中内积 $(\cdot|\cdot)$ 取 C^n 的标准内积。

7、设 $A\in C^{m\times n}$，$P\in C^{m\times m}_m$，$Q\in C^{n\times n}_n$，$B\in C^{m\times n}$，且 $PAQ=B$ ~~$A=P^{-1}BQ$~~

证：$A\{1,2\}=\{G\mid G=QB^{(1,2)}P,\ B^{(1,2)}\in B\{1,2\}\}$.

$$\begin{cases} AA^{(1)}A=A \\ A^{(2)}AA^{(2)}=A^{(2)} \end{cases}$$

8．已知n阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&0&1&0&0\\0&0&\cdots&0&0&1&0\\0&0&\cdots&0&0&0&1\\0&0&\cdots&0&0&0&0\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&0&0&0\end{bmatrix}$，求 e^A 的值.

$$\because\ \lambda I-A=\begin{cases}\lambda-1\\(\lambda-1)^2\\(\lambda-1)^3\\\lambda^n\end{cases}\ \ n\ 3.$$

设 $AGA=P^{-1}BQ^{-1}QB^{(1,2)}PP^{-1}BQ^{-1}$

$=P^{-1}BB^{(1,2)}BQ^{-1}$

$=P^{-1}BQ^{-1}=A$.

$GAG=G$.

又 $\forall A^{(1,2)}$

$AA^{(1,2)}A=A\Rightarrow$

$P^{-1}BQ^{-1}A^{(1,2)}P^{-1}BQ^{-1}=P^{-1}BQ^{-1}$.

$\because P,Q$ 可逆 $\therefore BQ^{-1}A^{(1,2)}P^{-1}B=B$

$\therefore Q^{-1}A^{(1,2)}P^{-1}\in B\{1\}$

再证 $Q^{-1}A^{(1,2)}P^{-1}\in B\{2\}$ 即可.

$Q^{-1}A^{(1,2)}P^{-1}BQ^{-1}A^{(1,2)}P^{-1}$

$=Q^{-1}A^{(1,2)}AA^{(1,2)}P^{-1}=Q^{-1}A^{(1,2)}P^{-1}$

$\therefore Q^{-1}A^{(1,2)}P^{-1}\in B\{2\}$

综上 $Q^{-1}A^{(1,2)}P^{-1}\in B\{1,2\}$.

故有 $B^{(1,2)}=Q^{-1}A^{(1,2)}P^{-1}$

即 $A^{(1,2)}=QB^{(1,2)}P$.

7. 设: $BB^{(1,2)}B=B=PAQ$.

$PAQB^{(1,2)}PAQ=PAQ$.

$\therefore AQB^{(1,2)}PA=A=AA^{(1,2)}A$.

$\therefore QB^{(1,2)}P=A^{(1,2)}$

8.

7

写出圆盘定理证明矩阵 $A=\begin{bmatrix}4 & 0.8 & 0.4\\ 0.2 & 6 & 0.8\\ 0.2 & 0.2 & 8\end{bmatrix}$ 有三个互异的实特征根（12 分）。

DAD^{-1}

证明数域 F 上的线性空间 X 与它的任意子空间 S 有相同的零向量（10 分）。

已知 X 是数域 F 上的线性空间，且 dim X=3，$T\in L(X,X),B_1=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]$，

线性变换 T 在基底 B_1 下的矩阵表示 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{bmatrix}$，试求 R(T)、N(T)及其维数

（12 分）。

对 $\forall\, x\in X$. $x=\sum \ldots \alpha_i$

$TX=T\sum\cdots\alpha_i$

$=span(T\eta_1,T\eta_2,T\eta_3)$ $T[\eta_1,\eta_2,\eta_3]=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}=(\eta_1+\eta_2-\eta_3,\ \eta_2+2\eta_3,\ \eta_1+\eta_3)$

$\therefore R(T)=span(\eta_1+\eta_2-\eta_3,\cdots)$

$N(T)=span\{B_x\ldots\}$

$\dim R(T)+\dim N(T)=3$

又 $\dim R(T)=\dim R(A)=3$ $\therefore \dim N(T)=0$ $\therefore N(T)=\{0\}$

任取 $\forall x\in S$. 设 $\theta_1\in S$. $x+\theta_1=x$. 则 θ_1 是 X 中的零向量

设 $\theta_2\in S$. $x+\theta_2=x$

$x\in S$. 则 θ_2 是 S 中的零向量

说明 S 的零向量也为 X 的零向量

X 的零向量也为 S 的零向量

又 X 中零向量唯一

$\therefore$ X、S 有相同的零向量

4. 设 A 是正规矩阵，w 是 A 的不变子空间，证明 $W^{\perp}$ 也是 A 的不变子空间（12 分）。

5. 设 $A\in C^{5\times5}$，又知 $\lambda I-A$ 的初等因子组为 $\lambda-1,\lambda-1,\lambda+2,\lambda-2,\lambda-5$。
1 1 1 $(\lambda-1)$ $(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-5)$
试求 $\lambda I-A$ 的不变因子组、各阶行列式因子及 A 的最小多项式，并证明矩阵 A 可对角化（12 分）。

6. 证明：如果 A 是正规矩阵，则 $A^*A=AA^*,(A^*)^n=(A^n)^*$，其中 n 是正整数（12 分）。

7. 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$，求 A^* 的谱分解（15 分）

8. 设 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，计算 e^{A}（15 分）

4. 证明：A 正规 $\Rightarrow$ A 可谱分解

$A=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i P_i$ λ_i 为 A 互异特征值

且 P_i 是幂等的 Hermite 矩阵 $P_i^2=P_i$. $P_i^H=P_i$.

$A^H=(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i P_i)^H=\sum\bar{\lambda}_i P_i^H=\sum\bar{\lambda}_i P_i$

$P_i=\frac{\varphi_i(A)}{\varphi_i(\lambda_i)}$

对 $\forall x\in W$. $\because \varphi_i(A)$ 为 A 的多项式

且 W 是 A 的不变子空间

$\therefore$ 有 $\varphi_i(A)x\in W$.

即 $\varphi_i(\lambda_i)P_i x\in W$.

$\because \varphi_i(\lambda_i)$ 是确定的常数

$\therefore P_i x\in W \Rightarrow A^H x\in W$

任取 $\forall y\in W^{\perp}$. 考虑 $(y, Ax)=0$
$W^{\perp}$ W

$(A y, x)=x^H A y$
$=x^H A^H{}^H y$
$=(y, A^H x)$

又 $(y,Ax)=(Ax)^H y=x^H A^H y=\ldots$

由于 $A^H x\in W$. $y\perp W^{\perp}$ $\therefore (Ay,x)=0$

$\therefore \forall y$. $\therefore Ay\in W^{\perp}$

5. 由初等因子组与 A 的 $J=\begin{bmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&-2&&\\&&&2&\\&&&&5\end{bmatrix}$

A 与 J 同秩 $\therefore rank A=5$

即 A 满秩. 因此求得 $\lambda I-A$ 的不变因子组

$\varphi_1=1$

$\varphi_2=1$ $\therefore$ 各阶行列式因子

$\varphi_3=1$ $D_0(\lambda)=1$. $D_k(\lambda)=\varphi_k(\lambda)D_{k-1}(\lambda)$

$\varphi_4=(\lambda-1)$ $D_1(\lambda)=1$. $D_2(\lambda)=1$.

$\varphi_5=(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-5)$ $D_3(\lambda)=1$. $D_4(\lambda)=\lambda-1$

$D_5(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-5)$

矩阵论期终试题　（2002 年秋季）

姓名＿＿＿＿＿　学号＿＿＿＿＿　成绩＿＿＿＿＿

一、选择填空，在下列各题中选择一个正确的答案填入空白处．

1．设 V 是数域 F 上的线性空间，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 V 中的一组向量，如果存在一组＿＿＿＿＿的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$，使得 $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots\alpha_n x_n=0$，则称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为空间 V 的线性相关向量组．

A．不全为零　　B．不全为零的 F 中

C．至少含有一个零的 F 中　　D．至多有一个不为零的 F 中

2．设 V 是数域 F 上的线性空间，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 V 中的向量，如果 $n>\dim V$，则 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 必＿线性相关＿

A．线性无关　B．全为零向量　C．线性相关　D．有一个零向量

3．n 维线性空间中的基＿一定＿有 n 个向量

A．不一定　B．一定　C．肯定没　D．A，B，C 都不对

?

4．设 X 是数域 F 上的线性空间，S 是 X 的真子空间，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 X 的基底，则 S 的基底＿＿＿＿＿＿．

A．一定是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中的某些向量

B．不一定是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的子集

C．一定不是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的子集

D．中每个向量都必不可由 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性表出

5．设 V 为数域 F 上的线性空间，$B_V=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为 V 的一个基底，$B\in F^{n\times m}$，$m<n$．如果 V 中向量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 满足 $[y_1, y_2, \cdots, y_m]=[x_1, x_2, \cdots, x_n]B$，则＿＿＿＿＿．

A．$y_1, y_2, \cdots, y_m$ 线性相关　　B．$y_1, y_2, \cdots, y_m$ 线性无关

C．$[y_1, y_2, \cdots, y_m]$ 是列满秩的 $F^{n\times m}$ 中的矩阵

D．$[y_1, y_2, \cdots, y_m]$ 是行满秩的 $F^{n\times m}$ 中的矩阵

6．设 $T\in L(X, X)$，X 为数域 F 上的线性空间，B_X 为 X 中给定的基底，则 T 在基底 B_X 之下的矩阵表示是＿＿＿＿＿．

9

A. 唯一的 B. 不唯一的 C. 任意的 D. 可逆的

7. 设 X 为数域 F 上的线性空间，$T\in L(X,X)$，又设 A 是 T 在基底 B_X 之下的矩阵表示，则________.

