1 公理集合论

1.1 集合论概念

朴素集合论

具有给定性质的对象的全体定义为集合，集合与元素直觉的关系叫做属于。

公理集合论

给定集合论语言$\mathrm{L}=\{\in\}$及该语言的一个模型$<\mathrm{V},\in>$。该模型的元素成为集合，二元谓词符号$\in$表示属于关系。

空集

$\emptyset$表示空集：$\neg\exists\mathrm{x}(\mathrm{x}\in\emptyset)$

二元组

$<\mathrm{a},\mathrm{b}>$表示二元组：$\{\{\mathrm{a}\},\{\mathrm{a},\mathrm{b}\}\}$

例题：给出三元组的定义，并证明其合理性，即：

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\textbf{当且仅当}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{y},\boldsymbol{c}=\boldsymbol{z}$$

三元组定义：$(a,b,c)=\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\}$

假设存在另一个三元组$(x,y,z)=\{\{x\},\{x,y\},\{x,y,z\}\}$使得$(a,b,c)=(x,y,z)$，即：

$$\left\{\{a\},\{a,b\},\{a,b,c\}\right\}=\{\{x\},\{x,y\},\{x,y,z\}\}$$

则必有$a=x$，因为只有$\{a\}$和$\{x\}$元素个数为 1，他俩必相等

又因为$\{a,b\}=\{x,y\}$(元素个数为 2),$a=x$，则必有$b=y$

又因为$\{a,b,c\}=\{x,y,z\},a=x,b=y$，则必有$c=z$

所以该三元组的合理性得证

函数

func(a)表示 a 是一个函数，满足以下两个公式：$\Phi_1\wedge\Phi_2$

Φ_1是公式：$\forall\mathrm{x}(\mathrm{x}\in\mathrm{a}\rightarrow\exists\mathrm{uv}(\mathrm{x}=<\mathrm{u},\mathrm{v}>))$

Φ_2是公式：$\forall\mathrm{uvw}(<\mathrm{u},\mathrm{v}>\in\mathrm{a}\wedge<\mathrm{u},\mathrm{w}>\in\mathrm{a}\rightarrow\mathrm{v}=\mathrm{w})$

定义域

dom(a)表示函数 a 的定义域：

$$\mathrm{dom}(a) = \{u | \exists v(< u, v >\in a)\}$$

值域

ran(a) 表示函数 a 的值域：

$$\mathrm{ran}(a) = \{v | \exists u(< u, v >\in a)\}$$

自然数

$0 = \emptyset$

$0^+ = 0 \cup \{0\} = \{0\} = 1$

$1^+ = 1 \cup \{1\} = \{0,1\} = 2$

$2^+ = 2 \cup \{2\} = \{0,1,2\} = 3$

…

平行公设：

第 5 公设也被称为平行公设，它等价于：

在同一平面，过直线外一点，有且仅有一条直线与此直线平行

1.2 集合论的 10 条公理

1.2.1 外延公理

$$\forall \mathbf{xy}(\forall z(z \in \mathbf{x} \leftrightarrow z \in \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y})$$

若两个集合元素相同，则这两个集合相等。

1.2.2 空集公理

$$\exists \mathbf{x} \forall y(y \notin \mathbf{x})$$

记上述 **x** 为$\emptyset$。空集公理保证了空集的存在性，根据外延公理可知，空集是唯一的。

空集的唯一性证明：

假设存在另一集合$\emptyset'$是空集，

由$\forall y(y \notin \emptyset)$可得：$\forall z(z \in \emptyset \rightarrow z \in \emptyset')$（前提不成立，所以整个式子成立）

由$\forall y(y \notin \emptyset')$可得：$\forall z(z \in \emptyset' \rightarrow z \in \emptyset)$

所以$\forall z(z \in \emptyset \leftrightarrow z \in \emptyset')$

所以$\emptyset = \emptyset'$

1.2.3 偶对公理

$$\forall \mathbf{xy} \exists \mathbf{u} \forall \mathrm{z}(\mathrm{z} \in \mathbf{u} \leftrightarrow \mathrm{z} = \mathbf{x} \vee \mathrm{z} = \mathbf{y})$$

记 $\mathbf{u}$ 为$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$，由此可知：对于集合$\mathbf{x}, \mathbf{y}$存在一个仅以它们为元素的集合$\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$。

例：$\mathrm{x} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \mathrm{y} = \{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}$　　$\{x, y\} = \{\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}\}$

1.2.4 并集公理

$$\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{u} \forall \mathrm{y}(\mathrm{y} \in \mathrm{u} \leftrightarrow (\exists \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \mathbf{x} \wedge \mathrm{y} \in \mathbf{z})))$$

由集合S的**所有元素的元素**组成的集合，叫做集合的并集合$\cup \mathrm{S}$。

例：$\mathrm{S} = \{\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \{\mathrm{b}, \mathrm{c}\}\}$ $\cup \mathrm{S} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$

$\mathrm{S} = \{\{\{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}\}, \{\{\mathrm{c}\}, \{\mathrm{c}, \mathrm{d}\}\}\}$

$\cup \mathrm{S} = \left\{\{\mathrm{a}\}, \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}, \{\mathrm{c}\}, \{\mathrm{c}, \mathrm{d}\}\right\}$ $\cup\cup S = \{a, a, b, c, c, d\}$

