高等数理逻辑作业

无限集合初步

- 写出集合论公理的一阶描述.

  解答

  外延公理:

  $$\forall xy(\forall z(z\in x\leftrightarrow z\in y)\rightarrow x=y)$$

  空集公理:

  $$\exists x\forall y(y\notin x).$$

  偶对公理:

  $$\forall xy\exists u\forall z(z\in u\leftrightarrow z=x\vee z=y).$$

  全部

  并集公理:

  $$\forall x\exists u\forall y(y\in u\leftrightarrow(\exists z(z\in x\wedge y\in z))).$$

  子集公理:

  $$\forall x_1,\cdots,x_n\forall x\exists y\forall z(z\in y\leftrightarrow z\in x\wedge\phi).$$

  幂集公理:

  $$\forall x\exists y(\forall z(z\in y\leftrightarrow z\subseteq x)).$$

  无穷公理:

  $$\exists x(\emptyset\in x\wedge(\forall y(y\in x\rightarrow y^{+}\in x))).$$

  替换公理:

  $$\forall x_1,\cdots,x_n\forall x(\psi\rightarrow\exists y\forall z(z\in y\leftrightarrow\exists u\in x\phi[u,z])).$$

  正规公理:

  $$\forall x(x\neq\emptyset\rightarrow\exists y(y\in x\wedge y\cap x=\emptyset)).$$

  选择公理:

  $$\forall x(x\neq\emptyset\rightarrow\exists y(\phi_1\wedge\phi_2)).$$

  □

- 证明:可数符号表上有限长字符串集合是可数的.

  证明

  假设给定的可数符号表是集合 A ，则

  - 长度是 1 的字符串的集合 $S_1=A$.
  - 长度是 2 的字符串的集合 $S_2=\{ab|a,b\in A\}$.
  - ⋯

  每个 S_n 都是可数集合，这可数个可数集合的并集是可数的.

□

- 证明:ℝ∼ℝ×ℝ .
  证明
  可以仅考虑开区间 $(0,1)$ 内的实数，证明

$$(0,1)\times(0,1)\sim(0,1).$$

  可以按照以下方式构造双射:
  对于以下两个实数:

$$u=0\cdot a_0a_1a_2\cdots$$

$$v=0\cdot b_0b_1b_2\cdots$$

  对应于以下实数:

$$w=0\cdot a_0b_0a_1b_1a_2b_2\cdots$$

□

公理集合论初步

- 空集是函数.
  证明
  a 是一个函数，当且仅当以下性质成立:

$$\phi_1\wedge\phi_2.$$

  其中
  - ϕ_1 是公式 $\forall\, x(x\in a\to\exists\, uv(x=<u,v>))$.
  - ϕ_2 是公式 $\forall\, uvw(<u,v>\in a\wedge<u,w>\in a\to v=w)$.

  $\emptyset$ 是一个函数. 这是因为: 在上述定义中，两个蕴涵式

$$x\in a\to\exists\, uv(x=<u,v>),$$

$$<u,v>\in a\wedge<u,w>\in a\to v=w$$

  的前提不成立.

□

- 对于集合 x 及 y , 则它们的交集是集合.
  证明

$$a-b=\{x|x\in a\wedge x\notin b\}.$$

  这个集合是存在的，是由子集公理保证的:

$$a-b=\{x\in a|x\notin b\}.$$

  相应的集合是 a 、一阶公式是 $x\notin b$.

□

- 对于集合 x 及 y ,它们的卡氏积 $x\times y=\{<u,v>|u\in x,v\in y\}$ 是集合.

证明

对于集合 a 及 b ，乘积 $a\times b$ 的存在性可以由子集公理保证:

$$a\times b=\{w|w\in c\wedge\phi(w)\}.$$

其中:

- c 是集合: $\rho(\rho(x)\cup\rho(a\cup b))$.
- $\phi(w)$ 是公式: $\exists uv(u\in a\wedge v\in b\wedge w=<u,v>)$.

□

- 假设 A,B 是两个集合, 存在 A 到 B 的满射. 证明: 存在 B 到 A 的单射.

