一、用动态规划方法手工求解下面的问题:

某工厂调查了解市场情况,估计在今后四个月内,市场对其产品的需求量如下表所示。

时期(月)	需要量 (产品单位)
1	2
2	3
3	2
4	4

已知:对每个月来讲,生产一批产品的固定成本费为 3(千元),若不生产,则为零。每生产单位产品的成本费为 1 (千元)。同时,在任何一个月内,生产能力所允许的最大生产批量为不超过 6 个单位。

又知每单位产品的库存费用为每月 0.5 (千元),同时要求在第一个月开始之初,及在第四个月末,均无产品库存。

问:在满足上述条件下,该厂应如何安排各个时期的生产与库存,使所花的总成本费用最低?

要求: 写出各种变量、状态转移方程、递推关系式、和详细计算步骤。

解:

1. 变量

月份(阶段): i, 1 ≤ i ≤ 4

月初库存量(状态): S_i , $S_1 = S_4 = 0$

月产量(决策): k_i , $0 \le k_i \le 6$

月需求量: q_i

月生产成本: w_i , $w_i = \begin{cases} 0 & k_i = 0 \\ 3 + k_i & k_i \neq 0 \end{cases}$

2. 状态转移方程

$$S_{i+1} = S_i + k_i - q_i$$

3. 递推关系式

记 $F(i,S_i)$ 为第 i 个月到第 4 个月的最低总成本 $F(i,S_i) = \min\{F(i+1,S_{i+1}) + w_i + 0.5 * S_i\}$

4. 计算步骤

因为第 4 个月需求量为 4,且月底库存为 0,所以第 4 个月月初库存 $S_4 \le 4$. i = 4时:

状态/	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	min	决策
产量									
F(4,0)	N/A	N/A	N/A	N/A	7	N/A	N/A	7	k=4
F(4,1)	N/A	N/A	N/A	6.5	N/A	N/A	N/A	6.5	k=3
F(4,2)	N/A	N/A	6	N/A	N/A	N/A	N/A	6	k=2
F(4,3)	N/A	5.5	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	5.5	k=1
F(4,4)	2	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	2	k=0

i = 3时: S₃ ≤ 2 + 4 = 6

状态/	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	min	决
产量									策
F(3,0)	N/A	N/A	7+5	6.5+6	6+7	5.5+8	2+9	11	k=6
F(3,1)	N/A	7+4+0.5	6.5+5+0.5	6+6+0.5	5+7+0.5	2+8+0.5	N/A	10.5	k=5
F(3,2)	7+0+1	6.5+4+1	6+5+1	5.5+6+1	2+7+1	N/A	N/A	8	k=0
F(3,3)	6.5+0+1.5	6+4+1.5	5.5+5+1.5	2+6+1.5	N/A	N/A	N/A	8	k=0
F(3,4)	6+0+2	5.5+4+2	2+5+2	N/A	N/A	N/A	N/A	8	k=0
F(3,5)	5.5+0+2.5	2+4+2.5	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	8	k=1
F(3,6)	2+0+3	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	N/A	5	k=0

i = 2时: $S_2 \le 6 - 2 = 4$

状态/	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	min	决
产量									策
F(2,0)	N/A	N/A	N/A	11+6	10.5+7	8+8	8+9	16	k=5
F(2,1)	N/A	N/A	11+5+0.5	10.5+6+0.5	8+7+0.5	8+8+0.5	8+9+0.5	15.5	k=4
F(2,2)	N/A	11+4+1	10.5+5+1	8+6+1	8+7+1	8+8+1	8+9+1	15	k=3
F(2,3)	11+0+1.5	10.5+4+1.5	8+5+1.5	8+6+1.5	8+7+1.5	8+8+1.5	5+9+1.5	12.5	k=0
F(2,4)	10.5+0+2	8+4+2	8+5+2	8+6+2	8+7+2	5+8+2	N/A	12.5	k=0

i = 1时: $S_1 = 0$

状态/ 产量	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6	min	决策
F(1,0)	N/A	N/A	16+5	15.5+6	15+7	12.5+8	12.5+9	20.5	k=5

由上表可以看出,最低总成本为20.5,各月产量分别为{5,0,6,0}

二、用动态规划方法编程求解下面的问题:

某推销员要从城市 v_1 出发,访问其它城市 v_2 , v_3 , ..., v_6 各一次且仅一次,最后 返回 v_1 。D 为各城市间的距离矩阵。

问:该推销员应如何选择路线,才能使总的行程最短?