一般意义下的$\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$在严格意义下被写为$\cup \{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$

$\cup \emptyset = \emptyset$

证明：将$\mathbf{x} = \emptyset$，$\mathbf{u} = \cup \emptyset$代入并集公式可知：

$\forall \mathrm{y}(\mathrm{y} \in \cup \emptyset \leftrightarrow (\exists \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \emptyset \wedge \mathrm{y} \in \mathbf{z})))$

因为$\exists \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \emptyset \wedge \mathrm{y} \in \mathbf{z}))$是永假的，所以$\forall \mathrm{y}(\mathrm{y} \notin \cup \emptyset)$

所以$\cup \emptyset = \emptyset$

$\cup \{\emptyset\} = \emptyset$

证明：将$\mathbf{x} = \{\emptyset\}$，$\mathbf{u} = \cup \{\emptyset\}$代入并集公式可知：

$\forall \mathrm{y}(\mathrm{y} \in \cup \{\emptyset\} \leftrightarrow (\exists \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \{\emptyset\} \wedge \mathrm{y} \in \mathbf{z})))$

$\exists \mathbf{z}(\mathbf{z} \in \{\emptyset\} \wedge \mathrm{y} \in \mathbf{z}))$等值于$\mathrm{y} \in \emptyset$，是永假的，所以$\forall \mathrm{y}(\mathrm{y} \notin \cup \{\emptyset\})$

所以$\cup \{\emptyset\} = \emptyset$

1.2.5 子集公理

假设ϕ是集合论语言的一个公式，仅出现自由变元$x_1, \cdots, x_n, z$,不出现变元y，则：

$$\forall x_1, \cdots, x_n \forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} \forall z(z \in \boldsymbol{y} \leftrightarrow z \in \boldsymbol{x} \wedge \phi)$$

对于给定的$x_1, \cdots, x_n, z$，这样定义的集合y被记为：

$y = \{z \in \boldsymbol{x} | \phi\}$

这样定义的集合y是x子集($y \subseteq x$)，可以理解为集合x中满足公式ϕ的元素构成的集合成为x的子集。

1.2.6 幂集公理

$$\forall \mathbf{x} \exists \mathbf{y} (\forall \mathbf{z} (\mathbf{z} \in \mathbf{y} \leftrightarrow \mathbf{z} \subseteq \mathbf{x}))$$

集合x的所有子集z构成的集合y称为x的幂集。

1.2.7 无穷公理

$$\exists \mathbf{x} (\emptyset \in \mathbf{x} \wedge (\forall \mathrm{y} (\mathrm{y} \in \mathbf{x} \rightarrow y^{+} \in \mathbf{x})))$$

y^{+}表示集合$\mathrm{y} \cup \{\mathrm{y}\}$

1.2.8 替换公理

假设θ是命题逻辑中的公式，仅出现自由变元$x_1, \cdots, x_n, u, z$,不出现变元y，则：

$$\forall x_1, \cdots, x_n \forall \boldsymbol{x} (\psi \rightarrow \exists \boldsymbol{y} \forall z (z \in \boldsymbol{y} \leftrightarrow \exists u \in \boldsymbol{x} \wedge \theta[\mathrm{u}, \mathrm{z}]))$$

ψ是以下公式：

$$\forall \mathrm{u} \in \mathbf{x} \forall z_1 z_2 (\theta[\mathrm{u}, z_1] \wedge \theta[\mathrm{u}, z_2] \rightarrow z_1 = z_2)$$

这里的集合 **y** 就是替换公理得到的新集合，记为：

$$\{\mathrm{z} | \exists u (u \in \boldsymbol{x} \wedge \theta[\mathrm{u}, \mathrm{z}])\}$$

语言说明：基于一个已知集合 **x** 与一个特殊的单射函数θ，可以得到一个新集合 **y**。$\theta[\mathrm{x}, \mathrm{y}]$表示输入为 x 输出为 y。

1.2.9 正规公理

$$\forall \mathbf{x} (\mathbf{x} \neq \emptyset \rightarrow \exists \mathrm{y} (\mathrm{y} \in \mathbf{x} \wedge \mathrm{y} \cap \mathbf{x} = \emptyset))$$

正规公理保证了**不存在**这样的集合：$\mathbf{x} = \{\mathbf{x}\}$

1.2.10 选择公理

通俗来讲：根据一个由非空集合组成的集合 S，从 S 的元素集合中分别抽出一个元素组成的集合。

1.3 公理的应用

1. 外延公理用于判定集合相等
2. 正规公理用于判定集合属于关系
3. 其他公理用于证明集合存在性，常用替换公理

1.4 例题

例 1：证明可数符号表上有限长字符串的集合是可数的

证明：假设给定的可数符号表是集合 A，则：

长度为 1 的字符串集合$S_1 = A$

长度为 2 的字符串集合$S_2 = \{ab|a,b \in A\}$

…

每个S_i都是可数的，并且S_i的个数也是可数的，所以可数个可数集合的并集也是可数的。

例 2：证明空集是函数

func(a)表示 a 是一个函数，满足以下两个公式：$\Phi_1 \wedge \Phi_2$

Φ_1是公式：$\forall x(x \in a \rightarrow \exists uv(x = <u,v>))$

Φ_2是公式：$\forall uvw(<u,v> \in a \wedge <u,w> \in a \rightarrow v = w)$

若 a 为空集，则Φ_1和Φ_2的前提都不成立，所以Φ_1和Φ_2成立，所以空集是个函数。

例 3：对于集合 **a** 及 **b**, 则它们的交集是集合

由子集公理可知：

$\forall \boldsymbol{x} \exists \boldsymbol{y} \forall z(z \in \boldsymbol{y} \leftrightarrow z \in \boldsymbol{x} \wedge \phi)$

