2009—2010学年 第一学期末试卷(A)

学号__________ 姓名___________ 成绩__________

考试科目：《 矩阵理论 》（A）

考试日期：2010年 1 月14 日

注意事项：1、考试7个题目共8页

2、考试时间120分钟

题目：

一、（本题 39 分）

二、（本题 20 分）

三、（本题 6 分）

四、（本题 9 分）

五、（本题 11 分）

六、（本题 8 分）

七、（本题 7 分）

八、（附加题）

H

姓名： 学号： A

一. 填空(39 分) (注：$\mathbf{I}$ 代表单位阵，A^H 表示 H 转置，det(A) 指行列式)

(1) $e^{-tr(A)}\cdot\det(e^{A}) =$ <u>1</u>， $(e^{A})^{+}e^{-A}-e^{-A}(e^{A})^{-1} =$ <u>0</u>

$(A-I)(A-2I)$

(2)若 $\mathbf{A}^2-3\mathbf{A}+2\mathbf{I}=0$，则 **A** 有一个无重根零化式为 $\mathbf{f(x)}=$ <u>$(x-1)(x-2)$</u>

$(A^HA)^+A^H=A^+$

(3)若 $A=A^2=A^H$，则 $\mathbf{A}^{+}=$ <u>A</u>

AA^+A A^H AA^+ $(AA^H)^H=AA^H$ A^HAA^H

(4)若 3 阶阵 $\mathbf{A}\neq-\mathbf{I}$，且 $\mathbf{A}^2+2\mathbf{A}+\mathbf{I}=0$，则 Jordan 形 $\mathbf{J_A}=$ <u>$\begin{pmatrix}-1&&\\&-1&1\\&0&-1\end{pmatrix}$</u>

$(x+1)^2$

(5) $A=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}a&1\\0&b\end{pmatrix}$， $A\otimes B$ 的特征根为 <u>3a, 3b, 3a, 3b</u>

$\mathbf{tr}(A\otimes B)=($ <u>6(a+b)</u> $)$

$trA\cdot trB$

(6) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{2}{5}&\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\\frac{1}{4}&\frac{2}{4}&\frac{1}{4}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$， $x=\begin{bmatrix}i\\i\\i\end{bmatrix}$， $i=\sqrt{-1}$，则谱半径

$Ax=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}i\\i\\i\end{bmatrix}$ $\|Ax\|_1$ $\frac{4}{5}+2$

$\rho(A)$ 取值范围是 <u>$(\frac{4}{5},1)$</u>； 且 $\|\mathbf{A}x\|_1=$ <u>$\frac{14}{5}$</u>； $\|\mathbf{A}\|_\infty=$ <u>1</u>

(7) $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$， 则 $e^{tA}=\begin{pmatrix}(\cos t)&-\sin t\\(\sin t)&\cos t\end{pmatrix}$， $e^{\pi A}=$ <u>$\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$</u>

$A\varepsilon_1=\lambda\varepsilon_1$

(8) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ 则 $\mathbf{A}x=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ 的最佳极小二乘解是 <u>$x=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$</u>； $\mathbf{A}^{+}=$ <u>$\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$</u>..

A^+b $\frac{\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}}{4}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $A=BC$

(9)矩阵 **A** 中各列都可用 **B** 的列线性表示 ($\mathbf{R(A)}\subset\mathbf{R(B)}$)，则有矩阵 **P** 使 $\mathbf{BP}=$ <u>A</u>

$\rho(A)\le\|A\|$

(10) n 阶阵 A 的特征根 λ，谱半径 $\rho(A)$ 与范数 $\|A\|$ 的大小关系是 <u>$|\lambda|\le\rho(A)\le\|A\|$</u>.