1.4. 公(1)压到1.	71/m/m/m/m	>H->4) /2 110	10.10.11.11.12.1	人 / <u> </u>		
	v1	v2	v3	v4	v5	v6
v1	0	10	20	30	40	50
v2	12	0	18	30	25	21
v3	23	19	0	5	10	15
v4	34	21	4	0	8	16
v5	45	27	11	10	0	18
v6	56	22	16	20	12	0

要求:写出递推关系式、伪代码和程序相关说明,并分析时间复杂性。(请遵守第一节课提出的有关 assignment 的要求)

解:

1. 变量

阶段 k: 已经遍历过 k 个节点, $1 \le k \le 7$ 。 k = 1表示刚出发,k = 7表示回到起点未遍历节点集合 S_k : 已经遍历过 k 个节点,剩下未遍历节点集合。

$$S_1 = \{2,3,4,5,6\}, S_6 = S_7 = \{\emptyset\}$$

状态变量 $X_k = (i, S_k)$: 当前位于 i 节点,已遍历 k 个节点,还未遍历节点集合为 S_k $X_1 = (1, S_1), X_7 = (1, S_7)$

决策变量 $U_k = (i,j)$: 当前位于 i 节点,已遍历 k 个节点,下个节点选择 j 距离变量 d_{ij} : 从节点 i 到节点 j 的距离

2. 状态转移方程

$$X_{k+1} = T(X_k, U_k) = (j, S_k - \{j\})$$

3. 递推关系式

记 $F(i,S_k)$ 为当前位于 i 节点,已遍历 k 个节点,访问 S_k 中节点各一次且仅一次,最后返回 v1 节点的最短距离。

$$F(i, S_k) = \min\{d_{i,j} + F(j, \{S_k - j\})\}\$$

4. 计算步骤

k=6 时

$X_6 = (i, \emptyset)$	U_6	d_{ij}	cost
(2, Ø)	(2,1)	12	12
(3, Ø)	(3,1)	23	23
(4, Ø)	(4,1)	34	34
(5, Ø)	(5,1)	45	45
(6, Ø)	(6,1)	56	56

$X_5 = (i, S_5)$	U_5	d_{ij}	cost
(2,{6}}	(2,6)	21	77
(2,{5}}	(2,5)	25	70
(2,{4}}	(2,4)	30	64
(2,{3}}	(2,3)	18	41
(3,{6})	(3,6)	15	71
(3,{5})	(3,5)	10	55
(3,{4})	(3,4)	5	39
(3,{2})	(3,2)	19	31
(4,{6})	(4,6)	16	72
(4,{5})	(4,5)	8	53
(4,{3})	(4,3)	4	27
(4,{2})	(4,2)	32	44
(5,{6})	(5,6)	18	74
(5,{4})	(5,4)	10	44
(5,{3})	(5,3)	11	34
(5,{2})	(5,2)	27	39
(6,{5})	(6,5)	12	57
(6,{4})	(6,4)	20	54
(6,{3})	(6,3)	16	39
(6,{2})	(6,2)	22	34

k=4 时

		1	1
$X_4 = (i, S_4)$	U_4	d_{ij}	cost
(2,{3,4})	(2,3)	18	57
	(2,4)	30	57
(2,{4,5})	(2,4)	30	83
	(2,5)	25	69
(2,{5,6})	(2,5)	25	99
	(2,6)	21	78
(2,{3,5})	(2,3)	18	73
	(2,5)	25	59
(2,{3,6})	(2,3)	18	89
	(2,6)	21	60
(2,{4,6})	(2,4)	30	102
	(2,6)	21	75
(3,{2,4})	(3,2)	19	83
	(3,4)	5	49
(3,{2,5})	(3,2)	19	89
	(3,5)	10	49
(3,{2,6})	(3,2)	19	96
	(3,6)	15	49

