目录

[1 矩阵基本概念 4](#_Toc534919401)

[1.1 行列式 4](#_Toc534919402)

[1.2 矩阵类型 4](#_Toc534919403)

[1.3 矩阵行列式 4](#_Toc534919404)

[1.4 逆矩阵 5](#_Toc534919405)

[1.5 矩阵的秩 5](#_Toc534919406)

[1.6 矩阵的迹 5](#_Toc534919407)

[1.7 特征值和特征向量 6](#_Toc534919408)

[1.8 相似矩阵 7](#_Toc534919409)

[2 欧式空间和酉空间 7](#_Toc534919410)

[2.1 共轭转置 7](#_Toc534919411)

[2.2 欧式空间与酉空间 8](#_Toc534919412)

[2.3 內积 9](#_Toc534919413)

[2.3.1 內积运算 9](#_Toc534919414)

[2.3.2 內积性质 10](#_Toc534919415)

[2.4 模(范数) 10](#_Toc534919416)

[2.5 正交 10](#_Toc534919417)

[2.6 酉(U)阵 12](#_Toc534919418)

[2.6.1 U阵定义 12](#_Toc534919419)

[2.6.2 U阵性质 12](#_Toc534919420)

[2.7 Jordan标准形 13](#_Toc534919421)

[2.7.1 概念 13](#_Toc534919422)

[2.7.2 基本求法 13](#_Toc534919423)

[2.7.3 幂零性质 14](#_Toc534919424)

[3 矩阵分解 15](#_Toc534919425)

[3.1 QR分解 15](#_Toc534919426)

[3.1.1 定理 15](#_Toc534919427)

[3.1.2 Q、R的求法 16](#_Toc534919428)

[3.2 镜面阵 16](#_Toc534919429)

[3.2.1 定义 16](#_Toc534919430)

[3.2.2 性质 16](#_Toc534919431)

[3.2.3 扩展性质 17](#_Toc534919432)

[3.2.4 应用 17](#_Toc534919433)

[3.3 秩一/满秩分解 18](#_Toc534919434)

[3.3.1 秩一分解 18](#_Toc534919435)

[3.3.2 秩一方阵公式 18](#_Toc534919436)

[3.3.3 满秩分解 19](#_Toc534919437)

[3.3.4 满秩分解的求法 19](#_Toc534919438)

[3.4 正规矩阵及Schur分解 20](#_Toc534919439)

[3.4.1 Schur引理 20](#_Toc534919440)

[3.4.2 正规矩阵 20](#_Toc534919441)

[3.4.3 定理与推论 22](#_Toc534919442)

[3.5 厄米特(Hermite)分解 23](#_Toc534919443)

[3.5.1 定理 23](#_Toc534919444)

[3.5.2 应用 24](#_Toc534919445)

[3.5.3 正定矩阵(Hermite阵的一种) 25](#_Toc534919446)

[3.5.4 Hermite阵的性质 25](#_Toc534919447)

[3.5.5 常见的Hermite阵 26](#_Toc534919448)

[3.5.6 斜Hermite分解 26](#_Toc534919449)

[3.6 特征值/酉阵Q的求解技巧 26](#_Toc534919450)

[3.6.1 平移法则(求特征根) 26](#_Toc534919451)

[3.6.2 特殊矩阵分解酉阵Q的求解方法 27](#_Toc534919452)

[3.6.3 换位公式(求特征根) 29](#_Toc534919453)

[3.7 奇异值分解 31](#_Toc534919454)

[3.7.1 一些定理 31](#_Toc534919455)

[3.7.2 正奇异值 32](#_Toc534919456)

[3.7.3 简奇异值分解与奇异值分解 33](#_Toc534919457)

[3.7.4 简奇异值分解方法 33](#_Toc534919458)

[3.7.5 推论 36](#_Toc534919459)

[3.8 谱分解 39](#_Toc534919460)

[3.8.1 单纯阵 39](#_Toc534919461)

[3.8.2 零化式 39](#_Toc534919462)

[3.8.3 谱分解 41](#_Toc534919463)

[3.8.4 谱分解的求法 43](#_Toc534919464)

[3.8.5 谱分解的应用 45](#_Toc534919465)

[4 广义逆矩阵 49](#_Toc534919466)

[4.1 广义逆矩阵的定义 49](#_Toc534919467)

[4.2 性质 50](#_Toc534919468)

[4.3 广义逆求解方式 51](#_Toc534919469)

[4.4 正规方程 52](#_Toc534919470)