A. $\dim R(T)+\dim N(T)=\dim X$，且 $X=R(T)\dot{+}N(T)$.

B. $\dim R(A)+\dim N(A)=\dim X$，且 X 是 $R(T)\dot{+}N(T)$ 的补空间.

C. $\dim R(A)+\dim N(A)=\dim X$，且 $R(A)$ 与 $N(A)$ 均为 X 的子空间.

D. $\dim R(A)+\dim N(A)=\dim X$，且 $R(T)$ 与 $N(T)$ 均为 T 的不变子空间.

8. 设 V 为数域 F 上的线性空间，S_1、S_2 均为 V 的子空间，又设 $\dim S_1=m$，$\dim S_2=n$，$\dim(S_1\cap S_2)=k$，则 $\dim(S_1+S_2)=$__________.

A. $m+n$　B. $m-n+k$　C. $m-n-k$　D. $m+n-k$

9. 设 $A\in\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}$，则 $A^{100}=$________. (对角化)

A. $\begin{pmatrix}100&2^{100}\\0&4^{100}\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}1&\frac{2(4^{100}-1)}{3}\\0&4^{100}\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}1&\frac{4^{100}-1}{3}\\0&4^{100}\end{pmatrix}$

D. A、B、C 全不对.

10. 设 $A\in C^{7\times 7}$，而 $\lambda I-A$ 的初等因子组为 $\lambda-1$，$\lambda-1$，$(\lambda-2)^3$，$(\lambda-3)^2$，则 A 的若当标准形为________. C

A. $J=\begin{bmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&J_3&\\&&&J_4\end{bmatrix}$，其中 $J_1=[1]$，$J_2=[1]$，$J_3=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$，$J_4=[3]$.

B. $J=\begin{bmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&J_3&\\&&&J_4\end{bmatrix}$，其中 $J_1=[1]$，$J_2=[1]$，$J_3=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$，$J_4=[3]$.

C. $J=\begin{bmatrix}J_1&&&\\&J_2&&\\&&J_3&\\&&&J_4\end{bmatrix}$，其中 $J_1=[1]$，$J_2=[1]$，$J_3=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}$.

10

$$J_4=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

D. $J=\begin{bmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & J_3 & \\ & & & J_4\end{bmatrix}$，其中 $J_1=[1]$，$J_2=[1]$，$J_3=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$，

$$J_4=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

二、设 $A=\begin{bmatrix}9 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 8 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ $\lambda-9$

1）画出 A 的所有盖氏圆盘，并指出 A 的特征值在各盖氏圆盘中的分布情况。

2）说明 A 至少有两个实特征值。

三、已知 $A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 4\end{bmatrix}$，并且定义 R^2 上的函数为 $(x|y)=y^TAx$，试证 $(x|y)$ 为 R^2 上的一个内积，并求该内积空间 R^2 的一个标准正交基。

$[1\ 0]$，$x_1=[1,0]^T$ $y_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}$ $\|x_1\|=[1,0]\begin{bmatrix}4&1\\1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

$\therefore y_1=(\frac{1}{2},0)^T$

$u_2=x_2-(x_2|y_1)$

四、设 P 是 C^n 中的正交投影算子，证明对 C^n 中任意向量 X 有 $(PX|X)=\|PX\|^2$，其中 $(\cdot|\cdot)$ 为 C^n 中标准内积，范数 $\|\cdot\|$ 是由此内积诱导出的范数。 $\because$ 正交投影 $\therefore P^2=P$ $P^H=P$

$(Px|x)=x^HPx=x^HP^2x=x^HP\cdot Px$

$=x^HP^H\cdot Px=(Px)^HPx$

$=(Px|Px)=\|Px\|^2$

五、设 $T\in L(R^3,R^3)$，且对任意 $x\in R^3$，若 $x=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^T$，则 $Tx=(4\xi_1+\xi_2,2\xi_1+3\xi_2-2\xi_3,\xi_1+4\xi_3)^T$。试求① $R(T)$，$N(T)$ 及其基底；② 求 $\dim R(T)$ 和 $\dim N(T)$；③ T 是否可对角化？并说明理由。

六、设 $A=\begin{bmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & -5 & 0\\ -3 & -6 & 1\end{bmatrix}$，求 A 的谱分解式。

祝飞翔

//

七、已知 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，试求 $\sin At$.

八、给定线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+2x_2-2x_3=2 \\ 2x_1+2x_2-2x_3=1 \end{cases}$$

A^+b

试求其最小二乘极小范数解.

九、设 $A=A^H$，试证 i) $A^+A=AA^+$；ii) $A^+A^2=A^2A^+$.

$(AA^+)^H = AA^+A = A$

$AA^+=(AA^+)^H=(A^H)^+A^H=A^+A$

$A^+AA=AA^+A=A$

十、如果 A 是一个正规矩阵，W 是 A 的一个不变子空间，试证 W 的正交补 $W^\perp$ 也是 A 的不变子空间（要用谱分解理论证明）.

$A^HA=AA^H$

十一、设 $A\in C^{n\times n}$，且 $C^n=R(A)+N(A)$，证明：$\operatorname{rank}A^2=\operatorname{rank}A$ 的充要条件是 $C^n=R(A)\dotplus N(A)$.

$(x_1|y_1)=(\frac{1}{2},0)\begin{bmatrix}4&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}$

$u_2=(0,1)^T-(\frac{1}{4},0)^T=(-\frac{1}{4},1)^T$

$\|u_2\|=\left((-\frac{1}{4},1)\begin{bmatrix}4&1\\1&1\end{bmatrix}(-\frac{1}{4},1)^T\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_2=\frac{u_2}{\|u_2\|}=(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}})^T$

$\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

研究生矩阵理论试卷 (2005, 01)

姓名　　　　　　学号　　　　　　院系

一. 设 $A=\begin{pmatrix}1&4&-1\\-1&-3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ 求：(1) A的最小多项式，(2) A的若当标准形.

极小式：$(\lambda-1)(\lambda+1)^2$　　$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&1\\0&0&-1\end{bmatrix}$

二. 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix}$ 求 A 的谱分解. 极小式：$(\lambda+4)(\lambda-5)$

谱分解公式：$A=\lambda_1G_1+\lambda_2G_2=\frac{-4}{9}\begin{bmatrix}-4&-2&-4\\-2&-1&-2\\-4&-2&-4\end{bmatrix}+\frac{5}{+9}\begin{bmatrix}5&2&-4\\-2&8&-1\\-4&-2&5\end{bmatrix}$

二. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$，求 e^{At}.

$f(\lambda)=\lambda^2(\lambda-2)^2$

极小式为：$\lambda(\lambda-2)$

$f(A)=f(2)G_1+f(0)G_2$　　$I+\frac{1}{2}(e^{t}-1)A$

$f(A)=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1&0&0&1\\0&-1&-1&0\\0&-1&-1&0\\-1&0&0&-1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\-1&0&0&1\end{bmatrix}$

$f(2)$

三. 设 $A=\begin{pmatrix}2&2\\8&2\end{pmatrix}$，求：(1) e^A，(2) $f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(3A^n+A^{n+1})$　(3) $\sin(At)$

$f(\lambda)=(\lambda-6)(\lambda+2)$　　$f(A)=f(6)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}+f(-2)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$　　(3) $\sin(6t)[$

$f(A)=f(6)G_1+f(-2)G_2$　　(1) $e^6\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{4}\\1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}+e^{-2}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{4}\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$　　$+\sin(-2t)[$

$f(x)$

四. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-2&0\end{pmatrix}$，求A的广义逆 A^+ 与奇异值分解.

奇异值：$AA^T=\begin{bmatrix}5&-5\\-5&5\end{bmatrix}$　$\lambda_1=0$　$\lambda_2=10$

$A^+=\frac{1}{1+4+4+1}\begin{bmatrix}1&-1\\2&-2\\0&0\end{bmatrix}$

$p_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$　$p_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$　$Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix}$

$=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1&-1\\2&-2\end{bmatrix}$

[illegible]

$= (a_{11}+\cdots+a_{mm})(b_{11}+\cdots+b$

$= trA \cdot trB$

五．设 $A \in C^{m\times m}, B \in C^{n\times n}$. 证明：(1) $tr(A\otimes B) = trA \cdot trB$; (2) $(A\otimes B)^+ = (A^+\otimes B^+)$; (3) $rank(A\otimes B) = rankA \cdot rankB$.

$(A\otimes B)(A^+\otimes B^+)(A\otimes B)$

$= AA^+A \otimes BB^+B$

$(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1} = A\otimes B$

$A_m \begin{bmatrix} \lambda_m & \\ & 0 \end{bmatrix}$ $B_m \begin{bmatrix} \lambda_n & \\ & 0 \end{bmatrix}$ $= A\otimes B_n \begin{bmatrix} \lambda_n & & \\ & \ddots \lambda_n & \\ & & 0 \end{bmatrix}$ rank =

六．设 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 试用拉直方法求解矩阵方程 $AY + YB = C$.

$\overrightarrow{AYI} + \overrightarrow{IYB} = \vec{C}$

$(A\otimes I_2 + I_2\otimes B^T)\vec{Y} = \vec{C}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \vec{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\vec{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $Y =$

$A = P_1D_1Q_1^H$, $B = P_2D_2Q_2^H$

$(A^+\otimes B^+) = (Q_1D_1^+P_1^H)\otimes(Q_2D_2^+P_2^H)$

$= (Q_1\otimes Q_2)(D_1^+\otimes D_2^+)(P_1^H\otimes P_2^H)$

七．设 $A, B \in C^{n\times n}$ 都是正规阵，且 $AB = BA$, 则存在酉矩阵 V 使 $V^{-1}AV$ 与 $V^{-1}BV$ 都是对角阵.

$(A\otimes B)^+ = (P_1\otimes P_2)(D_1\otimes D_2)(Q_1^H\otimes Q_2^H)$

$V^HAV = diag\{\lambda_1 \cdots \lambda_n\}$

A 是正规阵，A 酉相似于对角阵

$V^HABV = V^HBAV$

$V^HAV = (Q_1^H\otimes Q_2^H)^H \cdot (D_1\otimes D_2)^+ \cdot (P_1\otimes P_2)^H$

$Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$V^{-1}AV = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$V^HAV \cdot V^HBV = V^HBV \cdot V^HAV$

$A = Q\Delta Q^{-1}$

$A = V\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}V^{-1}$

$AB = BA$

$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

$B = P\Delta^* P^{-1}$

$AB = Q\Delta Q^{-1}P\Delta^*P^{-1}$

$\Rightarrow V\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}V^{-1}B = BV\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}V^{-1}$

$= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$ $= P\Delta^*P^{-1}Q\Delta Q^{-1}$

两式左乘 V^{-1} 右乘 V

$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}V^{-1}BV = V^{-1}BV\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} \lambda_1 a_{11} & \cdots & \lambda_1 a_{1n} \\ \lambda_2 a_{21} & \cdots & \lambda_2 a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_n a_{n1} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 a_{11} & \lambda_2 a_{12} & \cdots & \lambda_n a_{1n} \\ \lambda_1 a_{21} & \lambda_2 a_{22} & \cdots & \lambda_n a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda_1 a_{n1} & \lambda_2 a_{n2} & \cdots & \lambda_n a_{nn} \end{vmatrix}$

$\Rightarrow V^{-1}BV$ 为对角形.

