# 1 公理集合论

## 1.1 集合论概念

**朴素集合论**

具有给定性质的对象的全体定义为集合，集合与元素直觉的关系叫做属于。

**公理集合论**

给定集合论语言$\mathrm{L}=\{\in\}$及该语言的一个模型$<\mathrm{V},\in>$。该模型的元素成为集合，二元谓词符号$\in$表示属于关系。

**空集**

$\emptyset$表示空集：$\neg\exists \mathrm{x}(\mathrm{x}\in\emptyset)$

**二元组**

$<\mathrm{a},\mathrm{b}>$表示二元组：$\{\{\mathrm{a}\},\{\mathrm{a},\mathrm{b}\}\}$

例题：给出三元组的定义，并证明其合理性，即：

$$\boldsymbol{(a,b,c)=(x,y,z)}\textbf{当且仅当}\boldsymbol{a=x,b=y,c=z}$$

三元组定义：$(a,b,c)=\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$

假设存在另一个三元组$(x,y,z)=\{\{x\},\{x,y\},\{x,y,z\}\}$使得$(a,b,c)=(x,y,z)$，即：

$$\left\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\right\}=\{\{x\},\{x,y\},\{x,y,z\}\}$$

则必有$a=x$，因为只有$\{a\}$和$\{x\}$元素个数为 1，他俩必相等

又因为$\{a,b\}=\{x,y\}$(元素个数为 2)$,a=x$，则必有$b=y$

又因为$\{a,b,c\}=\{x,y,z\},a=x,b=y$，则必有$c=z$

所以该三元组的合理性得证

**函数**

func(a)表示 a 是一个函数，满足以下两个公式：$\Phi_1\wedge\Phi_2$

$\Phi_1$是公式：$\forall \mathrm{x}(\mathrm{x}\in \mathrm{a}\rightarrow\exists \mathrm{uv}(\mathrm{x}=<\mathrm{u},\mathrm{v}>))$

$\Phi_2$是公式：$\forall \mathrm{uvw}(<\mathrm{u},\mathrm{v}>\in \mathrm{a}\wedge<\mathrm{u},\mathrm{w}>\in \mathrm{a}\rightarrow \mathrm{v}=\mathrm{w})$

**定义域**

dom(a)表示函数 a 的定义域：

$$\mathrm{dom}(a) = \{u | \exists v(< u, v > \in a)\}$$

**值域**

ran(a) 表示函数 a 的值域：

$$\mathrm{ran}(a) = \{v | \exists u(< u, v > \in a)\}$$

**自然数**

$0 = \emptyset$

$0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\} = 1$

$1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0,1\} = 2$

$2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0,1,2\} = 3$

…

**平行公设：**

第 5 公设也被称为平行公设，它等价于：

在同一平面，过直线外一点，有且仅有一条直线与此直线平行

## 1.2 集合论的 10 条公理

### 1.2.1 外延公理

$$\forall \mathbf{xy}(\forall z(z \in \mathbf{x} \leftrightarrow z \in \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y})$$

若两个集合元素相同，则这两个集合相等。

### 1.2.2 空集公理

$$\exists \mathbf{x} \forall y(y \notin \mathbf{x})$$

记上述 **x** 为$\emptyset$。空集公理保证了空集的存在性，根据外延公理可知，空集是唯一的。

空集的唯一性证明：

假设存在另一集合$\emptyset'$是空集，

由$\forall y(y \notin \emptyset)$可得：$\forall z(z \in \emptyset \rightarrow z \in \emptyset')$（前提不成立，所以整个式子成立）

由$\forall y(y \notin \emptyset')$可得：$\forall z(z \in \emptyset' \rightarrow z \in \emptyset)$

所以$\forall z(z \in \emptyset \leftrightarrow z \in \emptyset')$

所以$\emptyset = \emptyset'$

### 1.2.3 偶对公理

$$\forall \mathbf{xy}\exists \mathbf{u}\forall z(z \in \mathbf{u} \leftrightarrow z = \mathbf{x} \vee z = \mathbf{y})$$

记 $\mathbf{u}$ 为$\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$，由此可知：对于集合$\mathbf{x},\mathbf{y}$存在一个仅以它们为元素的集合$\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}$。

例：$x = \{a,b\}, y = \{b,c\}$　　$\{x,y\} = \{\{a,b\},\{b,c\}\}$

### 1.2.4 并集公理

$$\forall \mathbf{x}\exists \mathbf{u}\forall y(y \in u \leftrightarrow (\exists \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{x} \wedge y \in \mathbf{z})))$$

由集合S的**所有元素的元素**组成的集合，叫做集合的并集合$\cup S$。

例：$S = \{\{a,b\},\{b,c\}\}$ $\cup S = \{a,b,c\}$

$S = \{\{\{a\},\{a,b\}\},\{\{c\},\{c,d\}\}\}$

$\cup S = \big\{\{a\},\{a,b\},\{c\},\{c,d\}\big\}$ $\cup\cup S = \{a,a,b,c,c,d\}$(可以有重复元素)

一般意义下的$A \cup B$在严格意义下被写为$\cup\{A,B\}$，即 A 和 B 的元素组成的集合：

$$\forall\{\mathbf{A},\mathbf{B}\}\exists \mathbf{u}\forall y(y \in u \leftrightarrow (\exists \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{x} \wedge y \in \mathbf{z})) \leftrightarrow (((\mathbf{z} \in \mathbf{A} \vee \mathbf{z} \in \mathbf{B}) \wedge y \in \mathbf{z})))$$