_	•	1	T
(3,{4,5})	(3,4)	5	58
	(3,5)	10	54
(3,{4,6})	(3,4)	5	77
	(3,6)	15	69
(3,{5,6})	(3,5)	10	84
	(3,6)	15	72
(4,{2,3})	(4,2)	32	73
	(4,3)	4	34
(4,{2,5})	(4,2)	32	102
	(4,5)	8	47
(4,{2,6})	(4,2)	32	109
	(4,6)	16	50
(4,{3,5})	(4,3)	4	59
	(4,5)	8	42
(4,{3,6})	(4,3)	4	75
	(4,6)	16	55
(4,{5,6})	(4,5)	8	82
	(4,6)	16	73
(5,{2,3})	(5,2)	27	68
	(5,3)	11	42
(5,{2,4})	(5,2)	27	91
	(5,4)	10	54
(5,{2,6})	(5,2)	27	104
	(5,6)	18	52
(5,{3,4})	(5,3)	11	50
	(5,4)	10	37
(5,{3,6})	(5,3)	11	82
	(5,6)	18	57
(5,{4,6})	(5,4)	10	82
	(5,6)	18	72
(6,{2,3})	(6,2)	22	63
	(6,3)	16	47
(6,{2,4})	(6,2)	22	86
	(6,4)	20	64
(6,{2,5})	(6,2)	22	92
	(6,5)	12	51
(6,{3,4})	(6,3)	16	55
	(6,4)	20	47
(6,{3,5})	(6,3)	16	71
	(6,5)	12	46
(6,{4,5})	(6,4)	20	73
	(6,5)	12	56
<u> </u>	· · · · · ·	1	