[4.5 最二乘小解 53](#_Toc534919471)

[4.6 补充公式 55](#_Toc534919472)

[4.7定义与性质 56](#_Toc534919473)

[4.7.1定义 56](#_Toc534919474)

[4.7.2相关公式 57](#_Toc534919475)

[4.7.3 更多广逆 58](#_Toc534919476)

[5 矩阵分析 59](#_Toc534919477)

[5.1 向量范数 59](#_Toc534919478)

[5.1.1 向量范数 59](#_Toc534919479)

[5.1.2 常见向量范数 59](#_Toc534919480)

[5.2 矩阵范数 60](#_Toc534919481)

[5.2.1 定义 60](#_Toc534919482)

[5.2.2 常见的矩阵范数 61](#_Toc534919483)

[5.2.3 谱半径 62](#_Toc534919484)

[5.2.4 算子范数 63](#_Toc534919485)

[5.2.5 小范数定理 66](#_Toc534919486)

[5.3 矩阵级数 67](#_Toc534919487)

[5.4 特征根估计 70](#_Toc534919488)

[5.4.1 估计方法 70](#_Toc534919489)

[5.4.2 盖尔(Ger)圆盘 70](#_Toc534919490)

[5.5 矩阵函数 72](#_Toc534919491)

[5.5.1 收敛定理 72](#_Toc534919492)

[5.5.2 常见解析函数 73](#_Toc534919493)

[5.5.3 幂等公式 74](#_Toc534919494)

[5.5.4 分块公式 74](#_Toc534919495)

[5.5.5 根遗传公式**(不要求是单纯阵**) 76](#_Toc534919496)

[5.5.6 Euler公式 76](#_Toc534919497)

[5.5.7 幂0公式 77](#_Toc534919498)

[5.5.8 矩阵函数求法总结 78](#_Toc534919499)

[5.6 矩阵函数应用 79](#_Toc534919500)

[5.6.1 基本定义与公式 79](#_Toc534919501)

[5.6.2 应用 79](#_Toc534919502)

[5.6.3 求解齐次线性微分方程组 80](#_Toc534919503)

[6 矩阵直积 82](#_Toc534919504)

[6.1 定义与性质 82](#_Toc534919505)

[6.1.1 定义 82](#_Toc534919506)

[6.1.2 基本性质 82](#_Toc534919507)

[6.1.3 扩展性质 83](#_Toc534919508)

# 矩阵基本概念

## 行列式



其中指的是自然数1,2,…,n的一个排列， 为排列的逆序数。

逆序数：一个自然数排列中，前面数大于后面数的组合叫做一个逆序，逆序的总和叫做逆序数。

## 矩阵类型

实数矩阵、复数矩阵、方阵、行/列矩阵(行/列向量)

系数矩阵：方程组的系数组成的矩阵

单位矩阵：主对角线为1，其他全为0的方阵

对角矩阵：除主对角线以外全是0的矩阵，常写为

奇异矩阵：det(A) = 0

## 矩阵行列式

N阶矩阵A的行列式记作det(A)，行列式的相关定理：

1. 若A为一个n阶三角矩阵，则det(A)等于矩阵A对角元素的乘积，也就是矩阵A特征值的乘积
2. A为n阶矩阵，若A的某行或某列全为0，或者A有两行或两列相等，则det(A) = 0

## 逆矩阵

设A为n阶矩阵，在相同数域上存在n阶矩阵B，是得AB = I(单位矩阵)，则A、B互为逆矩阵，非奇异矩阵。

A的逆矩阵记作：

1. 矩阵A可逆
2. 矩阵A可逆，则Ax=b有唯一解(两边同乘以，x=)
3. 逆矩阵具有唯一性
4. 伴随矩阵

## 矩阵的秩

矩阵中线性无关的纵列的最大个数叫做列秩，线性无关的行列的最大个数叫做行秩。

方阵的行秩和列秩相等，简称为矩阵的秩，记为rank(A)或r(A)或rk(A)。

对于矩阵A而言，其解空间为矩阵X，即AX=0。则**r(A)=n-dimN(X)**。即**A的秩等于A的行数(或列数，选较小的)-解空间的维度**。

## 矩阵的迹

N阶矩阵主对角线元素的和叫做矩阵的迹，记作tr(A)。

1. 迹是n阶矩阵所有特征值的和

## 特征值和特征向量

设A是n阶方阵，如果数λ和n维非零列向量x使关系式Ax=λx成立，那么这样的数λ称为矩阵A特征值，非零向量x称为A的对应于特征值λ的特征向量。

式Ax=λx也可写成( A-λE)X=0。这是n个未知数n个方程的齐次线性方程组，它有非零解的充分必要条件是系数行列式| A-λE|=0.

