矩阵理论 A 复习参考

北航研究生数学必修课分为矩阵理论、数理统计以及数值分析，三者难度各不相同，本人有幸选中了被称为最简单的矩阵理论，现考期结束，趁着今日赋闲，特将一套照片版试题整理成电子版，并结合个人理解加以注释，给后来人以方便。

温馨提示：本资料不适合 B 班同学，B 班同学请出门右转~

结合自己的复习以及刷题过程，给复习矩阵理论 A 的同学们一些小建议，首先，笔记很重要，赵迪老师不是按照课本进行讲课的，每节课都会进行板书，所以大家照着笔记进行复习对问题理解的会更加深刻，书上的方式与老师的方法差别还是挺大的，所以学有余力的同学可以在复习完笔记后再看书；其次，考试大部分题目都不会太难，主要是考概念的理解和基本计算，都是主流题型，赵老师没讲过的都不会考，总之逃不出你的笔记本；最后，关于刷题，往年的题目很多，前几年主要都是填空题加大题，近几年的趋势是没有了填空题，改成了判断题，今年甚至出现了选择题，今后应该是延续判断题，这种类型的卷子不多，而且大多是照片版，因此本人特将其中一套整理出来，即为本资料的核心内容。

本资料主要分为三个部分：

Part1：2014-2015 第一学期矩阵 A 试卷原题

Part2：2014-2015 第一学期矩阵 A 试卷部分解答与解题思路

Part3：2016-2017 第一学期矩阵 A 试卷回顾

本资料如有错误之处，请大家多多包涵。

最后，祝大家都能取得优异的成绩！

SY1607610 陆磊

2017/01/14 于北航新主楼 A304

Part1：2014-2015 第一学期矩阵 A 试卷原题

一、判断正误（30 分）

(1) $A=A_{n\times n}$，I 是 n 阶单位阵，则 $e^{tI}=e^{t}I$，$e^{t(A+I)}=e^{tI}e^{tA}=e^{t}e^{tA}$　　(　　)

(2)若 B 是列满秩阵（高阵），C 是行满秩阵（低阵），则 $B^{+}B=I, CC^{+}=I$　　(　　)

(3)若 B 是列满秩，C 是行满秩，则 $B^{+}=\left(B^{H}B\right)^{-1}B^{H}, C^{+}=C^{H}\left(CC^{H}\right)^{-1}$　　(　　)

(4)若 $A=BC$ 是满秩分解（高低分解），则 $A^{+}=C^{+}B^{+}$，即 $(BC)^{+}=C^{+}B^{+}$　　(　　)

(5)设复矩阵 $A=(a_{ij})$ 的秩为 1，则 $A^{+}=\left(\sum|a_{ij}|^{2}\right)^{-1}A^{H}=\left(\sum a_{ij}{}^{2}\right)^{-1}A^{H}$

(　　)

(6)设 $A=(a_{ij})_{m,n}$，则有迹公式：$tr(A^{H}A)=tr(AA^{H})=\sum|a_{ij}|^{2}$　　(　　)

(7)若 $A^{2}=0$,则有可能 $A\neq 0$　(　　)；若 $tr(A^{H}A)=0$，则有可能 $A\neq 0$　　(　　)

(8)设 $A=(a_{ij})_{n,n}$ 特征值为 $\lambda_{1},\cdots,\lambda_{n}$，则有许尔不等式 $\sum_{k=1}^{n}\left|\lambda_{k}\right|^{2}\leq\sum_{i,j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^{2}$　　(　　)

(9)若 A 是酉矩阵($A^{H}A=AA^{H}=I$)，则 $A^{+}=A^{-1}=A^{H}$　　(　　)

(10)若 A 是列酉矩阵($A^{H}A=I$)，则 $A^{+}=A^{H}$　(　　)，且 $A^{-1}=A^{H}$　　(　　)

(11)若 A 是正规阵，P 是同阶酉矩阵，则 $P^{H}AP$ 也是正规阵　　(　　)

(12)若 A 是正规阵，$f(x)$是多项式，则 $f(A)$ 也是正规阵　　(　　)

(13)若 A，B 是同阶正规阵，则 $AB, A+B$ 也一定是正规阵　　(　　)

(14)若 A 是正规阵，则存在酉矩阵 P 使得 $P^{H}AP=D$ 为对角阵　　(　　)

(15)许尔定理：若 A 是 n 阶方阵，则存在酉矩阵 P 使 $P^{H}AP=D$ 为对角阵　(　　)

(16)若正规阵 A 的特征根为 $\{\lambda_{1},\cdots,\lambda_{n}\}$，则奇异值为 $\{|\lambda_{1}|,\cdots,|\lambda_{n}|\}$　　(　　)

