目录

[1 矩阵基本概念 4](#_Toc533015234)

[1.1 行列式 4](#_Toc533015235)

[1.1.1 二阶行列式 4](#_Toc533015236)

[1.1.2 n阶行列式 4](#_Toc533015237)

[1.1.3 行列式性质 5](#_Toc533015238)

[1.2 矩阵类型 5](#_Toc533015239)

[1.3 矩阵行列式 5](#_Toc533015240)

[1.4 逆矩阵 6](#_Toc533015241)

[1.5 矩阵的秩 6](#_Toc533015242)

[1.6 矩阵的迹 7](#_Toc533015243)

[1.7 特征值和特征向量 7](#_Toc533015244)

[1.8 相似矩阵 8](#_Toc533015245)

[2 欧式空间和酉空间 8](#_Toc533015246)

[2.1 共轭转置 8](#_Toc533015247)

[2.2 欧式空间与酉空间 9](#_Toc533015248)

[2.3 內积 10](#_Toc533015249)

[2.3.1 內积运算 10](#_Toc533015250)

[2.3.2 內积性质 10](#_Toc533015251)

[2.4 模(范数) 11](#_Toc533015252)

[2.5 正交 11](#_Toc533015253)

[2.6 酉(U)阵 13](#_Toc533015254)

[2.6.1 U阵定义 13](#_Toc533015255)

[2.6.2 U阵性质 13](#_Toc533015256)

[3 矩阵分解 14](#_Toc533015257)

[3.1 QR分解 14](#_Toc533015258)

[3.1.1 定理 14](#_Toc533015259)

[3.1.2 Q、R的求法 14](#_Toc533015260)

[3.2 镜面阵 14](#_Toc533015261)

[3.2.1 定义 14](#_Toc533015262)

[3.2.2 性质 15](#_Toc533015263)

[3.2.3 扩展性质 15](#_Toc533015264)

[3.2.4 应用 15](#_Toc533015265)

[3.3 秩一/满秩分解 16](#_Toc533015266)

[3.3.1 秩一分解 16](#_Toc533015267)

[3.3.2 秩一方阵公式 17](#_Toc533015268)

[3.3.3 满秩分解 17](#_Toc533015269)

[3.3.4 满秩分解的求法 17](#_Toc533015270)

[3.4 正规矩阵及Schur分解 18](#_Toc533015271)

[3.4.1 Schur引理 18](#_Toc533015272)

[3.4.2 正规矩阵 19](#_Toc533015273)

[3.4.3 定理与推论 21](#_Toc533015274)

[3.5 厄米特(Hermite)分解 22](#_Toc533015275)

[3.5.1 定理 22](#_Toc533015276)

[3.5.2 应用 23](#_Toc533015277)

[3.5.3 正定矩阵 23](#_Toc533015278)

[3.5.4 Hermite阵的性质 23](#_Toc533015279)

[3.5.5 常见的Hermite阵 24](#_Toc533015280)

[3.5.6 斜Hermite分解 24](#_Toc533015281)

[3.6 特征值/酉阵Q的求解技巧 25](#_Toc533015282)

[3.6.1 平移法则(求特征根) 25](#_Toc533015283)

[3.6.2 特殊矩阵分解酉阵Q的求解方法 26](#_Toc533015284)

[3.6.3 换位公式(求特征根) 27](#_Toc533015285)

[3.7 奇异值分解 29](#_Toc533015286)

[3.7.1 一些定理 29](#_Toc533015287)

[3.7.2 正奇异值 30](#_Toc533015288)

[3.7.3 简奇异值分解与奇异值分解 31](#_Toc533015289)

[3.7.4 简奇异值分解方法 31](#_Toc533015290)

[3.7.5 推论 33](#_Toc533015291)

[3.8 谱分解 36](#_Toc533015292)

[3.8.1 单纯阵 36](#_Toc533015293)

[3.8.2 零化式 37](#_Toc533015294)

[3.8.3 谱分解 39](#_Toc533015295)

[3.8.4 谱分解的求法 40](#_Toc533015296)

[3.8.5 谱分解的应用 43](#_Toc533015297)

[4 广义逆矩阵 46](#_Toc533015298)

