数学建模模型算法精讲课——

线性规划

—— 江北老师

哪儿有勤奋，

哪儿就有成功！

线性规划

- 模型引出
- 模型原理
- 典型例题
- 代码求解

线性规划——模型引出

- **XXX共有多少多少，怎么样去安排或者分配，使……最大/最小/最优**

  - 若要生产两种机床，利润分别为XXX，机器有不同的损耗费用，不同的工作时间，怎么安排生产能够让**总利润最大**呢？

  - 若总资产是A，有n种资产可以进行配置，每种资产配置平均收益率XXX，风险损失率XXX，手续费XXX，怎么组合投资使得**收益最大，风险最小？**

  - 若商品有n个产地和p个销售地，需要从产地运输到销售地，各产地的产量是XXX，各销售地的需求量是XXX，不同产地运输到不同销售地的运价是XXX，怎么调运才能使**总运费最省？**

  - 不同类型的车辆承载量不同，工地各点之间需安排车辆运输，工地里有多条线路，满足用工需求的情况下，怎么安排车辆能使**车次安排最合理？**

  - 以上是一些很常见的**运筹优化问题**，也是数学建模比赛中比较常见的题型，简单来说就是**求最大/最小也即是极值**的问题，线性规划就是解决这些问题常用的工具之一。

线性规划——模型引出

- **PP同学特别喜欢玩一款游戏，想找到一种最快的方式升到满级**

  - 这个游戏每天有100点体力，我们可以通过反复通关A、B、C三张地图来获取经验升级
  - 通关A图可以获得20点经验，通关B图可以获得30点经验，通关C图可以获得45点经验
  - 通关地图会消耗体力，通关A图消耗4点体力，通关B图消耗8点体力，通关C图消耗15点体力
  - 同时A、B、C三图每天加在一起最多通关20次
  - PP应该怎么组合通关ABC三个地图的次数，来使今天获得的经验最大？

- **线性规划**

  - **线性规划（Linear programming,简称LP）**，是运筹学中研究较早、发展较快、应用广泛、方法较成熟的一个重要分支，是辅助人们进行科学管理的一种数学方法，是研究**线性约束条件下线性目标函数的极值问题的数学理论和方法。**
  - 线性规划是运筹学的一个重要分支，广泛应用于军事作战、经济分析、经营管理和工程技术等方面。为合理地利用有限的人力、物力、财力等资源作出的最优决策，提供科学的依据。

线性规划——模型原理

线性规划模型的三要素

- **决策变量：** 问题中要确定的未知量，用于表明规划问题中的用数量表示的方案、措施等，可由决策者决定和控制；
- **目标函数：** 决策变量的函数，优化目标通常是求该函数的最大值或最小值；
- **约束条件：** 决策变量的取值所受到的约束和限制条件，通常用含有决策变量的等式或不等式表示。

线性规划模型建立步骤

- 从实际问题中建立数学模型一般有以下三个步骤：

1. 根据影响所要达到目的的因素找到**决策变量**
2. 由决策变量和所在达到目的之间的函数关系确定**目标函数**
3. 由决策变量所受的限制条件确定决策变量所要满足的**约束条件**

- **PP同学特别喜欢玩一款游戏，想找到一种最快的方式升到满级**
  - **决策变量：** 三个地图通关次数。设A、B、C三个地图通关的次数分别为x_1 ,x_2 ,x_3
  - **目标函数：** 获得的经验最高。设经验为y，$max\ y = 20x_1 + 30x_2 + 45x_3$
  - **约束条件：** 消耗体力不能超过100。 $4x_1 + 8x_2 + 15x_3 \le 100$

    三个地图最多通关20次。 $x_1 + x_2 + x_3 \le 20$

    隐藏约束条件， x_1 ,x_2 ,$x_3 \ge 0$

- **线性规划的表现形式**
  - 一般形式/代数形式

$$max(\text{或}min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (\text{或}=,\ \ge) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (\text{或}=,\ \ge) b_2, \\ \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (\text{或}=,\ \ge) b_m, \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$max \quad y = 20x_1 + 30x_2 + 45x_3,$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 15x_3 \le 100, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 20, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

线性规划——模型原理

MATH 数模加油站

- **线性规划的表现形式**

- 简写形式：$\max(\text{或}\min)\ z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j,$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le(\text{或}=,\ \ge)b_i,\ i=1,2,\cdots,m,\\ x_j\ge 0,\ \ j=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