$\cup\emptyset = \emptyset$

证明：将$\mathbf{x} = \emptyset$，$\mathbf{u} = \cup\emptyset$代入并集公式可知：

$\forall y(y \in \cup\emptyset \leftrightarrow (\exists \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \emptyset \wedge y \in \mathbf{z})))$

因为$\exists \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \emptyset \wedge y \in \mathbf{z}))$是永假的，所以$\forall y(y \notin \cup\emptyset)$

所以$\cup\emptyset = \emptyset$

$\cup\{\emptyset\} = \emptyset$

证明：将$\mathbf{x} = \{\emptyset\}$，$\mathbf{u} = \cup\{\emptyset\}$代入并集公式可知：

$\forall y(y \in \cup\{\emptyset\} \leftrightarrow (\exists \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \{\emptyset\} \wedge y \in \mathbf{z})))$

$\exists \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \{\emptyset\} \wedge y \in \mathbf{z}))$等值于$y \in \emptyset$，是永假的，所以$\forall y(y \notin \cup\{\emptyset\})$

所以$\cup\{\emptyset\} = \emptyset$

### 1.2.5 子集公理

假设$\phi$是集合论语言的一个公式，仅出现自由变元$x_1,\cdots,x_n,z$,不出现变元y，则：

$\forall x_1,\cdots,x_n\forall\boldsymbol{x}\exists\boldsymbol{y}\forall z(z\in\boldsymbol{y}\leftrightarrow z\in\boldsymbol{x}\wedge\ \phi\ )$

对于给定的$x_1,\cdots,x_n,z$，这样定义的集合y被记为：

$\mathrm{y}=\{z\in\boldsymbol{x}|\ \phi\ \}$

这样定义的集合y是x子集($\mathrm{y}\subseteq\mathrm{x}$)，可以理解为集合x中满足公式$\phi$的元素构成的集合成为x的子集。

### 1.2.6 幂集公理

$$\forall\mathbf{x}\exists\mathbf{y}(\forall\mathbf{z}(\mathbf{z}\in\mathbf{y}\leftrightarrow\mathbf{z}\subseteq\mathrm{x}))$$

集合x的所有子集z构成的集合y称为x的幂集，记为$\rho(x)$。

### 1.2.7 无穷公理

$$\exists\mathbf{x}(\emptyset\in\mathbf{x}\wedge(\forall\mathrm{y}(\mathrm{y}\in\mathbf{x}\rightarrow y^{+}\in\mathbf{x})))$$

$y^{+}$表示集合$\mathrm{y}\cup\{\mathrm{y}\}$

### 1.2.8 替换公理

假设$\theta$是命题逻辑中的公式，仅出现自由变元$x_1,\cdots,x_n,u,z$,不出现变元y，则：

$\forall x_1,\cdots,x_n\forall\boldsymbol{x}(\psi\rightarrow\exists\boldsymbol{y}\forall z(z\in\boldsymbol{y}\leftrightarrow\exists u\in\boldsymbol{x}\wedge\theta[\mathrm{u},\mathrm{z}]))$

$\psi$是以下公式：

$\forall\mathrm{u}\in\mathbf{x}\forall z_1z_2(\theta[\mathrm{u},z_1]\wedge\theta[\mathrm{u},z_2]\rightarrow z_1=z_2)$

这里的集合 **y** 就是替换公理得到的新集合，记为：

$\{\mathrm{z}|\exists u(u\in\boldsymbol{x}\wedge\theta[\mathrm{u},\mathrm{z}])\}$

语言说明：基于一个已知集合 **x** 与一个特殊的单射函数$\theta$，可以得到一个新集合 **y**。$\theta[\mathrm{x},\mathrm{y}]$表示输入为 x 输出为 y。

### 1.2.9 正规公理

$$\forall\mathbf{x}(\mathbf{x}\neq\emptyset\rightarrow\exists\mathrm{y}(\mathrm{y}\in\mathbf{x}\wedge\mathrm{y}\cap\mathbf{x}=\emptyset))$$

正规公理保证了**不存在**这样的集合：$\mathbf{x}=\{\mathbf{x}\}$

### 1.2.10 选择公理

通俗来讲：根据一个由非空集合组成的集合 S，从 S 的元素集合中分别抽出一个元

素组成的集合。

### 1.3 公理的应用

1. 外延公理用于判定集合相等
2. 正规公理用于判定集合属于关系
3. 其他公理用于证明集合存在性，常用替换公理

### 1.4 例题

例 1：证明可数符号表上有限长字符串的集合是可数的

证明：假设给定的可数符号表是集合 A，则：

长度为 1 的字符串集合$S_1 = A$

长度为 2 的字符串集合$S_2 = \{ab|a, b \in A\}$

…

每个$S_i$都是可数的，并且$S_i$的个数也是可数的，所以可数个可数集合的并集也是可数的。

例 2：证明空集是函数

func(a)表示 a 是一个函数，满足以下两个公式：$\Phi_1 \wedge \Phi_2$

$\Phi_1$是公式：$\forall x(x \in a \to \exists uv(x = <u, v>))$

$\Phi_2$是公式：$\forall uvw(<u, v> \in a \wedge <u, w> \in a \to v = w)$

若 a 为空集，则$\Phi_1$和$\Phi_2$的前提都不成立，所以$\Phi_1$和$\Phi_2$成立，所以空集是个函数。

例 3：对于集合 **a** 及 **b**, 则它们的交集是集合

由子集公理可知：

$\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} \forall z(z \in \boldsymbol{y} \leftrightarrow z \in \boldsymbol{x} \wedge \phi)$

令$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, $\phi$ 为$z \in \mathbf{b}$，得