证明

假设 $f:A\to B$ 是满射，则可以定义 B 到 A 的映射 g :

对每个 $y\in B$ ，考虑集合

$$f^{-1}(\{y\})=\{x\in A|f(x)=y\},$$

因为 f 是满射，所以 $f^{-1}(\{y\})$ 不是空集，任取 $x\in f^{-1}(\{y\})$ 作为 y 的象，则可以定义 B 到 A 的映射 g .

g 是单射，这是因为当 $y_1\neq y_2\in B$ 时，$f^{-1}(\{y_1\})\cap f^{-1}(\{y_2\})=\emptyset$ ，所以 $g(y_1)\neq g(y_2)$.

□

公理集合论及自然数理论初步

- 证明: 存在无限集合 $\{0,\{1\},\{\{2\}\},\{\{\{3\}\}\},\cdots\}$.

证明

定义以下公式$\theta(x,y)$:

$$(x=0\to y=x)\wedge(\neg x=0\to\exists f(\phi_1\wedge\phi_2\wedge y=f(x)))$$

其中

- ϕ_1 是公式: $\mathrm{func}(f)\wedge 0\in\mathrm{dom}(f)\wedge f(0)=x\wedge\mathrm{dom}(f)=x^+$.
- ϕ_2 是公式: $\forall u(u\in\mathrm{dom}(f)\wedge u^+\in\mathrm{dom}(f)\to f(u^+)=\{f(u)\})$.

对任意的 $n\in\omega$ ，存在唯一一个函数 f 满足

$$\phi_1[n]\wedge\phi_2.$$

由此可知，对任意的 $n\in\omega$ ，存在唯一的 a 使得

$$\theta[n,a].$$

根据替换公理，可知存在集合

$$\mu=\{a|\exists n(n\in\omega\wedge\theta[n,a])\}.$$

这时

$$0,\{1\},\{\{2\}\},\{\{\{3\}\}\},\cdots\in\mu.$$

□

- 证明: $\forall mn(m\in\omega\wedge n\in\omega\wedge m^+=n^+\to m=n)$.
  证明
  假设 m,n 是两个自然数，满足 $m^+=n^+$，这时，根据定义可知:
  $$m\cup\{m\}=n\cup\{n\}.$$
  若 $m\neq n$，则
  - 从 $m\in m\cup\{m\}$ 可知 $m\in n\cup\{n\}$，因而 $m\in n$.
  - 从 $n\in n\cup\{n\}$ 可知 $n\in m\cup\{m\}$，因而 $n\in m$.

  这时集合 $x=\{m,n\}$ 不满足正规公理:
  $$x\neq\emptyset\to\exists y(y\in x\wedge y\cap x=\emptyset).$$
  这个矛盾表明 $m=n$.

□

命题逻辑的可靠性
证明命题逻辑具有可靠性.
证明

如下定义公理系统:

- 公理:
  - ϕ_1 : $A\to(B\to A)$.
  - ϕ_2 : $(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$.
  - ϕ_3 : $(\neg A\to B)\to((\neg A\to\neg B)\to A)$.
- 规则:

$$\frac{A,A\to B}{B}.$$

定义 $\Sigma\vdash C$ 为: 存在公式序列 $<A_1,A_2,\cdots,A_n>$使得

- 或者 $A_i\in\Gamma$;
- 或者 A_i 是公理;
- 或者存在 $j,k<i$，使得 A_k 是 $A_j\to A_i$.

且 A_n 是 C.
这时，对任意的赋值 v，都有
$$v(\phi_1)=1,\ v(\phi_2)=1\ v(\phi_3)=1.$$
同时
$$\text{当 } v(A)=1 \text{ 且 } v(A\to B)=1 \text{ ,时, } v(B)=1.$$
所以
$$\text{若 } \Sigma\vdash C \text{ , 则 } \Sigma\vDash C.$$
这是命题逻辑的可靠性质.

