

数学建模模型算法精讲课——

层次分析法

—— 江北老师

每个不曾起舞的日子，
都是对生命的辜负！

层次分析法

- 模型引出
- 模型原理
- 典型例题
- 相关代码





➤ 问题的提出

日常生活中有很多的**决策问题**。决策是指在面临多种方案时需要依据一定的标准选择某一种方案。

- 买衣服，一般要依据质量、颜色、价格、款式等方面的因素选择
- 旅游，是去风光秀丽的苏州，还是去迷人的北戴河，或者是去山水甲天下的桂林，那一般会依据景色、费用、食宿条件、旅途等因素来判断去哪个地方

➤ XX微博要选出一个明星作为微博之星，现在有三个候选明星A、B、C，该选择哪位明星呢？

- 考虑一个明星的成就可以看其粉丝数、颜值、作品数量、作品质量(考虑用作品某瓣平均评分代替)
- A、B、C的相关数据如下

明星	粉丝数	颜值	作品质量	作品数量
A	6000w	10	6.5	25
B	3400w	6	8.1	46
C	5500w	8	7.5	31

直接相加？

$$6000w+10+25+6.5=?$$



➤ XX微博要选出一个明星作为微博之星，现在有三个候选明星A、B、C，该选择哪位明星呢？

- 怎么能让指标在同一数量级，且保证在同一指标下其差距不变？

归一化处理：指标的数组 $[a \ b \ c]$ 归一化处理得到 $[a/(a+b+c), \ b/(a+b+c), \ c/(a+b+c)]$

明星	粉丝数	颜值	作品质量	作品数量	评分
A	0.40	0.42	0.29	0.25	1.36
B	0.23	0.25	0.37	0.45	1.30
C	0.37	0.33	0.34	0.30	1.35

A当选？

实际上每个指标的重要性是不同的

- 来给每一个指标加上权重，微博公司考虑宣传效果，认为粉丝数最重要，作品数量最不重要

明星	粉丝数(0.4)	颜值 (0.3)	作品质量(0.2)	作品数量(0.1)	评分
A	$0.40*0.4$	$0.42*0.3$	$0.29*0.3$	$0.25*0.2$	0.365
B	$0.23*0.4$	$0.25*0.3$	$0.37*0.3$	$0.45*0.2$	0.293
C	$0.37*0.4$	$0.33*0.3$	$0.34*0.3$	$0.30*0.2$	0.342

如何科学地设定权重？



➤ 基本概念

面临各种各样的方案，要进行**比较、判断、评价、直至最后的决策**。这个过程中都是一些主观的因素，这些因素可能由于个人情况的不同，有相应不同的比重，所以这样**主观因素**给数学方法的解决带来了很多的不便。

层次分析法（Analytic Hierarchy Process，简称 AHP）是对一些较为复杂、较为模糊的问题作出**决策**的简易方法，它特别适用于那些**难于完全定量分析**的问题。它是美国运筹学家 T. L. Saaty 教授于上世纪 70 年代初期提出的一种简便、灵活而又实用的多准则决策方法。





➤ 模型原理

应用 AHP 分析决策问题时，首先要把问题**条理化、层次化**，构造出一个有层次的结构模型。

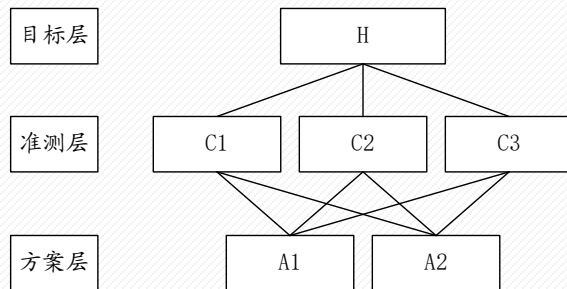
在这个模型下，复杂问题被分解为元素的组成部分。这些元素又按其属性及关系形成若干层次。上一层次的元素作为准则对下一层次有关元素起支配作用。这些层次可以分为三类：