令$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$, ϕ为$z \notin \mathbf{b}$，得

$\forall \boldsymbol{a} \exists \boldsymbol{y} \forall z(z \in \boldsymbol{y} \leftrightarrow z \in \boldsymbol{a} \wedge z \notin \mathbf{b})$

此时的集合$\boldsymbol{y}$就是集合 **a** 及 **b** 的交集

例 4：对于集合 x 及 y,它们的卡氏积$x \times y = \{<u,v>|u \in x, v \in y\}$是集合

例 5：证明：存在无限集合$\{0,\{1\},\{\{2\}\},\{\{\{3\}\}\},\dots\}$

已知自然数集合ω，根据替换公理，只要构造一个从ω到上述集合的单射函数即可证明上述集合存在。

定义函数$\theta[x,y]$满足以下条件：

$$(x=0\to y=x)\wedge(x\neq 0\to\exists f(\Psi_1\wedge\Psi_2\wedge y=f(x)))$$

其中：

Ψ_1是公式：$\mathrm{func}(f)\wedge(x=\min(\mathrm{dom}(f))\to f(x)=x)$

Ψ_2是公式：$\forall u(u\in\mathrm{dom}(f)\wedge u^+\in\mathrm{dom}(f)\to f(u^+)=\{f(u)\})$

则对任意$n\in\omega$,都存在唯一的一个 f

对任意$n\in\omega$,存在唯一 a，满足$\theta[n,a]$

则根据选择公理可知，存在集合 u：

$$u=\{a|n\in\omega\wedge\theta[n,a]\}$$

u 即为要证集合

说明：

公式Ψ_1定义了 f 的定义域与初值$f(0)=0$

公式Ψ_2定义了$f(n)=\{f(n-1)\}=\{\{f(n-1)\}\}=\{\dots\{f(n-k)\}\dots\}$

比如：$\{1\}=f(2)$，$\mathrm{dom}(f)=\{1,2\}$

$\{\{2\}\}=f(4)$，$\mathrm{dom}(f)=\{2,3,4\}$

例 6：证明：$\forall mn(m\in\omega\wedge n\in\omega\wedge m^+=n^+\to m=n)$

假设 m,n 是两个自然数，满足$m^+=n^+$,则根据定义可知：

$m\cup\{m\}=n\cup\{n\}$

若$m\neq n$：

由$m\in m\cup\{m\}$知$m\in n\cup\{n\}$，又因为$m\neq n$，所以$m\notin\{n\}$，所以$m\in n$

同理可知：$n\in m$

这时集合$x=\{m,n\}$不满足正规公理：

$$\forall \mathbf{x}(\mathbf{x} \neq \emptyset \to \exists y(y \in \mathbf{x} \land y \cap \mathbf{x} = \emptyset))$$

因为$m \cap \mathbf{x} = \{n\}, n \cap \mathbf{x} = \{m\}$

所以 x 不是一个集合，所以$m = n$

例 7：证明$\omega \notin \omega$

假设$\omega \in \omega$，则存在集合$\mathbf{x} = \{\omega\}$不满足正规公理：

$$\forall \mathbf{x}(\mathbf{x} \neq \emptyset \to \exists y(y \in \mathbf{x} \land y \cap \mathbf{x} = \emptyset))$$

因为$\omega \cap \{\omega\} = \omega$

所以假设不成立

2 自然数逻辑理论

2.1 归纳集

2.1.1 定义

满足以下两个条件的集合$\mathbf{u}$称为归纳集：

$$\emptyset \in \mathbf{u} \wedge (\forall \mathrm{a}(\mathrm{a} \in \mathbf{u} \to \mathrm{a}^{+} \in \mathbf{u}))$$

其中a^{+}表示集合$\mathrm{a} \cup \{\mathrm{a}\}$

2.1.2 公式

以$\mathrm{lnd(x)}$表示以下公式：

$$\emptyset \in \mathbf{x} \wedge \forall \mathrm{y}(\mathrm{y} \in \mathbf{x} \to y^{+} \in \mathbf{x})$$

所以$\mathbf{x}$是一个归纳集当且仅当$\mathrm{lnd(x)}$成立。

2.1.3 性质

1. 两个归纳集的并集以及交集还是归纳集。
2. 若存在集合{0,1,2,...}，则它是一个归纳集。
3. 归纳集也是一个无限集，无穷公理保证这样无限集合是存在的，且不唯一。

2.1.4 自然数集合

自然数集合是最小的归纳集ω，满足以下公式：

$$\mathrm{lnd}[\boldsymbol{\omega}] \wedge \forall \mathbf{x}(\mathrm{lnd}[\mathbf{x}] \to \boldsymbol{\omega} \subseteq \mathbf{x})$$