[4.1 广义逆矩阵的定义 46](#_Toc533015299)

[4.2 性质 47](#_Toc533015300)

[4.3 广义逆求解方式 48](#_Toc533015301)

[4.4 正规方程 49](#_Toc533015302)

[4.5 最二乘小解 50](#_Toc533015303)

[4.6 补充公式 52](#_Toc533015304)

[4.7定义与性质 53](#_Toc533015305)

[4.7.1定义 53](#_Toc533015306)

[4.7.2相关公式 54](#_Toc533015307)

[4.7.3 更多广逆 55](#_Toc533015308)

[5 矩阵分析 56](#_Toc533015309)

[5.1 向量范数 56](#_Toc533015310)

[5.1.1 向量范数 56](#_Toc533015311)

[5.1.2 常见向量范数 56](#_Toc533015312)

[5.2 矩阵范数 57](#_Toc533015313)

[5.2.1 定义 57](#_Toc533015314)

[5.2.2 常见的矩阵范数 58](#_Toc533015315)

[5.2.3 谱半径 59](#_Toc533015316)

[5.2.4 算子范数 60](#_Toc533015317)

[5.2.5 小范数定理 62](#_Toc533015318)

[5.3 矩阵级数 64](#_Toc533015319)

[5.4 特征根估计 66](#_Toc533015320)

[5.4.1 估计方法 66](#_Toc533015321)

[5.4.2 盖尔(Ger)圆盘 66](#_Toc533015322)

[5.5 矩阵函数 68](#_Toc533015323)

[5.5.1 收敛定理 68](#_Toc533015324)

[5.5.2 常见解析函数 68](#_Toc533015325)

[5.5.3 幂等公式 70](#_Toc533015326)

[5.5.4 分块公式 70](#_Toc533015327)

[5.5.5 根遗传公式 72](#_Toc533015328)

[5.5.6 Euler公式 72](#_Toc533015329)

[5.5.7 幂0公式 73](#_Toc533015330)

[5.6 矩阵函数应用 73](#_Toc533015331)

[5.6.1 基本定义与公式 73](#_Toc533015332)

[5.6.2 应用 74](#_Toc533015333)

[5.6.3 求解齐次线性微分方程组 74](#_Toc533015334)

[6 矩阵直积 76](#_Toc533015335)

[6.1 定义与性质 76](#_Toc533015336)

[6.1.1 定义 76](#_Toc533015337)

[6.1.2 基本性质 76](#_Toc533015338)

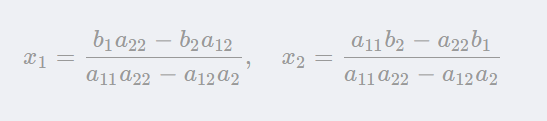
[6.1.3 扩展性质 77](#_Toc533015339)

# 矩阵基本概念

## 行列式

### 二阶行列式

对于上述线性方程组，当 a\_11 a\_22- a\_12 a\_21≠0 时，该方程有唯一解：



为了方便记忆，引入记号：

称之为二阶行列式，它表示。

矩阵A的行列式记为det(A)。

### n阶行列式



其中指的是自然数1,2,…,n的一个排列， 为排列的逆序数。

逆序数：一个自然数排列中，前面数大于后面数的组合叫做一个逆序，逆序的总和叫做逆序数。

### 行列式性质

i. 行列式与其转置行列式相等

ii. 行列式的任意两行(列)互换位置，行列式变号

iii. 若行列式中某一行(列)所有元素有公因子 k, 则可把公因子提到行列式记号之外. 即：



## 矩阵类型

实数矩阵、复数矩阵、方阵、行/列矩阵(行/列向量)