- 最高层：这一层次中只有一个元素，一般它是分析问题的**预定目标或理想结果**，因此也称为目标层。
- 中间层：这一层次中包含了为实现**目标所涉及的中间环节**，它可以由若干个层次组成，包括所需考虑的准则、子准则，因此也称为准则层。
- 最底层：这一层次包括了为实现目标可供选择的**各种措施、决策方案**等，因此也称为措施层或方案层。

➤ 基本步骤

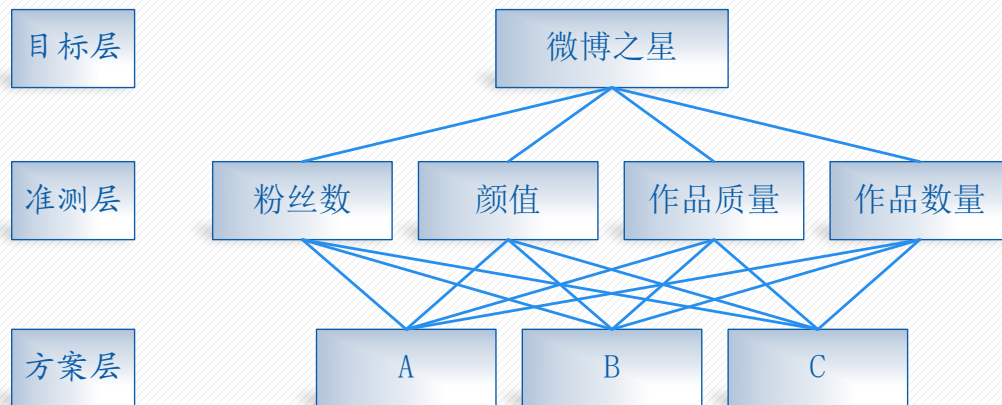
运用层次分析法建模，大体上可按下面**四个步骤**进行：

- 建立递阶层次结构模型
- 构造出各层次中的所有判断矩阵
- 一致性检验
- 求权重后进行评价





- 建立递阶层次结构模型
- 继续来选择微博之星，其递阶层次结构模型如下：



- 构造出各层次中的所有判断矩阵
 - 对指标的重要性进行**两两比较**，构造**判断矩阵**，从而科学求出权重
 - 矩阵中元素 a_{ij} 的意义是，第 i 个指标相对第 j 个指标的重要程度



➤ 构造判断矩阵

标度	含义
1	表示两个因素相比，具有同样重要性
3	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素稍微重要
5	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素明显重要
7	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素强烈重要
9	表示两个因素相比，一个因素比另一个因素极端重要
2, 4, 6, 8	上述两相邻判断的中值

- 矩阵矩阵中元素 a_{ij} 的意义是，**第 i 个指标相对第 j 个指标的重要程度**
- 粉丝数跟作品数量比显然明显重要，那么 $a_{14}=5$ ，反过来，作品质量相比粉丝数的重要性那就是 $1/5$ ， a_{41} 为 $1/5$

明星	粉丝数	颜值	作品质量	作品数量
A	6000w	10	6.5	25
B	3400w	6	8.1	46
C	5500w	8	7.5	31

	粉丝数	颜值	作品质量	作品量
粉丝数	1			5
颜值		1		
作品质量			1	
作品数量	1/5			1



➤ 构造判断矩阵

- 依次对变量进行两两比较，得到完整的判断矩阵，如下表所示

	粉丝数	颜值	作品质量	作品数量
粉丝数	1	2	3	5
颜值	1/2	1	1/2	2
作品质量	1/3	2	1	1/2
作品数量	1/5	1/2	2	1

- 因两两比较的过程中忽略了其他因素，导致最后的结果**可能出现矛盾**

如上表可以看出 $a_{23}=1/2$ 代表在重要性上，颜值不如作品质量； $a_{24}=2$ 代表着颜值比作品数量重要，因此可以看出作品质量比作品数量重要，但 $a_{34}=1/2$ 意味着作品质量不如作品数量重要，与上一条矛盾！

