

数学建模模型算法精讲课——

最小生成树

—— 江北老师

放弃太早，
就永远不会知道自己将会错过什么

最小生成树

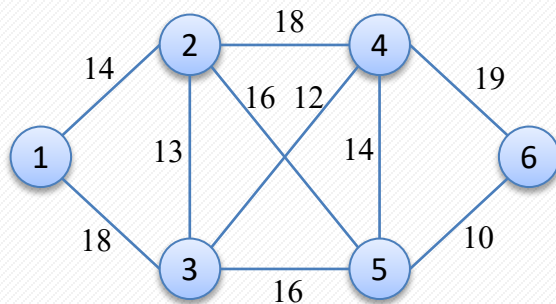
- 算法引出及概念
- 求解方法
- 典型例题
- 代码求解





➤ A国有六个城市之间一直没有通信线路，现在国家想使这六个城市通信连通

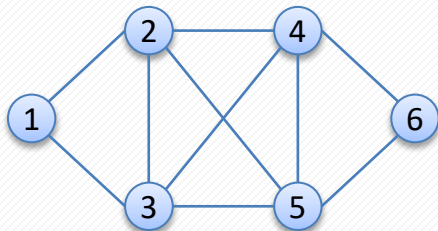
- 六个城市，相互之间能够建设通信线路的线路路径距离已测
- 要求以**最小的成本**建设通信线路，使得这六个城市之间能够互相通信
- 即从任意顶点出发，都可以到达其他顶点，且线缆**总长度最小**



- 该国家的通信线缆该怎么修建，和最短路径有什么不同？



➤ 关于树的一些概念



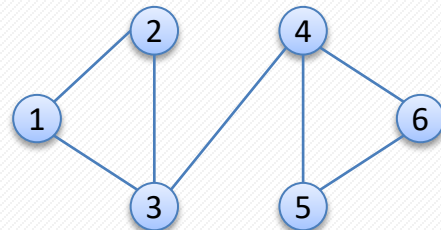
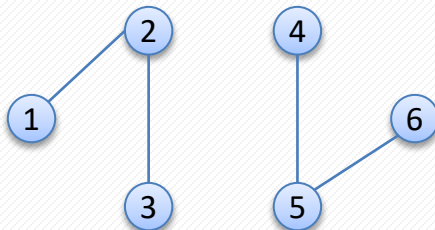
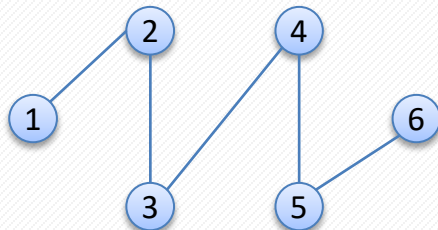
- 连通图 (Connected Graph): 指无向图中**任意两个顶点之间都有路径相连**。也就是说, 在一个连通图中, 任意两个顶点之间都可以通过图中的边相连而相互到达。左图即是一个连通图。

- 树 (Tree): 一种**无向无环**连通图, 它由 n 个节点和 $n-1$ 条边组成。树具有很多重要的性质, 比如任意两个节点之间都有**唯一的路径**、树中任意两个节点之间的**路径长度唯一**等等。

- 生成树 (Spanning Tree): 指一个连通图的一**棵包含所有顶点的树**, 它是由原图的所有顶点和边所组成的子图, 且这些边构成一个树。一个图, 可能有多个生成树。

- 最小生成树 (Minimum Spanning Tree, MST): 指一个连通无向图的一棵生成树, 使得所有**生成树边的权值之和最小**。一个图的所有生成树中, 可能有多个最小生成树。

✓ 最短路径是指定起点终点, **两点间最短路径**。最小生成树是**全局最短**, 两两连通, 总路径最短





➤ 最小生成树的求解

- Kruskal(克鲁斯卡尔)算法 (适合**点多边少**的图):

- ✓ 1、把图G中所有边全部去掉, 得到所有单独的顶点V构成的图T
- ✓ 2、从图G中取出当前权值最小的边, 如果该边加入T的边集合后T不形成回路, 则加入T, 否则舍弃
- ✓ 3、重复第二步, 直到T中有 $n-1$ 条边 (n 是定点数)

第二步若遇到两条权值相同的最小权值边, 任选一条即可, 所以最小生成树可能不唯一

- Prim (普里姆算法)算法 (适合**边多点少**的图):

- ✓ 1、设一空图U, 首先将图G中任意一顶点取出加入U中
- ✓ 2、从图U外并与图U连接的边中, 找到权值最小的边和该边连接的顶点并入图U中
- ✓ 3、重复第二步, 直到U中包含了所有顶点