矩阵A的特征多项式：

Hamilton-Cayley定理：

矩阵A的特征多项式也是它的零化多项式，即对于矩阵A的特征多项式：

有：

1. **三角/对角矩阵对角元即为它的特征值**
2. **N阶矩阵的迹等于其特征值之和**
3. **相似矩阵特征值相同**
4. **(AB为方阵)**

证明：

设矩阵A的特征根为，则，所以为矩阵的特征根，同理可证

## 相似矩阵

设A，B为n阶矩阵，如果有n阶可逆矩阵P存在，使得：，则称矩阵A和矩阵B相似，记作。

运算称为相似变换，P称为相似变换矩阵。

性质：

1. 若，则
2. 若，，则
3. 若，则A,B秩相同、行列式相同、迹相同，**特征值和特征多项式相同**
4. 若，则A、B具有相同的可逆性

若矩阵相似于某个对角矩阵，则该矩阵可对角化。

# 欧式空间和酉空间

## 共轭转置

数的共轭转置：

实数x的共轭仍然是实数本身，复数的共轭。

数x的共轭转置

向量的共轭转置：

向量的共轭转置

矩阵的共轭转置：

矩阵，其中是列向量，矩阵A的共轭转置

共轭与转置的性质：

共轭转置的一些性质：



## 欧式空间与酉空间

欧式空间：有限维的实数內积空间

酉空间：有限维的复数內积空间

## 內积

在实数R(复数C)的有限维线性空间V内，若,有一种规则(X,Y)使之对应一个实数(复数)，则称该实数(复数)为X，Y的內积，该规则满足以下条件：

1. 对称性：
2. 可加性：
3. 齐次性：
4. 非负性：,当且仅当时，

称V为实(复)內积空间。

### 內积运算

令

若,

若,

所以

### 內积性质

上述四条：对称、可加、齐次、非负

## 模(范数)

定义：非负实数称为的长度(模或范数)，记为

定理：设V是欧氏空间，则：

复数向量的模：

复数的模：

复向量的模：

## 正交

定义：欧氏空间中，若向量满足，则称正交，记作。

定理：

推广，若两两正交，则

1. 设为V中非零向量的两两正交向量组，则必线性无关。
2. 对于n维欧氏空间的任一基，均可找到一组标准正交基。

标准正交基的求法：

设正交基为.

取，令，由于正交，所以

由可得：

令，由 可得：

因此，，其中：

此时得到了一组正交基，将其单位化即可得到标准正交基.

## 酉(U)阵

### U阵定义

1. 若，各列正交，，则为对角矩阵，称A为预备半U阵。
2. 若上述A中的都是单位长，则，称A为半U阵。
3. 若上述A为方阵，则称A为U阵。

### U阵性质

1. ，
2. 酉阵特征根的模为1

证明：对于任意酉阵U，

两边同时取模的平方：

即:

## Jordan标准形

### 概念

定义：

每个n阶的复数矩阵(单纯阵)都相似于一个Jordan标准形矩阵，该矩阵如果不考虑若当块的次序，则Jordan标准形是唯一的。

若当块:

特殊的

若当标准形：

### 基本求法

对于n阶矩阵A，其Jordan标准求法如下：

1. 对进行初等行变换，转换成一个对角阵，对角元为1或者，其中
2. 记所有中的元素为，其中
3. 则

### 幂零性质

若n阶矩阵A满足：，则

1. 所有Jordan块的对角元都为0
2. Jordan块的最大阶数为，且是其中的一个Jordan块
3. Jordan块的个数等于矩阵A的零度(解空间维度)
4. 所有Jordan块的阶数和为n