$\forall \boldsymbol{a} \forall \boldsymbol{b} \exists \boldsymbol{y} \forall z(z \in \boldsymbol{y} \leftrightarrow z \in \boldsymbol{a} \wedge z \in \mathbf{b})$

此时的集合$\boldsymbol{y}$就是集合 **a** 及 **b** 的交集

例 4：对于集合 x 及 y,它们的卡氏积$x \times y = \{< u, v > | u \in x, v \in y\}$是集合

根据子集定理可知，存在这样的集合 u

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \{w | w \in \mathbf{c} \wedge \phi(w)\}$$

其中：

c 是集合:$\rho(\rho(\mathbf{x}) \cup \rho(\mathbf{x} \cup \mathbf{y}))$

$\phi(w)$是公式：$\exists uv(u \in \mathbf{x} \wedge v \in \mathbf{y} \wedge w =< u, v >)$

例 5：证明：存在无限集合$\{0, \{1\}, \{\{2\}\}, \left\{\{\{3\}\}\right\}, \ldots\}$

已知自然数集合ω，根据替换公理，只要构造一个从ω到上述集合的单射函数即可证明上述集合存在。

定义函数$\theta[x, y]$满足以下条件：

$$(x = 0 \to y = x) \wedge (x \neq 0 \to \exists f(\Psi_1 \wedge \Psi_2 \wedge y = f(x)))$$

其中：

$\Psi_1$是公式：$\mathrm{func}(f) \wedge (x = \min(\mathrm{dom}(f)) \to f(x) = x)$

$\Psi_2$是公式：$\forall u(u \in \mathrm{dom}(f) \wedge u^+ \in \mathrm{dom}(f) \to f(u^+) = \{f(u)\})$

则对任意$n \in \omega$, 都存在唯一的一个 f

对任意$n \in \omega$,存在唯一 a，满足$\theta[n, a]$

则根据选择公理可知，存在集合 u：

$$u = \{a | n \in \omega \wedge \theta[n, a]\}$$

u 即为要证集合

说明：

公式$\Psi_1$定义了 f 的定义域与初值$f(0) = 0$

公式$\Psi_2$定义了$f(n) = \{f(n-1)\} = \left\{\{f(n-1)\}\right\} = \{\ldots\{f(n-k)\}\ldots\}$

比如：$\{1\} = f(2)$，$\mathrm{dom}(f) = \{1,2\}$

$\{\{2\}\} = f(4)$，$\mathrm{dom}(f) = \{2,3,4\}$

例 6：证明：$\forall mn(m \in \omega \wedge n \in \omega \wedge m^+ = n^+ \rightarrow m = n)$

假设 m,n 是两个自然数，满足$m^+ = n^+$,则根据定义可知：

$m \cup \{m\} = n \cup \{n\}$

若$m \neq n$：

由$m \in m \cup \{m\}$知$m \in n \cup \{n\}$，又因为$m \neq n$，所以$m \notin \{n\}$，所以$m \in n$

同理可知：$n \in m$

这时集合$x = \{m, n\}$不满足正规公理：

$$\forall \mathbf{x}(\mathbf{x} \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in \mathbf{x} \wedge y \cap \mathbf{x} = \emptyset))$$

因为$m \cap \mathbf{x} = \{n\}, n \cap \mathbf{x} = \{m\}$

所以 x 不是一个集合，所以$m = n$

例 7：证明$\omega \notin \omega$

假设$\omega \in \omega$，则存在集合$\mathbf{x} = \{\omega\}$不满足正规公理：

$$\forall \mathbf{x}(\mathbf{x} \neq \emptyset \rightarrow \exists y(y \in \mathbf{x} \wedge y \cap \mathbf{x} = \emptyset))$$

因为$\omega \cap \{\omega\} = \omega$

所以假设不成立

# 2 自然数逻辑理论

## 2.1 归纳集

### 2.1.1 定义

满足以下两个条件的集合$\mathbf{u}$称为归纳集：

$$\emptyset \in \mathbf{u} \wedge (\forall \mathrm{a}(\mathrm{a} \in \mathbf{u} \rightarrow \mathrm{a}^{+} \in \mathbf{u}))$$

其中$\mathrm{a}^{+}$表示集合$\mathrm{a} \cup \{\mathrm{a}\}$

### 2.1.2 公式

以$\mathrm{lnd}(\mathrm{x})$表示以下公式：

$$\emptyset \in \mathbf{x} \wedge \forall \mathrm{y}(\mathrm{y} \in \mathbf{x} \rightarrow y^{+} \in \mathbf{x})$$

所以$\mathbf{x}$是一个归纳集当且仅当$\mathrm{lnd}(\mathrm{x})$成立。

### 2.1.3 性质

1. 两个归纳集的并集以及交集还是归纳集。
2. 若存在集合{0,1,2,...}，则它是一个归纳集。
3. 归纳集也是一个无限集，无穷公理保证这样无限集合是存在的，且不唯一。

### 2.1.4 自然数集合

自然数集合是最小的归纳集ω，满足以下公式：

$$\mathrm{lnd}[\boldsymbol{\omega}] \wedge \forall \mathbf{x}(\mathrm{lnd}[\mathbf{x}] \rightarrow \boldsymbol{\omega} \subseteq \mathbf{x})$$

Eg : 证明：$\cup\, \omega = \omega$

证明：

$\forall \mathrm{n} \in \omega$，因为$\mathrm{n} \in n^{+}, n^{+} \in \omega \rightarrow \mathrm{n} \in \cup\, \omega$