$\lambda_1 a_{12} = \lambda_2 a_{12}$ $(\lambda_1-\lambda_2)a_{12}$

$(\lambda_1-\lambda_3)a_{13}$

研究生矩阵论试卷（A）（2006.）

姓名　　　　　　　　　学号

$|e^A| = e^{tr(A)}$

e^A ✓

一、设 $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ (1) 计算 $f(A) = e^A$，(2) 计算 $|e^A|$ 与谱半径 $\rho(e^A)$，(3) 写出 A 的谱分解.

$= \begin{bmatrix} e^{-1} & & e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} & & \\ 0 & & & e^{-3} \end{bmatrix}$　$|e^A| = e^{-6}$　$\rho(e^A) = 1$

$e^A = e^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e^{-3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow G_1 = \frac{1}{2}(A+2I)(A+3I)$　$G_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　$G_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

解：极小式 $(s+1)(s+2)(s+3)$

$G_2 = -(A+I)(A+3I)$

$G_3 = \frac{1}{2}(A+I)(A+2I)$

$f(A) = f(-1)G_1 + f(-2)G_2 + f(-3)G_3$

$\Rightarrow f(A) =$

$G_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

二、设 $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$，(1) 求A的最小多项式与若当标准形；(2) 说明A能否对角化.

极小式为 $f(\lambda) = (\lambda-1)^2$.

极小式 $f(\lambda) = (\lambda-1)^3$

A不能对角化

极小式为：$f(\lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$　$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

M的 [illegible]

三、证明：方程组 $Ax = b$ 有解的等价条件是 $AA^+b = b$.

证明：若 $AA^+b = b$ 令 $x_0 = A^+b$ 则 $Ax_0 = b \Rightarrow Ax = b$ 有解

~~$x = A^+b + (I - A^+A)y$~~

"$\Rightarrow$" $Ax = b$ 有解，则通解

$x = A^+b + (I - A^+A)y$

$\therefore AX = AA^+b + A(I - A^+A)$

$= b$

左边 $= AA^+b + Ay - AA^+Ay$

$= AA^+b + Ay - Ay = AA^+b$

右边 $= b$　左=右 $\therefore AA^+b = b$

四、设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$，(1) 求A的奇异值分解，(2) 求A的广义逆 A^+，

(3) 求方程 A X = b 极小范数解或最佳极小二乘解.

$A^+b = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$

解：$A^HA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$　$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

最小二乘解.

$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_1 = 2$　$\lambda_2 = 1$

$q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$　$q_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $A^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=3$

五. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, (1) 求A的奇异值分解, (2) 求A的广义逆 A^+

(3) 求方程A X = b 极小范数解，或极小最小二乘解.

A的广义逆 $A^+=(A^HA)^{-1}A^H$

$=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$A^+b=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

六. 设A是n阶方阵, $B=\begin{pmatrix}A\\A\end{pmatrix}$, 证明 $B^+=\frac{1}{2}(A^+,\ A^+)$.

$B^+=(B^HB)^+B^H$

$=\left[(A^H\ A^H)\begin{pmatrix}A\\A\end{pmatrix}\right]^+[A^H\ A^H]$

$=\frac{1}{2}(A^HA)^+[A^H\ A^H]$

$=\frac{1}{2}[(A^HA)^+A^H\quad (A^HA)^+A^H]$

$=\frac{1}{2}[A^+,A^+]$

$B^+=(B^HB)^+B^H = (2A^HA)^+B^H = \frac{1}{2}(A^HA)^+(A^H\ A^H)$

$B^+=(B^HB)^{-1}B^H = [(A^H\ A^H)\binom{A}{A}]^{-1}$

$2A^HA$

六. 设 $A=(a_{ij})$ 是n阶方阵, 定义 $\|A\|_G=n\cdot\max_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|$ 验证 $\|A\|_G$ 是 $R^{n\times n}$ 中与向量2范数相容的矩阵范数

$\|Ax\|_2 \quad \|A\|_G\|x\|_2$

$\|Ax\|_2\le\|A\|_2\|x\|_2$

$\|A\|_F=\sqrt{\sum|a_{ij}|^2}$

~~$\|Ax\|_2\le\|A\|_G\|x\|_2=n\max|a_{ij}|\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$~~ $\ge n\sqrt{a_{ij}^2+a_{ij}^2+\cdots+a_{ij}^2}$

$\sum|a_{ij}|^2 \le n\cdot|a_{ij}|^2$

证: $\|Ax\|_2^2=\sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^2\le\left[\sum a_{ij}^2\sum x_j^2\right]\le n^2 a^2\sum x_j^2$

$n\max a_{ij}\ \|x\|_2$

七. 证明: (1) 若n阶方阵A适合 $A^k=I$, k是一正整数, 则A必可对角化.

(2) 若n阶方阵 $A\ne O$, 且有整数 $k\ge2$ 使得 $A^k=O$, 则A不可对角化.

(2) $A^k=0 \Rightarrow \lambda^k=0$ 　0是k重根. 不可对角化.

(1) 令A $Q^HAQ=\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}$ 则 $A=Q\begin{bmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{bmatrix}Q^H$, $A^k=\begin{bmatrix}\ \end{bmatrix}Q^H$

$A=Q[\ \ ]Q^H=[\ \ ]$

~~$Q^HAQ=$~~

A为对角阵 从而对角化.

$(A^kA^H)^H=A^H(A^k)^H=A^H A^k=$

八. 设 $A=\begin{pmatrix}2&1/2&1/2^2&1/2^3\\2/3&4&2/3^2&2/3^3\\3/4&3/4^2&6&3/4^3\\4/5&4/5^2&4/5^3&8\end{pmatrix}$, 用 Gerschgorin 定理讨论A的实特征值个数, 并说明A可否对角化.

$m(x)=x^k-1$ 　$m(A)=A^k-I$ 　$(x-1)(\ )$

A有4个不同的特征值. 可对角化.

$G_1\ |\lambda-2|\le\frac{7}{8}$

$G_2\ |\lambda-4|\le\frac{26}{27}$

$G_3\ |\lambda-8|\le\frac{126}{125}$

$P^{-1}AP=(\lambda_1\ \ddots\ \lambda_n)$ 　$x-1$ 　$|x^k-1|$

$P^{-1}A^kP=\begin{pmatrix}\lambda_1^k&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n^k\end{pmatrix}$ 　$\lambda_1\cdots\lambda_n$

$A^k=I$ 　$\lambda_i^k=1$ 　$x^k-1=0$ 　$x^k=1$

$x^3=1$

$(x-1)(x^2+ax+b)$

$x^3+ax^2+bx-x^2-ax-b$

$a=1$ 　$b=1$ 　(x^2+x+1)

矩阵理论 A 复习（2007.01）

姓名　　　　　　学号　　　　　　院系

1. 填空（20分）

(1) $A=\begin{pmatrix}3&2\\-1&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$A\otimes B$ 的全部特征值为(1, -1, 2, -2).

(2) 设 $A=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$，$\sum_{k=0}^{\infty}A^k=$ ($(I-A)^{-1}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}&\frac{4}{3}\end{bmatrix}$).

(3) $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ 的极小多项式为(λ^2)，Jordan 标准型为($\begin{matrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{matrix}$)

(4) $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_\infty=(4)$，$\|Ax\|_\infty=(4)$

(5)

$$B=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}&\frac{2}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{5}&\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix}$$

谱半径 $\rho(B)$ 范围是($\frac{48}{60}<\rho(B)<\frac{62}{60}$).

$\frac{20+15+12}{60}=\frac{47}{60}$

最小行和 $<\rho(B)<$ 最大行和

最小列和 $<\rho(B)<$ 最大列和

$\frac{4}{5}<\rho(B)<1$

2. (5分) 设 n 维线性空间 V 中第一组基与第二组基下的坐标有关系

$$y_1=x_1, y_2=x_2-x_1, y_3=x_3-x_2, \cdots, y_n=x_n-x_{n-1}$$

求第一组基到第二组基的过渡矩阵 A.

3. (15分) (1) 设 $A=\begin{pmatrix}6&6&0\\-3&-3&0\\-3&-6&3\end{pmatrix}$，求 A 与 $\cos(A)$ 的谱分解式.

$\begin{bmatrix}\lambda-6&-6&0\\3&\lambda+3&0\\3&6&\lambda-3\end{bmatrix}=\lambda(\lambda-3)^2$

极小多项式 $f(\lambda)=\lambda(\lambda-3)$

$f(A)=f(\lambda_1)G_1+f(\lambda_2)G_2$

令 $f(x)=x$　$f(x)=x-3$

$A=3\begin{vmatrix}2&2&0\\-1&-1&0\\-1&-2&1\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}-1&-2&0\\1&2&0\\1&2&0\end{vmatrix}$

$\cos A=\cos 3\,|\quad|+\cos 0\,|\quad|$

$e^{At}=e^{t}I+e^{t}\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}=e^{t}[$

(2) $A=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\end{bmatrix}$， 写出 $f(A)$ 的广义谱分解公式， 并计算 e^{At}

$f(\lambda)=(\lambda-1)^2$. $f(A)=f(1)G_1+f'(1)G_2$.

4.（18分） 令 $f(x)=x-1$ $\Rightarrow G_2=A-I$ $f(A)=f(1)I+f'(1)\begin{bmatrix}0&0\\2&0\end{bmatrix}$

令 $f(x)=x-1$ $G_1=I$.