(11) n 阶阵 A (k 是自然数)，$\rho(A^k)$，$\rho(A)^k$，$\|A^k\|$，$\|A\|^k$ 之间关系为 ________

$\rho(A^k)=\rho(A)^k\le\|A^k\|\le\|A\|^k$

(12) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\1&-2&3\end{pmatrix}$ 的满秩分解为 <u>$A=BC=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$</u>； $C=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$

$(A\varepsilon_1\ A\varepsilon_2\ A\varepsilon_3)$ $(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)$ $A(x-\lambda)=0$

(13)设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是 R^3 的基，$A\in\mathbf{R}^{3\times3}$ 满足：$A\varepsilon_1=\varepsilon_2, A\varepsilon_2=\varepsilon_3, A\varepsilon_3=2\varepsilon_2-\varepsilon_3$.

则有矩阵 B 使得 $A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\mathbf{B}$， B = ________.

$\varepsilon_1 B=\varepsilon_2$ $A\varepsilon_2=\varepsilon_3$

$0\cdot\varepsilon_1+1\cdot\varepsilon_2+0\varepsilon_3$ 1×3 3×3

$0\varepsilon_1+0\varepsilon_2+1$

$0+2$ -1

$A(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&2\\0&1&-1\end{pmatrix}$

3×1

$(\varepsilon_2\ \varepsilon_3\ 2\varepsilon_2-\varepsilon_3)$

$y=Ax$

$x_1\alpha_1+\dots+x_n\alpha_n$

A

二.(20 分)计算下列各题

1. 设列满(高)阵 $A=A_{m\times n}$ 的 QR 分解为 $A=QR$，Q 为次酉阵 $(Q^HQ=I_n)$.

$A_{n\times m}$ $m\times n$

验证：$X=R^{-1}Q^H$ 满足 A^+ 的 4 个条件.

$A^{-1}=R^{-1}Q^H$

$AA^+A=AR^{-1}Q^HA$ $\quad QRR^{-1}Q^HA=A$

$A^+AA^+=R^{-1}Q^HARQ^H$ $\quad R^{-1}Q^HQRR^{-1}Q^H$

~~$AA^+=AA^{-1}=I$~~

$A^+A=A^{-1}A$

$AA^+=QR\cdot R^{-1}Q^H=QQ^H$

$A^+A=R^{-1}Q^HQR=$

2.设 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$, (1)求 A^2, A^3，(2)由 $e^{tA}\triangleq I+tA+\frac{(tA)^2}{2}+\frac{(tA)^3}{3!}+\cdots$ 直接计算 e^{tA}，并求 $(e^{tA})^+=e^{-tA}$.

$A^2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}$ $\quad A^3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

$e^{tA}=I+tA+\frac{(tA)^2}{2}$

$=I+\begin{bmatrix}0&0&0\\t&0&0\\0&t&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\frac{t^2}{2}&0&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1&&\\t&1&\\\frac{t^2}{2}&t&1\end{bmatrix}$

$e^{-tA}=\begin{bmatrix}1&&\\-t&1&\\\frac{t^2}{2}&-t&1\end{bmatrix}$

3.设 $A=\begin{pmatrix}0.5&0.5\\0&0.5\end{pmatrix}$, 计算：$(I-A)\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}A^k\right)^2$

$\rho(A)=0.5<1$ $\quad \sum A^k=(I-A)^{-1}$

$\therefore (I-A)(I-A)^{-2}=(I-A)^{-1}$

$=\begin{pmatrix}0.5&-0.5\\0&0.5\end{pmatrix}^{-1}$

$=\frac{1}{0.25}\begin{pmatrix}0.5&0.5\\0&0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\0&2\end{pmatrix}$

4.已知 8 阶阵 A 适合：$rank(A-2I)=4$, $rank(A-2I)^2=1$, $(A-2I)^3=0$.求 A 的 Jordan 形 J.

$m(x)=(x-2)^3$

$r_0=8$ $\quad d_0=4$ $\quad l_1=1$

$r_1=4$ $\quad d_1=3$ $\quad l_2=2$

$r_2=1$ $\quad d_2=1$

$r_3=0$

$A=\begin{pmatrix}\begin{smallmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{smallmatrix}&&&\\&\begin{smallmatrix}2&1&0\\0&2&1\\0&0&2\end{smallmatrix}&&\\&&2&\\&&&2\end{pmatrix}$

5. (1)画出矩阵 **A** 的盖尔圆盘; (2)说明 A 有 3 个互异特征根.

$$A=\begin{pmatrix} 18 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 1 \\ 1 & i & 9i \end{pmatrix}.$$

$|z-18| \le 3$
$|z-9| \le 2$
$|z-9i| \le 2$

三.(6 分)设**A**是 n 阶正规矩阵, $\sigma(\mathrm{A})=\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$(全体特征根).