$\forall \mathrm{x} \in \cup\, \omega$，$\exists \mathrm{n} \in \omega$, 使得 $\mathrm{x} \in \mathrm{n}$，所以$\mathrm{x} \in \omega$

## 2.2 第一归纳法

### 2.2.1 推论

假设$\Phi(x)$是集合论的一个语句，只包含一个自由变元x，且

$$\Phi[0] \wedge \forall x(x \in \omega \wedge \Phi[x] \rightarrow \Phi[x^{+}])$$

则对任意自然数n，都有$\Phi[n]$成立。

即只要证明$\Phi[0]$成立，并且在假设$\Phi[x]$成立的情况下能够证明$\Phi[x^+]$成立，则$\Phi$对于自然数集合恒成立。

### 2.2.2 例题

例 1：证明对任意的$n \in \omega$有$n^+ \neq 0$

证明：

考虑以下公式$\Phi[x]$：

$$\neg x^+ = 0$$

$\Phi[0]$显然成立，因为$0^+ = \{0\}$，不是空集0.

若$m \in \omega$且$\Phi[m]$成立，则$m^+$不是空集，$(m^+)^+ = m^+ \cup \{m^+\}$也不是空集，所以$\Phi[m^+] = \neg((m^+)^+ = 0)$也成立。

由归纳法可知$\Phi[x]$对任意自然数恒成立。

例 2：对于任意的$m \in \omega$，若$n \in m$，则$n \in \omega$。

证明：

考虑以下公式$\Phi[x]$：

$$\forall y(y \in x \rightarrow y \in \omega)$$

因为0是空集，所以$y \in 0$是假的，所以$\Phi[0]$成立

若$m \in \omega$且$\Phi[m]$成立，

对于$y \in m^+ = m \cup \{m\} \rightarrow y = m$ 或 $y \in m$

若$y = m$，由$m \in \omega$可知，$y \in \omega$

若$y \in m$，由$\Phi[m]$可知，$y \in \omega$

所以$\Phi[m^+]$也成立

例 3：对于任意的$a, b, c \in \omega$，若$a \in b, b \in c$，则$a \in c$。

证明：

考虑以下公式$\Phi[x]$：

$\forall yz(y \in z \land z \in x \to y \in x)$

$\Phi[0]$显然成立，因为0是空集，前提是假的。

若$m \in \omega$且$\Phi[m]$成立

对于$z \in m^+ = m \cup \{m\} \to z = m$ 或 $z \in m$

若$z = m$，则$y \in z = m$，所以 $y \in m^+$

若$z \in m$，由$\Phi[m]$可知，$y \in m$，所以 $y \in m^+$

所以$\Phi[m^+]$也成立

## 2.3 第二归纳法

### 2.3.1 定义

假设$\Phi(x)$是集合论的一个语句，只包含一个自由变元x，且

$$\forall x\left(\forall y\left(y \in x \to \Phi(y)\right) \to \Phi(x)\right)$$

成立，则对任意自然数 n，都有$\Phi(n)$成立

证明：考虑集合

$$\mathbf{u} = \{n \in \omega | \forall y(y \in n \to \Phi(n))\}$$

只要证明任意自然数都属于集合$\mathbf{u}$，这样对任意$n \in \omega$，$\Phi(n)$都成立

当$n = 0$ 时，$\forall y(y \in 0 \to \Phi(n))$恒成立，所以$0 \in \mathbf{u}$

当 $n \in \mathbf{u}$时，$\Phi(n)$成立

## 2.4 递归定义

### 2.4.1 递归定义的合理性

假设a是一个集合，f是一个函数，则存在一个函数r满足：

1) $\mathrm{dom}(r) = \omega$
2) $r(0) = a$
3) $\forall m \in \omega$，都有$r(m^+) = f(r(m))$

### 2.4.2 例题

例 1：证明存在集合$\{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \cdots\}$

证明：

取$a = 0$，公式f为$f(x) = \{x\}$

由递归定义的合理性可知，存在函数 r 满足：

$r(0) = 0$

$r(1) = f\left(r(0)\right) = \{0\}$

$r(2) = f\left(r(1)\right) = \{\{0\}\}$

$\cdots$

所以r的值域即为上述集合

### 2.4.3 推广

假设$\Phi(x, y)$是集合论语言的一个函数型公式，即满足：

1) $\forall x \exists y \Phi(x, y)$
2) $\forall xyz(\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, z) \rightarrow y = z)$

这时记相应于$x$的$y$为$x_{\Phi}$。

多元迭代函数：

假设 a 是一个集合，f(x,y)是二元函数，则存在一个函数 r 满足：

1) $\mathrm{dom}(r) = \omega$
2) $r(0) = a$
3) $\forall m \in \omega$，都有$r(m^{+}) = f(r(m), m)$

# 3 命题逻辑的两个推理系统

## 3.1 Hilbert 推理系统

**公理：**

1. $\mathrm{A} \to (B \to A)$
2. $\big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$
3. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

**规则：**

$\frac{A, A \to B}{B}$ (即 $\mathrm{A}, \mathrm{A} \to \mathrm{B} \vdash \mathrm{B}$)

**推演序列：**

假设 $\Gamma$ 是公式集合，公式序列$\langle A_1, A_2, \ldots, A_n \rangle$被称为 $\Gamma$ -推演序列，当且仅当：

1. 或者$A_i \in \mathbf{\Gamma}$
2. 或者$A_i$是公理
3. 或者存在$\mathrm{j}, \mathrm{k} < \mathrm{i}$，$A_i$可由$A_j, A_k$应用规则得到

**可证性：**

若存在 $\Gamma$ -推演序列，它的最后一个公式是 A，则称 A 是 $\Gamma$ 可证的，记为 $\Gamma \vdash \mathrm{A}$。