(2,{3,4,5}) (2,3) 18 72 (2,4) 30 72 (2,5) 25 62 (2,{3,4,6}) (2,3) 18 87 (2,4) 30 85 (2,6) 21 68 (2,{3,5,6}) (2,3) 18 90 (2,5) 25 82 (2,6) 21 67 (2,4) 30 103 (2,5) 25 97 (2,6) 21 77 (3,{2,4,5}) (3,2) 19 88 (3,4) 5 52 (3,4) 5 55 (3,4) 5 55 (3,6) 15 79 (3,{2,4,6}) (3,2) 19 94 (3,4) 5 55 (3,6) 15 79 (3,{2,5,6}) (3,2) 19 97 (3,{3,1} 5 78 (3,6) 15 78 (3,4) 5 78 (3,5) 10	$Y_{-} - (i, S_{-})$	11	d	cost
(2,4) 30 72 (2,5) 25 62 (2,3) 18 87 (2,4) 30 85 (2,6) 21 68 (2,3,5,6) (2,3) 18 90 (2,5) 25 82 (2,6) 21 67 (2,4) 30 103 (2,5) 25 97 (2,6) 21 77 (3,2) 19 88 (3,4) 5 52 (3,4) 5 52 (3,4) 5 55 (3,4) 5 55 (3,4) 5 55 (3,4) 5 55 (3,4) 5 55 (3,4) 5 79 (3,5) 10 64 (3,4) 5 78 (3,6) 15 79 (3,6) 15 79 (3,4) 5 78 (3,6) 15 78 (4,1) 32	$X_3 = (i, S_3)$	(2.3)	12	cost
(2,3,4,6)) (2,3) 18 87 (2,4) 30 85 (2,4) 30 85 (2,6) 21 68 (2,3,5,6)) (2,3) 18 90 (2,5) 25 82 (2,6) 21 67 (2,4) 30 103 (2,4) 30 103 (2,6) 21 77 (3,2) 25 97 (3,6) 21 77 (3,2,4,5)) (3,2) 19 94 (3,4) 5 52 (3,4) 5 55 (3,6) 15 79 (3,6) 15 79 (3,6) 15 79 (3,6) 15 79 (3,7) 10 62 (3,6) 15 79 (3,4) 5 78 (3,6) 15 79 (3,4) 5 78 (3,6) 15 71 (4,3) 4 5	(4,0,4,0)			
(2,{3,4,6}) (2,3) 18 87 (2,4) 30 85 (2,6) 21 68 (2,{3,5,6}) (2,3) 18 90 (2,5) 25 82 (2,6) 21 67 (2,4) 30 103 (2,5) 25 97 (2,6) 21 77 (3,{2,4,5}) (3,2) 19 88 (3,4) 5 52 (3,5) 10 64 (3,2) 19 94 (3,4) 5 55 (3,6) 15 79 (3,6) 15 79 (3,6) 15 79 (3,4) 5 78 (3,6) 15 79 (3,6) 15 66 (3,4,5,6) (3,4) 5 78 (3,6) 15 71 (4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,4,2,3,5) (4,2) 32 92 (4,3) 4				
(2,4) 30 85 (2,6) 21 68 (2,3,5,6}) (2,3) 18 90 (2,5) 25 82 (2,6) 21 67 (2,4,5,6}) (2,4) 30 103 (2,5) 25 97 (2,6) 21 77 (3,2,4,5}) (3,2) 19 88 (3,4) 5 52 (3,5) 10 64 (3,2) 19 94 (3,4) 5 55 (3,6) 15 79 (3,2) 19 97 (3,6) 15 79 (3,6) 15 79 (3,6) 15 79 (3,6) 15 78 (3,6) 15 78 (3,6) 15 78 (3,6) 15 71 (4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,4,2,3,5) (4,2) 32 92 (4,4) 3 4 53 <td>(3 (3 4 (1)</td> <td></td> <td></td> <td></td>	(3 (3 4 (1)			
(2,{3,5,6}) (2,3) 18 90 (2,5) 25 82 (2,6) 21 67 (2,{4,5,6}) (2,4) 30 103 (2,5) 25 97 (2,6) 21 77 (3,{2,4,5}) (3,2) 19 88 (3,4) 5 52 (3,5) 10 64 (3,{2,4,6}) (3,2) 19 94 (3,4) 5 55 (3,6) 15 79 (3,6) 15 79 (3,6) 15 79 (3,6) 15 66 (3,4,5,6) (3,4) 5 78 (3,6) 15 66 (3,4,5,6) (3,4) 5 78 (4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,{2,3,6}) (4,2) 32 92 (4,4) 3 4 53 (4,{3,3,4} 53 60 (4,{2,3,6}	(८,{٥,4,७})			_
(2,{3,5,6}) (2,3) 18 90 (2,5) 25 82 (2,6) 21 67 (2,{4,5,6}) (2,4) 30 103 (2,5) 25 97 (2,6) 21 77 (3,{2,4,5}) (3,2) 19 88 (3,4) 5 52 (3,5) 10 64 (3,{2,4,6}) (3,2) 19 94 (3,6) 15 79 (3,6) 15 79 (3,6) 15 66 (3,4,5,6}) (3,4) 5 78 (3,6) 15 66 (3,4,5,6}) (3,4) 5 78 (3,6) 15 71 (4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,{2,3,6}) (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,{2,3,6}) (4,2) 32 10 (4,5) 8 60 (4,			_	
(2,5) 25 82 (2,6) 21 67 (2,4,5,6}) (2,4) 30 103 (2,5) 25 97 (2,6) 21 77 (3,{2,4,5}) (3,2) 19 88 (3,4) 5 52 (3,5) 10 64 (3,{2,4,6}) (3,2) 19 94 (3,6) 15 79 (3,6) 15 79 (3,6) 15 66 (3,4,5,6}) (3,4) 5 78 (3,6) 15 78 (3,6) 15 76 (3,6) 15 78 (3,6) 15 71 (4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,{2,3,6}) (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,5) 8 60 (4,5) 8 60 (4,5) 8 60 (4,5) <td>13 (3 E C);</td> <td></td> <td></td> <td></td>	13 (3 E C);			
(2,6) 21 67 (2,4,5,6) (2,4) 30 103 (2,5) 25 97 (2,6) 21 77 (3,2,4,5) (3,2) 19 88 (3,4) 5 52 (3,5) 10 64 (3,2,4,6) (3,2) 19 94 (3,4) 5 55 (3,6) 15 79 (3,5) 10 62 (3,6) 15 66 (3,4,5,6) (3,4) 5 78 (3,6) 15 66 (3,4,5,6) (3,4) 5 78 (3,6) 15 70 82 (3,6) 15 78 78 (3,6) 15 78 78 (3,6) 15 71 4,12,33 4 53 (4,12,3,5) (4,2) 32 91 (4,42,3,5) (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63	(∠,{≾,5,b})			
