数学建模模型算法精讲课——

熵权法

—— 江北老师

既然目标是地平线，

留给世界的只能是背影

TOPSIS法

- 模型引出
- 模型原理
- 典型例题
- 相关代码

问题的提出

- 根据前几节课我们可以知道，评价类模型最后根据各指标进行打分时因各指标的重要性不同往往需要权重，在层次分析法和TOPSIS法里权重都是**主观得到**的（主观评价、查文献等），那有没有更为客观的方法得到权重呢?

我们来继续帮明星K找对象

候选人	颜值	脾气（争吵次数）	身高	体重
A	9	10	165	120
B	8	7	166	70
C	6	3	164	90

- 观察候选人的数据我们可以发现，A、B、C三人的身高是**极为接近**的，那么对于找对象来说这个指标是不是就不重要了呢?
- 而对于体重这个指标来说，三人**相差较大**，那么找对象是不是就要多考虑下这个指标?

熵权法——模型引出

MATH 数模加油站

➢ 基本概念

- 这里我们引入信息熵的概念，按照信息论基本原理的解释，信息是系统有序程度的一个度量，熵是系统无序程度的一个度量
- 可以用熵值判断某个指标的离散程度，**指标的离散程度越大，该指标对综合评价的影响越大**

➢ 我们来继续帮明星K找对象

候选人	颜值	脾气（争吵次数）	身高	体重
A	9	10	165	120
B	8	7	166	70
C	6	3	164	90

- 对于身高这个指标，离散程度比较小，对综合评价的影响就越小。
- 而对于体重这个指标来说，离散程度比较大，所以在综合评价时权重就越大。

熵权法——基本原理

➢ 基本概念

- 熵权法，物理学名词，按照信息论基本原理的解释，信息是系统有序程度的一个度量，熵是系统无序程度的一个度量；根据信息熵的定义，对于某项指标，可以用熵值来判断某个指标的离散程度，其信息熵值越小，指标的离散程度越大，该指标对综合评价的影响（即权重）就越大，**如果某项指标的值全部相等，则该指标在综合评价中不起作用。**因此，可利用信息熵这个工具，计算出各个指标的权重，为多指标综合评价提供依据。
- 熵权法是一种**客观的赋权方法**，它可以靠数据本身得出权重。
- 依据的原理：**指标的变异程度越小，所反映的信息量也越少，其对应的权值也应该越低。**

➢ 基本步骤

- 数据标准化

  对标准化的矩阵记为Z，则 $z_{ij}=\frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2}}$ 如果x_{ij}存在负数，则标准矩阵 $\tilde{Z}=\frac{x-min\{x_{1j},x_{2j},\ldots,x_{nj}\}}{max\{x_{1j},x_{2j},\ldots,x_{nj}\}-min\{x_{1j},x_{2j},\ldots,x_{nj}\}}$
- 计算第j项指标下第i个样本所占的比重 $p_{ij}=\frac{\tilde{z}_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} \tilde{z}_{ij}}$
- 计算熵权 $e_j=-\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\ln(p_{ij})\ (j=1,2,\ldots,m)$ $d_j=1-e_j$ $W_j=\frac{d_j}{\sum_{j=1}^{m} d_j}$

熵权法——典型例题

- 我们继续帮明星K选对象

在TOPSIS那一章里我们已经得到了正向化矩阵

候选人	颜值	脾气（争吵次数）	身高	体重
A	9	0	0	0
B	8	3	0.9	0.5
C	6	7	0.2	1

- **正向矩阵标准化**

因为指标中无负数，采用$z_{ij}=\frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2}}$进行标准化

候选人	颜值	脾气（争吵次数）	身高	体重
A	0.669	0	0	0
B	0.595	0.394	0.976	0.447
C	0.446	0.919	0.217	0.894

➢ 计算概率矩阵P

- 计算标准化矩阵第j项指标下第i个样本所占的比重$p_{ij}=\frac{z_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} z_{ij}}$

候选人	颜值	脾气（争吵次数）	身高	体重
A	0.669	0	0	0
B	0.595	0.394	0.976	0.447
C	0.446	0.919	0.217	0.894

⬇

候选人	颜值	脾气（争吵次数）	身高	体重
A	0.391	0	0	0
B	0.348	0.300	0.818	0.333
C	0.261	0.700	0.182	0.667

熵权法——典型例题

➢ 计算熵权

- 对于第j个指标，信息熵的计算公式为：$e_j=-\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\ln(p_{ij})\,(j=1,2,\ldots,m)$
- 易知，当$p_{1j}=p_{2j}=\cdots=p_{nj}=\frac{1}{n}$时，$e_j=1$，此时**信息熵最大，但其信息效用值最小**
- 定义信息效用值$d_j=1-e_j$，此时效用值越大，权重越大
- 将信息效用值进行归一化，得到熵权 $W_j=\frac{d_j}{\sum_{j=1}^{m} d_j}$

颜值	脾气（争吵次数）	身高	体重
0.0085	0.3072	0.3931	0.2912

熵权法——相关代码

MATH
数模加油站

➢ 主代码

```
%% 1.对正向化后的矩阵进行标准化
X=input('指标矩阵X=');
[n,m] = size(X);
Z = X ./ repmat(sum(X.*X) .^ 0.5, n, 1);
disp('标准化矩阵 Z = ')
disp(Z)
%% 2.计算熵权
    D = zeros(1,m);   % 初始化保存信息效用值的行向量
    for i = 1:m
        x = Z(:,i);   % 取出第i列的指标
        p = x / sum(x);
        % 注意，p有可能为0，此时计算ln(p)*p时，Matlab会返回NaN，所以这里我们自己定义一个函数
        e = -sum(p .* mylog(p)) / log(n); % 计算信息熵
        D(i) = 1- e; % 计算信息效用值
    end
    W = D ./ sum(D);  % 将信息效用值归一化，得到权重
disp('权重 W = ')
disp(W)
```

函数代码

```
% 重新定义一个mylog函数，当输入的p中元素为0时，返回0
function [lnp] =  mylog(p)
n = length(p);    % 向量的长度
lnp = zeros(n,1);    % 初始化最后的结果
    for i = 1:n    % 开始循环
        if p(i) == 0    % 如果第i个元素为0
            lnp(i) = 0;   % 那么返回的第i个结果也为0
        else
            lnp(i) = log(p(i));
        end
    end
end
```

欢迎关注数模加油站

THANKS