

1. 绪论

渐进分析

指数

If $P = NP$ is proved ..., mathematics would be transformed, because computers could find a formal proof of any theorem which has a proof of reasonable length.

- S. Cook

慌得那拿盘的小怪，战兢兢跑去报道：“难，难，难！
难，难，难！”老妖道：“怎么有许多难？”

邓俊辉

deng@tsinghua.edu.cn

$O(2^n)$

❖ 指数 (exponential function) : $T(n) = a^n$

❖ $\forall c > 1, n^c = O(2^n)$

// $e^n = 1 + n + n^2/2! + n^3/3! + n^4/4! + \dots$

$$n^{1000} = O(1.0000001^n) = O(2^n)$$

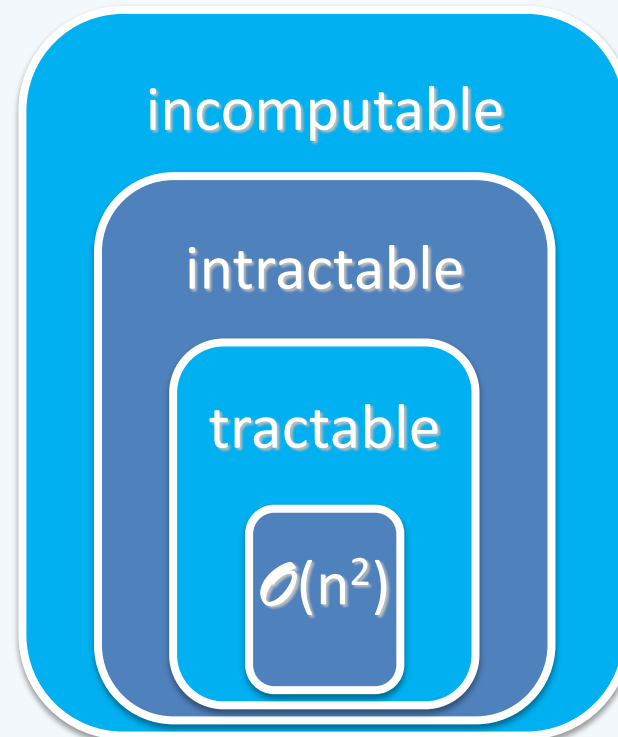
$$1.0000001^n = \Omega(n^{1000})$$

❖ 这类算法的计算成本增长极快

通常被认为不可忍受

❖ 从 $O(n^c)$ 到 $O(2^n)$

是从 **有效算法** 到 **无效算法** 的分水岭



$O(2^n)$

❖ 很多问题的 $O(2^n)$ 算法往往显而易见

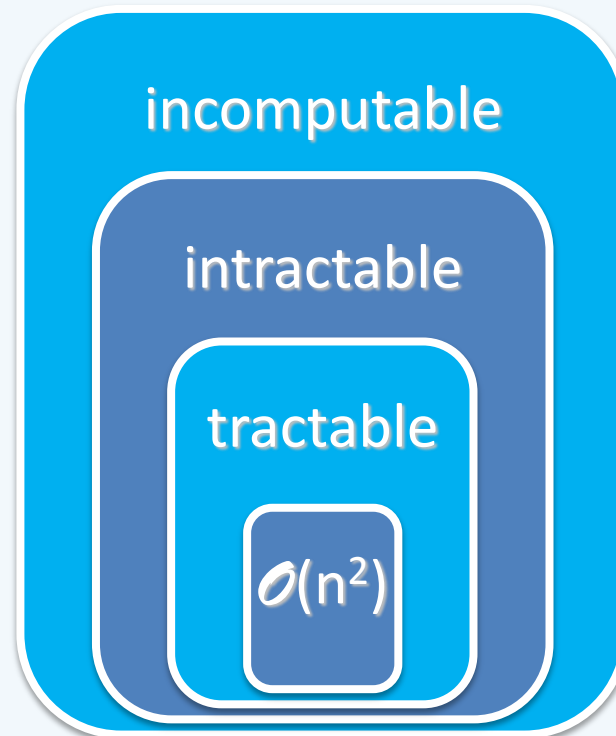
然而，设计出 $O(n^c)$ 算法却极其不易

甚至，有时注定地只能是徒劳无功

❖ 更糟糕的是

这类问题要远比我们想象的多得多

...