(17)若 A 是 n 阶方阵，则行列式 $\det(e^{A})=e^{tr(A)}$，且 $e^{-A}e^{A}=I$ (单位阵)　　(　　)

(18)若 A 是 n 阶方阵，则 $(e^{A})^{+}=(e^{A})^{-1}=e^{-A}$　　(　　)

(19) A，B 是任意矩阵，则 $(A\otimes B)^{H}=A^{H}\otimes B^{H}$，$(A\otimes B)^{+}=A^{+}\otimes B^{+}$　　(　　)

若 A，B 都可逆，则 $A^{+}=A^{-1}$　(　　)；且 $(A\otimes B)^{-1}=B^{-1}\otimes A^{-1}$　　(　　)

(20) $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}a&3\\0&b\end{pmatrix}$，则 $A\otimes B$ 的特征根为 $a,b,2a,2b$　　(　　)

(21)方阵 A 的特征根 λ，谱半径 $\rho(A)$ 与范数 $\|A\|$ 满足 $|\lambda|\le\rho(A)\le\|A\|$　　(　　)

(22)$\|\bullet\|$ 是矩阵范数，I_n 是单位阵，则 $\|I_n\|\ge 1$　(　　)，或 $\|I_n\|<1$　　(　　)

(23)若 $A=A_{m\times n},B=B_{n\times m}$，则 $tr(AB)=tr(BA),tr(AB)^2=tr(BA)^2$　　(　　)

(24)已知 $A^2=0$,则 $e^{tA}=I+tA+\frac{(tA)^2}{2}+\frac{(tA)^3}{3!}+\cdots=I+tA$　　(　　)

(25)已知 $A^3=0$,则 $e^{tA}=I+tA+\frac{(tA)^2}{2}+\frac{(tA)^3}{3!}+\cdots=I+tA$　　(　　)

二、计算（15 分）

1、设 $A=\begin{pmatrix}a&1\\0&a\end{pmatrix},|a|<1$，求 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 与 $(I-A)^2\left(\sum_{k=0}^{\infty}A^k\right)$

2、设 $A=\begin{pmatrix}i&0\\1&i\\0&1\end{pmatrix}$，说明公式 $A^{+}=\left(A^HA\right)^{-1}A^H$ 成立的条件，并求出 A^{+}

3、已知 $e^{tA}=\begin{pmatrix}\cos 3t&\sin 3t\\-\sin 3t&\cos 3t\end{pmatrix}$，求 $\frac{de^{tA}}{dt}$ 与 A

三、（18 分）

1、设正规阵$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}P^H, P$ 是酉阵，求 A^H与$A^H A$;写出 A 的奇异值

2、求 $A=\begin{pmatrix}i & 1\\ 1 & i\end{pmatrix}$的奇异值与奇异值分解

3、设 $A=\begin{pmatrix}0 & c & c\\ c & 0 & c\\ c & c & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & c & c\\ c & c & c\\ c & c & c\end{pmatrix}-cI$　　(1)求特征根，谱半径 $\rho(A)$ 与 $\det(e^A)$；

(2)给出复数 c 的条件，使得 $\sum_{k=0}^{\infty}A^k$ 收敛；(3)说明 A 是正规阵，直接写出它的奇异值

四、计算（12 分）

1、$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，验证 A 为单纯阵，求极小式 $m(x)$ 与 $\sin\pi A$

2、$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}$，(1) 求 $(A-I)^2$ 与 $\rho(A)$；(2) 用指数函数定义推出 $e^{t(A-I)}=I+t(A-I)$；(3)利用(2)推出 $e^{tA}=e^{t}[I+t(A-I)]$

五、（8 分）$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&1\\1&-1&3\end{pmatrix}$，(1)求最小式与 e^{tA}，(2)求解 $\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)$，其中

$x(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

六、计算（7 分）设 $B=\begin{pmatrix}3&3&3\\1&1&1\end{pmatrix},D=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},b=(1,\ 0,\ 0,\ 1)^T,A=\begin{pmatrix}B&0\\0&D\end{pmatrix}_{4\times5}$，求 A^+ 与