Eg : 证明：$\cup\, \omega = \omega$

证明：

$\forall \mathrm{n} \in \omega$，因为$\mathrm{n} \in n^{+}, n^{+} \in \omega \to \mathrm{n} \in \cup\, \omega$

$\forall \mathrm{x} \in \cup\, \omega$，$\exists \mathrm{n} \in \omega$, 使得 $\mathrm{x} \in \mathrm{n}$，所以$\mathrm{x} \in \omega$

2.2 第一归纳法

2.2.1 推论

假设$\Phi(x)$是集合论的一个语句，只包含一个自由变元x，且

$$\Phi[0] \wedge \forall x(x \in \omega \wedge \Phi[x] \to \Phi[x^{+}])$$

则对任意自然数n，都有$\Phi[n]$成立。

即只要证明$\Phi[0]$成立，并且在假设$\Phi[x]$成立的情况下能够证明$\Phi[x^+]$成立，则Φ对于自然数集合恒成立。

2.2.2 例题

例 1：证明对任意的$n \in \omega$有$n^+ \neq 0$

证明：

考虑以下公式$\Phi[x]$：

$$\neg x^+ = 0$$

$\Phi[0]$显然成立，因为$0^+ = \{0\}$，不是空集0.

若$m \in \omega$且$\Phi[m]$成立，则m^+不是空集，$(m^+)^+ = m^+ \cup \{m^+\}$也不是空集，所以$\Phi[m^+] = \neg((m^+)^+ = 0)$也成立。

由归纳法可知$\Phi[x]$对任意自然数恒成立。

例 2：对于任意的$m \in \omega$，若$n \in m$，则$n \in \omega$。

证明：

考虑以下公式$\Phi[x]$：

$$\forall y(y \in x \to y \in \omega)$$

因为0是空集，所以$y \in 0$是假的，所以$\Phi[0]$成立

若$m \in \omega$且$\Phi[m]$成立，

对于$y \in m^+ = m \cup \{m\} \to y = m$ 或 $y \in m$

若$y = m$，由$m \in \omega$可知，$y \in \omega$

若$y \in m$，由$\Phi[m]$可知，$y \in \omega$

所以$\Phi[m^+]$也成立

例 3：对于任意的$a, b, c \in \omega$，若$a \in b, b \in c$，则$a \in c$。

证明：

考虑以下公式$\Phi[x]$：

$\forall yz(y \in z \wedge z \in x \to y \in x)$

$\Phi[0]$显然成立，因为0是空集，前提是假的。

若$m \in \omega$且$\Phi[m]$成立

对于$z \in m^+ = m \cup \{m\} \to z = m$ 或 $z \in m$

若$z = m$，则$y \in z = m$，所以 $y \in m^+$

若$z \in m$，由$\Phi[m]$可知，$y \in m$，所以 $y \in m^+$

所以$\Phi[m^+]$也成立

2.3 递归定义

2.3.1 递归定义的合理性

假设a是一个集合，f是一个函数，则存在一个函数r满足：

1) $\mathrm{dom}(r) = \omega$
2) $r(0) = a$
3) $\forall m \in \omega$，都有$r(m^+) = f(r(m))$

2.3.2 例题

例 1：证明存在集合$\{0, \{0\}, \{\{0\}\}, \cdots\}$

证明：

取$a = 0$，公式f为$f(x) = \{x\}$

由递归定义的合理性可知，存在函数 r 满足：

$r(0) = 0$

$r(1) = f\big(r(0)\big) = \{0\}$

$r(2) = f\big(r(1)\big) = \{\{0\}\}$

…

所以r的值域即为上述集合

2.3.3 推广

假设$\Phi(x, y)$是集合论语言的一个函数型公式，即满足：

1) $\forall x \exists y \Phi(x, y)$
2) $\forall xyz(\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, z) \to y = z)$

这时记相应于x的y为x_{Φ}。

多元迭代函数：

假设 a 是一个集合，$f(x,y)$是二元函数，则存在一个函数 r 满足：

1) $\mathrm{dom}(r) = \omega$
2) $r(0) = a$
3) $\forall m \in \omega$，都有$r(m^{+}) = f(r(m), m)$

3 命题逻辑的两个推理系统

3.1 Hilbert 推理系统

公理：

1. $A \to (B \to A)$
2. $\big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$
3. $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

规则：

$\frac{A, A\to B}{B}$ (即 $A, A \to B \vdash B$)

推演序列：

假设 Γ 是公式集合，公式序列$\langle A_1, A_2, \ldots, A_n\rangle$被称为 Γ -推演序列，当且仅当：

1. 或者$A_i \in \mathbf{\Gamma}$
2. 或者A_i是公理
3. 或者存在$j, k < i$，A_i可由A_j, A_k应用规则得到

可证性：

若存在 Γ -推演序列，它的最后一个公式是 A，则称 A 是 Γ 可证的，记为 $\Gamma \vdash A$。

Eg1：证明：$\vdash A \to A$

1.	$A_1: A \to \big((A \to A) \to A\big)$	公理 1
2.	$A_2: A \to (A \to A)$	公理 1
3.	$A_3: A_1 \to \big(A_2 \to (A \to A)\big)$	公理 2
4.	$A_4: A_2 \to (A \to A)$	规则
5.	$A_5: A \to A$	规则

