# 公理集合论

## 集合论概念

**朴素集合论**

具有给定性质的对象的全体定义为集合，集合与元素直觉的关系叫做属于。

**公理集合论**

给定集合论语言及该语言的一个模型。该模型的元素成为集合，二元谓词符号表示属于关系。

**空集**

表示空集：

**二元组**

表示二元组：

例题：给出三元组的定义，并证明其合理性，即：

三元组定义：

假设存在另一个三元组使得，即：

则必有，因为只有元素个数为1，他俩必相等

又因为，则必有

又因为，则必有

所以该三元组的合理性得证

**函数**

func(a)表示a是一个函数，满足以下两个公式：

是公式：

是公式：

**定义域**

dom(a)表示函数a的定义域：

**值域**

ran(a) 表示函数a的值域：

**自然数**

…

**平行公设**：

第5公设也被称为平行公设，它等价于：

在同一平面，过直线外一点，有且仅有一条直线与此直线平行

## 集合论的10条公理

### 外延公理

若两个集合元素相同，则这两个集合相等。

### 空集公理

记上述**x**为**。**空集公理保证了空集的存在性，根据外延公理可知，空集是唯一的。

空集的唯一性证明：

假设存在另一集合是空集，

由可得： (前提不成立，所以整个式子成立)

由可得：

所以

所以

### 偶对公理

记**u**为，由此可知：对于集合存在一个仅以它们为元素的集合。

例：

### 并集公理

由集合的**所有元素的元素**组成的集合，叫做集合的并集合。

例：

(可以有重复元素)

一般意义下的在严格意义下被写为，即A和B的元素组成的集合：

证明：将代入并集公式可知：

因为是永假的，所以

所以

证明：将代入并集公式可知：

等值于**，**是永假的，所以

所以

### 子集公理

假设是集合论语言的一个公式，仅出现自由变元,不出现变元，则：

对于给定的，这样定义的集合被记为：

这样定义的集合是子集()，可以理解为集合中满足公式的元素构成的集合成为的子集。

### 幂集公理

集合的所有子集构成的集合称为的幂集，记为。

### 无穷公理

表示集合

### 替换公理

假设是命题逻辑中的公式，仅出现自由变元,不出现变元，则：

是以下公式：

这里的集合**y**就是替换公理得到的新集合，记为：

语言说明：基于一个已知集合**x**与一个特殊的单射函数，可以得到一个新集合**y**。表示输入为x输出为y。

### 正规公理

正规公理保证了**不存在**这样的集合：

### 选择公理

通俗来讲：根据一个由非空集合组成的集合S，从S的元素集合中分别抽出一个元素组成的集合。

## 公理的应用

1. 外延公理用于判定集合相等
2. 正规公理用于判定集合属于关系
3. 其他公理用于证明集合存在性，常用替换公理

## 例题

例1：证明可数符号表上有限长字符串的集合是可数的

证明：假设给定的可数符号表是集合A，则：

长度为1的字符串集合

长度为2的字符串集合

…

每个都是可数的，并且的个数也是可数的，所以可数个可数集合的并集也是可数的。

例2：证明空集是函数

func(a)表示a是一个函数，满足以下两个公式：

是公式：

是公式：

若a为空集，则和的前提都不成立，所以和成立，所以空集是个函数。

例3：对于集合**a**及**b**, 则它们的交集是集合

由子集公理可知：

令，得

此时的集合就是集合**a**及**b**的交集

例4：对于集合x及y,它们的卡氏积是集合

根据子集定理可知，存在这样的集合u

其中：

c是集合:

是公式：

例5：证明：存在无限集合

已知自然数集合，根据替换公理，只要构造一个从到上述集合的单射函数即可证明上述集合存在。

定义函数满足以下条件：

其中：

是公式：

是公式：

则对任意

对任意存在唯一a，满足

则根据选择公理可知，存在集合u：

u即为要证集合

说明：

公式定义了f的定义域与初值

公式定义了

比如：，

，

例6：证明：

假设m,n是两个自然数，满足,则根据定义可知：

若：

由知，又因为，所以，所以

同理可知：

这时集合不满足正规公理：

因为

所以x不是一个集合，所以

例7：证明

假设，则存在集合不满足正规公理：

因为

所以假设不成立

# 自然数逻辑理论

## 归纳集

### 定义

满足以下两个条件的集合称为归纳集：

其中表示集合

### 公式

以表示以下公式：

所以是一个归纳集当且仅当成立。

### 性质

1. 两个归纳集的并集以及交集还是归纳集。
2. 若存在集合{0,1,2,...}，则它是一个归纳集。
3. 归纳集也是一个无限集，无穷公理保证这样无限集合是存在的，且不唯一。

### 自然数集合

自然数集合是最小的归纳集，满足以下公式：

Eg : 证明：

证明：

，因为

，，所以

## 第一归纳法

### 推论

假设是集合论的一个语句，只包含一个自由变元，且

则对任意自然数，都有成立。

即只要证明成立，并且在假设成立的情况下能够证明成立，则对于自然数集合恒成立。

### 例题

例1：证明对任意的有

证明：

考虑以下公式：

显然成立，因为，不是空集.