- 所以需要**一致性检验**



➤ 一致性检验

- $a_{ij} = \frac{i \text{ 的重要程度}}{j \text{ 的重要程度}}$, $a_{ik} = \frac{i \text{ 的重要程度}}{k \text{ 的重要程度}}$, $a_{kj} = \frac{k \text{ 的重要程度}}{j \text{ 的重要程度}}$
- 易得 $a_{ij} = a_{ik} * a_{kj}$ 且矩阵各行（列）成倍数关系，满足这两条的矩阵称为**一致矩阵**，不会出现矛盾的情况

	A	B	C
A	1	2	4
B	1/2	1	2
C	1/4	1/2	1

➤ 一致矩阵

- 若矩阵中每个元素 $a_{ij} > 0$ 且满足 $a_{ij} \times a_{ji} = 1$ ，则我们称该矩阵为正互反矩阵。在层次分析法中，我们构造的判断矩阵均是正互反矩阵。
- 若正互反矩阵满足 $a_{ik} \times a_{kj} = a_{ij}$ ，则我们称其为一**一致矩阵**。
- **注意:** 在使用判断矩阵求权重之前，必须对其进行一致性检验，以免产生矛盾。
- 一致性检验原理：检验我们构造的判断矩阵和一致矩阵是否有太大**差别**。



➤ 一致性检验

- 证明过程

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ 为一致矩阵的条件 } \begin{cases} a_{ij} > 0 \\ a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 1 \\ [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}] = k_i [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}] \\ a_{ij} = a_{ik} \times a_{kj} \end{cases}$$

- 引理: A为n阶方阵, 且 $r(A)=1$, 则A有一个特征值为 $\text{tr}(A)$, 其余特征值均为0
- 因为一致矩阵的各行成比例且不是零矩阵, 所以一致矩阵的秩一定为1
- 由引理可知: 一致矩阵有一个特征值为n, 其余特征值均为0
- 易得, 特征值为n时, 对应的特征向量刚好为 $k \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \frac{1}{a_{12}} & \dots & \frac{1}{a_{1n}} \end{bmatrix}^T$
- 引理: n阶正互反矩阵A为一致矩阵时当且仅当最大特征值 $\lambda_{\max} = n$ 。且当正互反矩阵A非一致时, 一定满足 $\lambda_{\max} > n$, 判断矩阵越不一致时, 最大特征值与n相差就越大。



➤ 一致性检验的步骤

- 1、计算一致性指标CI

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1}$$

- 2、查找对应的平均随机一致性指标RI

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
RI	0	0	0.52	0.89	1.12	1.26	1.36	1.41	1.46	1.49

注：RI我们只需要会查表即可，不用管怎么来的。在实际运用中， n 很少超过10，**如果指标的个数大于10**，则可考虑建立二级指标体系，或使用我们以后要学习的模糊综合评价模型。

- 3、计算一致性比例CR

$$CR = \frac{CI}{RI} \begin{cases} 0, & \text{判断矩阵为一致矩阵} \\ < 0.1, & \text{判断矩阵一致} \\ \geq 0.1, & \text{判断矩阵不一致} \end{cases}$$

注：特征值可用**matlab软件**进行计算，没学过线性代数的同学也不需要担心。如果特征值中有虚数，则比较的是特征值的模长。



➤ 一致性检验

- 回到刚刚微博之星

	粉丝数	颜值	作品质量	作品数量
粉丝数	1	2	3	5
颜值	1/2	1	1/2	2
作品质量	1/3	2	1	1/2
作品数量	1/5	1/2	2	1

- 当前判断矩阵的 $\lambda_{max} = 4.68$, $n = 4$, 求得 $CI = 0.227$, 查表 $RI=0.89$, 得 $CR = 0.255$