若矩阵A的最小零化式为：，则

1. 是其中的一个Jordan块

若矩阵A的特征多项式，则：

1. Jordan块的对角元分别为
2. Jordan块分别为

例题：

1. 矩阵

解：，所以是其最大阶数的Jordan块

因为，所以零度为2，所以共有两Jordan块

所以

2. 矩阵

解：

所以Jordan的对角元都是

又因为最小式，所以一个Jordan块为

所以

# 矩阵分解

## QR分解

### 定理

设满秩矩阵，则存在正交矩阵及正线上三角阵，满足，且分解是唯一。

正交矩阵：，为U阵

正线上三角阵：主对角线上元为正

由 可得，

### Q、R的求法

记，由3.5节正交基的求法可以求得一组标准正交基

## 镜面阵

### 定义

矩阵被称为镜面阵，可以把矩阵A理解为一个平面，向量X为这个平面的法向量。

### 性质

因为

所以

因为，所以

1. A为U阵，各列正交+单位长+方阵

X是镜面A的法向量，所以即为X关于镜面A的投影-X。

1. 若，则

因为，所以Y在镜面A上，所以AY即为镜面A上的向量Y关于镜面的投影，仍是Y。

性质3和4都可以带入向量推导出来。

### 扩展性质

对于，若，则有以下性质：

### 应用

利用镜面阵对矩阵A进行QR分解。

设矩阵,

记矩阵，即为矩阵去掉前i-1行和前i-1列之后的矩阵。

对于矩阵

取 其中

此时：

对也求出一个，此时

这样，所以

## 秩一/满秩分解

### 秩一分解

设，秩r(A)=rank(A)=1，即各列成倍数关系

则

### 秩一方阵公式

，秩r(A)=rank(A)=1

1. 秩一分解：
2. 。 的唯一非零特征根就是的迹(对角元素之和)，并且相应的特征向量为，即。
3. 对于，即，恰有n-1个无关解，是矩阵A的0根特征向量：.

证明：

### 满秩分解

定理：任一矩阵可分解为一个列满秩(高阵)和行满秩(低阵)矩阵的乘积。

记号，表示r(A)=r，且

满秩分解定理可表示为：设，则存在，使。

### 满秩分解的求法

对于矩阵, 对其进行初等**行**变换之后可以得到矩阵A的标准形, 只有前r行包含非零元，其他行全为0.

并且的前r行的若干列可以组成一个单位阵，即这些列只有一个非零元1，记这些列的列号为.

此时，的前r行构成的新矩阵即为，原矩阵中列构成的新矩阵就是。

例题：

对其进行初等变换之后

此时

## 正规矩阵及Schur分解

### Schur引理

已知任意矩阵都相似与一上三角矩阵，即存在矩阵P使得为上三角矩阵。

由此可得定理：对任意矩阵，存在U阵U，使得：

即任意复方阵A酉相似与一上三角阵，且**主对角元为A的特征值**。

证明：由QR分解可知，(Q,U都是酉阵)

记

因为K、R都是上三角阵，所以为上三角阵

### 正规矩阵

设，若A满足，则称A(方阵)为正规矩阵(规范阵)。若正规，则也正规。

正规矩阵包括：

1. 厄米特阵： ，实对称矩阵：
2. 斜厄米特阵： ，实反对称矩阵：
3. 酉阵： 实正交阵：
4. 复对角矩阵：

**引理(平移法)：**

证明：令

Eg1 : 正规？

解：

为实反对称阵，正规，所以A正规

**引理(酉相似)：**

**引理(分块上三角)：若**

证明：迹公式：

为0阵

因为：

所以： ，C为0阵，和也为0阵

所以

因此，可以得到以下推论：

1. 若上三角矩阵A正规，则A为对角阵。
2. 若A为严格上三角(不是对角阵)，则A非正规。

证明：

记，由引理可知，，正规。

对进行递归，可得，所以A为对角阵。

### 定理与推论

定理：设，则A是正规矩阵当且仅当A酉相似于一个对角阵，即：

利用上节引理证明：

直接证明：

充分性：

由Schur引理可知，，K为上三角阵

因为，所以

记, 由可得，所以K为对角阵

必要性：

所以

推论1：A为正规阵，当且仅当A有n个特征向量构成的一组标准正交基，且A不同特征值得特征向量正交。

## 厄米特(Hermite)分解

### 定理

1. 若，为厄米特阵()，则存在酉阵，使得：

（对角阵）

且都为实数。

证明：

由许尔(Schur)分解可知：

所以 ，为实数。

1. 若，则中各列都是A的特征向量，且线性无关。

证明：

所以的各列都是A的不同特征根的特征向量，所以他们线性无关

1. 若，为厄米特阵()，则A恰有n个相互正交的特征向量。(有定理2可得)

### 应用

1. 若，，则的值都为实数。

因为f为一个数，所以f为实数。

1. 若，任取，为A的特征值集合，则

(为对应的非零特征向量)

