

数学建模模型算法精讲课——

蒙特卡罗法

—— 江北老师

成大事不在于力量多少，
而在于能坚持多久！

非线性规划

- 模型引出
- 模型原理
- 例题及代码讲解





➤ 我们都知道，圆周率 π 是个无理数，那么有什么方法可以去算圆周率吗？

- 圆的面积 $=\pi \times r^2$ ，那如果我们能求得面积的值，自然也就求得 π 的近似值
- 那么该怎么求圆的面积呢？

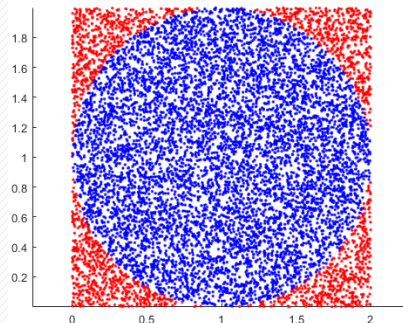
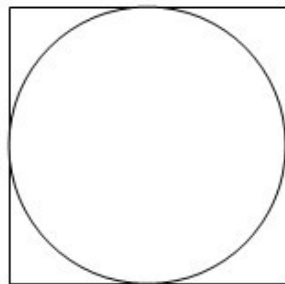
一个半径为1的圆，其外切正方形面积易知为4

若在正方形内随机撒大量的点，有些落在圆内，有些落在圆外

- 统计意义上：

$$\frac{\text{圆内点数}}{\text{总点数}} = \frac{\text{圆面积}}{\text{正方形面积}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\pi = 4 \times \frac{\text{圆内点数}}{\text{总点数}}$$



➤ 蒙特卡罗法

提出：蒙特卡罗方法于20世纪40年代美国在第二次世界大战中研制原子弹的“曼哈顿计划”的成员S.M. 乌拉姆和J. 冯·诺依曼首先提出。数学家冯·诺依曼用驰名世界的都城—摩纳哥的Monte Carlo—来命名这种方法，为它蒙上了一层神秘色彩。在这之前，蒙特卡洛方法就已经存在。1777年，发过Buffon提出用投针试验的方法求圆周率，这被认为是蒙特卡罗方法的起源。



定义：蒙特卡罗法又称统计模拟法，是一种随机模拟方法，以**概率和统计理论方法为基础**的一种计算方法，是使用随机数（或更常见伪随机数）来解决很多计算问题的方法。将所求解的**问题同一定的概率模型**相联系，用电子计算机实现统计模拟或抽样，以获得问题的**近似解**。为象征性地表明这一方法的概率统计特征，故借用都城蒙特卡罗命名。

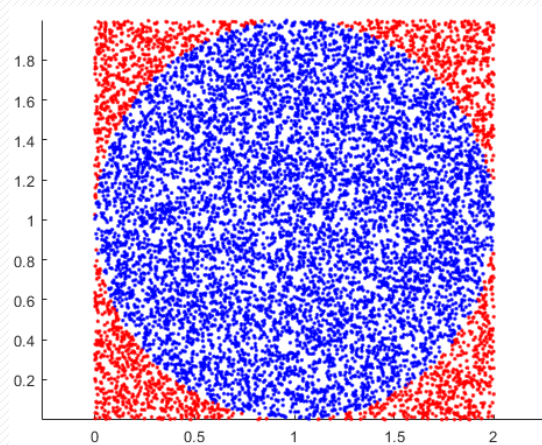
原理：由大数定理可知，当样本容量足够大时，事件的**发生频率即为其概率**。

• 注意：蒙特卡洛不是一种算法，准确的来说只是一种思想，或者是一种方法，只要**求解的问题与概率模型有关联**，我们就可以采用这种方法，从数学建模的角度来看，蒙特卡洛是没有通用的代码的，每个问题对应的代码都是不同的。