- 矩阵表现形式：

$$\max(\text{或}\min)\ z=c^T x,$$

$$s.t.\begin{cases}Ax\le(\text{或}=,\ \ge)b,\\ x\ge 0.\end{cases}$$

$c=[c_1,c_2,\dots,c_n]^T$——目标函数的系数向量，即价值向量；

$x=[x_1,x_2,\dots,x_n]^T$——决策向量；

$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$——约束方程组的系数矩阵；

$b=[b_1,b_2,\dots,b_m]^T$——约束方程组的常数向量。

$$\max\quad y=c^T x,$$

$$s.t.\begin{cases}Ax\le b,\\ x\ge 0.\end{cases}$$

$c=[20,30,45]^T$

$x=[x_1,x_2,x_3]^T$

$A=\begin{bmatrix}4 & 8 & 15\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$b=[100,20]^T$

线性规划——模型原理

➢ 线性规划模型特点

- 要解决的问题是优化类的（即在**有限的资源条件下，获取最大的收益**）
- 目标函数和约束条件都是**决策变量的线性函数**，即不存在x^2 ,e^x ,$\frac{1}{x}$,$\sin x$,$\log_2 x$等
- 线性规划模型：在一组线性约束条件下，求线性目标函数的**最大值或最小值**

数学建模的过程，就是把题目“翻译”成数学语言的过程

一组公式，加上对这组公式含义的解释，就是一个数学模型

➢ 线型规划模型求解

- 线性规划求解可采用**单纯形法**，证明比较复杂，有兴趣的可以自行学习
- 推荐采用matlab、python的相关函数进行求解，在代码讲解部分会进行讲解

例题（1998年国赛A题）

- 市场上有n种资产（如股票、债券、……）s_i $(i=1,2,\cdots,n)$供投资者选择，某公司有数额为M的**一笔相当大的资金**可用作一个时期的投资。公司财务分析人员对这n种资产进行了评估，估算出在这一时期内购买资产s_i的平均收益率为r_i，并预测出购买s_i的风险损失率为q_i。考虑到投资越分散，总的风险越小，公司确定，当用这笔资金购买若干种资产时，总体风险可用所投资的s_i中最大的一个风险来度量。
- 购买s_i要付交易费，费率为p_i，并且当购买额不超过给定值u_i时，交易费按购买u_i计算（不买当然无须付费）。另外，假定同期银行存款利率是$r_0(r_0=5\%)$，且既**无交易费又无风险**。
- 已知n=4时的相关数据如表所示。

s_i	r_i (%)	q_i (%)	p_i (%)	u_i (元)
s_1	28	2.5	1	103
s_2	21	1.5	2	198
s_3	23	5.5	4.5	52
s_4	25	2.6	6.5	40

线性规划——典型例题

➢ 例题（1998年国赛A题）

- 投资收益问题：给上述公司设计投资组合方案，用给定资金M，有选择地购买若干种资产或存银行生息，使净收益尽可能大，总体风险尽可能小。

➢ 问题分析

- 决策变量：投资**不同项目s_i 的为x_i $(i=1,2,\cdots,n)$**
- 目标函数：**净收益Q尽可能大、总风险尽可能小**
- 约束条件：**总资金M有限**，每一笔投资都是非负数
- 且已知，目标函数和约束条件都是决策变量的**线性函数**

可以构建线性规划模型！！

MATH 数模加油站

模型假设

- 可供投资的资金**数额M相当大**
- 投资越分散，总的风险越小，总体风险**可用所投资的s_i中最大的一个风险来度量**
- 可供选择的$n+1$种资产（含银行存款）之间是**相互独立的**
- 每种资产可购买的数量为任意值
- 在当前投资周期内，r_i，q_i，p_i，u_i（$i=0,1,\cdots,n$）固定不变
- 不考虑在资产交易过程中产生的**其他费用**，如股票交易印花税等
- 由于投资数额M相当大，而题目设定的定额u_i相对M很小，$p_i\,u_i$更小，因此假设每一笔交易x_i**都大于对应定额u_i**

模型建立

- 总体风险用所投资的s_i中最大的一个风险来衡量，即$max\{q_i x_i|i=1,2,\cdots,n\}$.
- 购买s_i（$i=1,2,\cdots,n$）所付交易费本来是一个分段函数，但假设中已经假设每一笔交易x_i都大于对应定额u_i，所以交易费$=p_i x_i$，这样购买s_i的净收益可以简化为$(r_i-p_i)x_i$。

线性规划——典型例题

模型建立

目标函数为$\begin{cases} max\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i, \\ min\{max_{1\le i\le n}\{q_ix_i\}\} \end{cases}$ 约束条件为$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M, \\ x_i\ge 0, \quad i=0,1,\cdots,n. \end{cases}$