第二步若遇到两条权值相同的最小权值边, 任选一条即可, 所以最小生成树可能不唯一

- MATLAB的minspantree函数求解最小生成树

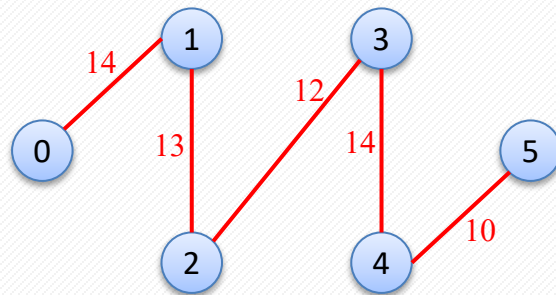
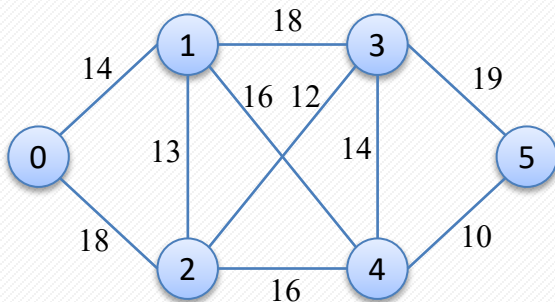


➤ Kruskal算法 (适合点多边少的图) :

- ✓ 1、把图G中所有边全部去掉，得到所有单独的顶点V构成的图T
- ✓ 2、从图G中取出当前权值最小的边，如果该边加入T的边集合后T不形成回路，则加入T，否则舍弃
- ✓ 3、重复第二步，直到T中有n-1条边 (n是定点数)

第二步若遇到两条权值相同的最小权值边，任选一条即可，所以最小生成树可能不唯一

➤ 我们来为A国铺设电缆



最小线缆长度为: $14+13+12+14+10=63$

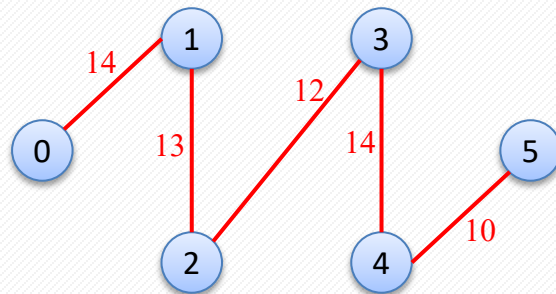
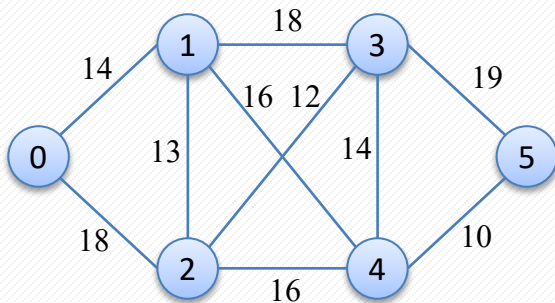


➤ Prim算法（适合边多点少的图）：

- ✓ 1、设一空图U，首先将图G中任意一顶点取出加入U中
- ✓ 2、从图U外并与图U连接的边中，找到权值最小的边和该边连接的顶点并入图U中
- ✓ 3、重复第二步，直到U中包含了所有顶点

第二步若遇到两条权值相同的最小权值边，任选一条即可，所以最小生成树可能不唯一

➤ 我们来为A国铺设电缆



最小线缆长度为：14+13+12+14+10=63



➤ MATLAB的minspantree函数求解最小生成树

```
clc,clear
% matlab中,不存在的边设置成0
% 6个顶点,初始化定义6x6的全零矩阵作为邻接矩阵
a = zeros(6);

% 注意,最小生成树是针对无向图的,每条边权重只需要设一次。1到2和2到1是同一条边
% 因此,可仅使用邻接矩阵的上三角矩阵来构造图G
a(1,[2 3])=[14 18]; % 顶点1到其他顶点的边的权重
a(2,[3:5])=[13 18 16]; % 顶点2到顶点3、顶点4、顶点5的边的权重
a(3,[4 5])=[12 16]; % 同上。因为写过1到3,和2到3的边的权重,无需重复设
a(4,[5 6])=[14 19];
a(5,6)=10;

% graph在图论课程中讲过
s=cellstr(strcat('城市',int2str([1:6]')));
G=graph(a,s,'upper'); % 仅使用 A 的上三角矩阵来构造图G。
p=plot(G,'EdgeLabel',G.Edges.Weight); % 绘制出图G

% minspantree函数求解最小生成树
% T=minspantree(G)是默认使用Prim算法
T=minspantree(G,'Method','sparse'); % 可指定使用Kruskal算法

L = sum(T.Edges.Weight) % 对最小生成树的边的权重求和
highlight(p,T,"EdgeColor","red",'LineWidth',2.5)
```


欢迎关注数模加油站

THANKS



有兴趣的小伙伴可以关注微信公众号或加入建模交流群获取更多免费资料

公众号：数模加油站

交流群：709718660