证明：

1. 由上述两点可得：**Hermite阵的特征值都为实数。**

### 正定矩阵(Hermite阵的一种)

定义：对于一个**Hermite阵A**，若对任意，，则称A为半正定阵，记。对任意非零，，则称A为正定阵，记。

结合可得：

### Hermite阵的性质

1. 全为实数 (由3.5.2(1)可证)
2. 的值全为实数
3. 若，则存在使得，，叫做A的平方根，记，可以写为

证明：

取

1. 对于任意矩阵，是半正定的厄米特阵

### 常见的Hermite阵

1. 实对称矩阵：
2. 任一方阵A，为Hermite阵

### 斜Hermite分解

若，为斜厄米特阵()，则存在酉阵，使得：

（对角阵）

为纯虚数。

证明：

为Hermite阵

所以：

## 特征值/酉阵Q的求解技巧

### 平移法则(求特征根)

思路：

将一个复杂矩阵转换成秩一矩阵，再利用秩一矩阵 特征向量=，求复杂矩阵的特征值。

平移法则：

矩阵与矩阵具有相同的特征向量，并且：

，其中

即：

例题：

，求并给出一个特征向量。

解：

（秩一），

所以，特征向量

所以

### 特殊矩阵分解酉阵Q的求解方法

适用范围：正规矩阵的Schur分解、Hermite分解

（对角阵）

求法：

1. 求A的特征根
2. 求A的特征向量
3. 求A特征向量的标准正交基
4. 以这些标准正交基为列向量的矩阵即为

例题：

设，求正交阵，使得为对角阵。

解：

(秩一)

利用正交化法则：

，其中：

，

，

### 换位公式(求特征根)

**换位公式：**

，则：

1. 与的特征根只差个0根

即：

所以与特征根只差若干个0根

**证明：**

构造矩阵

**例题：**

Eg1. ，求

解：

Eg2. ，求

解：

Eg3 用平移法求的，其中

解：

## 奇异值分解

### 一些定理

对于矩阵

1. 是半正定的厄米特阵，且具有相同的非零特征值, 所以为半正定阵。

记的解空间为，

所以和的解空间相等，所以

**高阵有左侧逆**

设为高阵，，则存在

证明：

，所以存在，使得

**低阵有右侧逆**

设为低阵，，则存在

用法：

1. 若, 为高阵，则

证：

1. 若, 为高阵，则

证：

### 正奇异值

设，则恰有r个正根。

**可重复**

记A的正奇异值为：

A的全体奇异值为：

记,证明

证明：

对于而言

所以

所以

### 简奇异值分解与奇异值分解

对于矩阵，r(A)=r，则存在半酉阵和半酉阵()，使得：

，其中

对于矩阵，r(A)=r，则存在酉阵和酉阵，使得，其中。

### 简奇异值分解方法

解法一：

1. 求的特征根与特征向量(相互正交)
2. 令
3. 可得
4. 在简奇异值分解的基础之上将P和Q扩展为酉阵，其中，即可得奇异值分解

。

解法二：

(为对角阵)

所以如果已知某个矩阵的奇值分解，就可以求得矩阵的奇值分解。

Eg1 : ，求正奇异值和简(正)SVD

解：

正奇值为



Eg2 : ，求正奇异值和简(正)SVD

解：

正奇值为



Eg3 : ，求正奇异值和简(正)SVD

解：

### 推论

Eg1:若正规矩阵的特征根，则的奇异值。若为正定阵，则。

证明：已知

所以对任意

所以，所以

若正定，则是Hermit阵，所以的特征根都是实数，的特征根也是实数，所以。

Eg2 : 对于方阵，奇异值的乘积等于特征根的乘积的绝对值

Eg3: 已知矩阵A的正奇异值分解为，可以得到矩阵的正奇异值分解。

解：

令

其中：,是一个酉阵

同样：

令

Eg4: 矩阵的极分解

对于任一方阵，有

，

因为为半正定矩阵，所以

其中为酉阵

叫做A的极分解

特别：(复数)

Eg5 :

证明：

解：

为Hermite阵，所以

记：

矩阵的第k行对角元：

所以

## 谱分解

### 单纯阵

定义：

叫做单纯阵

注：各列都是矩阵A的特征向量且线性无关，即

定理：

1. 方阵为单纯阵有n个线性无关的特征向量。
2. 方阵为单纯阵的每个k重根恰有k个线性无关的特征向量。
3. 若方阵恰有n个互异的特征根，则为单纯阵。

判定：

1. 若方阵恰有n个互异的特征根，则为单纯阵。
2. 对于方阵的任一k(k>1)重根，

若 ，则为单纯阵，否则为非单。

1. 设方阵有k个互异的特征根，

若 ，则为单纯阵，否则为非单。

### 零化式

定义：

若存在方阵和多项式，

使得：.