➤ 圆周率问题

```
clc;clear
% 参数初始化: 投放10000个点, 圆半径为1, 圆心坐标 (1, 1)
% 初始时还未投放点, 有0个点在圆内
p = 10000; r = 1; x0 = 1; y0 = 1; n = 0;
hold on % 保持绘图窗口, 多次绘图
for i = 1:p % 对于要投放的总共p个点
% rand函数产生在 (0, 1) 之间的随机数; rand函数还有其他多种形式
px = rand*2; % 随机生成该点的横坐标
py = rand*2; % 随机生成该点的纵坐标
% 若该点在圆内, 则颜色设为蓝色, 变量n加一; 在圆外则设为红色
if (px-1)^2 + (py-1)^2 < 1 % 横纵坐标的平方和小于半径, 则在圆内
plot (px, py, '.', 'Color', "b");
n = n+1;
else
plot (px, py, '.', 'Color', "r");
end
end
axis equal % 绘图时横纵坐标单位长度相同, 便于观察圆
s = (n/p)*4;
pi0 = s;
```



命令行窗口

```
pi0 =  
  
3.1392
```

```
fx >>
```



➤ 三门问题

你参加一档电视节目，节目组提供了A、B、C三扇门，主持人告诉你，其中一扇门后边有辆汽车，其他两扇门后面是一头山羊，你可以选择一扇门打开获得门后的东西。

假如你选择了B们，这时，主持人打开了C门，让你看到C门后是只山羊，然后问你要不要**改选A门**？（你想要汽车）



- 一般人的直觉：

在三个门，参赛者选一个，主持人排除掉一个错误的，还剩一个。那么此时的命题变为：

- ✓ 条件：两个门里，一个是汽车，一个是山羊，任选一个。
- ✓ 问题：交换选择是否能提高胜率？
- ✓ 答案：不能，二选一的问题，选哪个门都是50%的胜率。

- 那真的是这样吗？我们可以用**蒙特卡洛方法**试一下。



➤ 三门问题代码

```
%1、在成功的条件下的概率
n = 100000; % n代表蒙特卡罗模拟重复次数
a = 0; % a表示不改变主意时能赢得汽车的次数
b = 0; % b表示改变主意时能赢得汽车的次数
for i= 1 : n % 开始模拟n次
    x = randi([1, 3]); % 随机生成一个1-3之间的整数x表示汽车出现在第x扇门后
    y = randi([1, 3]); % 随机生成一个1-3之间的整数y表示自己选的门
    % 下面分为两种情况讨论: x=y和x≠y
    if x == y % 如果x和y相同, 那么我们只有不改变主意时才能赢
        a = a + 1; b = b + 0;
    else % x ≠ y, 如果x和y不同, 那么我们只有改变主意时才能赢
        a = a + 0; b = b +1;
    end
end
disp(['蒙特卡罗方法得到的不改变主意时的获奖概率为: ', num2str(a/n)]);
disp(['蒙特卡罗方法得到的改变主意时的获奖概率为: ', num2str(b/n)]);
```



➤ 三门问题代码

%%2、考虑失败情况的代码(无条件概率)

```
n = 100000; % n代表蒙特卡罗模拟重复次数
```

```
a = 0; % a表示不改变主意时能赢得汽车的次数
```

```
b = 0; % b表示改变主意时能赢得汽车的次数
```

```
c = 0; % c表示没有获奖的次数
```

```
for i= 1 : n % 开始模拟n次
```

```
x = randi([1, 3]); % 随机生成一个1-3之间的整数x表示汽车出现在第x扇门后
```

```
y = randi([1, 3]); % 随机生成一个1-3之间的整数y表示自己选的门
```

```
change = randi([0, 1]); % change =0 不改变主意, change = 1 改变主意
```




➤ 三门问题代码

```
if x == y % 如果x和y相同，那么我们只有不改变主意时才能赢
if change == 0 % 不改变主意
a = a + 1;
else % 改变了主意
c = c+1;
end
else % x ≠ y，如果x和y不同，那么我们只有改变主意时才能赢
if change == 0 % 不改变主意
c = c + 1;
else % 改变了主意
b = b + 1;
end
end
end
disp(['蒙特卡罗方法得到的不改变主意时的获奖概率为：', num2str(a/n)]);
disp(['蒙特卡罗方法得到的改变主意时的获奖概率为：', num2str(b/n)]);
disp(['蒙特卡罗方法得到的没有获奖的概率为：', num2str(c/n)]);
```

欢迎关注数模加油站

THANKS



有兴趣的小伙伴可以关注微信公众号或加入建模交流群获取更多免费资料

公众号：数模加油站

交流群：709718660