如下定义公理系统:

- 公理:

$$A \vdash A.$$

- 规则:
  - $\dfrac{\Sigma \vdash A}{\Sigma, \Sigma' \vdash A}$. 单调性
  - $\dfrac{\Sigma, \neg A \vdash B \text{ 且 } \Sigma, \neg A \vdash \neg B}{\Sigma \vdash A}$. 反证法
  - $\dfrac{\Sigma \vdash A \text{ 且 } \Sigma \vdash A \to B}{\Sigma \vdash B}$. 三段论
  - $\dfrac{\Sigma, A \vdash B}{\Sigma \vdash A \to B}$. 演绎定理
  - $\dfrac{\Sigma \vdash A \wedge B}{\Sigma \vdash A}$, $\dfrac{\Sigma \vdash A \wedge B}{\Sigma \vdash B}$.
  - $\dfrac{\Sigma \vdash A \text{ 且 } \Sigma \vdash B}{\Sigma \vdash A \wedge B}$.
  - $\dfrac{\Sigma, A \vdash C \text{ 且 } \Sigma, B \vdash C}{\Sigma, A \vee B \vdash C}$.
  - $\dfrac{\Sigma \vdash A}{\Sigma \vdash A \vee B}$, $\dfrac{\Sigma \vdash A}{\Sigma \vdash B \vee A}$.
  - $\dfrac{\Sigma \vdash A \leftrightarrow B \text{ 且 } \Sigma \vdash A}{\Sigma \vdash B}$, $\dfrac{\Sigma \vdash A \leftrightarrow B \text{ 且 } \Sigma \vdash B}{\Sigma \vdash A}$.
  - $\dfrac{\Sigma, A \vdash B \text{ 且 } \Sigma, B \vdash A}{\Sigma \vdash A \leftrightarrow B}$.

可以类似地验证可靠性.

□

命题逻辑完备性

对任意的极大协调集合 Σ 及公式 A, B , 有以下性质:

- $\neg A \in \Sigma$ 当且仅当 $A \notin \Sigma$.

  证明

  若 $\neg A \in \Sigma$ 则 $A \notin \Sigma$.

  若 $A \in \Sigma$, 则这时 $A, \neg A \in \Sigma$, 与 Σ 的协调性相矛盾.

  所以 $A \notin \Sigma$.

  若 $A \notin \Sigma$ 则 $\neg A \in \Sigma$.

  若 $\neg A \notin \Sigma$, 则根据极大协调集合的定义, 可知 $\Sigma \cup \{\neg A\}$ 是不协调的,

  $$\Sigma, \neg A \vdash 0,$$

  所以 $A \in \Sigma$, 这与 $A \notin \Sigma$ 相矛盾, 所以 $\neg A \in \Sigma$.

□

- $A \wedge B \in \Sigma$ 当且仅当 $A \in \Sigma$ 并且 $B \in \Sigma$.
  证明

  若 $A \wedge B \in \Sigma$ 则 $A \in \Sigma$ 并且 $B \in \Sigma$.
  因为

  $$A \wedge B \vdash A \text{且} A \wedge B \vdash B,$$

  所以当 $A \wedge B \in \Sigma$ 时,

  $$\Sigma \vdash A \text{且} \Sigma \vdash B.$$

  因为极大协调集合对 $\vdash$ 是封闭的, 所以

  $$A \in \Sigma \text{并且} B \in \Sigma.$$

  若 $A \in \Sigma$ 并且 $B \in \Sigma$ 则 $A \wedge B \in \Sigma$.
  若 $A \in \Sigma$ 并且 $B \in \Sigma$,则

  $$\Sigma \vdash A \text{且} \Sigma \vdash B,$$

  因而

  $$\Sigma \vdash A \wedge B,$$

  根据极大协调集合对 $\vdash$ 是封闭的,可知 $A \wedge B \in \Sigma$.

  □

- $A \vee B \in \Sigma$ 当且仅当 $A \in \Sigma$ 或者 $B \in \Sigma$.
- $A \rightarrow B \in \Sigma$ 当且仅当 $A \in \Sigma$ 蕴涵 $B \in \Sigma$.
- $A \leftrightarrow B \in \Sigma$ 当且仅当 $A \in \Sigma$ 等价于 $B \in \Sigma$.