- 这是一个多目标规划模型！

模型的简化

- 在实际投资中，投资者承受风险的程度不一样，若给定风险一个界限a，使最大的一个风险$\frac{q_ix_i}{M}\le a$，可找到相应的投资方案。这样把多目标规划变成一个目标的线性规划。
- 这里将目标函数$min\{max_{1\le i\le n}\{q_ix_i\}\}$转化为了约束条件：$\frac{q_ix_i}{M}\le a$（总体风险小于某个常数）

$$max\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i \qquad s.t.\begin{cases} \frac{q_ix_i}{M}\le a, i=1,2,\cdots,n, \\ \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M, \\ x_i\ge 0, \quad i=0,1,\cdots,n. \end{cases}$$

目标函数：总收益最大

约束条件：

1. 风险率不超过某定值
2. 投资所有项目的总金额加起来等于总资产
3. 投资的金额都是非负数

- **Matlab linprog函数**

$$[x, fval] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)$$

$$\min_{x} f^T x,$$

$$s.t. \begin{cases} A \cdot x \le b, \\ Aeq \cdot x = beq, \\ lb \le x \le ub. \end{cases}$$

- f——目标函数的系数向量（必须是求最小值形式下的）
- A, b——不等式约束条件的变量系数矩阵和常数项矩阵（必须是≤形式）
- Aeq, beq——等式约束条件的系数矩阵和常数项矩阵
- lb, ub——决策变量的最小取值和最大取值
- x是返回的最优解的变量取值，$fval$返回目标函数的最优值
- 注意：

要调用linprog函数，变量必须是标准形式，即目标函数是求最小值，约束条件都是小于等于号或等号

如果不满足标准形式，我们可以用同乘”–”变号来继续求解

MATH 数模加油站

- **先来求解小明升级的问题**

$$\max \quad y = 20x_1 + 30x_2 + 45x_3,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 15x_3 \le 100, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 20, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

$$\min \quad \text{-}y = -20x_1 - 30x_2 - 45x_3,$$
$$\text{s.t.}\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 15x_3 \le 100, \\ x_1 + x_2 + x_3 \le 20, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

$$[x, fval] = linprog(f, A, b, Aeq, beq, lb, ub)$$

$$\min_x f^T x,$$
$$s.t. \begin{cases} A \cdot x \le b, \\ Aeq \cdot x = beq, \\ lb \le x \le ub. \end{cases}$$

$$\begin{cases} f = [-20, -30, -45]^T \\ A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 15 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ b = [100, 20]^T \\ lb = [0, 0, 0]^T \end{cases}$$

$$[x, fval] = linprog(f, A, b, [], [], lb)$$
$$y = -fval$$

MATH 数模加油站

➢ 先来求解PP升级的问题

- Matlab代码

```
clc , clear
f = [-20 ;-30 ;-45];
A = [4 ,8 ,15;1 ,1 ,1;];
b = [100 ;20];
lb = zeros(3 ,1);
[x,fval] = linprog(f ,A ,b ,[] ,[] ,lb) %没有等号约束
y = -fval  %目标函数为最大化
disp('A、B、C三图分别通关的次数为: ')
disp(x)
disp('最终获得的经验为: ')
disp(y)
```

```
A、B、C三图分别通关的次数为:

   15.0000
    5.0000
         0

最终获得的经验为:

   450
```

- 注意：

  这个题目其实是整数线性规划，并不适用这个函数，这里求出整数解是巧合！

- **投资收益问题**

$$\max \sum_{i=0}^{n}(r_i - p_i)x_i \quad \text{s.t.} \begin{cases} \dfrac{q_i x_i}{M} \le a, i = 1,2,\cdots,n, \\ \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i = M, \\ x_i \ge 0, \quad i = 0,1,\cdots,n. \end{cases} \Rightarrow \min \sum_{i=0}^{n}(p_i - r_i)x_i \quad \text{s.t.} \begin{cases} \dfrac{q_i x_i}{M} \le a, i = 1,2,\cdots,n, \\ \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i = M, \\ x_i \ge 0, \quad i = 0,1,\cdots,n. \end{cases}$$

- 目标函数同乘”-”号化为标准形式，约束条件满足标准形式，无需处理

s_i	r_i (%)	q_i (%)	p_i (%)	u_i (元)
s_1	28	2.5	1	103
s_2	21	1.5	2	198
s_3	23	5.5	4.5	52
s_4	25	2.6	6.5	40

$$\min \quad f = [0.05,\ 0.27,\ 0.19,\ 0.185,\ 0.185] \cdot [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]^T$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_0 + 1.01x_1 + 1.02x_2 + 1.045x_3 + 1.065x_4 = M, \\ 0.025x_1 \le aM, \\ 0.015x_2 \le aM, \\ 0.055x_3 \le aM, \\ 0.026x_4 \le aM, \\ x_i \ge 0 \ (i = 0,1,\cdots,4). \end{cases}$$