(2,{4,5,6}) (2,4) 30 103 (2,5) 25 97 (2,6) 21 77 (3,{2,4,5}) (3,2) 19 88 (3,4) 5 52 (3,5) 10 64 (3,{2,4,6}) (3,2) 19 94 (3,6) 15 79 (3,6) 15 79 (3,5) 10 62 (3,6) 15 78 (3,6) 15 78 (3,6) 15 78 (3,6) 15 78 (3,6) 15 78 (3,6) 15 78 (3,6) 15 71 (4,{2,3,6}) (4,2) 32 91 (4,4,2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,4,2,3,6}) (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,2,3,6}) (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,				
(2,5) 25 97 (2,6) 21 77 (3,{2,4,5}) (3,2) 19 88 (3,4) 5 52 (3,5) 10 64 (3,2) 19 94 (3,4) 5 55 (3,6) 15 79 (3,5) 10 62 (3,6) 15 66 (3,4,5,6) (3,4) 5 78 (3,6) 15 76 (3,6) 15 71 (4,2,3,5) (4,2) 32 91 (4,3) 4 53 (4,2) 32 91 (4,3) 4 53 (4,4) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,4) 32 110 (4,5) 8 60 (4,4) 32 110 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 <td>(2 (4 5 6))</td> <td></td> <td></td> <td></td>	(2 (4 5 6))			
(3,{2,4,5}) (3,2) 19 88 (3,4) 5 52 (3,5) 10 64 (3,{2,4,6}) (3,2) 19 94 (3,4) 5 55 (3,6) 15 79 (3,5) 10 62 (3,6) 15 66 (3,4,5,6}) (3,4) 5 78 (3,6) 15 71 (4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,3) 4 53 (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,{2,3,6}) (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,{2,3,6}) (4,2) 32 110 (4,5) 8 60 (4,4) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,{2,3,4}) (5,2)	(2,{4,5,6})			
(3,{2,4,5}) (3,2) 19 88 (3,4) 5 52 (3,5) 10 64 (3,2) 19 94 (3,4) 5 55 (3,6) 15 79 (3,5) 10 62 (3,6) 15 66 (3,4,5,6) (3,4) 5 78 (3,6) 15 71 (4,2,3,5) (4,2) 32 91 (4,3) 4 53 (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,2,3,6) (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,5) 8 60 (4,5) 8 60 (4,3) 4 76 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 </td <td></td> <td></td> <td></td> <td></td>				
(3,4) 5 52 (3,5) 10 64 (3,2) 19 94 (3,4) 5 55 (3,6) 15 79 (3,2) 19 97 (3,5) 10 62 (3,6) 15 66 (3,4) 5 78 (3,6) 15 71 (4,3) 4 53 (4,3) 4 53 (4,3) 4 53 (4,4) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,2,3,6) (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 60 (4,6) 16 62 (5,2,3,4) (5,2) 27 84 (5,4) 10 44	(2.12.1.5)			
(3,{2,4,6}) (3,2) 19 94 (3,4) 5 55 (3,6) 15 79 (3,2) 19 97 (3,6) 15 66 (3,6) 15 66 (3,4,5,6}) (3,4) 5 78 (3,6) 15 71 (4,2,3,5) 10 82 (3,6) 15 71 (4,2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,3) 4 53 (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,2,3,6) (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,2,3,4})	(3,{2,4,5})			
(3,{2,4,6}) (3,2) 19 94 (3,4) 5 55 (3,6) 15 79 (3,{2,5,6}) (3,2) 19 97 (3,5) 10 62 (3,6) 15 66 (3,4,5,6}) (3,4) 5 78 (3,5) 10 82 (3,6) 15 71 (4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,3) 4 53 (4,5) 8 50 (4,42) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,42,5,6) (4,2) 32 110 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,{2,3,4}) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 <t< td=""><td></td><td></td><td>_</td><td>_</td></t<>			_	_
(3,4) 5 55 (3,6) 15 79 (3,2) 19 97 (3,5) 10 62 (3,6) 15 66 (3,4,5,6)) (3,4) 5 78 (3,5) 10 82 (3,6) 15 71 (4,2) 32 91 (4,3) 4 53 (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,6) 16 63 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60	/0./0 =			
(3,6) 15 79 (3,2,5,6)) (3,2) 19 97 (3,5) 10 62 (3,6) 15 66 (3,4,5,6)) (3,4) 5 78 (3,5) 10 82 (3,6) 15 71 (4,2,3,5) (4,2) 32 91 (4,3) 4 53 (4,5) 8 50 (4,42) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,6) 16 63 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60	(3,{2,4,6})			
(3,{2,5,6}) (3,2) 19 97 (3,5) 10 62 (3,6) 15 66 (3,4) 5 78 (3,5) 10 82 (3,6) 15 71 (4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,3) 4 53 (4,5) 8 50 (4,42) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,6) 16 63 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,{2,3,4}) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60				
(3,5) 10 62 (3,6) 15 66 (3,4) 5 78 (3,5) 10 82 (3,6) 15 71 (4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,3) 4 53 (4,5) 8 50 (4,{2,3,6}) (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,6) 16 63 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,{2,3,4}) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60				