(1)设 $\mathbf{A}_1=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=(2\quad 1\quad 1$

秩1

$x_0=A^+b$

$A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}_{4\times6}$，求 A^+ 与 $Ax=b$ 的极小范数解或最佳极小二乘解

$A_1^+=\frac{1}{15}\begin{bmatrix}1&-2\\1&-2\\-1&2\end{bmatrix}$ $A_2^+=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&1\\1&1\\0&0\end{bmatrix}$ $A^+=\begin{bmatrix}\frac{1}{15}&\frac{-2}{15}\\\frac{1}{15}&\frac{-2}{15}\\\frac{-1}{15}&\frac{2}{15}\\0&\\0&\\0&\end{bmatrix}$

(2)设 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}$，求 B 的奇异值分解.

$BB^H=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$ $\lambda_1=0$ $\lambda_2=5$. $\xi_1\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ $\xi_2\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt5}&\frac{-2}{\sqrt5}\\\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt5&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$A^+=\begin{pmatrix}A_1^+&0\\0&A_2^+\end{pmatrix}$

5.（10分） (1)设 $\|\bullet\|_*$ 是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中的矩阵范数，$\alpha=(1,0,\cdots,0)^H\in\mathbb{C}^n$，

验证 $\mathbb{C}^n$ 中的向量范数：$\|x\|=\|x\alpha^H\|_*$ 与矩阵范数 $\|\bullet\|_*$ 是 相容的

$\|Ax\|\le\|A\|_*\cdot\|x\|$ $\|Ax\|=\|Ax\alpha^H\|$ 矩阵

$A^+=\begin{pmatrix}\frac{1}{15}&\frac{-2}{15}&0&0\\\frac{1}{15}&\frac{-2}{15}&&\\\frac{-1}{15}&\frac{2}{15}&&\\0&0&&\\0&0&&\\0&0&&\end{pmatrix}$

(2) 令 $\|A\|_*=\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|$，是 $\mathbb{C}^{n\times n}$ 中的矩阵范数，求一种与其相容的向量范数.

利用(1)结论.

6.（8分） $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$，用拉直法解矩阵方程 $AYI+YB=C$.

补充： 利用拉直方法求方程 $\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}Y\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ 的最佳极小二乘解

$AYI+IYB=C$

$(A\otimes I+I\otimes B)\bar{Y}=\bar{C}$

$\Rightarrow Y=\begin{bmatrix}-4&4\\2&-1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1&0&2&0\\0&1&0&2\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2&0\\1&2&0&2\\0&0&1&0\\0&0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_{11}\\\vdots\\y_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\\2\\0\end{bmatrix}$

7. (6分) 求矩阵 A 的盖尔圆（讨论特征值的分布）； 并证明行列式

$$\det(A) > 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1).$$ 其中

$$A=\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & 4 & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & 6 & \cdots & \frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & 2n \end{pmatrix}$$

$|\lambda-2| < \frac{n-1}{n}$

$|\lambda-4| < \frac{n-1}{n}$

$\vdots$

$|\lambda-2n| < \frac{n-1}{n}$

$\therefore 1<\lambda_1<3$

$3<\lambda_2<5$

$\vdots$

$2n-1<\lambda_n<2n+1$

$\Rightarrow \det(A)=\lambda_1\cdots\lambda_n$

$> 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$

$(A^+-I)A$

8. (8分)

设 $A^2 = A = A^H$

$(A^+A)^H = A^+A$

$AA^+A = A$

$A(A^+A)^H = A$

$B = A^+A = A^+AA^+A = (A^+A)^H A^+A = C^HC$

(1)证明 两个值域正交: $\Re(A) \perp \Re(I-A)$.

设任意向量 x_1, x_2. 有 $((I-A)x_2)^H Ax_1 = (x_2^H - x_2^H A^H)Ax_1 = x_2^H Ax_1 - x_2^H A^H A x_1 = 0$

$\therefore$ B是半正定矩阵

(2) 计算 $(A^+-I)A$ $\Rightarrow N(A)$ 核空间

$A(A^+-I)A=0$

$A^+A - A = A^+AA^+A - AA^+A$

$A^+ = (A^HA)^+A^H$

$((A^HA)^+A^H - I)A$

$=(A^HA)^+A^HA - A$

$= A^+ \cdot A^2 - A$

$A^+A - A = I - A$

$A^+ \cdot A = A^2 = A$

9. (8分)

(1) 设 A 是任一矩阵，证明 $B = A^+A$ 是 Hermite 半正定矩阵;

$B = A^+A = (A^HA)^+A^HA = C^+C$

(2) 证明 A 是 n 阶酉矩阵的充分必要条件是，存在 Hermite 矩阵 B 使得

$A = e^{iB}$ ($i=\sqrt{-1}$)

$A = \cos B + i\sin B$

$AA^H = I$

$AA^H = I$

$A = e^{iB}$

$\because B^H = B$

$AA^H = e^{iB}(e^{iB})^H = e^{iB}\cdot$

$A^H = \cos B^H - i\sin B^H$

补充： 利用拉直方法求方程 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}_{2\times 2} Y_{2\times 2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{2\times 1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的最佳极小二乘解

证明: (1) $B^H = (A^+A)^H = A^+A$ Hermite阵. (2) $AA^H = I$

又 $\because B = (A^+A)(A^+A)^H$

$= A^+AA^+A = A^+A$

$\therefore$ B为半正定矩阵.

$A^+ = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \\ 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

补充:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{21} \\ y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$A^+b = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{20} \\ \frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} \\ \frac{1}{10} \end{bmatrix}$

$A \quad y = b$

98 年考题

设 Y 的基底 $(\gamma_1 \to \gamma_n)$ $Y=\mathrm{span}\{\cdots\}$ 对 $\forall x \in Y$，有 $x=\sum \beta_i \alpha_i$

则 $\gamma_1 \to \gamma_n \in Z$ 且无关

$\because \dim Y=\dim Z=n$

由 Z 中任意 n 个无关向量可作为 Z 的基

$\therefore Y=Z$

1. 设 Y、Z 是线形空间 X 的子空间，又 $\dim Y=\dim Z$，$Y \subset Z$，试证：$Y=Z$。

2. 在 R^3 中定义线性变换 T 为：对任意 $x=(x_1,x_2,x_3) \in R^3$，$Tx=(x_1-x_2, x_2-x_3, 2x_3)^T$。

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$Te_1=(1,0,0)^T=e_1\cdot 1$

$Te_2=(-1,2,0)^T=e_1(-1)+e_2\cdot 2$

$Te_3=(0,-1,2)^T=e_2(-1)+e_3\cdot 3$

$\therefore T[e_1,e_2,e_3]=[e_1,e_2,e_3]\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ $\therefore T$ 的矩阵表示为 A

回答下列问题：

a) 求 T 的特征值及各特征值的几何重数和代数重数。

b) 试判断 T 是否是可对角化的线性变换。不可对角化

c) 求 $\dim R(T)$ 及 $\dim N(T)$。$=3$，$=0$

d) 求 $R(T)$ 的一组基底（提示：取 R^3 的一组基底讨论之）。

$f(\lambda)=\det(\lambda I-A)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$

$\lambda_1=1$，$d_1=1$，$\lambda_2=2$，$d_2=2$

$\dim E_T(\lambda_1)=\dim E_A(\lambda_1)=\dim N(\lambda_1 I-A)=3-\dim R(\lambda_1 I-A)=3-\mathrm{rank}(\lambda_1 I-A)$

$\dim E_T(\lambda_1)=1$，$\dim E(\lambda_2)=1$，$t_2 \neq d_2$，故不可

$\dim R(T)=\dim R(A)=3$，$\therefore \dim N(T)=0$

取 R^3 的自然基底，如上可得 Te_1，Te_2，$Te_3 \in R(T)$，且 Te_1、Te_2、Te_3 线性无关，故可作为 $R(T)$ 的一组基

3. 设 E 为定义了内积 $(\cdot|\cdot)$ 的欧氏空间，试证对任意 $X,Y \in E$，都有

$$(X|Y)=\frac{1}{4}\left(\|X+Y\|^2-\|X-Y\|^2\right)$$

$\|X+Y\|^2-\|X-Y\|^2=(X+Y|X+Y)-(X-Y|X-Y)$

$=(X|X+X|Y+Y|X+Y|Y)-(X|X-X|Y-Y|X+Y|Y)$

4. 设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，证若存在正整数 $K\geq 2$，使 $A^K=0$，则必有 $A=0$。

A 是正规阵 $\Rightarrow A$ 酉相似于对角阵，即 $\exists\, U$ s.t. $A=U\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}U^H$，且 $U^H=U^{-1}$

$A^K=U\begin{bmatrix}\lambda_1^K & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^K\end{bmatrix}U^H$

$\because A^K=0$，则必有 $\begin{bmatrix}\lambda_1^K & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^K\end{bmatrix}=0$ $\therefore \lambda_i^K=0$ $\Rightarrow \lambda_i=0$

$\therefore A=U[\ ]U^H=0$

5. 求矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & i & 1\\ -i & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 的谱分解式，又设 t 为实数，试求矩阵 $\sin At$ 的正弦函数。

$A=\frac{A(A+\sqrt{2}I)}{4}G_1+\frac{A(A-\sqrt{2}I)}{4}G_3$

$\sin At=\sqrt{2}(G_1-G_3)=\frac{\sin\sqrt{2}t}{4}\left(A(A+\sqrt{2}I)-A(A-\sqrt{2}I)\right)=\frac{\sin\sqrt{2}t}{4}\cdot 2\sqrt{2}A=\frac{\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t}{2}A$

6. 证明：$H^+=H$ 的充要条件为 H^2 是幂等的 Hermite 阵且 $\mathrm{rank}\,H^2=\mathrm{rank}\,H$。

$(H^2)^H=(H^H H)^H=H^H H=H^2$，Hermite

$\mathrm{rank}\,H^H H=\mathrm{rank}\,H$ $\therefore \mathrm{rank}\,H^2=\mathrm{rank}\,H$

