2011—2012 学年 第一学期末试卷(A)

学号__________　　姓名__________　　成绩__________

考试科目：《 矩阵理论 》（A）

考试日期：2012 年 1 月 5 日

注意事项：1、共 6 个题目，考试时间 120 分钟

2、注: A^H 表示 H 转置，det(A) 表示行列式，I 表示单位阵

题目：

一、（本题　26　分）

二、（本题　15 分）

三、（本题　14　分）

四、（本题　15　分）

五、（本题　20 分）

六、（本题　10　分）

姓名：　　　　　　　　学号：　　　　　　　　A

一. 填空(**26 分**)　(**注**: A^H 表示H 转置，det(A) 表示行列式，I 表示单位阵)

(1) 若 3 阶阵 $\mathbf{A} \neq \mathbf{I}$，且 $\mathbf{A}^2 - 2\mathbf{A} + \mathbf{I} = 0$，则 Jordan 形 $\mathbf{J}_{\mathrm{A}} =$ ____________

(2) $(A \otimes B)^+ - A^+ \otimes B^+ =$ _______ ；　若A 可逆，　则 $A^+ - A^{-1} =$ _______

(3) $(e^A)^+ e^{-A} e^{2A} =$ ________ ；　$e^{-tr(A)} \det(e^A) =$ ________

(4)若 $A = A^2 = A^H$，则 $\mathbf{A}^+ =$ ______________

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $A \otimes B$ 的特征根为______________

(6) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ 则谱半径 $\rho(A)$ 取值范围是____________

(7) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\det(e^{\pi A}) =$ ___________

(8) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 则 $\mathbf{A}^+ =$ __________

(9)矩阵 **A** 中各列都可用 **B** 的列线性表示($\mathbf{R(A)} \subset \mathbf{R(B)}$)，则有矩阵 **P** 使 $\mathbf{BP} =$ ______

(10)方阵A 的特征根 λ，谱半径 $\rho(A)$ 与范数 $\|A\|$ 的大小关系是____________

(11) A 是方阵(k 是自然数),则 $\rho(A)^k, \|A^k\|, \|A\|^k$ 之间关系为______________

(12) $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ 的满秩分解为________________ ；

(13) $A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $I + tA + \frac{(tA)^2}{2} + \frac{(tA)^3}{3!} + \cdots =$ ____________

二.1 设 $A=\begin{pmatrix}0.5 & 0\\ 1 & 0.5\end{pmatrix}$，计算 $f(A)=(I-A)^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}A^k\right)$

2 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & c & c\\ c & 0 & c\\ c & c & 0\end{pmatrix}$求：$\det(e^A)$ ，$\rho(e^A)$；$\det(e^B)$，$\rho(e^B)$

3 设$\mathbf{A}$是 3 阶正规阵,$\sigma(\mathrm{A})=\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$(特征根). 写出$\mathbf{A}^{+}$的特征根与$\mathbf{A}$的奇异值

三.设 $A=\begin{bmatrix}0 & -4 & 0\\ 1 & -4 & 0\\ 1 & -2 & -2\end{bmatrix}$, (1)求 A 的最小式与 A 的 Jordan 标准形;.

(2)判断 $f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}A\right)^n$ 是否收敛; (3)**不要计算** $f(A)$，直接求谱半径 $\rho(f(A))$

四. 设 $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, (1)求 A 的奇异值分解，或简化奇异值分解；

(2)利用奇异值分解求 A^{+}； (3)求 $Ax=b$ 的极小范数解 或最小二乘解.

五.设 $A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$，$D=\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}$ 求 e^{tA}，$(e^{tA})^{-1}$，e^{tB}，e^{tD}

六.设 $A\in\mathbb{C}^{m\times m}$，$B\in\mathbb{C}^{n\times n}$，证明：$\begin{bmatrix}A & C\\ 0 & B\end{bmatrix}$ 是正规阵 $\Leftrightarrow$ A, B 均是正规阵且 $C=0$

数 学 作 业 纸

班级　　　　　　　姓名　　　　　　　学号　　　　　　　第 1 页

2011 — 2012 矩阵理论A 试卷

第一题

(1) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ \hline & & 1 \end{array}\right]$　(2) 0　0　(3) I　1　(4) A　(5) $\{0, b, 2a, 2b\}$　(6) $\frac{4}{5} < \rho(A) < 1$

(7) 1　(8) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$　(9) A　(10) $|\lambda| \le \rho(A) \le \|A\|$　(11) $\rho(A)^k \le \|A^k\| \le \|A\|^k$

(12) $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$　(13) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ t & 1 & \\ \frac{t^2}{2} & t & 1 \end{bmatrix}$

第二题

1. 级数 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ 的收敛半径 $R=1$，而 $\rho(A)=0.5<1$，故级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛

$\therefore f(A) = (I-A)^2 \cdot (I-A)^{-1} = I - A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & 0.5 \end{bmatrix}$