命题逻辑公理独立性(1)

- ϕ_2 独立于 $\{\phi_1, \phi_3\}$.
  证明
  选择以下真值表验证:

$\rightarrow$	0	1	2	3	$\neg$
0	0	1	1	3	3
1	0	0	1	0	0
2	0	0	0	3	0
3	0	0	0	0	0

□

- ϕ_3 独立于 $\{\phi_1, \phi_2\}$.
  证明
  选择以下真值表验证:

$\rightarrow$	0	1	$\neg$
0	0	1	0

1	0	0	0

□

命题逻辑公理独立性(2)

- 单调性规则是独立的
  证明
  在单调规则之外的规则，前提都不增加，若不使用此规则，则以下推演关系是不可证的:

$$A,B\vdash A.$$

  由此可得独立性证明.

□

- 反证法规则是独立的
  证明
  对于任意的真值赋值 v 及公式 A ，定义

$$v(\neg A)=1.$$

  可以得到新的逻辑推出关系 $\vDash'$. 除反证法规则之外，其他规则都是可靠的. 使用反证法规则可得推演关系

$$\neg\neg p\vdash p.$$

  但

$$\neg\neg p\nvDash' p.$$

  由此可得独立性的证明.

□

- 演绎定理规则是独立的
  证明
  对于任意的真值赋值 v 及公式 A,B ，定义

$$v(A\to B)=\begin{cases}0, & 若 v(A)=1,\\ 1, & 否则.\end{cases}$$

  可以得到新的逻辑推出关系 $\vDash''$. 对于与 $\to$ 无关的规则，都是可靠的.
  以下考虑三段论规则:

$$\frac{\Sigma\vdash A \text{ 且 } \Sigma\vdash A\to B}{\Sigma\vdash B}.$$

  需证明:

$$\frac{\Sigma\vDash'' A \text{ 且 } \Sigma\vDash'' A\to B}{\Sigma\vDash'' B}.$$

  对任意的赋值 v ，若 $v(\Sigma)=1$ ，则从

$$\Sigma \vDash'' A \text{ 且 } \Sigma \vDash'' A \to B,$$

可知

$$v(A)=1\text{且}v(A \to B)=1,$$

这与定义相矛盾，所以 $v(\Sigma)=0$.
所以

若 $v(\Sigma)=1$ ，$\Sigma \vDash'' A$ ，且 $\Sigma \vDash'' A \to B$ ，则 $v(B)=1$.

是成立的.
因此

$$\Sigma \vDash'' B.$$

使用演绎定理规则，可得推演关系

$$p \vdash q \to p,$$

但

$$p \nvDash'' q \to p.$$

由此可得独立性的证明.

□

- ...
  证明
  同理可以证明其他规则是独立的.

  □

直觉主义逻辑

证明以下推导关系成立:

- $\neg(A \vee B) \vdash_c \neg A \wedge \neg B$.
  证明
  从 $C \to D \vdash_c \neg D \to \neg C$ 及 $\vdash_c A \to A \vee B$ ，可知

  $$\vdash_c \neg(A \vee B) \to \neg A.$$

  同理可知

  $$\vdash_c \neg(A \vee B) \to \neg B.$$

  所以 $\neg(A \vee B) \vdash_c \neg A \wedge \neg B$.

  □

- $\neg A \wedge \neg B \vdash_c \neg(A \vee B)$.

证明
$\neg A, \neg B, A \vdash_c 0$.
$\neg A, \neg B, B \vdash_c 0$.
所以 $\neg A, \neg B, A \vee B \vdash_c 0$.
所以集合

$$\{\neg A \wedge \neg B, A \vee B\}$$

不是 $\vdash_c -$ 协调的.
由 $(\neg +)$ 可知 $\neg A \wedge \neg B \vdash_c \neg (A \vee B)$.

□

- $A \vee B \vdash_c \neg (\neg A \wedge \neg B)$.
  证明
  集合

$$\{\neg A \wedge \neg B, A \vee B\}$$

  不是 $\vdash_c -$ 协调的.
  所以 $A \vee B \vdash_c \neg (\neg A \wedge \neg B)$.

□

- $\neg A \vee \neg B \vdash_c \neg (A \wedge B)$.
  证明
  集合

$$\{A \wedge B, \neg A \vee \neg B\}$$

  不是 $\vdash_c -$ 协调的.
  所以 $\neg A \vee \neg B \vdash_c \neg (A \wedge B)$.