$H^+=H \Rightarrow (H^2)^2=(H^H H)^2=H^H H H^H H=H^H H=H^2$ 幂等

$\mathrm{rank}\,H^2=\mathrm{rank}\,H$，$R(H^2)\subset R(H)$ $\therefore R(H)=R(H^2)$

$\therefore H=H^+$

$HHH=H^2H=H^H H=H$ $\therefore H\in H\{1,2\}$

$(HH)^H=(H^2)^H=H^2=HH$，$\therefore H\in H\{1,2,3,4\}$

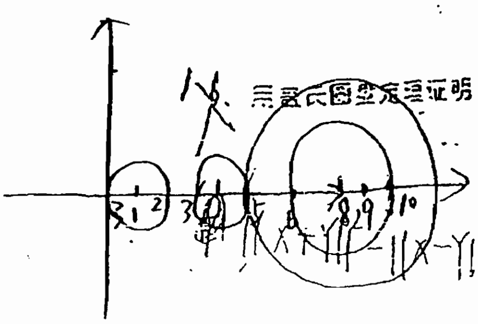
7. 求矛盾方程组 $AX=b$ 的极小范数最小二乘解，其中

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\\ 2 & 4\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$$

$AA^+b=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

8. 若 E 为幂等 Hermite 阵，证 $X\in E\{2,3,4\}$ 的充要条件是 X 为幂等 Hermite 阵且满足 $R(X)\subset R(E)$。

9. 用盖氏圆盘定理证明 $A=\begin{bmatrix}9 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 8 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 至少有两个实特征值。



$A^+A = (A^HA)^+A^HA = A^+(A^H)^+A^HA$ $= (A^HA)^+A^HA$

$= A^+(AA^+)^HA$

$(A^+A)^H = \left[(A^HA)^+A^HA\right]^H = (A^HA)^H\left[(A^HA)^+\right]^H$

$= (A^HA)((A^HA)^H)^+$

$AA^+ = AA^H(AA^H)^+$

$= AA^H(AA^H)^+$

$= A^+$

$(AA^+)^H = \left[(AA^+)AA\right]^H = (A^HA)^H\left[(A^HA)^H\right]^+$

$= (A^HA)(A^HA)^H$

$= AA^H(AA^H)^H = AA^+.$

$= A^+A$

8\. 已知 E 是 Hermite 阵且幂等，证 $X \in E\{2,3,4\} \Leftrightarrow X$ 幂等，Hermite 阵，$R(X) \subset R(E)$

证：E 是 Hermite 阵且幂等，则以下关系成立

$E^2 = E^HE = EE^H = \boxed{E = E^H}$

若 $X \in E\{2,3,4\}$，则 $XEX = X$，$(EX)^H = EX$，$(XE)^H = XE$

$\therefore X^2 = XXEX = X(XE)^HX$
$= XE^HX^HX = XEX^HX$
$= XEE^HX^HX$
$= XE(XE)^HX$
$= \underline{XEXE}X = XEX = X.$

$\therefore X$ 幂等

$X = XEX = E^HX^HX = EE^HX^HX = EXEX = EX$

对 $\forall y \in R(X)$，有 $\exists x$ s.t. $y = Xx = EXx \in R(E)$

$\therefore R(X) \subset R(E)$

$X^H = (EX)^H = EX = X$ $\therefore X$ 是 Hermite 阵

若 $R(X) \subset R(E)$，$X^2 = X$，$X^H = X$，则

$\exists Y$ s.t. $\underline{X = EY}$

$\therefore XEX = EYEEY = EYEY = X^2 = X$ $\therefore X \in E\{2\}$

$EX = EEY = EY = X = X^H = (EX)^H$ $\therefore X \in E\{3\}$

$XE = X^HE = X^HE^HE = \cancel{(EX)^HE}$

99年考题

1、给定 $P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，现定义线性变换 $T:\ C^{2\times 2}\to C^{2\times 2}, X\alpha\ PX$

取 $C^{2\times 2}$ 中的基底 $\beta_1=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right\}$，

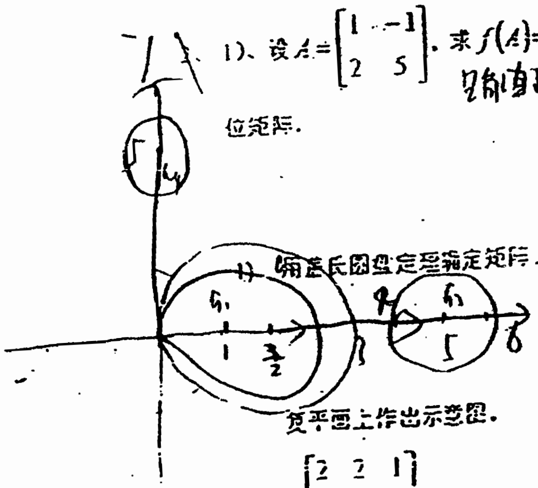
$\beta_2=\left\{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right\}$ $\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

1) 求T关于基底 β_1 的矩阵表示 A: $A=\vec{D}\vec{B_1}=$ $\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$

2) 设 x 在基底 β_1 下的坐标为 $(1,2,1,1)^T$，求 x 在基底 β_2 下的坐标 由 $X=\beta_1 b$ 知 $Y=P^{-1}X$ $=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$
$\beta_2=\beta_1 P$
$=\begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&-1&1&-1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\\1\end{bmatrix}$
$=[-1,1,0,1]^T$

2、设 $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 5\end{bmatrix}$，求 $f(A)=2A^4-12A^3+19A^2-29A+30I$，其中 I 为单位矩阵。

见前面在作業 除用式解 的多式



3、用盖氏圆盘定理确定矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & i & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 5 & \frac{i}{2}\\ 1 & 0 & 0 & 5i\end{bmatrix}$ 的特征值分布范围，并在复平面上作出示意图。

G_1, G_2 中有两个
G_3, G_4 各一个

4、设 $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$，求 A 的谱分解。$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^2(\lambda-5)$ 最小多项式 $(\lambda-1)(\lambda-5)$

故 $G_1=\frac{A-5I}{4}$ $G_2=\frac{A-I}{4}$ 故 $A=1\cdot G_1+5G_2$

5、设 $t\in R$，$A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$，求矩阵函数 e^{At} 的有限形式。$|\lambda I-A|=(\lambda-3)^2(\lambda-5)$ 最小多项式：$(\lambda-3)(\lambda-5)$

故 $J=\begin{bmatrix}3 & & \\ & 3 & \\ & & 5\end{bmatrix}$ 故 $e^{At}=\begin{bmatrix}e^{3t} & & \\ & e^{3t} & \\ & & e^{5t}\end{bmatrix}$ 最小范数解 $X=A^{(1,4)}b$

$A^{(1,4)}=A^H(AA^H)^{-1}$

6、求 $\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=1\\ -x_2+2x_3=1\end{cases}$ 的最小范数解。矩阵形式 $\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 最小范数解 A^+b 因 A 行满秩 故 $A^+=A_R^{-1}=A^H(AA^H)^{-1}=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}6 & 2\\ 3 & 8\end{bmatrix}$ …… $=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}1&0\\2&-1\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&4\\4&\end{bmatrix}$ $=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}5&4\\6&2\\3&8\end{bmatrix}$

7、设 T 是 R^3 上的线性变换 $\forall x=(\rho_1,\rho_2,\rho_3)\in R^3$，$Tx=(0,\rho_1,\rho_2)$，分别求 $R(T^2)$ 和 $N(T^2)$ 的基底和维数。

求 A.

$A=T(\varepsilon)=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ 故 $R(T)=R(A)=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}=\mathrm{span}\{\alpha_1,\alpha_2\}$ $X=A^{(1,4)}b$

$\dim R(A)=2$

$N(T)=N(A)=\mathrm{span}\begin{Bmatrix}0\\0\\1\end{Bmatrix}$ $\dim N(A)=1$

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=-\sqrt{2},\ \lambda_3=\sqrt{2}$

令 $\varphi_1(\lambda)=(\lambda+\sqrt{2})(\lambda-\sqrt{2})$

$\varphi_2(\lambda)=\lambda(\lambda-\sqrt{2})$

$\varphi_3(\lambda)=\lambda(\lambda+\sqrt{2})$

$A^2=\begin{vmatrix}2&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{vmatrix}$

$P_1=\frac{\varphi_1(A)}{\varphi_1(0)}=\frac{(A+\sqrt{2}I)(A-\sqrt{2}I)}{(0+\sqrt{2})(0-\sqrt{2})}=\frac{A^2-2I}{-2}=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}+I$

$P_2=\frac{\varphi_2(A)}{\varphi_2(-\sqrt{2})}=\frac{A(A-\sqrt{2}A)}{-\sqrt{2}(-\sqrt{2}-\sqrt{2})}=\begin{vmatrix}0&0&0\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{vmatrix}$

$=\frac{A^2-\sqrt{2}A}{2\sqrt{2}\sqrt{2}}=\frac{A^2}{2\sqrt{2}}-\frac{A}{2}\ \boxed{\frac{A^2-\sqrt{2}A}{4}}$

$P_3=\frac{\varphi_3(A)}{\varphi_3(\sqrt{2})}$

$=\frac{A^2+\sqrt{2}A}{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{2})}$

$=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&0&0\\0&\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{-2}{2\sqrt{2}}\\0&\frac{2}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&0&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{-2}{2\sqrt{2}}\\-\frac{1}{2}&\frac{2}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{vmatrix}$

$=\boxed{\frac{A^2+\sqrt{2}A}{4}}=\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{-2}{2\sqrt{2}}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2\sqrt{2}}&\frac{1}{2\sqrt{2}}\end{vmatrix}$

$\therefore A=\sum\lambda_i P_i$ 验 $P_1+P_2+P_3\ \begin{vmatrix}0&0&0\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&-\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}$

2、求 e^{At}. 由 $f(\lambda)=\lambda(\lambda^2-2)$

设 $\varphi(\lambda)=a_0(t)+a_1(t)\lambda+a_2(t)\lambda^2$

则

$$\begin{cases}a_0(t)+a_1(t)\cdot 1+a_2(t)=e^t\\ \cancel{a_1(t)+2a_2(t)=\cos t}\\ a_0(t)+a_2(t)(-\sqrt{2})+2a_2(t)=e^{-\sqrt{2}t}\\ a_0(t)+a_2(t)\sqrt{2}+2a_2(t)=e^{\sqrt{2}t}\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{aligned}a_1&=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}t}\\ a_2&=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}t}-e^t\\ a_0&=2e^t-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}\end{aligned}$$

$\therefore f(A)=\varphi(A)=(2e^t-\sqrt{2}e^{\sqrt{2}t})I+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}t}A+(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}t}-e^t)A^2$

2000 年考题

1、画出矩阵 $A=\begin{bmatrix} 7-2i & i & \frac{i}{2} & 0 \\ \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i & 4+\frac{3}{2}i & \frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1-\frac{1}{2}i & 1+4i & 1 \\ i & 0 & -2 & -4+3i \end{bmatrix}$ 的盖氏圆盘，问矩阵 A 有几个实特征根，几个虚特征根.