Eg1：证明：$\vdash \mathrm{A} \to \mathrm{A}$

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $A_1: A \to \big((A \to A) \to A\big)$ | 公理 1 |
| 2. | $A_2: A \to (A \to A)$ | 公理 1 |
| 3. | $A_3: A_1 \to \big(A_2 \to (A \to A)\big)$ | 公理 2 |
| 4. | $A_4: A_2 \to (A \to A)$ | 规则 |
| 5. | $A_5: A \to A$ | 规则 |

所以 $\vdash \mathrm{A} \to \mathrm{A}$

## 3.2 推理系统二

**公理：**

$A \vdash A$

**规则**(只列了常用的几个)：

- $\dfrac{\Sigma \vdash A}{\Sigma, \Sigma' \vdash A}$　　单调性：若$A \vdash B$，则$A, C \vdash B$
- $\dfrac{\Sigma, \neg A \vdash B \text{ 且 } \Sigma, \neg A \vdash \neg B}{\Sigma \vdash A}$　　反证法：$(\Sigma, \neg A)$矛盾
- $\dfrac{\Sigma \vdash A \text{ 且 } \Sigma \vdash A \to B}{\Sigma \vdash B}$　　三段论
- $\dfrac{\Sigma, A \vdash B}{\Sigma \vdash A \to B}$　　演绎定理

**可证性**：有限次应用公理和规则生成$\Sigma \vdash A$，则称$\Sigma \vdash A$可证。

Eg1：证明：$\neg\neg A \vdash A$

1. $\neg\neg A \vdash \neg\neg A$　　公理
2. $\neg\neg A, \neg A \vdash \neg\neg A$　　单调性
3. $\neg A \vdash \neg A$　　公理
4. $\neg\neg A, \neg A \vdash \neg A$　　单调性
5. $\neg\neg A \vdash A$　　2,4 应用反证法规则

## 3.3 性质

### 3.3.1 紧致性

给定公式集合$\Sigma$和公式 A，若$\Sigma \vdash A$，则存在有限的$\Gamma \subseteq \Sigma$，使得$\Gamma \vdash A$

### 3.3.2 协调性

给定命题逻辑的公式集合$\Sigma$，若存在公式 A，使得$\Sigma \vdash A$ 且$\Sigma \vdash \neg A$，则称$\Sigma$是不协调的。

### 3.3.3 一些定义

公式的真值：

假设 v 是一个赋值，A 是公式，可以根据真值表定义$v(A) = 1$

集合的真值：

假设Γ是一个公式集合，定义$v(\mathbf{\Gamma}) = 1$为：对每个$A \in \mathbf{\Gamma}$, 都有 $v(A) = 1$

⊨ 定义：

假设Γ是一个公式集合，A 是公式，$\mathbf{\Gamma}$ ⊨A为：

对任意的赋值 v，当$v(\mathbf{\Gamma}) = 1$时，$v(A) = 1$

### 3.3.4 可靠性和完备性

可靠性：若Σ ⊢A，则Σ ⊨A

完备性：若Σ ⊨A，则Σ ⊢A

## 3.4 规则的独立性证明

证明方式：

1. 修改逻辑联结词的定义，使得其他规则都成立，但该规则不成立。则该规则独立于其他规则。
2. 若某个规则可以证明一个推演，而不使用该规则，该推演不可证明。则称该规则是独立的

弱推演系统：

1. $A \to (B \to A)$
2. $\left(A \to (B \to C)\right) \to \left((A \to B) \to (A \to C)\right)$
3. $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$

Eg1: 证明规则 1 独立于规则 2、3

证明：

重新定义规则：真值取值{0,1,2}，→ 和¬定义如下：

| → | 0 | 1 | 2 | ¬ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

定义：$\Gamma \models A$为$v(\Gamma) = 0$且$v(A) = 0$

当$v(A) = 0$，$v(B) = 1$时，$v(A \to (B \to A)) = 2$

所以规则 1 不成立

在这种情况下，规则 2、3 都成立，但规则 1 不成立，所以规则 1 独立于规则 2、3

Eg2：证明规则 3 独立于规则 1、2

证明：

重新定义规则：→ 和¬定义如下：

| → | 0 | 1 | ¬ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |

定义：$\Gamma \models A$为$v(\Gamma) = 0$且$v(A) = 0$

当$v(A) = 1$，$v(B) = 0$时，$v((\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)) = 1$

所以规则 3 不成立

在这种情况下，规则 1、2 都成立，但规则 3 不成立，所以规则 3 独立于规则 1、2

### 3.5 例题

Eg1: 完备性证明：若 $\models A$，则 $\vdash A$

证明：

假设 A 中出现的所有命题变元$p_1, p_2, \dots, p_n$，v 是一个真值赋值，定义文字$L_{v,i}$：

$$L_{v,i} = \begin{cases} p_i, & v(p_i) = 1 \\ \neg p_i, & v(p_i) = 0 \end{cases}$$

因为 $\models A$，所以 A 永真，所以$v(A) = 1$，所以$L_{v,1}, \dots, L_{v,n} \vdash A$

对于任意赋值 v，$L_{v,1}, \dots, L_{v,n} \vdash A$

因为 A 永真，所以：$L_{v,1}, \dots, L_{v,n-1}, p_n \vdash A \quad L_{v,1}, \dots, L_{v,n-1}, \neg p_n \vdash A$