□

证明以下推导关系不成立:

- $\neg A \to B \vdash_c \neg B \to A$
  证明
  假设 A, B 分别是命题变元 p, q ，构造模型 $\mathscr{K} = <V, R>$，使得

$$V = \{v, w\}, R = \{(v,v),(v,w),(w,w)\}.$$

  其中
  - v 使得 $v(p) = 0$ 及 $v(q) = 0$ ，
  - w 使得 $w(p) = 1$ 及 $v(q) = 0$.

  这时 $q^{\mathscr{K}, v} = 0$ ， $q^{\mathscr{K}, w} = 0$ ，所以

$$(\neg q)^{\mathscr{K}, v} = 1.$$

  但是 $p^{\mathscr{K}, v} = 0$ ，所以

$$(\neg q \to p)^{\mathscr{K},v} = 0.$$

另一方面,

$$(\neg p)^{\mathscr{K},v} = 0, (\neg p)^{\mathscr{K},w} = 0,$$

所以

$$(\neg p \to q)^{\mathscr{K},v} = 1.$$

即在模型 $\mathscr{K}$ 的第一层, 左边取 1 而右边取 0 . 因而上述公式是不永真的, 因而是不可证的.

□

- $\vdash_c A \vee \neg A$

  证明

  假设 A 是命题变元 p . 构造模型 $\mathscr{K} = <V, R>$, 使得

  $$V = \{v, w\}, R = \{(v,v),(v,w),(w,w)\}.$$

  其中
  - v 使得 $v(p) = 0$,
  - w 使得 $w(p) = 1$.

  这时 $p^{\mathscr{K},v} = 0$, 但 $(\neg p)^{\mathscr{K},v} = 0$, 所以

  $$(p \vee \neg p)^{\mathscr{K},v} = 0.$$

□

- $\neg(A \to \neg B) \vdash_c A \wedge B$

  证明

  假设 A, B 分别是命题变元 p, q , 构造模型 $\mathscr{K} = <V, R>$, 使得

  $$V = \{v_1, v_2, v_3\}, R = \{(v_1,v_1),(v_2,v_2),(v_3,v_3),(v_1,v_2),(v_1,v_3)\}.$$

  其中
  - $v_1(p) = 0$, $v_1(q) = 0$,
  - $v_2(p) = 1$, $v_2(q) = 0$,
  - $v_3(p) = 0$, $v_3(q) = 1$.

□

假设 Σ 是命题逻辑公式集合, A 是命题逻辑公式,则

$$\neg \Sigma \vdash \neg A \qquad\qquad \neg \Sigma \vdash_c \neg A$$

其中 $\neg \Sigma = \{\neg B \mid B \in \Sigma\}$.

证明

以下证明:

- $\neg\neg\neg A \vdash_c \neg A$.

- 若 $\Sigma \vdash A$ ，则 $\neg\neg\Sigma \vdash_c \neg\neg A$.

则可知以下条件是等价的:

- $\neg\Sigma \vdash \neg A$.
- $\neg\neg\neg\Sigma \vdash_c \neg\neg\neg A$.
- $\neg\Sigma \vdash_c \neg A$.

$\neg\neg\neg A \vdash_c \neg A$. 因为 $A \vdash_c \neg\neg A$ ，所以

$$\{\neg\neg\neg A, A\}$$

是不相容的，因而 $\neg\neg\neg A \vdash_c \neg A$.

若 $\Sigma \vdash A$ ，则 $\neg\neg\Sigma \vdash_c \neg\neg A$. 因为 $\Sigma \vdash A$ ，所以存在一个 $\vdash-$ 推演，将出现的所有公式 C 都换为 $\neg\neg C$ ，以下证明这样得到一个 $\vdash_c-$ 推演.
以应用 $(\neg -)$ 为例.
这时有

$$\frac{\Gamma, \neg E \vdash F \text{且} \Gamma, \neg E \vdash \neg F}{\Gamma \vdash E},$$

被转换为

$$\frac{\neg\neg\Gamma, \neg\neg\neg E \vdash \neg\neg F \text{且} \neg\neg\Gamma, \neg\neg\neg E \vdash \neg\neg\neg F}{\neg\neg\Gamma \vdash \neg\neg E},$$