2、给定线性空间 V，试严格由线性空间的定义推出：若 $X\in V$，且 $X+X=X$，则 $X=0$（0为V中的零向量）.

3、已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$，在 R^2 中的二元函数 x，y 定义为 $(x\,|\,y)=y^TAx$，求

a) 证 $(x\,|\,y)$ 为 R^2 上的内积；

b) 给定的内积定义 $(\cdot\,|\,\cdot)$ 构成一个内积空间，试由 R^2 的自然基底 $e_1=(1,0)^T, e_2=(0,1)^T$ 用一个 G—S 过程求 R^2 标准正交基.

4、X 为 C^4 的线性空间，其一组基底为 $\alpha=[x_1,x_2,x_3,x_4]^T$，$T\in L(X,X)$ 为 C^4 上的线性变换，T 关于基 α 的矩阵表示为 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

a) 求 T 的特征值及特征子空间；

b) 求 $R(T)$ 和 $N(T)$ 的基底和维数；

c) 判断 T 是否可对角化.

5、已知 $A=\begin{bmatrix} 0 & i & 2\sqrt{2}\\ -i & 0 & 0\\ 2\sqrt{2} & 0 & 0\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$，求 A 的谱分解并求 $AX=b$ 的最小范数最小二乘解.

6、设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵，W 为 C^n 的子空间，若 W 为 A 的不变子空间，则 $W^{\perp}$ 也是 A 的不变子空间，其中内积 $(\cdot\,|\,\cdot)$ 取 C^n 的标准内积.

x 轴对称，故无多根

若有实根，只能是 4，∴ 4 个全是虚根

$1 = a_1\alpha_1 + \cdots + a_n\alpha_n$

$\Rightarrow 2a_1=a_1, \cdots, 2a_n=a_n \Rightarrow a_1=a_2=\cdots=a_n=0$

$\theta_1+\theta_2=\theta_1=\theta_2$

$\lambda_i=3$

$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}3 & \\ & 3\end{bmatrix}$

$(x|x)=x^TAx$

$(x|y)=y^TAx$

(a) 求 A 的特征值

$|\lambda I-A|=(\lambda-1)^4$ 由 $(A-I)X=0 \Rightarrow x_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ $x_2=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

故 T 的特征值为 1, 1, 1, 1

特征子空间为 $\mathrm{span}\{(x_1\,x_2\,x_3\,x_4)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, (x_1\,x_2\,x_3\,x_4)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\} = \mathrm{span}\{x_3, x_4\}$

b) $R(T)=R(A)$

$=\mathrm{span}\{x_1+x_2-x_4,\ x_2+x_3-x_4,\ x_3,\ x_4\}$

$=\mathrm{span}\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

$\dim R(T)=4$

(c) 因 A 不可对角化，故 T 不可对角化

$|\lambda I-A|=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)$

$A^H=A$，A 是 Hermite 矩阵

$\frac{A b}{9}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2\sqrt{2}+i\\ -i\\ 2\sqrt{2}\end{pmatrix}$

6

设 $x_1,\cdots,x_n$ 是线性空间 V 的一组基底

1) 求下列向量组 $u_1=x_1,\ u_2=x_1+x_2,\cdots,u_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$ 是 V 的一组基底

设 $k_1u_1+k_2u_2+\cdots+k_nu_n=0$

$k_1x_1+k_2(x_1+x_2)+\cdots+k_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)=0$

$(k_1+k_2+\cdots+k_n)x_1+\cdots+k_nx_n=0$

因 $x_1\cdots x_n$ 线性无关，故 $k_n=0\cdots k_1+k_2+\cdots+k_n=0$，$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$，故 $\{u_1\cdots u_n\}$ 是 V 的一组基底

2) 求 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 到 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ 的过渡矩阵 P.

$(u_1\cdots u_n)=(x_1\cdots x_n)\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\0&\ddots&\vdots\\0&0&1\end{pmatrix}$

3) P 是否可对角化？为什么？

因 $rank(P-I)=n-1$ 故 特征向量少，故不能对角化。

8、设 $A\in C^{m\times n}$，证明：

1) $A^{(1)}A=I_n \Leftrightarrow rankA=n$

2) $AA^{(1)}=I_m \Leftrightarrow rankA=m$

$rank(A^{(1)}A)=rank(AA^{(1)})=rankA$

若 $A^{(1)}A=I_n$ 则 $rank(A^{(1)}A)=n \Rightarrow rankA=n$

— — — — $\Rightarrow rankA=m$

若 $rankA=n$ 则 A 列满秩，$A^{(1)}A$ 是幂等的 $rank(A^{(1)}A)=rank(A)=n$. 故 $A^{(1)}A$ 满秩 故 $(A^{(1)}A)^{-1}$ 存在 $A^{(1)}A=(A^{(1)}A)^{-1}(A^{(1)}A)^2=(A^{(1)}A)^{-1}A^{(1)}A=I_n$

9、证明幂等的正规矩阵 $A\in C^{n\times n}$ 必可化为 Hermite 阵。

A 是正规阵，A 酉相似于 $diag[\lambda_i]$，A 幂等，λ_i 非 0 即 1 $\therefore diag[\lambda_i]$ 是 Hermite 阵

$\therefore A=Q^HAQ$，$\lambda_i=\bar{\lambda_i}$，A 可化为 Hermite 阵

10、设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规矩阵 $\omega\subset C^n$ 为 C^n 的子空间。证：若 ω 为 A 的不变子空间，则 ω 也是 A^H 的不变子空间。

证：A 正规 $\Longrightarrow$ 可谱分解 $A=\sum\lambda_iP_i$ $P_i(A)=P_i(\lambda_i)P_i$

由 ω 为 A 的不变子空间 $\Rightarrow$ 对 $\forall x$，$P_ix\in W$ $\Rightarrow A^H=\sum\bar{\lambda_i}P_i$

对 $\forall x\in W$. $A^Hx=\sum\bar{\lambda_i}P_ix_i$ $\therefore W$ 也是 A^H 的不变子空间

设 X 为 R 上线性空间，$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为 X 的一组基底，试在 X 中定义一种内积，使 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 这种定义的内积下成为 X 的一标正交基底（两两正交（相互垂直），模为 1）。

对 $\forall x=\beta_x\alpha$. $(\alpha=(\alpha_1,\alpha_2\cdots\alpha_n)^T)$

和 $\forall y=\beta_x\beta$ $(\beta=(\beta_1,\beta_2\cdots\beta_n)^T)$

定义 $(x|y)=\sum\alpha_i\beta_i$ 则易证 $(x|y)$ 符合内积定义。

且 $x_i|x_i=1$.

$x_i|x_j=0$ $(i\neq j)$

研究生矩阵论试卷（A）（2006）

姓名　　　　　　学号

一．设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$．(1) 计算 $f(A)=e^{A}$

(3) 写出 A 的谱分解．

解：极小式 $(s+1)(s+2)(s+3)$

$f(A)=f(-1)G_1+f(-2)G_2+f(-3)G_3$

$\Rightarrow G_1=\frac{1}{2}(A+$

$G_2=-(A+$

$G_3=\frac{1}{2}(A+2$

$\Rightarrow f(A)=$

$e^{A}=e^{-1}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+$

$=\begin{bmatrix}e^{-1} & & \\ 0 & e^{-2} & \\ 0 & & \end{bmatrix}$

二．设 $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$．(1) 求A的最

能否对角化．极小式 $f(\lambda)=(\lambda-1)^3$

极小式为：$f(A)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

三．证明：方程组 $Ax=b$ 有解的等价条件是

证明：若 $AA^{+}b=b$ 令 $x_0=A^{+}b$ 则 Ax

$=$

四．设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$，(1) 求

(3) 求方程 A X ＝ b 极小范数解或最佳极

解：$A^{H}A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$　　　$A=$

$\lambda_1=2\quad \lambda_2=1$

$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\quad \xi_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$　　　(2) $A^{+}=$