所以 $\vdash A \to A$

3.2 推理系统二

公理：

$A \vdash A$

规则(只列了常用的几个)：

- $\frac{\Sigma \vdash A}{\Sigma, \Sigma' \vdash A}$　　单调性：若$A \vdash B$，则$A, C \vdash B$
- $\frac{\Sigma, \neg A \vdash B \text{ 且 } \Sigma, \neg A \vdash \neg B}{\Sigma \vdash A}$　　反证法：$(\Sigma, \neg A)$矛盾
- $\frac{\Sigma \vdash A \text{ 且 } \Sigma \vdash A \to B}{\Sigma \vdash B}$　　三段论
- $\frac{\Sigma, A \vdash B}{\Sigma \vdash A \to B}$　　演绎定理

可证性：有限次应用公理和规则生成$\Sigma \vdash A$，则称$\Sigma \vdash A$可证。

Eg1：证明：$\neg\neg A \vdash A$

1.	$\neg\neg A \vdash \neg\neg A$	公理
2.	$\neg\neg A, \neg A \vdash \neg\neg A$	单调性
3.	$\neg A \vdash \neg A$	公理
4.	$\neg\neg A, \neg A \vdash \neg A$	单调性
5.	$\neg\neg A \vdash A$	2,4 应用反证法规则

3.3 性质

3.3.1 紧致性

给定公式集合Σ和公式 A，若$\Sigma \vdash A$，则存在有限的$\boldsymbol{\Gamma} \subseteq \Sigma$，使得$\boldsymbol{\Gamma} \vdash A$

3.3.2 协调性

给定命题逻辑的公式集合Σ，若存在公式 A，使得$\Sigma \vdash A$ 且$\Sigma \vdash \neg A$，则称Σ是不协调的。

3.3.3 一些定义

公式的真值：

假设 v 是一个赋值，A 是公式，可以根据真值表定义$v(A) = 1$

集合的真值：

假设Γ是一个公式集合，定义$v(\boldsymbol{\Gamma}) = 1$为：对每个$A \in \boldsymbol{\Gamma}$, 都有 $v(A) = 1$

⊨ 定义：

假设Γ是一个公式集合，A 是公式，$\boldsymbol{\Gamma} \vDash A$为：

对任意的赋值 v，当$v(\boldsymbol{\Gamma}) = 1$时，$v(A) = 1$

3.3.4 可靠性和完备性

可靠性：若Σ ⊢A，则Σ ⊨A

完备性：若Σ ⊨A，则Σ ⊢A

3.4 规则的独立性证明

证明方式：

1. 修改逻辑联结词的定义，使得其他规则都成立，但该规则不成立。则该规则独立于其他规则。
2. 若某个规则可以证明一个推演，而不使用该规则，该推演不可证明。则称该规则是独立的

弱推演系统：

1. $A \to (B \to A)$
2. $\big(A \to (B \to C)\big) \to \big((A \to B) \to (A \to C)\big)$
3. $(\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)$

Eg1: 证明规则 1 独立于规则 2、3

证明：

重新定义规则：真值取值{0,1,2}，→ 和¬定义如下：

→	0	1	2	¬
0	0	2	2	2
1	2	2	0	0
2	0	0	0	0

定义：$\Gamma \models A$为$v(\Gamma) = 0$且$v(A) = 0$

当$v(A) = 0$，$v(B) = 1$时，$v(A \to (B \to A)) = 2$

所以规则 1 不成立

在这种情况下，规则 2、3 都成立，但规则 1 不成立，所以规则 1 独立于规则 2、3

Eg2：证明规则 3 独立于规则 1、2

证明：

重新定义规则：→ 和¬定义如下：

→	0	1	¬
0	0	1	0
1	0	0	0

定义：$\Gamma \models A$为$v(\Gamma) = 0$且$v(A) = 0$

当$v(A) = 1$，$v(B) = 0$时，$v((\neg A \to B) \to ((\neg A \to \neg B) \to A)) = 1$

所以规则 3 不成立

在这种情况下，规则 1、2 都成立，但规则 3 不成立，所以规则 3 独立于规则 1、2

3.5 例题

Eg1: 完备性证明：若 $\models A$，则 $\vdash A$

证明：

假设 A 中出现的所有命题变元$p_1, p_2, \dots, p_n$，v 是一个真值赋值，定义文字$L_{v,i}$：

$$L_{v,i} = \begin{cases} p_i, & v(p_i) = 1 \\ \neg p_i, & v(p_i) = 0 \end{cases}$$

因为 $\models A$，所以 A 永真，所以$v(A) = 1$，所以$L_{v,1}, \dots, L_{v,n} \vdash A$

对于任意赋值 v，$L_{v,1}, \dots, L_{v,n} \vdash A$

因为 A 永真，所以：$L_{v,1}, \dots, L_{v,n-1}, p_n \vdash A$　　$L_{v,1}, \dots, L_{v,n-1}, \neg p_n \vdash A$