将前提推演序列中的 $\neg\neg\neg E$ 换为 $\neg E$ ，则可以由 $(\neg +)$ 得到

$$\neg\neg\Gamma \vdash \neg\neg E.$$

□

模态命题逻辑

- 证明以下推演关系:
  $\vdash_T (\Box(A \to B) \wedge \Box(B \to A)) \to (\Box A \leftrightarrow \Box B)$.
  证明
  假设 Σ 是 $\{\Box(A \to B), \Box A\}$.
  从 $\Sigma \vdash_T \Box(A \to B)$ 及 $\Sigma \vdash_T \Box A$ ，根据 $T-$ 推演规则，可知 $\Sigma \vdash_T \Box B$.
  所以 $\Box(A \to B) \vdash_T \Box A \to \Box B$.
  同理可知 $\Box(B \to A) \vdash_T \Box B \to \Box A$.
  由此可知 $\vdash_T (\Box(A \to B) \wedge \Box(B \to A)) \to (\Box A \leftrightarrow \Box B)$

□

  $\vdash_T \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$.
  证明
  $\Box(A \wedge B) \vdash_T (\Box A \wedge \Box B)$:
    - $A \wedge B \vdash A$

- ◦ $\Box(A\wedge B)\vdash\Box A$ （性质）
- ◦ $\Box(A\wedge B)\vdash\Box B$ （同理）
- ◦ $\Box(A\wedge B)\vdash_T(\Box A\wedge\Box B)$

$\Box A\wedge\Box B\vdash_T\Box(A\wedge B)$

- ◦ $\vdash A\to(B\to A\wedge B)$
- ◦ $\vdash_T\Box(A\to(B\to A\wedge B))$ （规则）
- ◦ $\vdash_T\Box A\to\Box(B\to A\wedge B)$ （性质）
- ◦ $\Box A\vdash_T\Box(B\to A\wedge B)$ （性质）
- ◦ $\Box A\vdash_T\Box B\to\Box(A\wedge B)$
- ◦ $\Box A,\Box B\vdash_T\Box(A\wedge B)$ （性质）

□

$\vdash_T\Diamond(A\vee B)\leftrightarrow(\Diamond A\vee\Diamond B)$.

证明

- ◦ $\vdash_T\Box(\neg A\wedge\neg B)\leftrightarrow(\Box\neg A\wedge\Box\neg B)$ （已证）
- ◦ $\vdash_T\neg\Box(\neg A\wedge\neg B)\leftrightarrow\neg(\Box\neg A\wedge\Box\neg B)$ （性质）
- ◦ $\vdash_T\neg\Box\neg(A\vee B)\leftrightarrow(\neg\Box\neg A\vee\neg\Box\neg B)$ （性质）
- ◦ $\vdash_T\Diamond(A\vee B)\leftrightarrow(\Diamond A\vee\Diamond B)$ （定义）

□

- 证明 S_4- 可靠性.

证明

只需证明

$$\frac{\Sigma\vDash_{S_4}\Box A}{\Sigma\vDash_{S_4}\Box\Box A}.$$

对任意 $\mathfrak{M}=<V,R>\in\mathscr{K}_{S_4}$ 及 $v\in V$，若 $\Sigma^{\mathfrak{M},v}=1$，则从 $\Sigma\vDash_{S_4}\Box A$ 可知：

$$\Box A^{\mathfrak{M},v}=1,$$

因而对任意的 $w:vRw$，都有

$$A^{\mathfrak{M},w}=1. \tag{1}$$

根据定义,

$$\Box\Box A^{\mathfrak{M},v}=1$$

当且仅当

$$\text{对任意的 } v_1:vRv_1\text{，都有 }\Box A^{\mathfrak{M},v_1}=1.$$

当且仅当

$$\text{对任意的}v_1,v_2:vRv_1,v_1Rv_2,\text{都有 }A^{\mathfrak{M},v_2}=1$$

但根据传递性可知 vRv_2 ，所以由（1）成立可知（2）成立.
所以 $\Sigma \vDash_{S_4} \Box\Box A$.

$\Box$

- 证明 S_5- 可靠性.