系数矩阵：方程组的系数组成的矩阵

单位矩阵：主对角线为1，其他全为0的方阵

对角矩阵：除主对角线以外全是0的矩阵，常写为

奇异矩阵：det(A) = 0

## 矩阵行列式

N阶矩阵A的行列式记作det(A)，行列式的相关定理：

1. 若A为一个n阶三角矩阵，则det(A)等于矩阵A对角元素的乘积
2. A为n阶矩阵，若A的某行或某列全为0，或者A有两行或两列相等，则det(A) = 0

## 逆矩阵

设A为n阶矩阵，在相同数域上存在n阶矩阵B，是得AB = I(单位矩阵)，则A、B互为逆矩阵，非奇异矩阵。

A的逆矩阵记作：

1. 矩阵A为可逆矩阵的充要条件为
2. 矩阵**A可逆**，则矩阵A的行/列向量线性无关，矩阵**A满秩**
3. 矩阵A可逆，则Ax=b有唯一解(两边同乘以，x=)
4. 逆矩阵具有唯一性
5. 伴随矩阵

## 矩阵的秩

矩阵中线性无关的纵列的最大个数叫做列秩，线性无关的行列的最大个数叫做行秩。

方阵的行秩和列秩相等，简称为矩阵的秩，记为rank(A)或r(A)或rk(A)。

**对于矩阵A而言，其解空间为矩阵X，即AX=0。则r(A)=n-dimN(X)。即A的秩等于A的行数(或列数，选较小的)-解空间的维度。**

## 矩阵的迹

N阶矩阵主对角线元素的和叫做矩阵的迹，记作tr(A)。

1. 迹是n阶矩阵所有特征值的和

## 特征值和特征向量

设A是n阶方阵，如果数λ和n维非零列向量x使关系式Ax=λx成立，那么这样的数λ称为矩阵A特征值，非零向量x称为A的对应于特征值λ的特征向量。

式Ax=λx也可写成( A-λE)X=0。这是n个未知数n个方程的齐次线性方程组，它有非零解的充分必要条件是系数行列式| A-λE|=0.

矩阵A的特征多项式：

Hamilton-Cayley定理：

矩阵A的特征多项式也是它的零化多项式，即对于矩阵A的特征多项式：

有：

1. **三角/对角矩阵对角元即为它的特征值**
2. **N阶矩阵的迹等于其特征值之和**
3. **相似矩阵特征值相同**
4. **(AB为方阵)**

## 相似矩阵

设A，B为n阶矩阵，如果有n阶可逆矩阵P存在，使得：，则称矩阵A和矩阵B相似，记作。

运算称为相似变换，P称为相似变换矩阵。

性质：

1. 若，则
2. 若，，则
3. 若，则A,B秩相同、行列式相同、迹相同，**特征值和特征多项式相同**
4. 若，则A、B具有相同的可逆性

若矩阵相似于某个对角矩阵，则该矩阵可对角化。

# 欧式空间和酉空间

## 共轭转置

数的共轭转置：

实数x的共轭仍然是实数本身，复数的共轭。

数x的共轭转置

向量的共轭转置：

向量的共轭转置

矩阵的共轭转置：

矩阵，其中是列向量，矩阵A的共轭转置

共轭与转置的性质：

共轭转置的一些性质：



## 欧式空间与酉空间

欧式空间：有限维的实数內积空间

酉空间：有限维的复数內积空间

## 內积

在实数R(复数C)的有限维线性空间V内，若,有一种规则(X,Y)使之对应一个实数(复数)，则称该实数(复数)为X，Y的內积，该规则满足以下条件：

1. 对称性：
2. 可加性：
3. 齐次性：
4. 非负性：,当且仅当时，

称V为实(复)內积空间。

### 內积运算

令

若,

若,

所以

### 內积性质

上述四条：对称、可加、齐次、非负

## 模(范数)

定义：非负实数称为的长度(模或范数)，记为

定理：设V是欧氏空间，则：

复数向量的模：

复数的模：

复向量的模：

## 正交

定义：欧氏空间中，若向量满足，则称正交，记作。

定理：

推广，若两两正交，则

1. 设为V中非零向量的两两正交向量组，则必线性无关。
2. 对于n维欧氏空间的任一基，均可找到一组标准正交基。

标准正交基的求法：

设正交基为.

取，令，由于正交，所以

由可得：

令，由 可得：

因此，，其中：

此时得到了一组正交基，将其单位化即可得到标准正交基.