$Ax=b$ 的极小范数解或最佳极小二乘解

七、证明题（10 分）

1、若 $tr(A^H A)=0$，则必有 $A=0$（零阵）（2 分）

2、已知 $A^2=A^H A$，则 A 是 Hermite 阵（$A^H=A$）（8 分）

Part2：2014-2015 第一学期矩阵 A 试卷部分解答与解题思路

一、判断正误（主要考查**概念**）

(1) √，第一个等式可以用幂级数展开，曾经考过证明该等式成立的题，第二个等式考查“指数可分”的条件是两个矩阵相乘可交换。

(2) √，左逆、右逆的定义。

(3) √，左逆、右逆的公式。

(4) √，加号逆的性质。

(5) ×，秩一公式，前半部分对，后半部分错。

(6) √，迹公式（trace 公式）。

(7) √、×，第一个判断显然正确，第二个判断根据 trace 公式可以得到矩阵每个元素均为 0，矩阵为零矩阵。

(8) √，许尔不等式。

(9) √，根据酉矩阵的定义公式，酉矩阵一定可逆，加号逆即为普通逆。

(10) √、×，列酉矩阵不一定可逆，可能不存在普通逆。

(11) √，正规阵性质，可以用正规阵定义 $A^H A = AA^H$ 证明。

(12) √，正规阵性质，证明参见赵迪老师笔记。

(13)×，经过答疑询问，两者都不一定是正规阵。

(14) √，正规阵定理，酉相似于对角阵。

(15)×，正确的许尔定理叙述为相似于上三角矩阵。

(16) √，考查正规矩阵奇异值与特征值的关系，特别地，如果是半正定矩阵（特征值均非负），奇异值等于特征值。

(17) √，第一个等式为指数函数的行列式公式，第二个等式考查“指数可分”的条件是两个矩阵相乘可交换。

(18) √，由上题可知 e^A 可逆，且加号逆等于普通逆，等式成立。

(19) √、√、×，考查直积的运算性质，注意与普通乘法“穿脱原理”的区别。

(20) √，A、B 可直接看出特征值，特征值的集合做直积即为所求。

(21) √，考查谱半径的定义以及谱范不等式。

(22) √、×，单位阵的谱半径为 1，用谱范不等式即得。

(23) √，事实上，该公式对于任何次方都成立，即 $tr(AB)^n = tr(BA)^n$，利用换位公式可知 $A(BAB)$ 与 $(BAB)A$ 有相同的非零特征根，根据 trace 等于特征根之和可得 $tr(AB)^2 = tr(BA)^2$。

(24) √，代入即可。

(25)×，原式应等于 $I + tA + \frac{(tA)^2}{2}$。

二、计算

1、用谱半径判断是否收敛，收敛时有公式 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1}$。

2、公式成立的条件为矩阵为高阵（列满秩矩阵）。

3、求导即矩阵每个元素对 t 求导，然后令 t=0 得矩阵 A。

三、

1、直接按定义计算即可，注意正规阵奇异值与特征值的关系。

2、直接按定义计算即可。

3、(1)注意采用根公式简化计算，不必按照特征多项式求特征值，指数函数的行列式用公式 $\det(e^A) = e^{tr(A)}$。

(2)谱半径小于 1 时收敛。

(3)用正规阵定义做，注意正规阵奇异值与特征值的关系。

四、计算

1、求特征值，用极小式的方法验单纯阵，同时得到极小式，谱分解做矩阵函数。

2、(1)直接按定义计算即可

(2)用指数函数定义展开，代入 $(A-I)^2$=0 即可。

(3)矩阵相乘可交换，两边左乘 e^{tI}，同时利用 $e^{tI} = e^t I$ 即可。

五、(1)计算 $A-2I$，利用根公式求特征值，用非单纯阵公式计算矩阵函数。

(2)关于微分方程的求解赵迪老师上课未讲，不作要求。

六、利用分块求广义逆公式和秩一的广义逆公式即可，方程不相容。

七、证明题

1、用 trace 公式可以得到矩阵每个元素均为 0，矩阵为零矩阵。

2、可以利用许尔定理进行证明，注意酉相似于对角阵只能证正规阵，需要加上特征值均为实数才能证 Hermite。

Part3：2016-2017 第一学期矩阵 A 试卷回顾

今年的试卷与往年类似，共七道大题，第一大题为判断题，第二大题为选择题，剩下的均为大题，以下对每个部分进行简要介绍：

判断题：判断题大约 20 道，与本套卷重合度较大，主要考查基本概念和性质的理解，大部分为赵迪老师上课证明过的性质，预料之外的是开始几题考查了线性映射的几个性质，例如原像相关则像相关，像无关则原像无关。

选择题：选择题为二选一，10 道左右，主要考查基本性质，有几道关于直积的题，还有关于指数函数可分性质的，基本形式是给出一个计算式，让你判断计算结果是 A 还是 B。

大题：每道大题都包括好几道小题，可以说题量还是比较大的，但是计算量都不太大，耗费时间不算太长，注意每道小题之间基本都是有联系的，后一题用前一题的结论做会简单很多。除了基本计算题之外，这次还出了一道线性映射的题，就是上课的例题“取值映射”，还有一道$\begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}$的奇异值分解的题目，有一道证明题与本套卷最后一题 $A^2 = A^H A$ 证 Hermite 类似。