证明
只需证明

$$\frac{\Sigma \vDash_{S_5} \Diamond A}{\Sigma \vDash_{S_5} \Box\Diamond A}.$$

对任意 $\mathfrak{M} = <V, R> \in \mathscr{K}_{s_5}$ 及 $v \in V$ ，若 $\Sigma^{\mathfrak{M},v} = 1$ ，则从 $\Sigma \vDash_{S_5} \Diamond A$ 可知：

$$\Diamond A^{\mathfrak{M},v} = 1,$$

因而存在 $w: vRw$ ，都有

$$A^{\mathfrak{M},w} = 1. \tag{1}$$

根据定义,

$$\Box\Diamond A^{\mathfrak{M},v} = 1$$

当且仅当

$$\text{对任意的 } v_1: vRv_1 \text{ ，都有 } \Diamond A^{\mathfrak{M},v_1} = 1.$$

当且仅当

$$\text{对任意的} v_1: vRv_1, \text{存在} v_2: v_1Rv_2, \text{使得 } A^{\mathfrak{M},v_2} = 1 \tag{2}$$

这时 wRv_2 成立 所以由（1）成立可知（2）成立.
所以 $\Sigma \vDash_{S_5} \Box\Diamond A$.

$\Box$

谓词逻辑推演规则

以下规则是可靠的:

$\forall$ $\forall$ $\exists$ $\exists$

证明
以下证明（$\forall$: 左规则）是可靠的，其他规则的可靠性可以类似证明.
需要证明以下事实:

$$\frac{\Sigma, A_t^x \vDash B}{\Sigma, \forall xA \vDash B}.$$

对任意的模型 $\mathfrak{M}$ 及一个赋值，当 $\mathfrak{M} \vDash \Sigma, \forall xA$ 时，从 $\mathfrak{M} \vDash \forall xA$ 可知，对任意的 $a \in |\mathfrak{M}|$ ，都有

$$\mathfrak{M} \vDash A[a].$$

而每个项 t 在 $\mathfrak{M}$ 中代表一个具体的值，所以 $\mathfrak{M}\vDash\Sigma,A_t^x$，因而

$$\mathfrak{M}\vDash B.$$

□

谓词逻辑完备性质

已知 Σ 是公式集合, A 是公式, 常元 c 不在 $\Sigma\cup\{A\}$ 中出现, 证明:

$$\text{若 }\Sigma\vdash A_c^x\text{, 则 }\Sigma\vdash\forall xA.$$

证明

根据谓词逻辑的完备性质，只需证明 $\Sigma\vDash\forall xA$，即

$$\text{对于任意的模型 }\mathfrak{M}\text{，当 }\mathfrak{M}\vDash\Sigma\text{ 时，}\mathfrak{M}\vDash\forall xA.$$

因为常元 c 不出现在 $\Sigma\cup\{A\}$ 中，所以任意改变 c 在 $\mathfrak{M}$ 中的取值，都不影响 $\Sigma\cup\{A\}$ 的真值.

假设 c 的取值是 a，从 $\Sigma\vdash A_c^x$ 及可靠性, 可知

$$\mathfrak{M}\vDash A[a].$$

因为 a 是任意的，所以 $\mathfrak{M}\vDash\forall xA.$

□

已知 $\Sigma_n\ (n=0,1,2,\cdots)$ 是协调公式集合,且

$$\Sigma_0\subseteq\Sigma_1\subseteq\Sigma_1\subseteq\cdots$$

证明这些公式集合的并集是协调的.

证明

假设 Γ 是公式集合

$$\Sigma_0\cup\Sigma_1\cup\Sigma_1\cup\cdots$$

若 Γ 不协调，则 $\Gamma\vdash 0$. 因为每个推演仅涉及有限多个公式，所以存在 $A_1,A_2,\cdots,A_m\in\Gamma$，使得

$$A_1,A_2,\cdots,A_m\vdash 0.$$

根据 Γ 的定义，可以假设 $A_i\in\Sigma_{k_i}$.

假设 $l=\max\{k_1,k_2,\cdots,k_m\}$，则 $A_1,A_2,\cdots,A_m\in\Sigma_l$. 这与 Σ_l 的协调性相矛盾.

所以 Γ 是协调的.