## 酉(U)阵

### U阵定义

1. 若，各列正交，，则为对角矩阵，称A为预备半U阵。
2. 若上述A中的都是单位长，则，称A为半U阵。
3. 若上述A为方阵，则称A为U阵。

### U阵性质

1. ，

# 矩阵分解

## QR分解

### 定理

设满秩矩阵，则存在正交矩阵及正线上三角阵，满足，且分解是唯一。

正交矩阵：，为U阵

正线上三角阵：主对角线上元为正

由 可得，

### Q、R的求法

记，由3.5节正交基的求法可以求得一组标准正交基

## 镜面阵

### 定义

矩阵被称为镜面阵，可以把矩阵A理解为一个平面，向量X为这个平面的法向量。

### 性质

因为

所以

因为，所以

1. A为U阵，各列正交+单位长+方阵

X是镜面A的法向量，所以即为X关于镜面A的投影-X。

1. 若，则

因为，所以Y在镜面A上，所以AY即为镜面A上的向量Y关于镜面的投影，仍是Y。

性质3和4都可以带入向量推导出来。

### 扩展性质

对于，若，则有以下性质：

### 应用

利用镜面阵对矩阵A进行QR分解。

设矩阵,

记矩阵，即为矩阵去掉前i-1行和前i-1列之后的矩阵。

对于矩阵

取 其中

此时：

对也求出一个，此时

这样，所以

## 秩一/满秩分解

### 秩一分解

设，秩r(A)=rank(A)=1，即各列成倍数关系

则

### 秩一方阵公式

，秩r(A)=rank(A)=1

1. 秩一分解：
2. 。 的唯一非零特征根就是的迹(对角元素之和)，并且相应的特征向量为，即。
3. 对于，即，恰有n-1个无关解，是矩阵A的0根特征向量：.

证明：

### 满秩分解

定理：任一矩阵可分解为一个列满秩和行满秩矩阵的乘积。

记号，表示r(A)=r，且

满秩分解定理可表示为：设，则存在，使。

### 满秩分解的求法

对于矩阵, 对其进行初等**行**变换之后可以得到矩阵A的标准形, 只有前r行包含非零元，其他行全为0.

并且的前r行的若干列可以组成一个单位阵，即这些列只有一个非零元1，记这些列的列号为.

此时，的前r行构成的新矩阵即为，原矩阵中列构成的新矩阵就是。

例题：

对其进行初等变换之后

此时

## 正规矩阵及Schur分解

### Schur引理

已知任意矩阵都相似与一上三角矩阵，即存在矩阵P使得为上三角矩阵。

由此可得定理：对任意矩阵，存在U阵U，使得：

即任意复方阵A酉相似与一上三角阵，且**主对角元为A的特征值**。

证明：由QR分解可知，(Q,U都是酉阵)

记

因为K、R都是上三角阵，所以为上三角阵

### 正规矩阵

设，若A满足，则称A(方阵)为正规矩阵(规范阵)。若正规，则也正规。

正规矩阵包括：

1. 厄米特阵： ，实对称矩阵：
2. 斜厄米特阵： ，实反对称矩阵：
3. 酉阵： 实正交阵：
4. 复对角矩阵：

**引理(平移法)：**

证明：令

Eg1 : 正规？

解：

为实反对称阵，正规，所以A正规

**引理(酉相似)：**

**引理(分块上三角)：若**

证明：迹公式：

为0阵

因为：

所以： ，C为0阵，和也为0阵

所以

因此，可以得到以下推论：

1. 若上三角矩阵A正规，则A为对角阵。
2. 若A为严格上三角(不是对角阵)，则A非正规。

证明：

记，由引理可知，，正规。

对进行递归，可得，所以A为对角阵。

### 定理与推论

定理：设，则A是正规矩阵当且仅当A酉相似于一个对角阵，即：

利用上节引理证明：

直接证明：

充分性：

由Schur引理可知，，K为上三角阵

因为，所以

记, 由可得，所以K为对角阵

必要性：

所以

推论1：A为正规阵，当且仅当A有n个特征向量构成的一组标准正交基，且A不同特征值得特征向量正交。

## 厄米特(Hermite)分解

### 定理

1. 若，为厄米特阵()，则存在酉阵，使得：

（对角阵）

且都为实数。

证明：

由许尔(Schur)分解可知：

所以 ，为实数。

1. 若，则中各列都是A的特征向量，且线性无关。
2. 若，为厄米特阵()，则A恰有n个相互正交的特征向量。(有定理2可得)