称是的一个”0化式”，叫做的一个矩阵根。

注：若是的一个零化式，则对任意也是的一个零化式。

推理：

对于任一固定的方阵，可求出次数最低的零化式，记为。

Caylay定理：

方阵A的特征多项式：

Eg1 : ，求A得极小式

解：

特征多项式：

零化式(Caylay)：

因为：

所以极小式：

应用：若无重根且，则为单纯阵。

Eg2 : 已知，则为单。

解：

无重根且

所以为单纯阵

Eg3: 单纯阵判定：

解：

所以是单纯阵

### 谱分解

单纯矩阵：

有以下特点：

叫做的谱分解

有以下特点：

1. 若为Hermit阵，则，否则不一定等于。

证明：

单阵谱分解公式：

若为单阵，全体不同根为,

则有：

其中： ，

叫谱阵。

证明：

，

对于重根，

所以

同样：

### 谱分解的求法

谱分解：

由上节性质可知：

根据可得：

1. 对于任一多项式：，有

证明：

1. 由1可知，取

由上述已知推论，可取

特殊，若单阵只有两个不同特征根(可以是0根)

Eg1 : ，求

解： A为单阵

所以

所以

Eg2 : ，求

解：为单阵

所以

### 谱分解的应用

**平方谱公式**：

若(半正定),且有谱公式：，则有平方根公式：

Eg1 : ，求

解：

**逆谱公式**：

若A为单阵，全体不同特征根为，

有谱公式：

引理：

**特征向量相关推论**：

1. 若，则的各列都是A关于特征值t的特征向量。

原因：

1. 若，则的各列都是A关于特征值t得特征向量。
2. 若，所以A的各列是的特向量，的各列是A的特向量。
3. 若，是关于的特向量，是关于的特向量。
4. 谱公式：中，的各列都是A的特向量。
5. 谱阵中，恰有n个无关的特向量。

证明：只要证

根据秩的相关定理：

**与的”遗传公式”：**

令，全体根则：

1. 对任一多项式的，全体根
2. 若有特征向量，则也有特向量
   1. 即

证明：

所以

因为

所以

记

# 广义逆矩阵

## 广义逆矩阵的定义

定义：设，若有，满足4个条件：

称为的一个加号逆，记。

常见的：

特别：

1. 可逆方阵有
2. 复数a可作为1阶阵：

的唯一性：

假设都适合条件：

## 性质

高阵公式：

设为高阵，，则：，且

低阵公式：

设为低阵，，则：，且

1. 若可逆，则
2. 若且可逆：
3. 若，则，若，则
4. 若，则

高低分解公式：

若为高低分解，则有，且，，

可以证满足正号逆的公式。

例题：

1. (高阵)

解：

1. (低阵)

解：

解：

## 广义逆求解方式

1. **第一公式(高低分解)：**

若为高低分解，则，其中，。

1. **第二公式(奇异值分解)：**

若为正SVD分解，其中，为半酉阵，则。

1. **秩一第二公式：**

若，且，则。

证明：令，则，

因为

所以

所以

1. **第三公式(QR分解)：**

若，则。

1. **谱公式：**

若为正规，且有谱公式：，则

## 正规方程

**定义：**

任一方程，可产生方程，叫做正规方程。

任一矩阵可产生两个子空间：

1. 令，叫作的核空间(解空间)。
2. 令，叫作的值域或像空间(的列空间)。

**引理：**

1. 正规方程一定有解(相容)，且有特解。

证明：

1. 有以下通解公式：

,

其中，

1. 若有解，则必有特解，有通解，。

证明：可设为的任一解：

将代入公式：

左边

所以是的解

**正交引理：**

1. 若，则(核空间)，即

证明：任取，有

1. 若，则(像空间)，即

证明：

(定理1：)

## 最二乘小解

**最小二乘解：**

若解，称不相容(矛盾方程)，，则最小值，，

此时的一个最小二乘解，其他最小二乘解也满足。

全体的最小二乘解为，。

证明：

因为，所以，

所以

求解：,

通解，，为的基本解，即.

