



数学之桥：从初等数学到微积分

习题答案

作者：Siliconet

时间：始于 2023 年

版本：1.0

模板：ElegantBook

你站在桥上看风景，看风景人在楼上看你。明月装饰了你的窗子，你装饰了别人的梦。

目录

第一章 集合论初步

1

第一章 集合论初步

练习 1.1 $\in \notin \in \notin$.

练习 1.2 无限集; 有限集; 无限集。

练习 1.3 $\{2, -2\}$; $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$; $\{1\}$.

练习 1.4 (1) $\{(x, y) \mid x > 0, y > 0\}$; (2) $\{\text{矩形}\}$; (3) $\{x \mid x = 5^n, 0 \leq n \leq 4, n \in \mathbb{N}\}$.

练习 1.5 $\{(2, 1, 3)\}$.

练习 1.6 -1 或 -8 。

练习 1.7 (1) 线段 AB 的垂直平分线; (2) 以 O 为圆心, 3cm 为半径的圆; (3) 以 O 为圆心, 内半径为 2, 外半径为 3 的圆环。

练习 1.8 (1) $\{y \mid y \geq 0\}$ 或 $[0, +\infty)$; (2) $\{y \mid y \neq 0\}$; (3) $\{y\text{轴上的点}\}$

练习 1.9 $m \geq 2$ 或 $m = 1$.

练习 1.10 983.

练习 1.11 略。

练习 1.12 略。

练习 1.13 不相等. $\emptyset \subseteq \{0\}$.

练习 1.14 略。

练习 1.15 $\bar{A} = \{4, 5\}$; $\bar{A} \cap B = \{3\}$; $A \cup \bar{B} = \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

练习 1.16 m 的值为 $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$ 或 0.

练习 1.17 $\{4\}$; $\{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; $\{3\}$; $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; \emptyset ; $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

练习 1.18 $[4, +\infty)$.

练习 1.19 略。

练习 1.20 (1)(2) 略。(3)60.

练习 1.21 $\{-3, -1, 1, 5\}$.

练习 1.22 (1) 设 $s = m_1^2 + n_1^2, t = m_2^2 + n_2^2$, 其中 m_1, m_2, n_1, n_2 均为整数。由此可得

$$\begin{aligned} st &= (m_1^2 + n_1^2)(m_2^2 + n_2^2) \\ &= m_1^2 m_2^2 + n_1^2 n_2^2 + m_1^2 n_2^2 + m_2^2 n_1^2 \\ &= (m_1 m_2 + n_1 n_2)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2 \end{aligned}$$

因此 $st \in A$, 得证。

(2) 由 (1) 知 $st \in A$, 设 $st = m^2 + n^2$, 其中 m, n 都是整数。由于 $t \neq 0$, 可得

$$\frac{s}{t} = \frac{st}{t^2} = \frac{m^2 + n^2}{t^2} = \left(\frac{m}{t}\right)^2 + \left(\frac{n}{t}\right)^2$$

得证。

练习 1.23 试着举出一个真命题, 它的逆命题不是真命题。

解 略。

练习 1.24 在命题“三角形的内角和等于 180° ”中, 条件和结论分别是什么?

解 条件: 一个平面图形是三角形; 结论: 这个平面图形的内角和为 180° 。

例 1.1 幼儿园的小朋友都知道, $4 > 2$, 所以, $x > 4 \Rightarrow x > 2$ 。

练习 1.25 参考例 1.1, 思考怎样从集合的观点理解推出关系。

解 略。

练习 1.26 判断下列各题中, p 是否是 q 的充分条件, q 是否是 p 的必要条件:

(1) $p: x \in \mathbb{Z}, q: x \in \mathbb{R}$;

(2) $p: a = b, q: ac = bc$;

(3) p : 两个三角形全等, q : 两个三角形面积相等.

解 (1) 是; (2) 是; (3) 是.

练习 1.27 判断下列“若 p , 则 q ”形式的命题当中, 哪些命题中的 p 是 q 的充分条件, 或者说 q 是 p 的必要条件?

(1) 若四边形的两组对角分别相等, 则这个四边形是平行四边形;

(2) 若四边形为菱形, 则这个四边形的对角线互相垂直;

(3) 若 x, y 为无理数, 则 xy 为无理数;

(4) 若直线 l 与 $\odot O$ 有且仅有一个交点, 则 l 为 $\odot O$ 的一条切线;

(5) 若 x, y 都能被 5 整除, 则 $x + y$ 也能被 5 整除;

(6) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$.

解 (1) (2) (4) (5) (6)

练习 1.28 判断下列命题的真假:

(1) 存在两个无理数, 它们的乘积是有理数;

(2) 没有一个无理数不是实数;

(3) 集合 A 是集合 $A \cup B$ 的子集;

(4) 集合 $A \cap B$ 是集合 A 的子集;

(5) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, 则 $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$;

(6) 一元三次方程都有三个不同的实数根;

(7) 如果 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq 1$, 则 $\frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$.

解 真; 真; 真; 真; 真; 假; 真。

练习 1.29 证明: $\sqrt{3}$ 是无理数。

解 略。

练习 1.30 用“充要”“充分不必要”“必要不充分”“既不充分也不必要”填空 (本题中默认 $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$):

(1) $a^2 = b^2$ 是 $a = b$ 的_____条件;

(2) $a^3 = b^3$ 是 $a = b$ 的_____条件;

(3) 使 $ab = 0$ 的充分条件是_____;

(4) 使 $ab = 0$ 的必要条件是_____;

(5) 使 $ab \neq 0$ 的充要条件是_____;

(6) “ $a > 2$ ”是“ $a \geq 2$ ”的_____条件;

(7) “ ab 不全为 0”是“ ab 全不为 0”的_____条件;

(8) “ $|a - 2| \neq 2 - a$ ”是“ $a \geq 2$ ”的_____条件。

解 必要不充分; 充要; $a=0$ (仅举一例); $a=0$ 或 $b=0$; $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$; 充分不必要; 既不充分也不必要; 充要。

练习 1.31 设 $a, b \in \mathbb{R}$, 集合 $\{1, a+b, a\} = \left\{0, \frac{b}{a}, b\right\}$, 则 $b - a =$ _____

解 2