### 应用

1. 若，，则的值都为实数。

因为f为一个数，所以f为实数。

1. 若，任取，为A的特征值集合，则

(为对应的非零特征向量)

证明：

1. 由上述两点可得：**Hermite阵的特征值都为实数。**

### 正定矩阵

定义：对任意，，则称A为半正定阵，记。对任意非零，，则称A为正定阵，记。

结合可得：

### Hermite阵的性质

1. 全为实数 (由5.5.2(1)可证)
2. 的值全为实数
3. 若，则存在使得，，叫做A的平方根，记，可以写为

证明：

取

1. 对于任意矩阵，是半正定的厄米特阵

### 常见的Hermite阵

1. 实对称矩阵：
2. 任一方阵A，为Hermite阵

### 斜Hermite分解

若，为斜厄米特阵()，则存在酉阵，使得：

（对角阵）

为纯虚数。

证明：

为Hermite阵

所以：

## 特征值/酉阵Q的求解技巧

### 平移法则(求特征根)

思路：

将一个复杂矩阵转换成秩一矩阵，再利用秩一矩阵 特征向量=，求复杂矩阵的特征值。

平移法则：

矩阵与矩阵具有相同的特征向量，并且：

，其中

即：

例题：

，求并给出一个特征向量。

解：

（秩一），

所以，特征向量

所以

### 特殊矩阵分解酉阵Q的求解方法

适用范围：正规矩阵的Schur分解、Hermite分解

（对角阵）

求法：

1. 求A的特征根
2. 求A的特征向量
3. 求A特征向量的标准正交基
4. 以这些标准正交基为列向量的矩阵即为

例题：

设，求正交阵，使得为对角阵。

解：

(秩一)

利用正交化法则：

，其中：

，

，

### 换位公式(求特征根)

**换位公式：**

，则：

1. 与的特征根只差个0根

即：

所以与特征根只差若干个0根

**证明：**

构造矩阵

**例题：**

Eg1. ，求

解：

Eg2. ，求

解：

Eg3 用平移法求的，其中

解：

## 奇异值分解

### 一些定理

对于矩阵

1. 是半正定的厄米特阵，且具有相同的非零特征值, 所以为半正定阵。

记的解空间为，

所以和的解空间相等，所以

**高阵有左侧逆**

设为高阵，，则存在

证明：

，所以存在，使得

**低阵有左侧逆**

设为高阵，，则存在

用法：

1. 若, 为高阵，则

证：

1. 若, 为高阵，则

证：

### 正奇异值

设，则恰有r个正根。

记A的正奇异值为：

A的全体奇异值为：

### 简奇异值分解与奇异值分解

对于矩阵，r(A)=r，则存在半酉阵和半酉阵()，使得：

，其中

对于矩阵，r(A)=r，则存在酉阵和酉阵，使得，其中。

### 简奇异值分解方法

解法一：

1. 求的特征根与特征向量(相互正交)
2. 令
3. 可得
4. 在简奇异值分解的基础之上将P和Q扩展为酉阵，其中，即可得奇异值分解

。

解法二：

(为对角阵)

所以如果已知某个矩阵的奇值分解，就可以求得矩阵的奇值分解。

Eg1 : ，求正奇异值和简(正)SVD

解：

正奇值为



Eg2 : ，求正奇异值和简(正)SVD

解：

正奇值为



Eg3 : ，求正奇异值和简(正)SVD

解：

### 推论

Eg1 : 对于方阵，奇异值的乘积等于特征根的乘积的绝对值

Eg2: 已知矩阵A的正奇异值分解为，可以得到矩阵的正奇异值分解。

解：

令

其中：,是一个酉阵

同样：

令

Eg3: 矩阵的极分解

对于任一方阵，有

，

因为为半正定矩阵，所以

其中为酉阵

叫做A的极分解

特别：(复数)

Eg4 :