所以$L_{v,1},\ldots,L_{v,n-1}\vdash$A

由上可知，若 A 永真，则对任意赋值 v 都有：

$L_{v,1},\ldots,L_{v,n}\vdash$A

$L_{v,1},\ldots,L_{v,n-1}\vdash$A

。。。

$L_{v,1}\vdash$A

$\vdash$A

4　命题逻辑的完备性

4.1 定义

完备性定理：在命题逻辑中，假设A是公式，有以下结论：

$$若 \models A，则 \vdash A$$

极大协调集合：

满足以下条件的公式集合Σ被称为极大协调的：

1. Σ是协调的
2. 对任意的$A \notin \Sigma$，公式集合$\Sigma \cup \{A\}$是不协调的

证明：$\Sigma = \{A|v(A) = 1\}$是一个极大协调集

证：

若$A \in \Sigma$且$\neg A \in \Sigma$，则$v(A) = 1$且$v(\neg A) = 1$，这是不可能的，所以Σ是协调的。

若$A \notin \Sigma$，则$v(A) = 0$，$v(\neg A) = 1$，所以$\neg A \in \Sigma$，所以$\Sigma \cup \{A\}$是不协调的。

综上，Σ是极大协调集。

4.2 性质

对任意公式集合Σ和公式 A，B，若Σ是极大协调集合，有以下性质：

1. $A \in \Sigma$当且仅当$\Sigma \vdash A$

2. $\neg A \in \Sigma$当且仅当 $A \notin \Sigma$

证明：先证若$\neg A \in \Sigma$则$A \notin \Sigma$

若$A \in \Sigma$，此时$A, \neg A \in \Sigma$，与Σ的协调性相矛盾

所以$A \notin \Sigma$

再证明若$A \notin \Sigma$，则$\neg A \in \Sigma$

因为$A \notin \Sigma$，所以$\Sigma \cup \{A\}$是不协调的，所以$\Sigma \vdash \neg A$，所以$\neg A \in \Sigma$

3. $A \wedge B \in \Sigma$ 当且仅当 $A \in \Sigma$ 并且 $B \in \Sigma$

证明：先证充分性：

因为 $A \wedge B \in \Sigma$，所以 $\Sigma \vdash A \wedge B$

因为 $A \wedge B \vdash A$，$A \wedge B \vdash B$，所以 $\Sigma \vdash A$，$\Sigma \vdash B$，所以 $A \in \Sigma$ 并且 $B \in \Sigma$

再证必要性：

$A \in \Sigma$，$B \in \Sigma \rightarrow \Sigma \vdash A$，$\Sigma \vdash B \rightarrow \Sigma \vdash A \wedge B \rightarrow A \wedge B \in \Sigma$

4. $A \vee B \in \Sigma$ 当且仅当 $A \in \Sigma$ 或者 $B \in \Sigma$

若 Σ 是极大协调集合，定义赋值 v 使得：

$v(p) = 1$ 当且仅当 $p \in \Sigma$

则对任意的公式 A，$v(A) = 1$ 当且仅当 $A \in \Sigma$

例题 1：假设 Σ 是协调的公式集合，则存在极大协调集 Σ'，使得 $\Sigma \subseteq \Sigma'$

证明：

假设仅有可数个命题变元，则全部公式可以列举为：$B_0, B_1, B_2, \ldots$

按照以下方式定义集合 Σ_n:

1. $\Sigma_0 = \Sigma$

2. $\Sigma_{n+1} \begin{cases} \Sigma_n \cup \{B_n\}, & \text{若 } \Sigma_n \cup \{B_n\} \text{是协调的} \\ \Sigma_n & \text{，否则} \end{cases}$

根据定义可知，所有 Σ_n 都是协调的。

定义 $\Sigma' = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \ldots$

此时 $\Sigma \subseteq \Sigma'$，先证证明 Σ' 是极大协调集

假设 Σ' 是不协调的

则 $\Sigma' \vdash A \wedge \neg A$

则存在公式$A_1,\dots,A_m \in \Sigma'$，使得$A_1,\dots,A_m \vdash A \wedge \neg A$

假设这些$A_1,\dots,A_m$都属于某个Σ_n,则$\Sigma_n \vdash A \wedge \neg A$，这与定义中$\Sigma_n$的协调性相矛盾，所以$\Sigma'$是协调的

对于任意公式$A \notin \Sigma'$，可以假设它是B_n，则$\Sigma_n \cup \{B_n\}$是不协调的，$\Sigma' \cup \{A\}$是不协调的，所以Σ'是极大的。

例题 2：完备性证明：对任意公式集合Σ与公式 A，若$\Sigma \vDash A$，则$\Sigma \vdash A$

证明：假设$\Sigma \vdash A$不成立，这时$\Sigma \cup \{\neg A\}$是协调的，因而可以扩充为极大协调集Σ'

由Σ'可以定义赋值：$v(A) = 1$ 当且仅当 $A \in \Sigma'$

赋值 v 具有以下性质：

1. $v(\Sigma) = 1$，因为$\Sigma \subseteq \Sigma'$
2. $\neg A \in \Sigma'$，所以$v(\neg A) = 1$，所以$v(A) = 0$