所以最小二乘解

例题：求得最小二乘解。

解：

设，，所以

所以所有最小二乘解：

**极小范数解：**

若有解，则必有特解，通解： 。是全体解中最小长度(范数)解，称为极小范数解，也叫最佳小二解。

证明：

推论：

1. 若有解，则和同解，，
2. 若无解，的通解恰为的全体最小二乘解。

## 补充公式

**公式：**

证明：

令, ,

**用法：**

矩阵不一定是正规矩阵，所以不一定可以进行谱分解，但一定可以。

**其他结论：**矩阵方程

1. 若有解(相容)则必有特解与

证：设任一解为

1. 若有解，则是最小范数解：
2. 若，则是最佳小二解

## 定义与性质

### 定义

若与，适合条件，则称X是A的一个减号逆，记作或，可写：。

(代表只符合广义逆四条性质中的第一条)

特别：

注：不唯一

Eg: ，

若(方阵)可逆，则

性质：

1. 若有解，则必有特解与
2. 若有解(相容)则必有特解与

### 相关公式

**公式一：**

若(标准形)，则全体，其中子块CDF元素任意取值。

Pf :

其他标准形：

**公式二：**

若与标准形等价，即存在，则全体.

Pf:

令

全体

### 更多广逆

定义：若与，适合条件：

记 (不唯一)

定义：若与，适合条件：

记 (不唯一)

# 矩阵分析

## 向量范数

### 向量范数

任，规定长度(范数)为：

记为。

**性质：**

1. 正性：，且
2. 齐性：
3. 三角性：

**范数定义**

V是线性空间(在复数域)，是V上一个实值函数：叫范数，如果适合正性、齐性、三角性。

### 常见向量范数

空间上常见范数

1. 取叫2范数，又叫F范数(长度)，有公式：
2. 取，叫最大值范数，又叫“范数”
3. 取，叫和范数
4. 取，叫p范数，.

取极限：

**等价定理：**

上任2种范数，适合：,其中为固定正数，称等价，记

## 矩阵范数

### 定义

方阵空间上一函数叫一个方阵范数，当且仅当满足以下性质：

1. 正性：。且
2. 齐性：
3. 三角性

推论：

1. 次乘性(相容性)：

只满足(1)~(3)的函数叫向量式范数

性质4的推广：

对迭代k次：

令，

### 常见的矩阵范数

上常见范数：

1. 叫列范数，
2. 叫行范数，
3. 叫F范数
5. 叫总和范数

等价定理：

任2个方阵范数,

常见向量范数之间的等价关系：

Pf : (1)

(2) 由柯西不等式可得：

### 谱半径

注意：**谱半径是特征根模长的最大值**

谱半径，

性质：

1. 齐性：

对于非负矩阵，，其中为最小行和，为最大行和

谱范不等式：，对一切方阵成立

证明：

令，

取特征向量：

令

由方阵范数条件4可知：

### 算子范数

定义：已知为上给定的向量范数，固定一个方阵，在上连续，令。

即当时，存在，，且

有以下性质：

(此时不一定为1)

且满足矩阵范数的4个性质。

这时是方阵范数，记为，称为导出的“算子范数”。

性质证明：

先证：

任

证性质3： 为取最大值对应的

证性质4：

常见的算子范数：

1. 导出 (列)
2. 导出 (行)
3. 导出 (最大奇值)

注：

一般

证明： ，记为

令长度

即证

由Hermite分解可知，存在酉阵Q：

全体奇值

由酉阵保长性质可知：

时，取最大值

所以时，

单位阵范数性质：

1. 对任一算子范数，必有

由定义

推论：若，则为非算子范数

1. 对于其它方阵范数，必有

谱范不等式:

例题：证明：

证明：**互逆矩阵特征根互逆**

令

所以上式等价于：

矩阵的奇值等于特征根的模长，所以

由算子范数的定义可知(记为矩阵范数，为向量范数):

由向量范数的定义可知

所以

所以

### 小范数定理

引理：若为上已知的方阵范数，P为可逆阵，

令

则为上一个新范数，满足条件1~4

证明条件3：

证明条件4：

**小范数定理**：

固定一个方阵与小正数，则存在一个方阵范数，使得：

证明：

由Jordan形可知：

令

令

推论：若，则存在小范数，使。

证明：令

则存在

**条件数定义：**(A可逆)

## 矩阵级数

设方阵序列，记，

若矩阵级数：

则部分和：

若每个级数，则

注：**若，则收敛**

引理：若，则收敛

即“绝对收敛，必收敛”

证明：只要证都绝对收敛

取M范数

等价性：

收敛

收敛

收敛

**牛曼公式：**

1. 时，(收敛)
2. ，
3. 若，则发散

证明：若，则收敛

，则存在小范数

收敛

则收敛(绝对收敛引理)