证明：

解：

为Hermite阵，所以

记：

矩阵的第k行对角元：

所以

## 谱分解

### 单纯阵

定义：

叫做单纯阵

注：各列都是矩阵A的特征向量且线性无关，即

定理：

1. 方阵为单纯阵有n个线性无关的特征向量。
2. 方阵为单纯阵的每个k重根恰有k个线性无关的特征向量。
3. 若方阵恰有n个互异的特征根，则为单纯阵。
4. 若方阵的每个k重根恰有k个线性无关的特征向量，则为单纯阵。

判定：

1. 若方阵恰有n个互异的特征根，则为单纯阵。
2. 对于方阵的任一k(k>1)重根，

若 ，则为单纯阵，否则为非单。

1. 设方阵有k个互异的特征根，

若 ，则为单纯阵，否则为非单。

### 零化式

定义：

若存在方阵和多项式，

使得：.

称是的一个”0化式”，叫做的一个矩阵根。

注：若是的一个零化式，则对任意也是的一个零化式。

推理：

对于任一固定的方阵，可求出次数最低的零化式，记为。

Caylay定理：

方阵A的特征多项式：

Eg1 : ，求A得极小式

解：

特征多项式：

零化式(Caylay)：

因为：

所以极小式：

应用：若无重根且，则为单纯阵。

Eg2 : 已知，则为单。

解：

无重根且

所以为单纯阵

Eg3: 单纯阵判定：

解：

所以是单纯阵

### 谱分解

单纯矩阵：

有以下特点：

叫做的谱分解

有以下特点：

1. 若为Hermit阵，则，否则不一定等于。

证明：

单阵谱分解公式：

若为单阵，全体不同根为,

则有：

其中： ，

叫谱阵。

证明：

，

对于重根，

所以

同样：

### 谱分解的求法

谱分解：

由上节性质可知：

根据可得：

1. 对于任一多项式：，有

证明：

1. 由1可知，取

由上述已知推论，可取

特殊，若单阵只有两个不同特征根(可以是0根)

Eg1 : ，求

解： A为单阵

所以

所以

Eg2 : ，求

解：为单阵

所以

### 谱分解的应用

**平方谱公式**：

若(半正定),且有谱公式：，则有平方根公式：

Eg1 : ，求

解：

**逆谱公式**：

若A为单阵，全体不同特征根为，

有谱公式：

引理：

**特征向量相关推论**：

1. 若，则的各列都是A关于特征值t得特征向量。

原因：

1. 若，则的各列都是A关于特征值t得特征向量。
2. 若，所以A的各列是的特向量，的各列是A的特向量。
3. 若，是关于的特向量，是关于的特向量。
4. 谱公式：中，的各列都是A的特向量。
5. 谱阵中，恰有n个无关的特向量。

证明：只要证

根据秩的相关定理：

**与的”遗传公式”：**

令，全体根则：

1. 对任一多项式的，全体根
2. 若有特征向量，则也有特向量
   1. 即

证明：

所以

因为

所以

记

# 广义逆矩阵

## 广义逆矩阵的定义

定义：设，若有，满足4个条件：

称为的一个加号逆，记。

常见的：

特别：

1. 可逆方阵有
2. 复数a可作为1阶阵：

的唯一性：

假设都适合条件：

## 性质

高阵公式：

设为高阵，，则：，且

低阵公式：

设为高阵，，则：，且

1. 若可逆，则
2. 若且可逆：
3. 若，则，若，则
4. 若，则

高低分解公式：

若为高低分解，则有，且，，

可以证满足正号逆的公式。

例题：

1. (高阵)

解：

1. (低阵)

解：

解：

## 广义逆求解方式

1. **第一公式(高低分解)：**

若为高低分解，则，其中，。

1. **第二公式(奇异值分解)：**

若为正SVD分解，其中，为半酉阵，则。

1. **秩一第二公式：**

若，且，则。

证明：令，则，

因为

所以

所以

1. **第三公式(QR分解)：**

若，则。

1. **谱公式：**

若为正规，且有谱公式：，则

## 正规方程

**定义：**

任一方程，可产生方程，叫做正规方程。

任一矩阵可产生两个子空间：

1. 令，叫作的核空间(解空间)。
2. 令，叫作的值域或像空间(的列空间)。

**引理：**

1. 正规方程一定有解(相容)，且有特解。

证明：

1. 有以下通解公式：

,

其中，

1. 若有解，则必有特解，有通解，。

证明：可设为的任一解：

将代入公式：

左边

所以是的解

**正交引理：**

1. 若，则(核空间)，即

证明：任取，有

1. 若，则(像空间)，即

证明：

(定理1：)

## 最二乘小解

**最小二乘解：**

若解，称不相容(矛盾方程)，，则最小值，，

此时的一个最小二乘解，其他最小二乘解也满足。

全体的最小二乘解为，。

证明：

因为，所以，

所以

求解：,

通解，，为的基本解，即.