这与$\Sigma \vDash A$相矛盾，所以$\Sigma \vdash A$

5 命题直觉主义逻辑

5.1 公理系统

在命题逻辑的自然推演系统中，将反证法规则替换为两个规则：

直觉反证法：

$$若\Sigma, A \vdash B 及 \Sigma, A \vdash \neg B，则\Sigma \vdash \neg A$$

不协调前提：

$$若\Sigma \vdash A 及 \Sigma \vdash \neg A，则\Sigma \vdash B$$

其中Σ是命题逻辑公式的集合，上述两条规则是相互独立的。

5.2 $c\_$

Σ是命题逻辑公式集合，A 是命题逻辑公式，称Σ $\vdash$A是$c_$可演算的，当且仅当存在：

$\Sigma_i \vdash A_i (i = 0,1,\dots,n)$，使得$\Sigma_n \vdash A_n$是Σ $\vdash$A，并且对每个 i，有$\Sigma_i \vdash A_i$满足：

1) 或者是某种规则
2) 或者存在 j<i，$\Sigma_i \vdash A_i$是通过$\Sigma_j \vdash A_j$应用规则推导出的
3) 或者存在 j，k<i，$\Sigma_i \vdash A_i$是通过$\Sigma_j \vdash A_j$和$\Sigma_k \vdash A_k$应用规则推导出的

若Σ $\vdash$A是$c_$可演算的，记为$\Sigma \vdash_c A$

若$\Sigma \vdash_c A$且$\Sigma \vdash_c \neg A$，则称Σ是不协调的

Eg1: 证明$A \vdash_c \neg\neg A$

1. $A \vdash A$
2. $A, \neg A \vdash A$　　　　$A \vdash B$ 可推出 $A, C \vdash B$
3. $\neg A \vdash \neg A$
4. $A, \neg A \vdash \neg A$
5. $A \vdash_c \neg\neg A$　　　　2,4 直觉反证法：$A \vdash_c \neg(\neg A)$

Eg2: 证明$A \to B \vdash_c \neg B \to \neg A$

1. $A \to B \vdash A \to B$
2. $A \to B, A \vdash A \to B$
3. $A \vdash A$
4. $A \to B, A \vdash A$
5. $A \to B, A \vdash B$ 2,4
6. $A \to B, A, \neg B \vdash B$
7. $\neg B \vdash \neg B$
8. $A \to B, A, \neg B \vdash \neg B$
9. $A \to B, \neg B \vdash \neg A$ 6,8 直觉反证法
10. $A \to B \vdash \neg B \to \neg A$ 左侧可以当右侧的前提

5.3 不协调性的应用

若公式集合$\Sigma \cup \{A\}$是不协调的，则$\Sigma \vdash \neg A$

Eg1:$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg A \wedge \neg B$

$A \vee B \vdash A \vee B$

$\neg A \wedge \neg B, A \vee B \vdash (\neg A \wedge A) \vee (\neg B \wedge B)$

所以集合$\{\neg A \wedge \neg B, A \vee B\}$不协调

所以$\neg A \wedge \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

5.4 分层模型

直觉主义逻辑的一个模型 K 是指一个二元组$< V, R >$，其中：

1) 非空集合 V 是每个命题变元元素对应于命题逻辑的一个赋值

2) R 是 V 上的一个二元关系，具有自反性和传递性

3) 对于任意的命题变元 p 及赋值$v_1, v_2 \in K$，有：若$\boldsymbol{v_1(p) = 1}$且$\boldsymbol{v_1 R v_2}$，则$\boldsymbol{v_2(p) = 1}$。

注意：分层模型的赋值情况并不是任意取值的，要满足对于$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$，$\boldsymbol{w(p)} \geq \boldsymbol{v(p)}$

自反性：对任意$\mathrm{v} \in \mathrm{V}, (\mathrm{v}, \mathrm{v}) \in \mathrm{R}$

传递性：对任意 a,b,c∈ V，若$(\mathrm{a}, \mathrm{b}), (\mathrm{b}, \mathrm{c}) \in \mathrm{R}$，则$(\mathrm{a}, \mathrm{c}) \in \mathrm{R}$

记$\mathrm{v}(\mathrm{p}) = \mathrm{p}^{K,v}$

在分层模型下，真值的计算比较特殊：

对于给定的分层模型$\mathrm{K} =< \mathrm{V}, \mathrm{R} >$,假设$\mathrm{v} \in V$，$(v, w) \in R$对于命题变元的任意公式：

1. $(A \wedge B)^{K,v} = 1$当且仅当$\mathrm{A}^{K,v} = 1$ 且$\mathrm{B}^{K,v} = 1$
2. $(A \vee B)^{K,v} = 1$当且仅当$\mathrm{A}^{K,v} = 1$ 或$\mathrm{B}^{K,v} = 1$
3. $(A \rightarrow B)^{K,v} = 1$当且仅当对**任意$\mathbf{v}\boldsymbol{R}\mathbf{w}$的 w**，若$\mathrm{A}^{K,w} = 1$ 则$\mathrm{B}^{K,w} = 1$
4. $(A \leftrightarrow B)^{K,v} = 1$当且仅当**对任意$\mathbf{v}\boldsymbol{R}\mathbf{w}$的 w**，$\mathrm{A}^{K,w} = 1$ 等价于$\mathrm{B}^{K,w} = 1$
5. $(\neg A)^{K,v} = 1$当且仅当对**任意$\mathbf{v}\boldsymbol{R}\mathbf{w}$的 w**，$\mathrm{A}^{K,w} = 0$