(1)写出正规阵**A**的含有对角阵与两个 U(酉)阵的乘积分解公式;

(2)若**A**是 2 阶正规矩阵, $\sigma(\mathrm{A})=\{1, i\}$, $X=\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$使得$\mathrm{A}X=X$, 求一个 U(酉)阵

Q, 将**A**写成**Q**,$\mathbf{Q}^{\mathrm{H}}$与对角阵的乘积形式.

四.(任选 3 题共 9 分)简证下列各题

1.设$\|\bullet\|$是$\mathbb{C}^{n\times n}$上相容的矩阵范数, 列向$\alpha\in\mathbb{C}^n, \alpha\neq 0$. 任取$x\in\mathbb{C}^n$, 令$\|x\|$如下:

$\|x\|$ 定义为 $\|x\alpha^H\|$, $x\in\mathbb{C}^n$. 证明: $\|\mathrm{A}x\|\le\|\mathrm{A}\|\cdot\|x\|$, ($\mathrm{A}\in\mathbb{C}^{n\times n}$).

$\|Ax\| = \|Ax\alpha^H\|$
$\le \|A\|\|x\alpha^H\|$
$= \|A\| \|x\|$

2.设$\|\bullet\|$是矩阵范数，$x\in\mathbb{C}^n, x\neq 0$ 使得 $Ax=\lambda x$；令 $B=(x,0,0,\cdots,0)_{n\times n}$

证明： $AB=\lambda B$，且有 $|\lambda|\|B\|\le\|A\|\|B\|$(由此你能否推出一个结论？).

$A(x\ 0\cdots 0) = (Ax\ 0\cdots 0) = (\lambda x\ 0\cdots 0) = \lambda B$

3. 设 $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$，$\|A\|$是相容的矩阵范数，证明

(1) $\|I\|\ge 1$（I是单位矩阵）；(2)若A可逆， 则$\|A^{-1}\|\ge\frac{1}{\|A\|}$

4. 若A为n阶正规阵，$\sigma(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$(全体特征根)，

证明 $\sigma(A^H)=\{\overline{\lambda_1},\ \cdots,\overline{\lambda_n}\}$($A^H$的全体特征根).

五.(11分) 1.设$A_1=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-2&2\end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$, $\mathbf{b}=(2\ \ 1\ \ 0\ \ 1)^T$, $A=\begin{pmatrix}A_1&0\\0&A_2\end{pmatrix}_{4\times 5}$.

求 A^+ 与 $Ax=b$ 的极小范数解或最佳极小二乘解

$Ax=b$
$x=A^+b$

$A^+=(A_1^+ \quad A_2^+)$

2.已知 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$， (1)求 A 的短奇异值分解; (2)求奇异值分解.

$A^HA=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ $\lambda_1=6,\ \lambda_2=3$

$P\begin{pmatrix}\sqrt6 & \\ & \sqrt3\end{pmatrix}Q^H$

$Q=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\frac{Ax_1}{|Ax_1|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt6\\ 1/\sqrt6\\ 2/\sqrt6\end{pmatrix}$

$\frac{Ax_2}{|Ax_2|}=\begin{pmatrix}1/\sqrt3\\ 1/\sqrt3\\ -1/\sqrt3\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}1/\sqrt6 & 1/\sqrt3\\ 1/\sqrt6 & 1/\sqrt3\\ 2/\sqrt6 & -1/\sqrt3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt6 & 0\\ 0 & \sqrt3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^H$

$\begin{pmatrix}\sqrt6 & 0\\ 0 & \sqrt3\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}^H$