$(A^{k-1})^+ = (A^+)^{k-1}$

A^+A

$A^k (A^+)^k A^k$

$A^k (A^+)^{k-1} \cdot A^+ A^k$

$A^k (A^+)^{k-1} A^{k-1} A A^+$

$A \cdot A^{k-1} (A^+)^{k-1} A^{k-1} A A^+$

$A A^{k-1} A A^+$

$A \cdot A^{k-1}$

$A^{k-1} A A^+ A$

$(A^+)^{k-1} A^{k-1} (A^+)^{k-1}$

$(A^+)^k A^k (A^+)^k$

$A^+ (A^+)^{k-1} A^{k-1}$

$A A^{k-1} \cdot A^+ A$

$A^{k-1} A A^+ A$

A^k

$A (A^+)^k$

$A A^+ \cdots A^+$

$A A^+ \cdots A^+$

$A^+ (A^+)^{k-1} A^{k-1} (A^+)^{k-1}$

$A^+ (A^+)^{k-1} A A^+$

$A^{k-1} = ((A^+)^{k-1})^+$

$(A^n)^+ = (A^+)^n$

$A^k A^+$

$(A^k (A^+)^k)^H (A^+)^k$

$(A^+)^n = (A^n)^+$

$(A^+)^{k-1} = (A^{k-1})^+$

$(A^k)^+ = (A^+)^k$

$= ((A^+)^k)^H (A^k)^H$

$= ((A^+)^H)^k$

$A^{k-1} A (A^+)^{k-1} A^+$

$(A^{k-1} (A^+)^{k-1} A A^+)^H$

$(A^+)^{k-1} A^{k-1}$

$(A^+)^{k-1} A^+ A A^+$

$(A^+)^k$

$((A^+)^k A^k)^H$

$\cancel{(A^+A)}$

$A^+ (A^+)^{k-1} A^{k-1} A$

$A^+ A^+ \cdots A^+ A$

$A A^+$

$(A^+ A (A^+)^{k-1} A^{k-1})^H$

$((A^+)^{k-1} A^{k-1})^H A^k (A^+)^k$

$A^+ A \quad A^+$

$= A A^+ \quad A A^+$

$((A^+)^{k-1} A^{k-1} (A^+ A)^H$

$(A^+)^k A^k \cdot A^+ A$

$= (A A^+)^H$

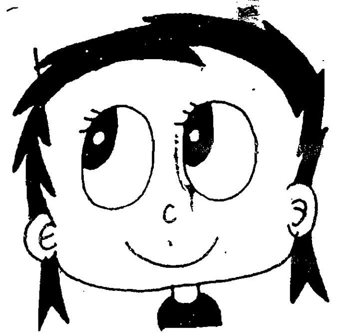
$= A A^+$

$A^{k-1} (A^+)^{k-1}$

$A A^+$

$A^{k-1} (A^+)^{k-1}$

$A (A^+ \cdots A^+)$



1. 画出矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1-2i & i & 2 & 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i & 4+2i & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 1-2i & 1+4i & 1 \\ i & 0 & -2 & -4+3i \end{bmatrix}$ 的盖尔圆盘，并说明每个圆盘内特征值个数。

~~2.~~ 给定线性空间 V，试用线性空间的定义推出：若 $x\in V$，且 $x+x=x$，则 $x=0$（0为V中的零元素）

3. 已知矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&5\end{bmatrix}$，在 R^2 中的二元函数 x、y，定义为 $(x|y)=y^TAx$

a) 证 $(x|y)$ 为 R^2 上的内积　①正定 ②齐次 ③三角不等　$(x|x)=x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$　$(kx|y)=k(x|y)$

b) 按 a) 中给定的内积定义 $(\cdot|\cdot)$ 构成一个内积空间，试由 R^2 的自然基底 $e_1=(1,0)^T$，$e_2=(0,1)^T$，用一个 G-S 过程求 R^2 标准正交基　$\alpha_1=e_1$，$\alpha_2=e_2-\frac{(e_2,\alpha_1)}{(e_1,e_1)}\alpha_1=(-2,1)^T$　$u_1=(1,0)^T$，$u_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)^T$

4. X 为 C^4 的线性空间，其一组基底为 $B_x=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}^T$，$T\in L(X,X)$ 为 C^4 上的线性变换，T 关于 B_x 的矩阵表示为 $A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\-1&-1&0&1\end{bmatrix}$

a) 求 T 的特征值和特征子空间

b) 求 $R(T)$ 与 $N(T)$ 的基底和维数

c) 判断 T 能否对角化

$\lambda=1$ 特征子空间 $\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$

5. 已知 $A=\begin{bmatrix}0 & i & 2\sqrt{2}\\ -i & 0 & 0\\ 2\sqrt{2} & 0 & 0\end{bmatrix}$　$b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$　求 A 的谱分解，并求 $Ax=b$ 的最小范数最小二乘解。

6. 设 $A\in C^{n\times n}$ 为正规阵，W 为 C^n 的子空间，证：若 W 为 A 的不变子空间，则 $W^\perp$ 也是 A 的不变子空间，其中内积 $(\cdot|\cdot)$ 取 C^n 的标准内积。

7. 设 $A\in C^{m\times n}$　$P\in C_m^{m\times m}$　$Q\in C_n^{n\times n}$　$B\in C^{m\times n}$ 且 $PAQ=B$　$x=N(A)$

证 $A\{1,2\}=\{G\mid G=QB^{(1,2)}P,\ B^{(1,2)}\in B\{1,2\}\}$。

8. 已知 n 阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，求 e^{At} 的值

$m\neq 0$ 时

$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \cdots \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots \\ & & 1 & t & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \cdots & t \\ & & & & 1\end{bmatrix}$

4 (b) $\dim R(T)=4$　基底 $[e_1+e_2-e_4,\ e_2+e_3-e_4,\ e_3, e_4]$

c) T 不能对角化

5. $f(A)=f(0)L_1+f(3)L_2+f(-3)L_3$

$A=3\cdot\frac{A(A+3I)}{3\cdot 6}+(-3)\frac{A(A-3I)}{-3\cdot -6}=3\cdot\frac{A(A+3I)}{18}+(-3)\frac{A(A-3I)}{18}$

$A=\begin{bmatrix}0&i\\-i&0\\2\sqrt{2}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-2\sqrt{2}i\end{bmatrix}=BC$　$A^+=C^H(CC^H)^{-1}(B^HB)^{-1}B^H$

$x=A^+b$

7. $AGA=AQB^{(1,2)}PA=P^{-1}\underline{PAQ}B^{(1,2)}\underline{PAQ}Q^{-1}=P^{-1}BB^{(1,2)}BQ^{-1}=P^{-1}BQ^{-1}=A$

$GAG=QB^{(1,2)}\underline{PAQ}B^{(1,2)}P=QB^{(1,2)}BB^{(1,2)}P=QB^{(1,2)}P=G$　$\therefore G\in A\{1,2\}$

---

1. 用盖氏圆盘定理证明矩阵 $A=\begin{bmatrix}4 & 0.2 & 0.2\\ 0.2 & 6 & 0.3\\ 0.2 & 0.2 & 8\end{bmatrix}$ 有三个互异特征值，实数。(12')

2. 证明数域 F 上的线性空间 X 与它的传递子空间有相同的零元素。(10')

3. (12') 已知 X 是数域 F 上的线性空间，且 $\dim X=3$，$T\in L(X,X)$，$B_x=[\eta_1, \eta_2, \eta_3]$，线性变换 T 在基底 B_x 下的矩阵表示 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix}$，试求 $R(T)$ 与 $N(T)$ 及其维数

4. 设 A 是正规阵，W 是 A 的不变子空间，证明 $W^\perp$ 也是 A 的不变子空间 (12')

5. 设 $A\in C^{5\times 5}$，已知 $\lambda I-A$ 的初等因子组为 $\lambda-1$，$\lambda-1$，$\lambda+2$，$\lambda-2$，$\lambda-5$。

试求 $\lambda I-A$ 的不变因子组，各阶行列式因子及 A 的最小多项式，并证明 A 可对角化。(12')

6. 证明：如果 A 是正规矩阵，则 $A^+A=AA^+$，$(A^n)^+=(A^+)^n$ 其中 n 是正整数 (12')

7. 设 $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&0\\1&0&2\end{bmatrix}$ 求 A 的谱分解 (15')　$\lambda_1=2$　$\lambda_{2,3}=2\pm\sqrt{2}$

8. 设 $A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 计算 e^{At} (15')　$=\begin{bmatrix}1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{3!}t^3\\ & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ & & 1 & t \\ & & & 1\end{bmatrix}$　$f(\lambda)=e^{\lambda t}$

1. $D_1=|z-4|\le 0.2$　D_2 $|z-6|\le 1$　D_3 $|z-8|\le 0.4$

3. $\dim R(T)=\mathrm{Rank}\,T=\mathrm{Rank}\,A=3$　$\therefore \dim N(T)=0$　$\Rightarrow N(T)=0$

$R(T)=[e_1+e_2-e_3,\ e_2+2e_3,\ e_1+e_3]$

5. 行列式因子 $D_1=1$　$D_2=1$　$D_3=1$　$D_4=(\lambda-1)$　$D_5=(\lambda-1)^2(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-5)$

不变因子组 $d_1(\lambda)=d_2(\lambda)=d_3(\lambda)=1$　$d_4(\lambda)=(\lambda-1)$　$d_5(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+2)(\lambda-5)$

$m_A(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-5)$

$m_A(\lambda)$ 无重根 $\Rightarrow$ A 可对角化

6. 证明：A 正规，即有 $A=U\begin{bmatrix}T&0\\0&0\end{bmatrix}U^H$　$T=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r\end{bmatrix}$

$A^+=U\begin{bmatrix}T^{-1}&0\\0&0\end{bmatrix}U^H$　$A^+A=U\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}U^H=AA^+$

$(A^n)^+=U\begin{bmatrix}(T^n)^{-1}&0\\0&0\end{bmatrix}U^H=U\begin{bmatrix}(T^{-1})^n&0\\0&0\end{bmatrix}U^H=(A^+)^n$

7. $A=2\cdot\frac{[A-(2+\sqrt{2})I][A-(2-\sqrt{2})I]}{(2-(2+\sqrt{2}))(2-(2-\sqrt{2}))}+(2+\sqrt{2})\frac{(A-2I)[A-(2-\sqrt{2})I]}{(2+\sqrt{2}-2)(2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2})}+(2-\sqrt{2})\frac{(A-2I)[A-(2+\sqrt{2})I]}{(2-\sqrt{2}-2)(2-\sqrt{2}-(2+\sqrt{2}))}$

$=-1\cdot(A^2-4A+2I)+\frac{2+\sqrt{2}}{4}[A^2-(4-\sqrt{2})A+(4-2\sqrt{2})I]+\frac{2-\sqrt{2}}{4}[A^2-(4+\sqrt{2})A+(4+2\sqrt{2})I]$

1

4　6　8

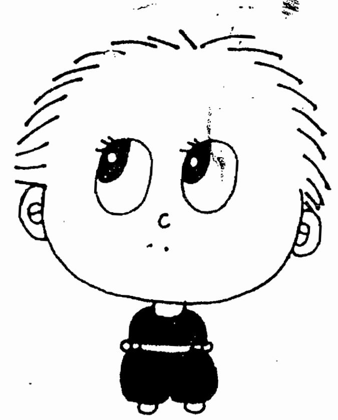
2　$S\subset X$，设 θ_1 为 S 中的零元，θ_2 为 X 中的零元，

