2004 年试题

1. 已知 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -3 & 6\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$.

   (1) 求 $\lambda I-A$ 的不变因子和极小因子。

   (2) 求 A 的最小多项式 $m_A(\lambda)$。

   (3) A 的 Jordan 标准式。

2. 谱分解 $\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ -3 & 3 & 0\\ -3 & 6 & 1\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$ 的 A^{+} 与奇异值分解。

4. $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 8 & 2\end{pmatrix}$，求（1）$e^{A}$ （2）$f(A)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(3A^{n}+A^{n+1})$ (3) $\sin(At)$

5. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 3 & 0 & -3\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}$

   （1）是否相容。 （2）若相容，求极小范数解。 （3）若不容，求极小最小二乘解。

6. 证明：$A^{*}A=AA^{*}$（A 为正规阵）。

7. 证明: (1) n 阶阵 A 适合 $A^{k}=I$，k 为整数，则 A 可对角化。

   (2) n 阶阵 A≠0，当整数 k≧2 时，则 A 不可对角化。

8. $A=\begin{pmatrix}2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2^2} & \frac{1}{2^3}\\ \frac{2}{3} & 4 & \frac{2}{3^2} & \frac{2}{3^3}\\ \frac{4}{3} & \frac{3}{4^2} & 6 & \frac{3}{4^3}\\ \frac{4}{5} & \frac{4}{5^2} & \frac{4}{5^3} & 8\end{pmatrix}$，讨论 A 的实特征值 λ 的个数。

2006年试题

1. 证明 $R(A^*)=\begin{cases} n \\ 1 \\ 0 \end{cases}$

2. $x_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$x_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$，$x_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 为 $Ax=b$ 的解向量，且 $A\neq 0$。

   （1） 求 $Ax=0$ 的通解

   （2） 求 $Ax=b$ 的通解

3. $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+2ax_2x_3+3x_3^2\,(a>0)$ 通过正交变换为 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$ 求 a 及正交线性变换。

4. V 是线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 为其一组基，线性变换 δ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&3\\1&-1\end{pmatrix}$，求 V 的一组基使 δ 在其下的矩阵为对角阵。

5. A,B,C,D 为 n 阶矩阵，A 可逆，且 AC=CA，证明 $\begin{vmatrix}A&B\\C&D\end{vmatrix}=|AD-CB|$

6. $A=\begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-b&b&0\\-b&b&0\end{pmatrix}$，$|b|<1$，求 $\sum A^k$ 和 B^k

7. $A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&6&0\end{pmatrix}$ 求初等因子，最小多项式，A 的 Jordan 标准形

8. $A=\begin{pmatrix}2&\frac{1}{2}&\frac{1}{2^2}&\frac{1}{2^3}\\ \frac{2}{3}&4&\frac{2}{3^2}&\frac{2}{3^3}\\ \frac{3}{4}&\frac{3}{4^2}&6&\frac{3}{4^3}\\ \frac{4}{5}&\frac{4}{5^2}&\frac{4}{5^3}&8\end{pmatrix}$ 盖尔圆盘。

   （1） 证明 A～对角阵

   （2） 证明 $\det A>1\cdot3\cdot5\cdot7$