令

所以

注：若收敛，则

证明：，不收敛

反证法：若收敛，则

(矛盾)

## 特征根估计

### 估计方法

谱范不等式：

许尔估计：

，当且仅当A正规时**等号**成立

### 盖尔(Ger)圆盘

盖尔圆盘：以为圆心，为半径的圆

定义：方阵恰有n个盖尔圆盘，其中：

…

半径： 即每行除对角元之外元素绝对值之和

**盖尔定理：**

1. **全体特征根被所有盖尔圆盘所覆盖**，即：
2. 若p个圆盘相交(或相切)形成一个连通分支，且与其余n-p个圆盘分离，则中恰有p个根(含重复)。

特别，一个独立圆中恰有1个根。

应用：若矩阵A的盖尔盘比较难求，可以求的盖尔盘。因为相似矩阵特征根相同。

实方阵性质：

1. n个中心都在实轴上，不在实轴上的根都是虚根。
2. **实方阵的虚根成双出现**(共轭虚根)

例如：,

例题：若一4阶实方阵的盖尔圆盘中一个孤立，另外3个相交，则该矩阵至少有2个实根。

证明：

1. 首先，孤立的盖尔圆盘内必是一实根，因为虚根成对出现，若是虚根，必须得两个盖尔圆盘相交。
2. 其次，3个相交的盘内也必有一实根，否则应该是4个虚根

**对角占优阵**

若对角占优阵A适合条件：

行对角占优：

列对角占优：

推论：

若A对角占优，则**，即**，，**A为可逆阵**。

**与转置**:

1. 具有相同特征根：
2. 特征式相同：
3. 的(Ger)行半径恰是A的(Ger)列半径

## 矩阵函数

### 收敛定理

令解析函数收敛半径为，或者

将x=A代入，或

**收敛定理：**收敛半径为r，且

1. **时，收敛**
2. 时，发散
3. 时，待定

收敛半径求法：记

例：, p=1,收敛半径r = 1.

### 常见解析函数

3个解析函数，收敛半径都是

任方阵A代入解析函数：

若A为单阵，则对任一解析函数，必有

引入参数t(实数或复数)

### 幂等公式

公式：若，则

证明：

Eg: ，求

=

### 分块公式

公式：若，则，为解析函数

同样：

特别：

Eg ：,求

定理：若，则

注：若，

由上述定理可知：

同理

可逆公式：必有逆，且.

Eg : ,,用定义求,

**=**

### 根遗传公式**(不要求是单纯阵**)

公式：若，则的全体根

行列式：

Eg ：,

### Euler公式

1. (将(1)中A换为-A)

A为常数(t)也成立

Eg1 : ，求

解：

为单阵

### 幂0公式

幂0阵：

幂0公式：若，则

Eg : ，求

### 矩阵函数求法总结

1. 幂等阵：
2. 分块阵：
3. 单纯阵：
4. 幂0阵：

Eg: 已知矩阵A的最小式为，则可知A的广谱公式为：，通过构造法求，并计算。

解：

令

所以

令

所以，

令

所以

## 矩阵函数应用

### 基本定义与公式

定义：

令，其中是关于t的函数。

求导：

积分：

常数矩阵导数

公式：

### 应用

Eg1:已知，用导数求矩阵A

解：左边开导=

右边开导=

所以

Eg2 : 已知，表示出矩阵A

开导：

令t=0得：

### 求解齐次线性微分方程组

**有通解公式：**，为常数矩阵。

Pf：

原式

为什么可以调换？？？

定理： 有唯一解

Eg : 求解，且

解：令

所以原式可写为：

所以唯一解为

的值在之前的例题中求得

# 矩阵直积

## 定义与性质

### 定义

令，矩阵的张量积(直积)定义如下：

### 基本性质

基本性质：

分块公式(右进法则)：

但

转置公式：

，比较

吸收公式：

条件：有定义

推广：

特别：

逆公式：

若A、B都可逆，则

证明：

推广：

Eg :

1. 若A、B都是Hermite阵，则为Hermite阵
2. 若A、B都是幂等阵，则为幂等阵
3. 若A、B都是酉阵，则为酉阵

解：若,则

若，则

若，则

### 扩展性质

上三角性质：

若都是上三角阵，则是上三角阵

对角元为,对角元为，则对角元为

相似性质：

若，则

证明：

特征根定理：

，则

Eg :证明：

同样：

Eg: ，求