MATH 数模加油站

➢ 投资收益问题

$$min \quad f = [0.05,\ 0.27,\ 0.19,\ 0.185,\ 0.185] \cdot [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]^T$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_0 + 1.01x_1 + 1.02x_2 + 1.045x_3 + 1.065x_4 = M, \\ 0.025x_1 \le aM, \\ 0.015x_2 \le aM, \\ 0.055x_3 \le aM, \\ 0.026x_4 \le aM, \\ x_i \ge 0\ (i = 0,1,\cdots,4). \end{cases}$$

- 这里不妨取M=1万元
- 由于a是任意给定的风险度，到底怎样没有一个准则，不同的投资者有不同的风险度。我们从$a = 0$开始，以步长$\Delta a = 0.001$进行循环搜索，搜索至a=5%（低风险者能够接受的风险）
- 下面是代码详解

线性规划——代码求解

➢ 投资收益问题代码

```
clc,clear;
% a矩阵的元素是不同风险率，从0到0.05等差取值，相邻两个数相差0.001
a = (0:0.001:0.05);
f = [-0.05,-0.27,-0.19,-0.185,-0.185]; % 目标函数的系数向量
% A是不等式约束条件的变量系数构成的矩阵
% 用zeros(4,1)先构造4行一列的全是0的矩阵，也就是对x_0无约束;
% 再构造对角矩阵diag([0.025,0.015,0.055,0.026])，对角线上元素为约束条件中变量的系数
A = [zeros(4,1),diag([0.025,0.015,0.055,0.026])];
Aeq = [1,1.01,1.02,1.045,1.065]; % 等式约束的系数矩阵，也就是所有资产投资
beq = 1;
lb = zeros(5,1);
Q = zeros(1,length(a)); % 初始化保存最优解的矩阵Q，因为现在还没求出最优解，元素全设为0
XX = []; % 定义个空矩阵，用来存不同风险率下的最优解
% 利用矩阵Q存储风险率a(i)下最大的收益; for循环中i在变化，风险率a(i)不同，求出对应的最优解存在矩阵Q内
for i = 1:length(a) % length求出矩阵a的元素个数，有多少个元素，就循环多少次
b = a(i)*ones(4,1); % b是约束条件的常数项矩阵,4行1列，每个元素值都是常数a(i)
[x,y] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,lb); % 调用linprog函数
Q(i) = -y; % 负负得正，就是所需求的最大值了
XX = [XX;x'];
end
plot(a,Q,'*r'); % 以风险率为横轴，收益为纵轴，绘制不同风险率下的最优收益
xlabel('风险率'); % x和y轴分别附上标签
ylabel('最大收益');
```

线性规划——代码求解

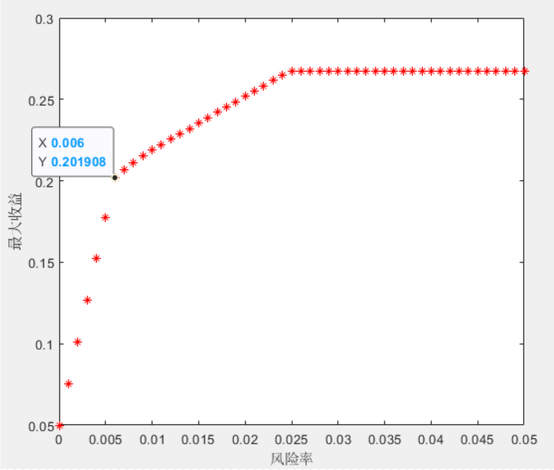
结果分析

- 风险a与收益Q之间的关系见图。从图中可以看出：

  1）风险不超过2.5%时，风险大，收益也大

  2）在$a = 0.006$附近有一个转折点，在这一点左边，风险增加很少时，利润增长很快。在这一点右边，风险增加很大时，利润增长很缓慢，所以对于风险和收益没有特殊偏好的投资者来说，应该选择曲线的转折点作为最优投资组合，大约是$a = 0.6\%$，$Q = 2000$，所对应投资方案为：

  风险度$a = 0.006$，收益$Q = 2019$元；$x_0 = 0$元，$x_1 = 2400$元，$x_2 = 4000$元，$x_3 = 1091$元，$x_4 = 2212$元



- 本题中做了很多模型假设，理论上来说不做也可以求解，且考虑更全面，但数模比赛时间很紧张，合理的假设也很重要
- 除了固定风险来简化模型，也可以固定收益，或者赋予风险收益相应的权重，来权衡二者的取舍

数模比赛没有标准模型，建模合理即可！！

欢迎关注数模加油站

THANKS