所以$L_{v,1},\ldots,L_{v,n-1}\vdash$A

由上可知，若 A 永真，则对任意赋值 v 都有：

$L_{v,1},\ldots,L_{v,n}\vdash$A

$L_{v,1},\ldots,L_{v,n-1}\vdash$A

。。。

$L_{v,1}\vdash$A

$\vdash$A

# 4 命题逻辑的完备性

## 4.1 定义

完备性定理：在命题逻辑中，假设A是公式，有以下结论：

$$若 \vDash A，则 \vdash A$$

极大协调集合：

满足以下条件的公式集合$\Sigma$被称为极大协调的：

1. $\Sigma$是协调的
2. 对任意的$A \notin \Sigma$，公式集合$\Sigma \cup \{A\}$是不协调的

证明：$\Sigma = \{A|v(A) = 1\}$是一个极大协调集

证：

若$A \in \Sigma$且$\neg A \in \Sigma$，则$v(A) = 1$且$v(\neg A) = 1$，这是不可能的，所以$\Sigma$是协调的。

若$A \notin \Sigma$，则$v(A) = 0$，$v(\neg A) = 1$，所以$\neg A \in \Sigma$，所以$\Sigma \cup \{A\}$是不协调的。

综上，$\Sigma$是极大协调集。

## 4.2 性质

对任意公式集合$\Sigma$和公式 A，B，若$\Sigma$是极大协调集合，有以下性质：

1. **$A \in \Sigma$当且仅当$\Sigma \vdash A$**
2. $\neg A \in \Sigma$当且仅当 $A \notin \Sigma$

证明：先证若$\neg A \in \Sigma$则$A \notin \Sigma$

若$A \in \Sigma$，此时$A, \neg A \in \Sigma$，与$\Sigma$的协调性相矛盾

所以$A \notin \Sigma$

再证明若$A \notin \Sigma$，则$\neg A \in \Sigma$

因为$A \notin \Sigma$，所以$\Sigma \cup \{A\}$是不协调的，所以$\Sigma \vdash \neg A$，所以$\neg A \in \Sigma$

3. $A \wedge B \in \Sigma$ 当且仅当 $A \in \Sigma$ 并且 $B \in \Sigma$

证明：先证充分性：

因为 $A \wedge B \in \Sigma$，所以 $\Sigma \vdash A \wedge B$

因为 $A \wedge B \vdash A$，$A \wedge B \vdash B$，所以 $\Sigma \vdash A$，$\Sigma \vdash B$，所以 $A \in \Sigma$ 并且 $B \in \Sigma$

再证必要性：

$A \in \Sigma$，$B \in \Sigma \rightarrow \Sigma \vdash A$，$\Sigma \vdash B \rightarrow \Sigma \vdash A \wedge B \rightarrow A \wedge B \in \Sigma$

4. $A \vee B \in \Sigma$ 当且仅当 $A \in \Sigma$ 或者 $B \in \Sigma$

若 $\Sigma$ 是极大协调集合，定义赋值 v 使得：

$v(p) = 1$ 当且仅当 $p \in \Sigma$

则对任意的公式 A，$v(A) = 1$ 当且仅当 $A \in \Sigma$

例题 1：假设 $\Sigma$ 是协调的公式集合，则存在极大协调集 $\Sigma'$，使得 $\Sigma \subseteq \Sigma'$

证明：

假设仅有可数个命题变元，则全部公式可以列举为：$B_0, B_1, B_2, \ldots$

按照以下方式定义集合 $\Sigma_n$:

1. $\Sigma_0 = \Sigma$
2. $\Sigma_{n+1} \begin{cases} \Sigma_n \cup \{B_n\}, & \text{若 } \Sigma_n \cup \{B_n\} \text{是协调的} \\ \Sigma_n & \text{，否则} \end{cases}$

根据定义可知，所有 $\Sigma_n$ 都是协调的。

定义 $\Sigma' = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \ldots$

此时 $\Sigma \subseteq \Sigma'$，下面证明 $\Sigma'$ 是极大协调集

假设 $\Sigma'$ 是不协调的

则 $\Sigma' \vdash A \wedge \neg A$

则存在公式$A_1,\ldots,A_m \in \Sigma'$，使得$A_1,\ldots,A_m \vdash A \wedge \neg A$

假设这些$A_1,\ldots,A_m$都属于某个$\Sigma_n$,则$\Sigma_n \vdash A \wedge \neg A$,这与定义中$\Sigma_n$的协调性相矛盾，所以$\Sigma'$是协调的

对于任意公式$A \notin \Sigma'$，可以假设它是$B_n$，则$\Sigma_n \cup \{B_n\}$是不协调的，$\Sigma' \cup \{A\}$是不协调的，所以$\Sigma'$是极大的。

例题 2：完备性证明：对任意公式集合$\Sigma$与公式 A，若$\Sigma \models A$，则$\Sigma \vdash A$

证明：假设$\Sigma \vdash A$不成立，这时$\Sigma \cup \{\neg A\}$是协调的，因而可以扩充为极大协调集$\Sigma'$

由$\Sigma'$可以定义赋值：$v(A) = 1$ 当且仅当 $A \in \Sigma'$

赋值 v 具有以下性质：

1. $v(\Sigma) = 1$，因为$\Sigma \subseteq \Sigma'$
2. $\neg A \in \Sigma'$，所以$v(\neg A) = 1$，所以$v(A) = 0$