所以最小二乘解

例题：求得最小二乘解。

解：

设，，所以

所以所有最小二乘解：

**极小范数解：**

若有解，则必有特解，通解： 。是全体解中最小长度(范数)解，称为极小范数解，也叫最佳小二解。

证明：

推论：

1. 若有解，则和同解，，
2. 若无解，的通解恰为的全体最小二乘解。

## 补充公式

**公式：**

证明：

令, ,

**用法：**

矩阵不一定是正规矩阵，所以不一定可以进行谱分解，但一定可以。

**其他结论：**矩阵方程

1. 若有解(相容)则必有特解与

证：设任一解为

1. 若有解，则是最小范数解：
2. 若，则是最佳小二解

## 定义与性质

### 定义

若与，适合条件，则称X是A的一个减号逆，记作或，可写：。

(代表只符合广义逆四条性质中的第一条)

特别：

注：不唯一

Eg: ，

若(方阵)可逆，则

性质：

1. 若有解，则必有特解与
2. 若有解(相容)则必有特解与

### 相关公式

**公式一：**

若(标准形)，则全体，其中子块CDF元素任意取值。

Pf :

其他标准形：

**公式二：**

若与标准形等价，即存在，则全体.

Pf:

令

全体

### 更多广逆

定义：若与，适合条件：

记 (不唯一)

定义：若与，适合条件：

记 (不唯一)

# 矩阵分析

## 向量范数

### 向量范数

任，规定长度(范数)为：

记为。

**性质：**

1. 正性：，且
2. 齐性：
3. 三角性：

**范数定义**

V是线性空间(在复数域)，是V上一个实值函数：叫范数，如果适合正性、齐性、三角性。

### 常见向量范数

空间上常见范数

1. 取叫2范数，又叫F范数(长度)，有公式：
2. 取，叫最大值范数，又叫“范数”
3. 取，叫和范数
4. 取，叫p范数，.

取极限：

**等价定理：**

上任2种范数，适合：,其中为固定正数，称等价，记

## 矩阵范数

### 定义

方阵空间上一函数叫一个方阵范数，当且仅当满足以下性质：

1. 正性：。且
2. 齐性：
3. 三角性

推论：

1. 次乘性(相容性)：

只满足(1)~(3)的函数叫向量式范数

性质4的推广：

对迭代k次：

令，

### 常见的矩阵范数

上常见范数：

1. 叫列范数，
2. 叫行范数，
3. 叫F范数
5. 叫总和范数

等价定理：

任2个方阵范数,

常见向量范数之间的等价关系：

Pf : (1)

(2) 由柯西不等式可得：

### 谱半径

谱半径，

性质：

1. 齐性：

谱范不等式：，对一切方阵成立

证明：

令，

取特征向量：

令

由方阵范数条件4可知：

### 算子范数

定义：已知为上给定的向量范数，固定一个方阵，在上连续，令，当时，取最大值。有以下性质：

且满足矩阵范数的4个性质。

这时是方阵范数，记为，称为导出的“算子范数”。

性质证明：

先证：

任

证性质3： 其中

证性质4：

常见的算子范数：

1. 导出 (列)
2. 导出 (行)
3. 导出 (最大奇值)

注：

一般

证明： ，记为

令长度

即证

由Hermite分解可知，存在酉阵Q：

全体奇值

由酉阵保长性质可知：

时，取最大值

所以时，

单位阵范数性质：

1. 对任一算子范数，必有

由定义

推论：若，则为非算子范数

1. 对于其它方阵范数，必有

谱范不等式:

### 小范数定理

引理：若为上已知的方阵范数，P为可逆阵，

令

则为上一个新范数，满足条件1~4

证明条件3：

证明条件4：

**小范数定理**：

固定一个方阵与小正数，则存在一个方阵范数，使得：

证明：

由Jordan形可知：

令

令

推论：若，则存在小范数，使。

证明：令

则存在

**条件数定义：**(A可逆)

## 矩阵级数

设方阵序列，记，

若矩阵级数：

则部分和：

若每个级数，则

注：**若，则收敛**

引理：若，则收敛

即“绝对收敛，必收敛”

证明：只要证都绝对收敛

取M范数

等价性：

收敛

收敛

收敛

**牛曼公式：**

1. 时，(收敛)
2. ，
3. 若，则发散

证明：若，则收敛

，则存在小范数

收敛

则收敛(绝对收敛引理)

令

所以

注：若收敛，则

证明：，不收敛

反证法：若收敛，则

(矛盾)

## 特征根估计

### 估计方法

谱范不等式：

许尔估计：

，当且仅当A正规时等号成立

### 盖尔(Ger)圆盘

盖尔圆盘：以为圆心，为半径的圆

定义：方阵恰有n个盖尔圆盘，其中：

…

半径： 即每行除对角元之外元素绝对值之和

**盖尔定理：**

1. 全体特征根被所有盖尔圆盘所覆盖，即：
2. 若p个圆盘相交(或相切)形成一个连通分支，且与其余n-p个圆盘分离，则中恰有p个根(含重复)。

特别，一个独立圆中恰有1个根。

应用：若矩阵A的盖尔盘比较难求，可以求的盖尔盘。因为相似矩阵特征根相同。

实方阵性质：

1. n个中心都在实轴上。
2. 实方阵的虚根成双出现(共轭虚根)

例如：,

**对角占优阵**

若对角占优阵A适合条件：

行对角占优：

列对角占优：

推论：

若A对角占优，则，即，，A为可逆阵。

**与转置**:

1. 具有相同特征根：
2. 特征式相同：
3. 的(Ger)行半径恰是A的(Ger)列半径

## 矩阵函数

### 收敛定理

令解析函数收敛半径为，或者

将x=A代入，或

**收敛定理：**收敛半径为r，且

1. 时，收敛
2. 时，发散
3. 时，待定

### 常见解析函数

3个解析函数，收敛半径都是

任方阵A代入解析函数：

若A为单阵，则对任一解析函数，必有

引入参数t(实数或复数)

### 幂等公式

公式：若，则

证明：

Eg: ，求

=

### 分块公式

公式：若，则，为解析函数

同样：

特别：

Eg ：,求

定理：若，则

注：若，

由上述定理可知：

同理

可逆公式：必有逆，且.

Eg : ,,用定义求,

=

### 根遗传公式

公式：若，则的全体根

行列式：

Eg ：,

### Euler公式

1. (将(1)中A换为-A)

A为常数(t)也成立

Eg1 : ，求

解：

为单阵

### 幂0公式

幂0阵：

幂0公式：若，则

Eg : ，求

## 矩阵函数应用

### 基本定义与公式

定义：

令，其中是关于t的函数。

求导：

积分：

常数矩阵导数

公式：

### 应用

### 求解齐次线性微分方程组

有通解公式：，为常数矩阵。

Pf：

原式

为什么可以调换？？？

定理： 有唯一解

Eg : 求解，且

解：令

所以原式可写为：

所以唯一解为

的值在之前的例题中求得

# 矩阵直积

## 定义与性质

### 定义

令，矩阵的张量积(直积)定义如下：

### 基本性质

基本性质：

分块公式(右进法则)：

但

转置公式：

，比较

吸收公式：

条件：有定义

推广：

特别：

逆公式：

若A、B都可逆，则

证明：

推广：

Eg :

1. 若A、B都是Hermite阵，则为Hermite阵
2. 若A、B都是幂等阵，则为幂等阵
3. 若A、B都是酉阵，则为酉阵

解：若,则

若，则

若，则

### 扩展性质

上三角性质：

若都是上三角阵，则是上三角阵

对角元为,对角元为，则对角元为

相似性质：

若，则

证明：

特征根定理：

，则

Eg :证明：

同样：

Eg: ，求