与和或不需要考虑其他赋值$\boldsymbol{w}$

5.5 习题

例题 1：证明$\frac{\Sigma, \mathrm{A} \vdash \mathrm{B} \text{ 且 } \Sigma, \mathrm{A} \vdash \neg \mathrm{B}}{\Sigma \vdash \neg \mathrm{A}}$

证：假设$\Sigma \vdash \neg \mathrm{A}$不成立，则存在分层模型$\mathrm{K} =< \mathrm{V}, \mathrm{R} >$及$\mathrm{v} \in V$，

使得：$\Sigma^{K,v} = 1$ 且$(\neg \mathrm{A})^{K,v} = 0$

要使$(\neg \mathrm{A})^{K,v} = 0$，则存在$\mathrm{w} \in V$，$\mathrm{A}^{K,w} = 1$，此时$\Sigma^{K,w} = 1$

所以$(\Sigma \cup \mathrm{A})^{K,w} = 1$

再根据$\Sigma, \mathrm{A} \vdash \mathrm{B}$ 且$\Sigma, \mathrm{A} \vdash \neg \mathrm{B}$可知，$\mathrm{B}^{K,w} = 1$且$(\neg \mathrm{B})^{K,w} = 1$，这显然是矛盾的

所以假设不成立

例题 2：证明$\frac{\Sigma \vdash \mathrm{A} \text{ 且 } \Sigma \vdash \mathrm{A} \to \mathrm{B}}{\Sigma \vdash \mathrm{B}}$

证：要想证$\Sigma \vdash \mathrm{B}$，等价于证对任意分层模型$\mathrm{K} = < \mathrm{V}, \mathrm{R} >$及任意$\mathrm{v} \in V$，

当$\Sigma^{K,v} = 1$时，$\mathrm{B}^{K,v} = 1$

由$\Sigma \vdash \mathrm{A}$可知，$\Sigma^{K,v} = 1$，则$\mathrm{A}^{K,v} = 1$

由$\Sigma \vdash \mathrm{A} \to \mathrm{B}$可知，$\Sigma^{K,v} = 1$，则$(\mathrm{A} \to \mathrm{B})^{K,v} = 1$

又因为$\mathrm{A}^{K,v} = 1$，所以$\mathrm{B}^{K,v} = 1$

所以当$\Sigma^{K,v} = 1$时，$\mathrm{B}^{K,v} = 1$，原式成立

非$c_$可证明例题

例题 3 :证明下式不可证：　$\neg \mathrm{A} \to \mathrm{B} \vdash_{c} \neg \mathrm{B} \to \mathrm{A}$

构造模型$\mathrm{K} = < \mathrm{V}, \mathrm{R} >$，使得：

$\mathrm{V} = \{\mathrm{v}, \mathrm{w}\}$ $R = \{(v, v), (v, w), (w, w)\}$

其中：

a) 赋值 v 使得$\mathrm{v}(\mathrm{A}) = 0$ 及 $\mathrm{v}(B) = 0$

b) 赋值w使得$\mathrm{w}(\mathrm{A}) = 1$ 及 $\mathrm{v}(B) = 0$

则真值情况如下：

	v	w
A	0	1
B	0	0
¬A	0	0
¬B	1	1
¬A → B	1	1

$\neg B \to A$	0	1
$\neg A \to B \vdash_c \neg B \to A$	0	1

所以存在赋值使得$\left(\neg A \to B \vdash_c \neg B \to A\right)^{K,v} = 0$

所以原式不可证

例题 4： $\vdash_c \neg\neg A \to A$

构造模型$K =< V, R >$，使得：

$V = \{v, w\}$ $R = \{(v, v), (v, w), (w, w)\}$

其中：

a) 赋值 v 使得$v(A) = 0$

b) 赋值w使得$w(A) = 1$

c) 则真值情况如下：

	v	w
A	0	1
$\neg A$	0	0
$\neg\neg A$	1	1
$\neg\neg A \to A$	0	1

所以存在赋值使得$(\neg\neg A \to A)^{K,v} = 0$

所以原式不可证

例题 5： $\vdash_c A \vee \neg A$ **(与和或求真值时不需要考虑关系 R 对应的赋值w)**

构造模型$K =< V, R >$，使得：

$V = \{v, w\}$ $R = \{(v, v), (v, w), (w, w)\}$

其中：

a) 赋值 v 使得$v(A) = 0$

b) 赋值w使得$w(A) = 1$

则真值情况如下：

	v	w
A	0	1
¬A	0	0
$A \vee \neg A$	0	1

所以存在赋值使得$(A \vee \neg A)^{K,v} = 0$

所以原式不可证

5.6 分层模型的相关性质

假设Σ是命题逻辑公式集合，A 是命题逻辑公式，定义$\Sigma \models_c A$为 ：

对任意分层模型$K =< V, R >$，$v \in V$，当$\Sigma^{K,v} = 1$时，$A^{K,v} = 1$

性质：

1. 真值的传递性

   假设 A 是命题逻辑公式，对于给定的分层模型$K =< V, R >$，假设$v, w \in V$满足vRw，则：当$A^{K,v} = 1$时$A^{K,w} = 1$

2. 直觉主义的可靠性

   若$\Sigma \vdash_c A$，则$\Sigma \models_c A$