这与$\Sigma \models A$相矛盾，所以$\Sigma \vdash A$

# 5　命题直觉主义逻辑

## 5.1 公理系统

在命题逻辑的自然推演系统中，将反证法规则替换为两个规则：

**直觉反证法：**

$$若\Sigma, A \vdash B 及 \Sigma, A \vdash \neg B，则\Sigma \vdash \neg A$$

**不协调前提：**

$$若\Sigma \vdash A 及 \Sigma \vdash \neg A，则\Sigma \vdash B$$

其中Σ是命题逻辑公式的集合，上述两条规则是相互独立的。

## 5.2 $c\_$

Σ是命题逻辑公式集合，A 是命题逻辑公式，称$\Sigma \vdash A$是$c_$可演算的，当且仅当存在：

$\Sigma_i \vdash A_i (i = 0,1, \dots, n)$，使得$\Sigma_n \vdash A_n$是$\Sigma \vdash A$，并且对每个 i，有$\Sigma_i \vdash A_i$满足：

1) 或者是某种规则
2) 或者存在 j<i，$\Sigma_i \vdash A_i$是通过$\Sigma_j \vdash A_j$应用规则推导出的
3) 或者存在 j，k<i，$\Sigma_i \vdash A_i$是通过$\Sigma_j \vdash A_j$和$\Sigma_k \vdash A_k$应用规则推导出的

若$\Sigma \vdash A$是$c_$可演算的，记为$\Sigma \vdash_c A$

若$\Sigma \vdash_c A$且$\Sigma \vdash_c \neg A$，则称Σ是不协调的

Eg1：证明$A \vdash_c \neg\neg A$

1. $A \vdash A$
2. $A, \neg A \vdash A$　　　　$A \vdash B$ 可推出 $A, C \vdash B$
3. $\neg A \vdash \neg A$
4. $A, \neg A \vdash \neg A$
5. $A \vdash_c \neg\neg A$　　　　2,4 直觉反证法：$A \vdash_c \neg(\neg A)$

Eg2: 证明$A \to B \vdash_c \neg B \to \neg A$

1. $A \to B \vdash A \to B$
2. $A \to B, A \vdash A \to B$
3. $A \vdash A$
4. $A \to B, A \vdash A$
5. $A \to B, A \vdash B$ 2,4
6. $A \to B, A, \neg B \vdash B$
7. $\neg B \vdash \neg B$
8. $A \to B, A, \neg B \vdash \neg B$
9. $A \to B, \neg B \vdash \neg A$ 6,8 直觉反证法
10. $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ 左侧可以当右侧的前提

### 5.3 不协调性的应用

若公式集合$\Sigma \cup \{A\}$是不协调的，则$\Sigma \vdash \neg A$

Eg1:$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg A \wedge \neg B$

$A \vee B \vdash A \vee B$

$\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash (\neg A \wedge A) \vee (\neg B \wedge B)$

所以集合$\{\neg A \wedge \neg B, A \vee B\}$不协调

所以$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

### 5.4 分层模型

直觉主义逻辑的一个模型 K 是指一个二元组$< V, R >$，其中：

1) 非空集合 V 是每个命题变元元素对应于命题逻辑的一个赋值

2) R 是 V 上的一个二元关系，具有自反性和传递性

3) 对于任意的命题变元 p 及赋值$v_1, v_2 \in K$，有：若$\boldsymbol{v_1(p) = 1}$**且**$\boldsymbol{v_1 R v_2}$**，则**$\boldsymbol{v_2(p) = 1}$。

**注意：分层模型的赋值情况并不是任意取值的，要满足对于**$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$**，**$\boldsymbol{w(p)} \geq \boldsymbol{v(p)}$

自反性：对任意$\mathrm{v} \in \mathrm{V}, (\mathrm{v}, \mathrm{v}) \in \mathrm{R}$

传递性：对任意 a,b,c∈ V, 若$(\mathrm{a}, \mathrm{b}), (\mathrm{b}, \mathrm{c}) \in \mathrm{R}$，则$(\mathrm{a}, \mathrm{c}) \in \mathrm{R}$

记$\mathrm{v(p)} = \mathrm{p}^{K,v}$

在分层模型下，真值的计算比较特殊：

对于给定的分层模型$\mathrm{K} =< \mathrm{V}, \mathrm{R} >$,假设$\mathrm{v} \in V$, $(v, w) \in R$对于命题变元的任意公式：

1. $(A \wedge B)^{K,v} = 1$当且仅当$\mathrm{A}^{K,v} = 1$ 且$\mathrm{B}^{K,v} = 1$
2. $(A \vee B)^{K,v} = 1$当且仅当$\mathrm{A}^{K,v} = 1$ 或$\mathrm{B}^{K,v} = 1$
3. $(A \rightarrow B)^{K,v} = 1$当且仅当对**任意**$\boldsymbol{vRw}$**的 w**，若$\mathrm{A}^{K,w} = 1$ 则$\mathrm{B}^{K,w} = 1$
4. $(A \leftrightarrow B)^{K,v} = 1$当且仅当**对任意**$\boldsymbol{vRw}$**的 w**,$\mathrm{A}^{K,w} = 1$ 等价于$\mathrm{B}^{K,w} = 1$
5. $(\neg A)^{K,v} = 1$当且仅当对**任意**$\boldsymbol{vRw}$**的 w**，$\mathrm{A}^{K,w} = 0$

**与和或不需要考虑其他赋值**$\boldsymbol{w}$

5.5 习题

例题 1：证明$\frac{\Sigma, \mathrm{A} \vdash \mathrm{B} \text{ 且 } \Sigma, \mathrm{A} \vdash \neg \mathrm{B}}{\Sigma \vdash \neg \mathrm{A}}$

证：假设$\Sigma \vdash \neg \mathrm{A}$不成立，则存在分层模型$\mathrm{K} =< \mathrm{V}, \mathrm{R} >$及$\mathrm{v} \in V$，