$CR \geq 0.1$, 需修改判断矩阵

	粉丝数	颜值	作品质量	作品数量
粉丝数	1	2	3	5
颜值	1/2	1	1/2	2
作品质量	1/3	2	1	2
作品数量	1/5	1/2	1/2	1

- 当前判断矩阵的 $\lambda_{max} = 4.1128$, $n = 4$, 求得 $CI=0.227$, 查表 $RI=0.89$, 得 $CR=0.0418$

$CR < 0.1$, 通过一致性检验



➤ 求权重

• 算术平均法求权重

第一步：将判断矩阵按照列归一化（每一个元素除以其所在列的和）

第二步：将归一化的各列相加（按行求和）

第三步：将相加后得到的向量中每个元素除以n即可得到权重向量

$$\text{假设判断矩阵 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

那么算术平均法求得的权重向量 $w_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^n a_{kj}}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$)

• 用算术平均法求出微博之星的指标权重

	粉丝数	颜值	作品质量	作品数量
粉丝数	1	2	3	5
颜值	1/2	1	1/2	2
作品质量	1/3	2	1	2
作品数量	1/5	1/2	1/2	1



	粉丝数	颜值	作品质量	作品数量
粉丝数	0.492	0.364	0.600	0.500
颜值	0.246	0.182	0.100	0.200
作品质量	0.164	0.364	0.200	0.200
作品数量	0.098	0.091	0.100	0.100



	权重
粉丝数	0.489
颜值	0.182
作品质量	0.232
作品数量	0.097



➤ 求权重

• 几何平均法求权重

第一步：将判断矩阵的元素按照行相乘得到一个新的列向量

第二步：将新的向量的每个分量开n次方

第三步：对该列向量进行归一化即可得到权重向量

假设判断矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

那么算术平均法求得的权重向量 $w_i = \frac{(\prod_{j=1}^n a_{ij})^{\frac{1}{n}}}{\sum_{k=1}^n (\prod_{j=1}^n a_{kj})^{\frac{1}{n}}}, (i = 1, 2, \dots, n)$

• 用几何平均法求出微博之星的指标权重

	粉丝数	颜值	作品质量	作品数量
粉丝数	1	2	3	5
颜值	1/2	1	1/2	2
作品质量	1/3	2	1	2
作品数量	1/5	1/2	1/2	1



	行相乘后开方
粉丝数	2.34
颜值	0.84
作品质量	1.07
作品数量	0.47



	权重
粉丝数	0.495
颜值	0.178
作品质量	0.227
作品数量	0.100



➤ 求权重

• 特征值法求权重

一致矩阵有一个特征值 n ，其余特征值均为0

另外，我们很容易得到，特征值为 n 时，对应的特征向量刚好为 $k \left[\frac{1}{a_{11}}, \frac{1}{a_{12}}, \dots, \frac{1}{a_{1n}} \right]^T$ ($k \neq 0$)

假如我们的判断矩阵一致性可以接受，那么我们可以仿照一致矩阵权重的求法。

第一步：求出矩阵A的最大特征值以及其对应的特征向量

第二步：对求出的特征向量进行归一化即可得到我们的权重

	粉丝数	颜值	作品质量	作品数量			特征向量			权重
粉丝数	1	2	3	5	➡	粉丝数	0.8487	➡	粉丝数	0.493
颜值	1/2	1	1/2	2		颜值	0.3076		颜值	0.179
作品质量	1/3	2	1	2		作品质量	0.3962		作品质量	0.230
作品数量	1/5	1/2	1/2	1		作品数量	0.1676		作品数量	0.097

最大特征值为4.1128 一致性比例CR=0.1128/3=0.04

其对应的特征向量：[0.8487 0.3076 0.3962 0.1676]

对其进行归一化得到权重：[0.493 0.179 0.230 0.097]