(3,6) 15 66 (3,4,5,6)) (3,4) 5 78 (3,5) 10 82 (3,6) 15 71 (4,2,3,5)) (4,2) 32 91 (4,3) 4 53 (4,5) 8 50 (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,6) 16 63 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,2,3,4) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,2) 27 87 (5,3) 11 60	(3,{2,5,6})		_	
(3,{4,5,6}) (3,4) 5 78 (3,5) 10 82 (3,6) 15 71 (4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,3) 4 53 (4,5) 8 50 (4,{2,3,6}) (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,{2,5,6}) (4,2) 32 110 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,{2,3,4}) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60				
(3,5) 10 82 (3,6) 15 71 (4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,3) 4 53 (4,5) 8 50 (4,{2,3,6}) (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,{2,5,6}) (4,2) 32 110 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,{2,3,4}) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60 (5,3) 11 60				
(4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,3) 4 53 (4,5) 8 50 (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,2) 32 110 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3,5,6) (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60 (5,3) 11 60	(3,{4,5,6})			
(4,{2,3,5}) (4,2) 32 91 (4,3) 4 53 (4,5) 8 50 (4,{2,3,6}) (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,{2,5,6}) (4,2) 32 110 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,{2,3,4}) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60 (5,3) 11 60				
(4,3) 4 53 (4,5) 8 50 (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,2) 32 110 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60				
(4,5) 8 50 (4,2,3,6)) (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,2,5,6)) (4,2) 32 110 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60 (5,3) 11 60	(4,{2,3,5})			
(4,{2,3,6}) (4,2) 32 92 (4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,{2,5,6}) (4,2) 32 110 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,{2,3,4}) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60 (5,3) 11 60			4	53
(4,3) 4 53 (4,6) 16 63 (4,2) 32 110 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,{2,3,4}) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60 (5,3) 11 60				
(4,6) 16 63 (4,2,5,6)) (4,2) 32 110 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,2,3,4)) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60 (5,3) 11 60	(4,{2,3,6})			
(4,{2,5,6}) (4,2) 32 110 (4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,{3,5,6}) (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,{2,3,4}) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60 (5,3) 11 60			4	
(4,5) 8 60 (4,6) 16 67 (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,{2,3,4}) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60 (5,3) 11 60			16	63
(4,6) 16 67 (4,3,5,6) (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,{2,3,4}) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60 (5,3) 11 60	(4,{2,5,6})			
(4,{3,5,6}) (4,3) 4 76 (4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,{2,3,4}) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60 (5,3) 11 60		(4,5)	8	60
(4,5) 8 65 (4,6) 16 62 (5,{2,3,4}) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,2) 27 87 (5,3) 11 60			16	67
(5,{2,3,4}) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,3) 11 60	(4,{3,5,6})	(4,3)	4	76
(5,{2,3,4}) (5,2) 27 84 (5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,{2,3,6}) (5,2) 27 87 (5,3) 11 60		(4,5)	8	65
(5,3) 11 60 (5,4) 10 44 (5,{2,3,6}) (5,2) 27 87 (5,3) 11 60		(4,6)	16	62
(5,4) 10 44 (5,{2,3,6}) (5,2) 27 87 (5,3) 11 60	(5,{2,3,4})	-	27	84
(5,{2,3,6}) (5,2) 27 87 (5,3) 11 60		(5,3)	11	60
(5,3) 11 60		(5,4)	10	44
	(5,{2,3,6})	(5,2)	27	87
/= 0\ 10 1=		(5,3)	11	60
(5,6) 18 65		(5,6)	18	65