若且成立，则不是空集，也不是空集，所以也成立。

由归纳法可知对任意自然数恒成立。

例2：对于任意的，若，则。

证明：

考虑以下公式：

因为是空集，所以是假的，所以成立

若且成立，

对于

若，由可知，

若，由可知，

所以也成立

例3：对于任意的, 若，则。

证明：

考虑以下公式：

显然成立，因为是空集，前提是假的。

若且成立

对于

若，则，所以

若，由可知，，所以

所以也成立

## 第二归纳法

### 定义

假设是集合论的一个语句，只包含一个自由变元，且

成立，则对任意自然数n，都有成立

证明：考虑集合

只要证明任意自然数都属于集合，这样对任意，都成立

当恒成立，所以

当n时，成立

## 递归定义

### 递归定义的合理性

假设是一个集合，是一个函数，则存在一个函数满足：

1. ，都有

### 例题

例1：证明存在集合

证明：

取，公式为

由递归定义的合理性可知，存在函数r满足：

…

所以的值域即为上述集合

### 推广

假设是集合论语言的一个函数型公式，即满足：

这时记相应于的为。

多元迭代函数：

假设a是一个集合，是二元函数，则存在一个函数r满足：

1. ，都有

# 命题逻辑的两个推理系统

## Hilbert推理系统

**公理：**

**规则：**

**推演序列：**

假设**Γ**是公式集合，公式序列被称为**Γ-**推演序列，当且仅当：

1. 或者
2. 或者是公理
3. 或者存在，可由应用规则得到

**可证性：**

若存在**Γ-**推演序列，它的最后一个公式是A，则称A是**Γ**可证的，记为**Γ**。

Eg1 : 证明：

1. 公理1
2. 公理1
3. 公理2
4. 规则
5. 规则

所以

## 推理系统二

**公理：**

**规则**(只列了常用的几个)：

* 单调性：若，则
* 反证法：矛盾
* 三段论
* 演绎定理

**可证性**：有限次应用公理和规则生成，则称可证。

Eg1：证明：

1. 公理
2. 单调性
3. 公理
4. 单调性
5. 2,4应用反证法规则

## 性质

### 紧致性

给定公式集合和公式A，若，则存在有限的，使得

### 协调性

给定命题逻辑的公式集合Σ，若存在公式A，使得Σ├A且Σ├¬A，则称Σ是不协调的。

### 一些定义

公式的真值：

假设v是一个赋值，A是公式，可以根据真值表定义

集合的真值：

假设**Γ**是一个公式集合，定义为：对每个

定义：

假设**Γ**是一个公式集合，A是公式，为：

对任意的赋值v，当时，

### 可靠性和完备性

可靠性：若，则

完备性：若，则

## 规则的独立性证明

证明方式：

1. 修改逻辑联结词的定义，使得其他规则都成立，但该规则不成立。则该规则独立于其他规则。
2. 若某个规则可以证明一个推演，而不使用该规则，该推演不可证明。则称该规则是独立的

弱推演系统：

Eg1: 证明规则1独立于规则2、3

证明：

重新定义规则：真值取值{0,1,2}，定义如下：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 | 2 |  |
| 0 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |

定义：为

当时，

所以规则1不成立

在这种情况下，规则2、3都成立，但规则1不成立，所以规则1独立于规则2、3

Eg2：证明规则3独立于规则1、2

证明：

重新定义规则：定义如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 0 | 1 |  |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |

定义：为

当时，

所以规则3不成立

在这种情况下，规则1、2都成立，但规则3不成立，所以规则3独立于规则1、2

## 例题

Eg1: 完备性证明：若，则

证明：

假设A中出现的所有命题变元，v是一个真值赋值，定义文字：

因为，所以A永真，所以，所以

对于任意赋值v，

因为A永真，所以：

所以

由上可知，若A永真，则对任意赋值v都有：

。。。

# 命题逻辑的完备性

## 定义

完备性定理：在命题逻辑中，假设是公式，有以下结论：

若，则

极大协调集合：

满足以下条件的公式集合Σ被称为极大协调的：

1. Σ是协调的
2. 对任意的，公式集合是不协调的

证明：是一个极大协调集

证：

若且，则且，这是不可能的，所以Σ是协调的。

若，则，，所以，所以是不协调的。

综上，是极大协调集。

## 性质

对任意公式集合和公式A，B，若是极大协调集合，有以下性质：

证明：先证若则

若，此时，与的协调性相矛盾

所以

再证明若，则

因为，所以是不协调的，所以，所以

证明：先证充分性：

因为，所以

因为，，所以，所以

再证必要性：

若是极大协调集合，定义赋值v使得：

则对任意的公式A，

例题1：假设是协调的公式集合，则存在极大协调集，使得

证明：

假设仅有可数个命题变元，则全部公式可以列举为：

按照以下方式定义集合:

根据定义可知，所有都是协调的。

定义

此时，下面证明是极大协调集

假设是不协调的

则

则存在公式，使得

假设这些都属于某个,则，这与定义中的协调性相矛盾，所以是协调的

对于任意公式，可以假设它是，则是不协调的，是不协调的，所以是极大的。

例题2：完备性证明：对任意公式集合与公式A，若，则

证明：假设不成立，这时是协调的，因而可以扩充为极大协调集

由可以定义赋值：

赋值v具有以下性质：

1. ，所以，所以

这与相矛盾，所以

# 命题直觉主义逻辑

## 公理系统

在命题逻辑的自然推演系统中, 将反证法规则替换为两个规则：

**直觉反证法**：

若

**不协调前提**：

若

其中是命题逻辑公式的集合，上述两条规则是相互独立的。

是命题逻辑公式集合，A是命题逻辑公式，称是可演算的，当且仅当存在：

，使得是，并且对每个i，有满足：

1. 或者是某种规则
2. 或者存在j<i，是通过应用规则推导出的
3. 或者存在j，k<i，是通过和应用规则推导出的

若是可演算的，记为

若且，则称是不协调的

Eg1: 证明



Eg2: 证明

1. 2,4
2. 6,8直觉反证法
3. 左侧可以当右侧的前提

## 不协调性的应用

若公式集合是不协调的，则

Eg1:

所以集合不协调

所以

## 分层模型

直觉主义逻辑的一个模型K是指一个二元组，其中：

1. 非空集合V是每个命题变元元素对应于命题逻辑的一个赋值
2. R是V上的一个二元关系，具有自反性和传递性
3. 对于任意的命题变元p及赋值，有：若。

**注意：分层模型的赋值情况并不是任意取值的，要满足对于，**

自反性：对任意

传递性：对任意a,b,c, 若，则

记

在分层模型下，真值的计算比较特殊：

对于给定的分层模型，假设，对于命题变元的任意公式：

1. 当且仅当
2. 当且仅当
3. 当且仅当对**任意的w**，若
4. 当且仅当**对任意的w**，
5. 当且仅当对**任意的w**，

**与和或不需要考虑其他赋值**

## 习题

例题1: 证明

证：假设不成立，则存在分层模型及，

使得：

要使，则存在，，此时

所以

再根据可知，且，这显然是矛盾的

所以假设不成立

例题2: 证明

证：要想证，等价于证对任意分层模型及任意，

当时，

由可知，

由可知，

又因为，所以

所以当时，，原式成立

非可证明例题

例题3 :证明下式不可证：

假设分别为命题变元，构造模型，使得：

其中：

1. 赋值v使得
2. 赋值使得

则真值情况如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | v | w |
| A | 0 | 1 |
| B | 0 | 0 |
|  | 0 | 0 |
|  | 1 | 1 |
|  | 1 | 1 |
|  | 0 | 1 |
|  | 0 | 1 |

所以存在赋值使得

所以原式不可证

例题4 :

假设为命题变元，构造模型，使得：

其中：

1. 赋值v使得
2. 赋值使得
3. 则真值情况如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | v | w |
| A | 0 | 1 |
|  | 0 | 0 |
|  | 1 | 1 |
|  | 0 | 1 |

所以存在赋值使得

所以原式不可证

例题5： **(与和或求真值时不需要考虑关系R对应的赋值)**

假设为命题变元，构造模型，使得：

其中：

1. 赋值v使得
2. 赋值使得

则真值情况如下：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | v | w |
| A | 0 | 1 |
|  | 0 | 0 |
|  | 0 | 1 |

所以存在赋值使得

所以原式不可证

## 分层模型的相关性质

假设是命题逻辑公式集合，A是命题逻辑公式，定义为：

对任意分层模型，当

性质：

1. 真值的传递性

假设A是命题逻辑公式，对于给定的分层模型满足，则：当(A是一个公式)

证明：

1. 假设A是命题变元p，则由分层模型的定义可知当
2. 令，当时，所以对所有的

对于赋值而言，对于所有的，由关系的传递性可知：,

所以，所以，即

1. 直觉主义的可靠性

若，则