□

实闭域的判定性质

语言 $\mathscr{L}$ 的理论 T 具有量词消去性质, 当且仅当

对 $\mathscr{L}$ 的任意 k 个原子公式或者原子公式的否定

$$\phi_i(x, x_1, x_2, \cdots, x_n),\ i=1,2,\cdots,k,$$

存在 $\mathscr{L}$ 的一个开公式 $\psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ，使得

$$T \vDash \forall x_1, x_2, \cdots, x_n(\exists x(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_k) \leftrightarrow \psi(x_1, x_2, \cdots, x_n)).$$

证明
(结构归纳法)

假设已证明以下结论 (*):
对任意的开公式 θ ，存在开公式 θ' ，使得

$$T \vDash \exists x \theta \leftrightarrow \theta'.$$

对任意的开公式 ρ 因为

$$\forall x \rho \text{ 等值于} \neg \exists x \neg \rho,$$

而 $\neg \rho$ 是一个开公式，所以存在开公式 ρ' 使得

$$T \vDash \exists x \neg \rho \leftrightarrow \rho',\ T \vDash \forall x \rho \leftrightarrow \neg \rho',$$

这里的 $\neg \rho'$ 是一个开公式.
由此可知，每个前束范式都等值于一个开公式.

对于结论 (*)，可以将开公式 θ 写为

$$\theta_1 \vee \theta_2 \vee \cdots \vee \theta_k,$$

其中每个 θ_i 是一些原子公式或者原子公式的否定的合取式. 这时

$$\vDash \exists x(\theta_1 \vee \theta_2 \vee \cdots \vee \theta_k) \leftrightarrow (\exists x \theta_1 \vee \exists x \theta_2 \vee \cdots \vee \exists x \theta_k),$$

所以，只需对上述 θ_i 这一类公式考察量词消去性质.

□

RCF$\vDash \forall xy(x<y \wedge f(x)f(y)<0 \rightarrow \exists z(x<z \wedge z<y \wedge f(z)=0))$. (介值定理)
证明
在实闭域内，每个多项式可以分解为 1 次及 2 次多项式的乘积，可以假设这些多项式的最高项系数都是 1 .
2 次多项式 x^2+ax+b 可以写为

$$(x+\frac{a}{2})^2+(b-\frac{a^2}{4}),$$

- 若 $(b-\frac{a^2}{4}) \leq 0$ ，则 x^2+ax+b 可以分解为 1 次多项式的乘积.
- 若 $(b-\frac{a^2}{4})>0$ ，则 RCF$\vDash x^2+ax+b>0$.

所以，当 $f(x)$ 的取值在一个区间 $[a,b]$ 内改变符号时，$f(x)$ 一定有一个 1 次因子，它在这个区间内取值改变符号，该1 次因子在这个区间内有零点，因而 f 在这个区间内有零点.

□

RCF$\vDash \forall xy(x<y \wedge f(x)=0 \wedge f(y)=0 \to \exists z(x<z \wedge z<y \wedge f'(z)=0))$. (Rolle 定理)
证明
(由介值定理证明 Rolle 定理)
每个多项式最多有有限个零点，当 $f(a)=f(b)=0$ 时，可以假设在区间 $[a,b]$ 内，f 不再有其他零点.
所以 f 在区间 $[a,b]$ 内不可能是单调的，因而存在 $u<v\in[a,b]$ 使得 $f'(u)f'(v)<0$.
对于多项式 f' ，根据介值定理可知：存在 $c\in[a,b]$ 使得 $f'(c)=0$.

□

一阶逻辑的不可判定性质
写出以下 Turing 机对应的一阶语句:

$$\{q_0 1 R q_0, q_0 0 R q_2, q_1 1 0 q_2, q_1 0 R q_1\}$$

解答
这些转换规则对应以下语句:
$q_0 1 R q_0$:

$$\forall xy(R_0(x,f_1(y)) \to R_0(f_1(x),y))$$

$q_0 0 R q_2$:

$$\forall xy(R_0(x,f_0(y)) \to R_2(f_0(x),y))$$

$q_1 1 0 q_2$:

$$\forall xy(R_1(f_0(x),f_1(y)) \to R_2(x,f_0(f_0(y))))$$

$$\forall xy(R_1(f_1(x),f_1(y)) \to R_2(x,f_1(f_0(y))))$$

$q_1 0 R q_1$:

$$\forall xy(R_1(x,f_0(y)) \to R_1(f_0(x),y))$$

□