2-Subset

❖ 【问题描述】

S 包含 n 个正整数, $\sum S = 2m$

S 是否有子集 T , 满足 $\sum T = m$?

❖ 【选举人制】

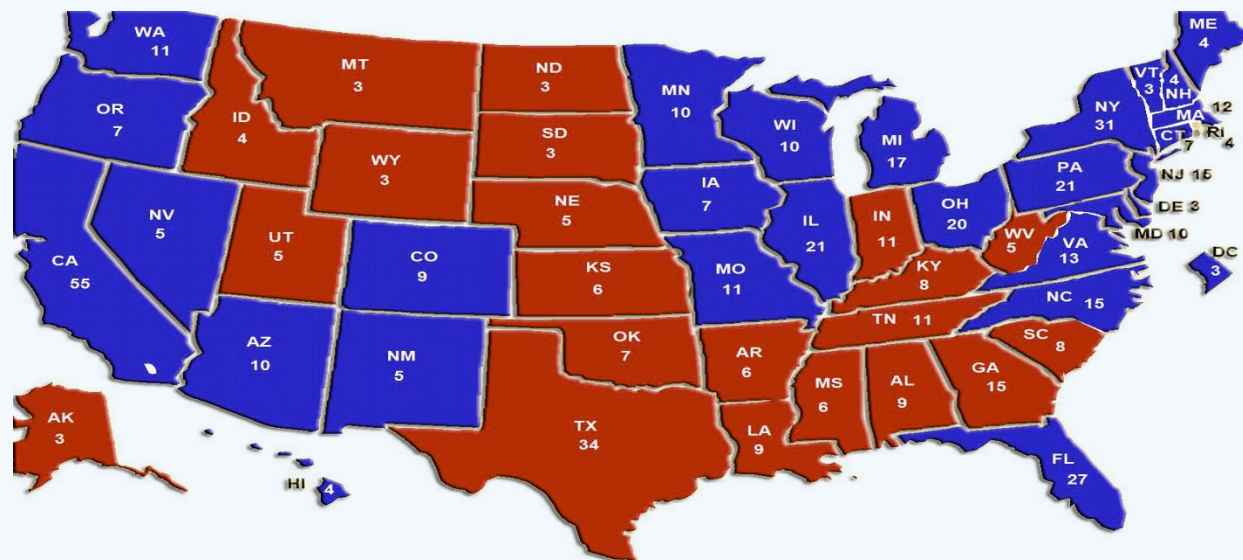
各州议会选出的选举人团投票

而不是由选民直接投票

50个州加1个特区, 共 **538** 票

获 **270** 张选举人票, 即可当选

55	California	11	Indiana	7	Connecticut	4	Idaho
34	Texas	11	Missouri	7	Iowa	4	Maine
31	New York	11	Tennessee	7	Oklahoma	4	New Hampshire
27	Florida	11	Washington	7	Oregon	4	Rhode Island
21	Illinois	10	Arizona	6	Arkansas	3	Alaska
21	Pennsylvania	10	Maryland	6	Kansas	3	Delaware
20	Ohio	10	Minnesota	6	Mississippi	3	D. C.
17	Michigan	10	Wisconsin	5	Nebraska	3	Montana
15	Georgia	9	Alabama	5	Nevada	3	North Dakota
15	New Jersey	9	Colorado	5	New Mexico	3	South Dakota
15	North Carolina	9	Louisiana	5	Utah	3	Vermont
13	Virginia	8	Kentucky	5	West Virginia	3	Wyoming
12	Massachusetts	8	South Carolina	4	Hawaii	538 = Σ	



2-Subset

❖ 但是...

