01-E1

1.绪论

迭代与递归

减而治之

迭代乃人工，递归方神通

To iterate is human,

to recurse, divine.

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

Sum

❖ 问题：计算任意n个整数之和

❖ 实现：逐一取出每个元素，累加之

```
int SumI( int A[], int n ) {
    int sum = 0; //O(1)
    for ( int i = 0; i < n; i++ ) //O(n)
        sum += A[i]; //O(1)
    return sum; //O(1)
}
```

❖ 无论A[ ]内容如何，都有：

$$T(n) = 1 + n*1 + 1 = n + 2 = \mathcal{O}(n) = \Omega(n) = \Theta(n)$$

❖ 空间呢？

Decrease-and-conquer

❖ 为求解一个大规模的问题，可以

将其划分为两个子问题：其一 平凡 ，另一规模 缩减 //单调性

分别求解子问题

由子问题的解，得到原问题的解

Linear Recursion: Trace

❖ sum(int A[], int n) {

```
sum( int A[], int n ) {
   return
      n < 1 ?
         0 : sum(A, n - 1) + A[n - 1];
}
```

❖ 递归跟踪分析

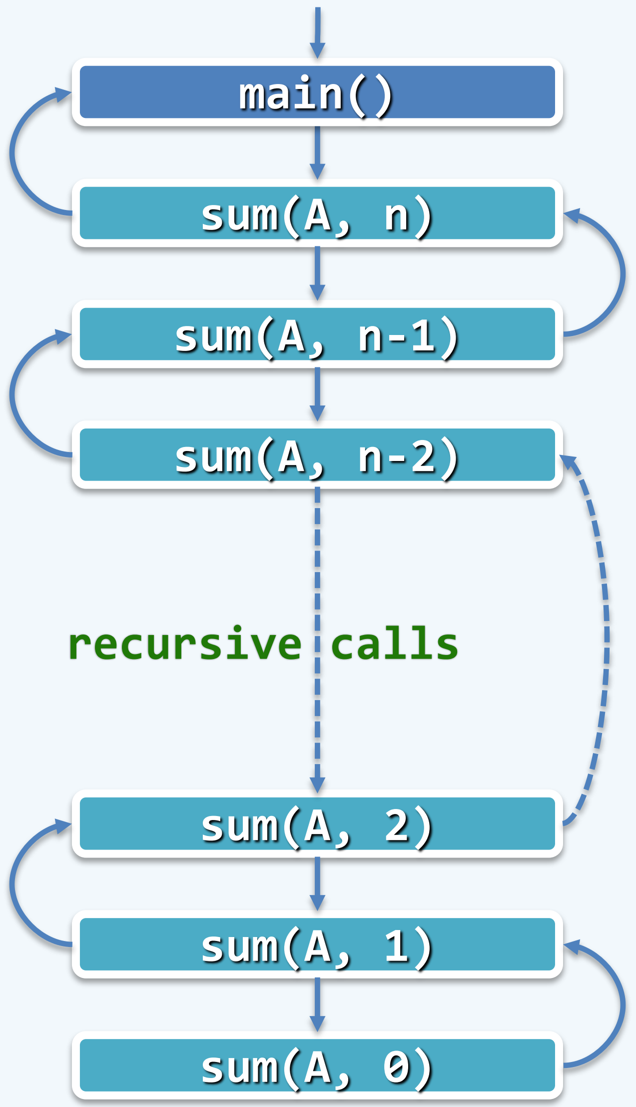
检查每个递归实例

累计所需时间（调用语句本身，计入对应的子实例）

其总和即算法执行时间

❖ 本例中，单个递归实例自身只需$\mathcal{O}(1)$时间

$T(n) = \mathcal{O}(1) * (n + 1) = \mathcal{O}(n)$



Linear Recursion: Recurrence

❖ 从递推的角度看，为求解sum(A, n)，需

- 递归求解规模为n-1的问题sum(A, n - 1)，再 //T(n-1)
- 再累加上A[n - 1] //$\mathcal{O}(1)$

❖ 递推方程 $\boxed{T(n) = T(n-1) + \mathcal{O}(1)}$ //recurrence

$\boxed{T(0) = \mathcal{O}(1)}$ //base: sum(A, 0)

❖ 求解

$$T(n) - n = T(n-1) - (n-1) = \ldots$$
$$= T(2) - 2$$
$$= T(1) - 1$$
$$= T(0)$$
$$T(n) = \mathcal{O}(1) + n = \mathcal{O}(n)$$

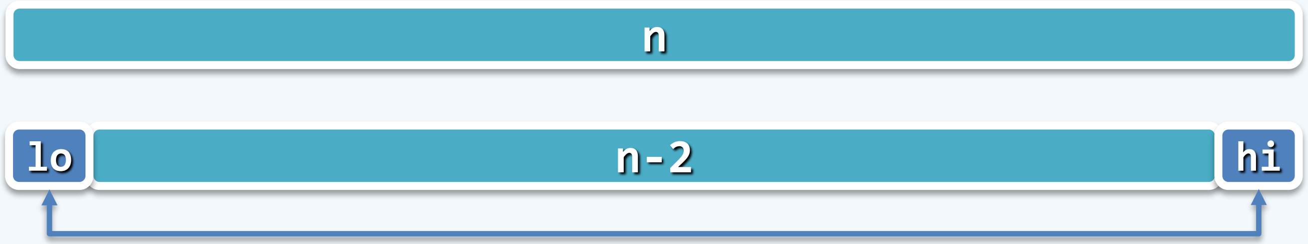
Reverse

❖ 任给数组A[0, n)，将其中的子区间A[lo, hi]前后颠倒

统一接口：`void reverse( int * A, int lo, int hi );`

```
❖ if (lo < hi) //问题规模的奇偶性不变，需要两个递归基                //递归版
      { swap( A[lo], A[hi] ); reverse( A, lo + 1, hi - 1 ); }
```

```
❖ next:                                                            //迭代原始版
      if (lo < hi)
         { swap( A[lo], A[hi] ); lo++; hi--; goto next; }
```




```
❖ while (lo < hi) swap( A[lo++], A[hi--] );                        //迭代精简版
```

课后

- 做递归跟踪分析时，为什么递归调用语句本身可不统计？
- 递归算法的空间复杂度，主要取决于什么因素？