使得：$\Sigma^{K,v} = 1$ 且$(\neg \mathrm{A})^{K,v} = 0$

要使$(\neg \mathrm{A})^{K,v} = 0$，则存在$\mathrm{w} \in V$，$\mathrm{A}^{K,w} = 1$，此时$\Sigma^{K,w} = 1$

所以$(\Sigma \cup \mathrm{A})^{K,w} = 1$

再根据$\Sigma, A \vdash B$ 且$\Sigma, A \vdash \neg B$可知，$B^{K,w} = 1$且$(\neg B)^{K,w} = 1$，这显然是矛盾的

所以假设不成立

例题 2: 证明$\frac{\Sigma \vdash A \text{ 且 } \Sigma \vdash A \to B}{\Sigma \vdash B}$

证：要想证$\Sigma \vdash B$，等价于证对任意分层模型$K = < V, R >$及任意$v \in V$，

当$\Sigma^{K,v} = 1$时，$B^{K,v} = 1$

由$\Sigma \vdash A$可知，$\Sigma^{K,v} = 1$，则$A^{K,v} = 1$

由$\Sigma \vdash A \to B$可知，$\Sigma^{K,v} = 1$，则$(A \to B)^{K,v} = 1$

又因为$A^{K,v} = 1$，所以$B^{K,v} = 1$

所以当$\Sigma^{K,v} = 1$时，$B^{K,v} = 1$，原式成立

非$c$_可证明例题

例题 3 :证明下式不可证： $\neg A \to B \vdash_c \neg B \to A$

假设$A, B$分别为命题变元$p, q$，构造模型$K = < V, R >$，使得：

$V = \{v, w\}$ $R = \{(v, v), (v, w), (w, w)\}$

其中：

a) 赋值 v 使得$v(p) = 0$ 及 $v(q) = 0$

b) 赋值w使得$w(p) = 1$ 及 $v(q) = 0$

则真值情况如下：

| | v | w |
|---|---|---|
| A | 0 | 1 |
| B | 0 | 0 |
| ¬A | 0 | 0 |
| ¬B | 1 | 1 |
| ¬A → B | 1 | 1 |

| | | |
|---|---|---|
| $\neg B \to A$ | 0 | 1 |
| $\neg A \to B \vdash_c \neg B \to A$ | 0 | 1 |

所以存在赋值使得$\left(\neg A \to B \vdash_c \neg B \to A\right)^{K,v} = 0$

所以原式不可证

例题 4： $\vdash_c \neg\neg A \to A$

假设A为命题变元p，构造模型$K = < V, R >$，使得：

$V = \{v, w\}$ $R = \{(v, v), (v, w), (w, w)\}$

其中：

a) 赋值 v 使得$v(p) = 0$

b) 赋值w使得$w(p) = 1$

c) 则真值情况如下：

| | v | w |
|---|---|---|
| A | 0 | 1 |
| $\neg A$ | 0 | 0 |
| $\neg\neg A$ | 1 | 1 |
| $\neg\neg A \to A$ | 0 | 1 |

所以存在赋值使得$(\neg\neg A \to A)^{K,v} = 0$

所以原式不可证

例题 5： $\vdash_c A \vee \neg A$ **(与和或求真值时不需要考虑关系 R 对应的赋值$w$)**

假设A为命题变元p，构造模型$K = < V, R >$，使得：

$V = \{v, w\}$ $R = \{(v, v), (v, w), (w, w)\}$

其中：

a) 赋值 v 使得$v(p) = 0$

b) 赋值w使得$w(p) = 1$

则真值情况如下：

| | v | w |
|---|---|---|
| A | 0 | 1 |
| ¬A | 0 | 0 |
| $A \vee \neg\mathrm{A}$ | 0 | 1 |

所以存在赋值使得$(A \vee \neg\mathrm{A})^{K,v} = 0$

所以原式不可证

5.6 分层模型的相关性质

假设Σ是命题逻辑公式集合，A 是命题逻辑公式，定义$\Sigma \vDash_c A$为 ：

对任意分层模型$\mathrm{K} =< \mathrm{V}, \mathrm{R} >$，$\mathrm{v} \in \mathrm{V}$，当$\Sigma^{K,v} = 1$时，$\mathrm{A}^{K,v} = 1$

性质：

1. 真值的传递性

假设 A 是命题逻辑公式，对于给定的分层模型$\mathrm{K} =< \mathrm{V}, \mathrm{R} >$，假设$\mathrm{v}, \mathrm{w} \in \mathrm{V}$满足$\mathrm{vRw}$，则：当$\mathrm{A}^{K,v} = 1$时$\mathrm{A}^{K,w} = 1$(A 是一个公式)

证明：

1) 假设 A 是命题变元 p，则由分层模型的定义可知当$\mathrm{p}^{K,v} = 1$时$\mathrm{p}^{K,w} = 1$
2) 令$\mathrm{A} = \neg\mathrm{B}$，当$\mathrm{A}^{K,v} = 1$时$\neg\mathrm{B}^{K,v} = 1$，所以对所有的$\mathrm{vR}v', \mathrm{B}^{K,v'} = 0$

   对于赋值$\mathrm{w}$而言，对于所有的$\mathrm{wR}w'$，由关系的传递性可知：$\mathrm{vR}w'$,

   所以$\mathrm{B}^{K,w'} = 0$，所以$\neg\mathrm{B}^{K,w} = 1$，即$\mathrm{A}^{K,w} = 1$

2. 直觉主义的可靠性

若$\Sigma \vdash_c \mathrm{A}$，则$\Sigma \vDash_c A$