在 S 空间中任何向量 z，有 $z+\theta_1=z$

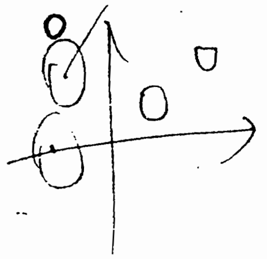
在 X 空间中任何向量 z，有 $z+\theta_2=z$，则 $\theta_1+\theta_2=\theta_1$

则有 $z+\theta_1+\theta_2=z+\theta_1$　$\Rightarrow z+\theta_2=z+\theta_1$

$\Rightarrow \theta_1=\theta_2$



? 5.7
正定矩阵
三.(2)
基底



一、选择（单选）

1. 设V是数域F上的线性空间，$x_1, x_2 \cdots x_k$ 是V中的一组向量，如果存在一组 E 的数 $a_1, a_2 \cdots a_k$ 使得 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k = 0$，则称 $x_1, x_2 \cdots x_k$ 为空间中的线性相关向量组。
A. 不全为0　B 不全为零的F中　C 至少有一个零的F中　D 至少一个不为零的F中

2. 设V是数域F上的线性空间，$x_1, x_2 \cdots x_n$ 是V中的向量，如果 $n > \dim V$，则 $x_1 \cdots x_n$ 必 C
A. 线性无关　B. 全为零向量　C 线性相关　D 有一个为零向量

3. n维线性空间中的向量 B 有n个分量
A 不一定　B 一定　C. 肯定没　D. ABC都对
3维 $e_1\ e_2\ e_3$
n维 $e_1\ e_2$

B 4. 设X是数域F上的线性空间，S是X的真子空间，$x_1, x_2 \cdots x_n$ 是X中的基底，则S的基底 A
A. 一定是 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 的某些向量　B 不一定是 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 的子集　C 一定不是 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 的子集
D 其每个向量均必不可由 $x_1, x_2 \cdots x_n$ 线性表出

5. 设V是数域F上的线性空间，$B_x = \{x_1, x_2 \cdots x_n\}$ 是V的一个基底，$B \in F^{n\times r}$，$r < n$，如果V中向量 $y_1, y_2 \cdots y_r$ 满足 $[y_1, y_2 \cdots y_r] = [x_1, x_2 \cdots x_r]B$，则 C
$T x = [x_1 \cdots x_r]B$
$\Rightarrow$　y　$n\times r \times n\times r$
A $y_1, y_2 \cdots y_r$ 线性相关　B $y_1, y_2 \cdots y_r$ 线性无关
C $[y_1, y_2 \cdots y_r]$ 是列满秩的 $F^{n\times r}$ 中的矩阵　D $[y_1 \cdots y_r]$ 是行满秩的 $F^{n\times r}$ 中的矩阵

6. 设 $T \in L(X, X)$，X为数域F上的线性空间，B_x 为X中给定的基底，则T在基底 B_x 之下的矩阵表示 A
A. 唯一　B 不唯一　C 任意　D 可逆的

7. 设X为数域F上的线性空间，$T \in L(X, X)$，又设A是T在基底 B_x 之下的矩阵表示，则 ___
A $\dim R(T) + \dim N(T) = \dim X$ 且 $X = R(T) \dotplus N(T)$
B $\dim R(A) + \dim N(A) = \dim X$. 且X是 $R(T) \dotplus N(T)$ 的补空间
C. $\dim R(A) + \dim N(A) = \dim X$，且 $R(A)$ 与 $N(A)$ 均为X的子空间
D $\dim R(A) + \dim N(A) = \dim X$. 且 $R(T)$ 与 $N(T)$ 均为X的不变子空间
④ $R(A^H)$

8. 设V为数域F上的线性空间，S_1, S_2 均为V的子空间，又设 $\dim S_1 = m$，$\dim S_2 = n$，$\dim(S_1 \cap S_2) = k$，则 $\dim(S_1 \cup S_2) =$ D
A $m+n$　B $m-n+k$　C $m-n-k$　D $m+n-k$
$\lambda_1 = 1$　$\lambda_2 = 4$

9. 设 $A \in \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ 则 $A^{100} =$ B
$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 \\ 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4)$　$f(\lambda) = \lambda - 1$
$\therefore A - I = 3P_2$　$\therefore P_2 = \frac{1}{3}(A - I)$
A $\begin{bmatrix} 100 & 2^{100} \\ 0 & 4^{100} \end{bmatrix}$　B $\begin{bmatrix} 1 & \frac{2(4^{100}-1)}{3} \\ 0 & 4^{100} \end{bmatrix}$　C $\begin{bmatrix} 1 & \frac{4^{100}-1}{3} \\ 0 & 4^{100} \end{bmatrix}$　D 都不对
$f(\lambda) = \lambda - 4$　$\therefore P_1 = -\frac{1}{3}(A - 4I)$
$\therefore f(A) = f(1)P_1 + f(4)P_2$
$A^{100} = -\frac{1}{3}(A - 4I) + 4^{100}\frac{1}{3}[A - I]$
$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{4}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{3}4^{100} \\ 0 & \frac{2}{3}\times 4^{100} \end{bmatrix}$
$\frac{2}{3}\times 4^{101} - \frac{4}{3}$
$(4^{100} -$

10. 设 $A \in C^{7\times 7}$ 而 $\lambda I - A$ 的初等因子组为 $\lambda-1$. $\lambda-1$. $(\lambda-2)^3$. $(\lambda-3)^2$. 则A的若当标准形为 C
A. $J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & J_3 & \\ & & & J_4 \end{bmatrix}$　$J_1 = [1]$　$J_2 = [1]$　$J_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$　$J_4 = [3]$
B. $J_1 = [1]$　$J_2 = [1]$　$J_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　$J_4 = [3]$
C $J_1 = [1]$　$J_2 = [1]$　$J_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　$J_4 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$
D $J_1 = [1]$　$J_2 = [1]$　$J_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$　$J_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

二 设 $A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 1) [illegible] 的分布情况
2) 说明A至少有两个实特征值

三. 设 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 并且定义 R^2 上的函数为 $(x|y) = y^TAx$. 试证 $(x|y)$ 为 R^2 上的一个内积 (1)
(2) 进而求内积空间 $(R^2, (\cdot|\cdot))$ 上的一个标准正交基
$u_1 = [1, -?]$

四 设P是 C^n 中的正交投影算子 $P^2 = P$　$P^H = P$，证明对 C^n 中任意向量K有 $(PK|K) = \|PK\|^2$，其中 $(\cdot|\cdot)$ 为 C^n 中 ~~的标准内积，范数 $\|\cdot\|$ 是由此内积诱导出的范数~~
$\|PK\|^2 = (PK|PK) = (PK)^H(PK) = K^HPK = (PK|K)$
$P^H = P$

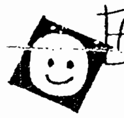
五 设 $T \in L(R^3, R^3)$，且对任意 $X \in R^3$，若 $X \in (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$，则 $TX = (4\xi_1 + \xi_3, 2\xi_1, 13\xi_2 - 2\xi_3, \xi_1 + 4\xi_3)^T$.
试求 ① $R(T)$. $N(T)$ 及其基底　② 求 $\dim R(T)$ 和 $\dim N(T)$　③ T是否可对角化，并说明理由.

六 设 $A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$. 求A的谱分解式.
$\lambda_{1,2} = 1$　$\lambda_3 = -2$
$\therefore A = \frac{1}{4}(3I - A)(A + I) + \frac{1}{2}(A - I)(3I - A) + \frac{1}{6}(A - I)^2$

七 已知 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 求 $\sin At$.　$f(A) = f(1)L_1 + f'(1)L_2 = f(1)(A - I) + \sin t$
$\sin At = \sin t + t\cos t(A - I)$

八 给定线性方程组 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$ 试求其最小范数最小二乘解
正规阵已证
$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$　$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

九 设 $A = A^H$. 试证 1) $A^+A = AA^+$　2) $A^+A^2 = A^2A^+$
$A^+b = [\ldots] = [\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{16}]^T$



十 如果A是一个正规阵. W是A的一个不变子空间. 试证W的正交补 $W^\perp$ 也是A的不变子空间
(限用谱分解理论证明)
$R(A^2) = R(A)$
互补 $3 = 0$

? 十一 设 $A \in C^{n\times n}$，且 $C^n = R(A) + N(A)$. 证明: $\operatorname{rank} A^2 = \operatorname{rank} A$ 的充要条件是 $C^n = R(A) \dotplus N(A)$

3. $T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$　$R(T) = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$　$N(T) = 0$
$\dim R(T) = 3$　$\dim N(T) = 0$
T中 $\lambda_1 = 5$　$\lambda_{2,3} = 3$（代数重数2）几何重数1
$\therefore$ 不可对角化

9 1) A正规 $\Rightarrow A = U\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^H$　$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_r \end{bmatrix}$（r—即A的秩）
$A^+ = U\begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^H$　$\therefore A^+A = U\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^H = AA^+$
2) $A^+A^2 = U\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}U^H = A^2A^+$

11 充分性即证: $C^n = R(A) \dotplus N(A) \Rightarrow \operatorname{rank} A^2 = \operatorname{rank} A$
取 $y \in R(A)$ 则 $Ax = y$　取 $Az = x$ 则 $A^2z = y$　$\therefore y \in R(A^2)$　$\Rightarrow R(A) \subset R(A^2)$
且 $R(A^2) \subset R(A)$ $\Rightarrow$ $R(A) = R(A^2) \Rightarrow \operatorname{rank} A^2 = \operatorname{rank} A$
$R(A) \supset R(A^2)$

必要性: $\because \operatorname{rank} A^2 = \operatorname{rank} A$ 且 $N(A) \subset N(A^2) \Rightarrow N(A^2) = N(A)$
设 $Y \in (R(A) \cap N(A))$　即 $AY = 0$ 且 $AX = Y$　$\Rightarrow A^2X = 0$　即 $X \in N(A^2)$
那么 $X \in N(A) \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow Y = 0$　即 $C^n = R(A) \dotplus N(A)$

六. 若重根不是1，还可不可以用Lagarange有限公式求谱分解式　$f(A) = f(1)L_1 + f'(1)L_2 + f(2)L_3$