六.(8 分) $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. 求 A 的极小式；计算 e^{tA} 与 $\rho(A\otimes e^B)$

$\sigma(A)=\{2,2,2\}$

$A-2I=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$m(x)=(x-2)^2$

$f(A)=f(2)I+f'(2)(A-2I)$

$=e^{2t}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}+te^{2t}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$f(x)=e^{tx}$
$f'(x)=te^{tx}$

$=\begin{pmatrix}e^{2t} & te^{2t} & 0\\ 0 & e^{2t} & 0\\ 0 & te^{2t} & e^{2t}\end{pmatrix}$

$\sigma(B)=\{1,0\}$

$m(x)=(x-1)x$

$e^B=eG_1+G_2$

$\rho=2e$

$e^B=\begin{pmatrix}e & e-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\sqrt{A}\cdot\sqrt{A}$.

七. (7 分)设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，求一个矩阵 B(具有正的特征根)，使得 $B^2=A$.

附加题(8 分)

1.设 $A\in\mathbb{C}^{m\times m}, B\in\mathbb{C}^{n\times n}, X=X(t)\in\mathbb{C}^{m\times n}$，验证 $X=e^{At}Ce^{Bt}$ 是微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX+XB\text{，}X(0)=C$$ 的唯一解.

2.设单位列向量 $\varepsilon \in \mathbb{C}^3$ $(|\varepsilon|^2 = \varepsilon^H \varepsilon = 1)$．令 $A = \varepsilon\varepsilon^H$， $B = I - 2\varepsilon\varepsilon^H$

(1)求 $A = \varepsilon\varepsilon^H$ 的特征多项式，验证 $A^2 = A = A^H$，并且求 A 的极小式与 A^+；

(2)求 B 的谱 $\sigma(B)$ 与谱半径 $\rho(B)$，验证 $B^2 = I$．

(3) $f(x)$ 是解析函数，求谱分解公式 $f(B) = f(\lambda_1)G_1 + f(\lambda_2)G_2$ 中的谱阵 G_1, G_2

$|\lambda I - \varepsilon\varepsilon^H| =$

$A^2 - A = 0$

$m(x) = x(x-1)$

$A^+ = A$

$(\varepsilon\varepsilon^H)^2$

$\varepsilon(\varepsilon^H\varepsilon)\varepsilon^H$

$= \varepsilon\varepsilon^H = A$

$\varepsilon\varepsilon^H = A^H$.

$A(A-I)$ $\quad A(A-I)^2$

$A^2(A-I)$ $\quad A(A^2+I-2A)$

$A^3 - A^2$ $\quad A^3 + A - 2A^2$

$A^3 = A^2$ $\quad A^2 + A - 2A^2$

$A - A^2$

(1) $m(x) = x(x-1)$

$A^+ = A$

$f(x) = x^2(x-1)$

(2) $|\lambda I - (I - 2\varepsilon\varepsilon^H)| =$

$\sigma(2A) = (0,0,2)$

$\sigma(I-2A) = (1,1,-1) = \sigma(B)$

$\rho(B) = 1$

$|\lambda I_3 - \varepsilon\varepsilon^H|$

$\lambda^2(\lambda - \varepsilon^H\varepsilon)$

$\lambda^2(\lambda-1) = 0$

$(0,0,1)$

$(I - 2\varepsilon\varepsilon^H)(I - 2\varepsilon\varepsilon^H)$

$= I - 2\varepsilon\varepsilon^H - 2\varepsilon\varepsilon^H + 4\varepsilon\varepsilon^H$

$= I$

$(0,0,-1)$ $(1,1,-1)$

$G_1 = \frac{B+I}{2} = \frac{2I - 2\varepsilon\varepsilon^H}{2} = I - \varepsilon\varepsilon^H$

旋正公式

$G_2 = \frac{B-I}{-2} = \varepsilon\varepsilon^H$

$|\lambda I_3 - \varepsilon\varepsilon^H|$

$= \lambda^2(\lambda - \varepsilon^H\varepsilon) = 0$

$= \lambda^2(\lambda-1) =$

$(0,0,1)$