2. A的特征值 $\{2, 2, 1\}$　B的特征值 $\{2c, -c, -c\}$

$\therefore e^A$ 的特征值 $\{e^2, e^2, e\}$，e^B 的特征值 $\{e^{2c}, e^{-c}, e^{-c}\}$

$\det(e^A) = e^2 \cdot e^2 \cdot e = e^5$　$\det(e^B) = e^{2c} \cdot e^{-c} \cdot e^{-c} = 1$

$\rho(e^A) = e^2$　$\rho(e^B) = \begin{cases} e^{2c} & c \ge 0 \\ e^{-c} & c < 0 \end{cases}$

3. A^+ 的特征根为 $\{\lambda_1^+, \lambda_2^+, \lambda_3^+\}$　其中 $\lambda_i^+ = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_i} & \lambda_i \ne 0 \\ 0 & \lambda_i = 0 \end{cases}$　$i=1,2,3$

A的奇异值为 $\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\}$

第三题：

(1) A的特征值 $\lambda=-2$（三重根），且 $\mathrm{rank}(A-\lambda I)=1$

∴ A的极小式为 $m_A(x)=(x+2)^2$，$J_A=\begin{bmatrix}-2&1&\\&-2&\\&&-2\end{bmatrix}$

(2) 级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}x\right)^k$ 收敛半径 $R=3$，$\rho(A)=2<R$，故 $f(A)$ 收敛。

(3) $f(A)$ 的特征值 $\mu=f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^k=\frac{1}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{3}{5}$（三重根）

∴ $\rho[f(A)]=\frac{3}{5}$

第四题：

(1) $A^HA=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$，特征值 $\lambda_1=3$，$\lambda_2=1$，特征向量 $\alpha_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

$AA^H=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&2\end{bmatrix}$ 正特征值 $\mu_1=3$，$\mu_2=1$，特征向量 $\beta_1=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$，$\beta_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$

令 $U_1=(\alpha_1,\alpha_2)=\frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$，$V_1=(\beta_1,\beta_2)=\frac{1}{\sqrt6}\begin{bmatrix}1&\sqrt3\\1&-\sqrt3\\2&0\end{bmatrix}$，$S_r=\begin{bmatrix}\sqrt3&0\\0&1\end{bmatrix}$

则A的简化奇异值分解为 $A=V_1S_rU_1^H$

(2) $A^+=U_1S_r^{-1}V_1^H=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\end{bmatrix}$

(3) $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}(A\,\vdots\,b)=2$

∴ $Ax=b$ 相容

∴ 有极小范数解 $x_0=A^+b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

第五题:

A的特征值 $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-2$, 令

$$G_1=\frac{A+2I}{5+2}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}3&4\\3&4\end{bmatrix}\qquad G_2=\frac{A-5I}{-2-5}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}4&-4\\-3&3\end{bmatrix}$$

则

$$e^{tA}=e^{5t}G_1+e^{-2t}G_2=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}3e^{5t}+4e^{-2t}&4e^{5t}-4e^{-2t}\\3e^{5t}-3e^{-2t}&4e^{5t}+3e^{-2t}\end{bmatrix}$$

$$(e^{tA})^{-1}=e^{-tA}=e^{-5t}G_1+e^{2t}G_2=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}3e^{-5t}+4e^{2t}&4e^{-5t}-4e^{2t}\\3e^{-5t}-3e^{2t}&4e^{-5t}+3e^{2t}\end{bmatrix}$$

B的特征值 $\mu=2$ (三重根), 且 $\text{rank}(B-\mu I)=1$.

$\therefore$ B的极小式 $m_B(x)=(x-2)^2$. $\therefore f(B)=f(2)I+f'(2)(B-2I)$

$$\therefore e^{tB}=e^{2t}\cdot I+te^{2t}(B-2I)=e^{2t}\begin{bmatrix}1&0&0\\t&1-t&t\\t&-t&1+t\end{bmatrix}$$

$$e^{tD}=\begin{bmatrix}e^{tA}&\\&e^{tB}\end{bmatrix}$$

第六题:

"$\Rightarrow$": 设 $U=\begin{bmatrix}A&C\\&B\end{bmatrix}$, 则 $U^H=\begin{bmatrix}A^H&\\C^H&B^H\end{bmatrix}$.

$$UU^H=\begin{bmatrix}AA^H+CC^H&CB^H\\BC^H&BB^H\end{bmatrix},\quad U^HU=\begin{bmatrix}A^HA&A^HC\\C^HA&C^HC+B^HB\end{bmatrix}$$

由 $UU^H=U^HU$ 得. $AA^H+CC^H=A^HA$.

$\therefore tr(A^HA)=tr(AA^H)+tr(CC^H)$ $\therefore tr(CC^H)=0$ $\therefore C=0$

$\therefore AA^H=A^HA$, $BB^H=B^HB$

"$\Leftarrow$": 若 A, B均为正规阵 且 $C=0$. 显然有 $UU^H=U^HU$

故 $\begin{bmatrix}A&C\\&B\end{bmatrix}$ 为正规阵 $\Leftrightarrow$ A, B均为正规阵且 $C=0$