(5,{2,4,6})	(5,2)	27	102
	(5,4)	10	60
	(5,6)	18	82
(5,{3,4,6})	(5,3)	11	80
	(5,4)	10	65
	(5,6)	18	65
(6,{2,3,4})	(6,2)	22	79
	(6,3)	16	65
	(6,4)	20	54
(6,{2,3,5})	(6,2)	22	81
	(6,3)	16	65
	(6,5)	12	54
(6,{2,4,5})	(6,2)	22	91
	(6,4)	20	67
	(6,5)	12	66
(6,{3,4,5})	(6,3)	16	70
	(6,4)	20	62
	(6,5)	12	49

k=2 时:

$X_2 = (i, S_2)$	U_2	d_{ij}	cost
(2,{3,4,5,6})	(2,3)	18	89
	(2,4)	30	92
	(2,5)	25	90
	(2,6)	21	70
(3,{2,4,5,6})	(3,2)	19	96
	(3,4)	5	65
	(3,5)	10	70
	(3,6)	15	81
(4,{2,3,5,6})	(4,2)	32	99
	(4,3)	4	66
	(4,5)	8	68
	(4,6)	16	70
(5,{2,3,4,6})	(5,2)	27	95
	(5,3)	11	66
	(5,4)	10	63
	(5,6)	18	72
(6,{2,3,4,5})	(6,2)	22	84
	(6,3)	16	68
	(6,4)	20	70
	(6,5)	12	56

k=1 时:

$X_1 = (i, S_1)$	U_1	d_{ij}	cost
$(1,\{2,3,4,5,6\})$	(1,2)	10	80

(1,3)	20	85
(1,4)	30	96
(1,5)	40	103
(1,6)	50	106

由上表可知, 最优路线为: v1,v2,v6,v5,v4,v3,v1

5. 伪代码和时间复杂度

为方便计算,结点编号改为0到5.

- (1)用一张二维表格 F[][]表示 F(i,Sk),行数是 n,列数是 2^{n-1} 。
- (2)行号表示当前所在的结点 i。

列号对应的五位二进制表示表示{V5,V4,V3,V2,V1}的一个子集,1表示在集合中,0表示不在集合中。

例如: 00110 表示的集合为{V3,V2}, 00000 表示空集

(3)再用一张 $n*2^{n-1}$ 的表格 M[][]存储对应每个状态(i, Sk)所做的最优决策,以便回溯找最短路线。

伪代码:

```
TSP(int D[][], int n)
```

//输入 n 个顶点的有向图, 矩阵 D[][]是有向图的邻接矩阵

//D[][]是原图的邻接矩阵

//F[][]中存储阶段最短路径,M[][]中存储阶段最优策略,行数是 n,列数是 2^{n-1}

//找到从 V0 出发,遍历所有城市一次且仅一次再回到 V0 的最短路径长度

//并输出最短路径

```
for(i=0; i<n; i++)
```

F[i][0] = D[i][0]; //初始化第 0 列, F6(i, Φ)= D[i,0]

```
for(i=1; i<2^{n-1}-1; i++) //\sqrt{2}
   for(j=1; j<n; j++) //行
       if(j不在i的二进制表示对应的集合中)
          对于 i 对应集合中的每一个点 k
          {
              计算 D[j][k]+F[k][i-2<sup>k-1</sup>]并选择使之取得最小值 min 的 k*;
              F[k][i] = min; //填表, 记录阶段最优值
              M[k][i] = k^*; //记录每个状态的最优决策 k^*
           }
//i==2^{n-1}-1 时
对于 i 中的每个节点 k
计算 D[0][k] + F[k][ [i-2<sup>k-1</sup>]并选择使之取得最小值 min 的 k*
F[0][ 2<sup>n-1</sup>-1] = min; //总最短路径
M[0][2^{n-1}-1]=k*;
//回溯查表 M 输出最短路径
输出 V0
for(2^{n-1}-1,j=0; i>0;)
   j = M[j][i];//下一步去往哪个结点
   i = i - 2^{j-1};//从 i 表示的集合中删除 j
   输出 Vi
```

考虑算法中所做的加法和比较次数:

}

$$\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1) \binom{n-1}{k} + (n-1) = (n-1)(n-2)2^{n-3} + (n-1) = O(n^2 2^n)$$