❖ 若共有两位候选人

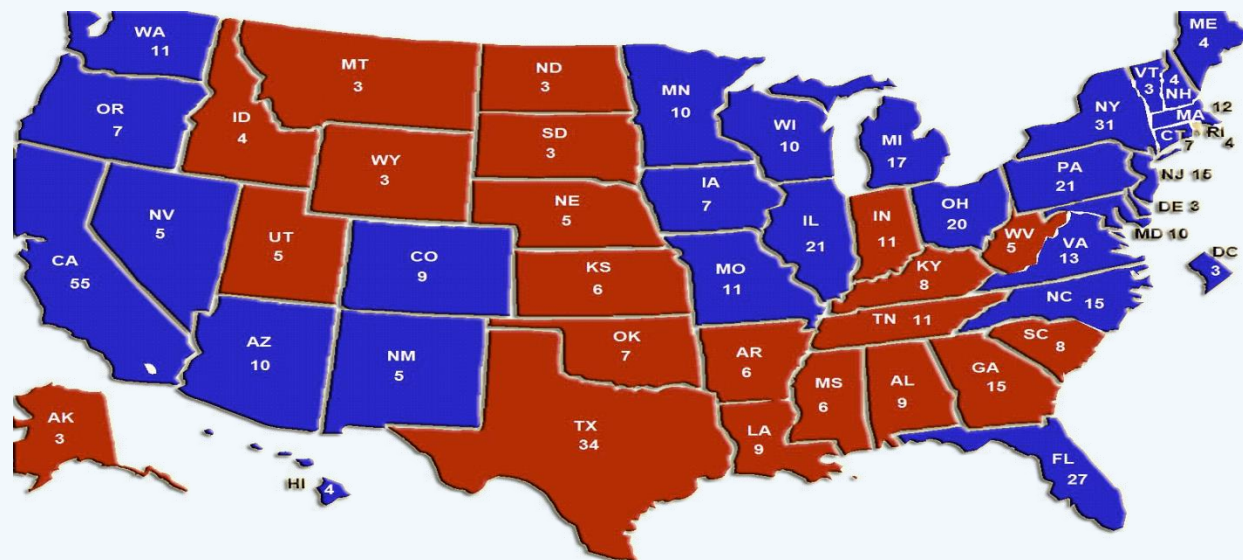
是否可能恰好各得269票？

❖ 【直觉算法】

逐一枚举S的每一子集

并统计其中元素的总和

55	California	11	Indiana	7	Connecticut	4	Idaho
34	Texas	11	Missouri	7	Iowa	4	Maine
31	New York	11	Tennessee	7	Oklahoma	4	New Hampshire
27	Florida	11	Washington	7	Oregon	4	Rhode Island
21	Illinois	10	Arizona	6	Arkansas	3	Alaska
21	Pennsylvania	10	Maryland	6	Kansas	3	Delaware
20	Ohio	10	Minnesota	6	Mississippi	3	D. C.
17	Michigan	10	Wisconsin	5	Nebraska	3	Montana
15	Georgia	9	Alabama	5	Nevada	3	North Dakota
15	New Jersey	9	Colorado	5	New Mexico	3	South Dakota
15	North Carolina	9	Louisiana	5	Utah	3	Vermont
13	Virginia	8	Kentucky	5	West Virginia	3	Wyoming
12	Massachusetts	8	South Carolina	4	Hawaii	538 = Σ	



2-Subset

❖ 定理： $|2^S| = 2^{|S|} = 2^n$

❖ 亦即：直觉算法需要迭代 2^n 轮，并（在最坏情况下）至少需要花费这么多的时间

— 不甚理想！

//严格讲，这只是程序，而不是算法

❖ 还是直觉：应该有更好的办法吧？

❖ 定理：2-Subset is NP-complete

— 什么意思？

❖ 意即：就目前的计算模型而言，不存在可在多项式时间内回答此问题的算法

— 就此意义而言，上述的直觉算法已属最优