➤ 求评分

权重表格	算术平均法	几何平均法	特征值法
粉丝数	0.489	0.495	0.493
颜值	0.182	0.178	0.179
作品质量	0.232	0.227	0.230
作品数量	0.097	0.100	0.097

- 如果选择特征值法，综合评分=0.493*粉丝数+0.179*颜值+0.230*作品质量+0.097*作品数量

明星	粉丝数	颜值	作品质量	作品数量	评分
A	0.40*0.493	0.42*0.179	0.29*0.23	0.25*0.097	0.363
B	0.23*0.493	0.25*0.179	0.37*0.23	0.45*0.097	0.287
C	0.37*0.493	0.33*0.179	0.34*0.23	0.30*0.097	0.349

- A当选微博之星





➤ 一致性检验代码

```
A = input('判断矩阵A=');    %输入判断矩阵
[n,n] = size(A);            %获取A的行和列
%求出最大特征值以及对应的特征向量
[V,D] = eig(A);             %V是特征向量 D是特征值构成的对角矩阵
Max_eig = max(max(D));       %先求出每一列的最大值，再求最大值中的最大值
CI = (Max_eig - n) / (n-1);
RI=[0 0.0001 0.52 0.89 1.12 1.26 1.36 1.41 1.46 1.49 1.52 1.54 1.56 1.58 1.59];
%注意哦，这里的RI最多支持 n = 15
%这里n=2时，一定是一致矩阵，所以CI = 0，我们为了避免分母为0，将这里的第二个元素改为了很接近0的正数
CR=CI/RI(n);
disp('一致性指标CI=');disp(CI);
disp('一致性比例CR=');disp(CR);
if CR<0.10
    disp('因为CR<0.10，所以该判断矩阵A的一致性可以接受!');
else
    disp('注意：CR >= 0.10，因此该判断矩阵A需要进行修改!');
end
```



➤ 求权重代码

- 算术平均法求权重

```
A = input('判断矩阵A='); %输入判断矩阵
ASum = sum(A, 1); %将判断矩阵每列求和
[n, n] = size(A); %获取A的行和列，用于对ASum复制，对应位相除归一化
Ar = repmat(ASum, n, 1); %复制ASum n行1列为Ar矩阵
Stand_A = A ./ Ar; %归一化
ASumr = sum(Stand_A, 2); %各列相加到同一行
disp(ASumr/n); %将相加后得到的向量每个元素除以n可以得到权重向量
```



➤ 求权重代码

- 几何平均法求权重

```
clc;
```

```
A = input('判断矩阵A= '); %输入判断矩阵
```

```
[n,n] = size(A); %获取A的行和列
```

```
prod_A = prod(A,2); %将A中每一行元素相乘得到  
一列向量
```

```
prod_n_A = prod_A.^(1/n); %将新的向量的每个分量开n  
次方等价求1/n次方
```

```
re_prod_A = prod_n_A./sum(prod_n_A); %归一化处理
```

```
disp(re_prod_A); %展示权重结果
```



➤ 求权重代码

- 特征值法计算权重

```
clc;
```

```
A = input('判断矩阵A= ');    %输入判断矩阵
```

```
[n,n] = size(A);              %获取A的行和列
```

```
%求出最大特征值以及对应的特征向量
```

```
[V,D] = eig(A);               %V是特征向量 D是特征值构  
成的对角矩阵
```

```
Max_eig = max(max(D));         %先求出每一列的最大值，  
再求最大值中的最大值
```

```
[r,c] = find(Max_eig == D,1); %使用find() 函数找出最大  
特征值对应的特征向量
```

```
%对特征向量进行归一化得到所需权重
```

```
disp(V(:,c)./sum(V(:,c)));
```

欢迎关注数模加油站

THANKS



有兴趣的小伙伴可以关注微信公众号或加入建模交流群获取更多免费资料

公众号：数模加油站

交流群：709718660