广义逆矩阵与解方程组实验报告

姓名：刘然

学号：2023202120001

学院：电子信息学院

专业：无线电物理

日期：2023.12.7

目录

一：广义逆矩阵

1. 广义逆矩阵定义

定义：设矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$，若矩阵 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 满足如下四个 Penrose 方程

$$\boldsymbol{AXA}=\boldsymbol{A} \tag{0.1}$$

$$\boldsymbol{XAX}=\boldsymbol{X} \tag{0.2}$$

$$(\boldsymbol{AX})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{AX} \tag{0.3}$$

$$(\boldsymbol{XA})^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{XA} \tag{0.4}$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 逆，记为 $\boldsymbol{A}^{+}$。

显而易见的是，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵，则其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 满足上述四个 Penrose 方程，因此，此时有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{+}$。

定理：对任意 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$，$\boldsymbol{A}^{+}$ 存在且唯一。

该定理可以利用 SVD 分解证明 $\boldsymbol{A}^{+}$ 的存在性，再根据方程之间的关系证明唯一性。证明过程表明 $\boldsymbol{A}^{+}$ 的求解可以依据 SVD 分解得到。

实际上，满足 Penrose 方程若干个的矩阵 $\boldsymbol{X}$ 均为的广义逆矩阵。然而，只有 $\boldsymbol{A}^{+}$ 是唯一的，其余均不唯一，具体定义如下：

定义：对任意 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$，若 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 满足 Penrose 方程中的 $(i),(j),\cdots,(l)$ 等方程，则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{i,j,\cdots,l\}-$逆，记为 $\boldsymbol{A}^{(i,j,\cdots,l)}$，其全体记为 $A\{i,j,\cdots,l\}$。

根据上述定义可知，从 Penrose 四个方程中任选若干个成立，可以得到一类广义逆矩阵，根据选择的不同，最终可以得到 15 类广义逆矩阵，即

$$C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=15$$

应用较多的是以下五类：

$$A\{1\},A\{1,2\},A\{1,3\},A\{1,4\},A\{1,2,3,4\}$$

显然，只有 $A\{1,2,3,4\}$ 这一类矩阵中只会含有一个矩阵，即 Moore-Penrose 矩阵，同时该矩阵也属于其他所有广义逆矩阵，故一般求广义逆矩阵时，指的是求 Moore-Penrose 逆矩阵。

2. 广义逆矩阵性质

广义逆矩阵的性质诸多，此处仅给出少数几条较为常用的性质。

定理：矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n}$ 有唯一 $\{1\}-$逆 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异矩阵，且这个 $\{1\}-$逆 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 。

该定理说明，矩阵的 $\{1\}-$逆 对于奇异矩阵而言一般是不唯一的，仅当是非奇异矩阵时，才有唯一的 $\{1\}-$逆 。

有关 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ 的一些性质：

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}^{+})=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A})^{+}=\boldsymbol{A}^{+}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+};(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+}\boldsymbol{A}^{+}$$

$$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}})^{+}=(\boldsymbol{A}^{+})^{\mathrm{H}};(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{+}=(\boldsymbol{A}^{+})^{\mathrm{T}}$$

二：广义逆矩阵求解方法

前文已提及，可以根据矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 SVD 分解从而求解 $\boldsymbol{A}^{\dagger}$，然而矩阵的 SVD 分解较为复杂，耗时较长，一般采取较为简单的方法。下面主要介绍 Hermite 标准形和满秩分解计算广义逆矩阵的方法。

1. Hermite 标准形计算矩阵{1}-逆、{1，2}-逆

根据矩阵分解的知识可知，任意矩阵 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}_r^{m\times n}(r>0)$ 都可以通过初等行变换化为 Hermite 标准形 $\boldsymbol{B}$，即存在有限个初等矩阵的乘积，记作 $\boldsymbol{Q}$，满足

$$\boldsymbol{QA}=\boldsymbol{B}$$

根据矩阵 $\boldsymbol{B}$，可以构造置换矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{QAP}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{K}$ 是 $r\times(n-r)$ 的子阵。

对于上述定义做部分解释：

- 初等矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 由单位矩阵进行初等行列变换所得，对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换可以表示为左乘初等矩阵。要得到矩阵 $\boldsymbol{Q}$，可以通过对矩阵块 $[\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{I}]$ 进行初等行变换，得到 $[\boldsymbol{B}\ \vdots\ \boldsymbol{Q}]$
- 置换矩阵指的是每一行恰有一个 1，每一列也恰有一个 1 的矩阵。

定理： 设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}_r^{m\times n}$，又设 $\boldsymbol{Q}\in\boldsymbol{C}_m^{m\times m}$ 和 $\boldsymbol{P}\in\boldsymbol{C}_n^{n\times n}$，使得

$$\boldsymbol{QAP}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{K}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$

成立，则对任意 $\boldsymbol{L}\in\boldsymbol{C}^{(n-r)\times(n-r)}$，$n\times m$ 矩阵

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{L}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1\}-$逆。

同时，若取 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{X}\in A\{1,2\}$。

2. 满秩分解计算矩阵 Moore-Penrose 逆

应用满秩分解的方法，可以快捷的求解 Moore-Penrose 逆。

定理：设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}_r^{m\times n}(r>0)$ 的满秩分解为式 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{F}\boldsymbol{G}$，据此可得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 Moore-Penrose 的逆：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{+}&=\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{G}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}})^{-1}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{F})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\\&=\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{G}^{\mathrm{H}})^{-1}\boldsymbol{F}^{\mathrm{H}}\end{aligned}$$

由于矩阵的满秩分解并非唯一，因此使用刚方法时，$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 可以在满足满秩分解的基础上任意选择。但根据定理公式计算得到的 Moore-Penrose 逆是唯一的。

三：MATLAB 仿真求解线性方程组

1. 求解线性方程组条件

一个线性方程组，通常可以表示为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$

其中，$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{C}^{m}$ 都是给定的值，向量 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{C}^{n}$ 为待估向量。若存在向量 $\boldsymbol{x}$ 使得线性方程组成立，则称该方程组相容，反之称不相容或矛盾。

一般而言，求解线性方程组存在四种情况：

- 线性方程组相容，存在唯一解。
- 线性方程组相容，不存在唯一解，仅有通解，此时可以求具有极小范数的解（对于向量而言一般是二范数），即

$$\min_{\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}}\|\boldsymbol{x}\|$$

此时的解是唯一的，称为**极小范数解。**

- 线性方程组不相容，不存在通常意义的解。对于许多实际问题，一般需要求最小二乘解，即

$$\min\|\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\|$$

该解一般不唯一，称为**最小二乘解。**

- 线性方程组不相容，在最小二乘解的集合中，具有极小范数的解

$$\min_{\min\|\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\|}\|\boldsymbol{x}\|$$

是唯一的，称为**极小范数最小二乘解**。

2. 线性方程组相容/矛盾判断

对于线性方程组而言，若系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异矩阵，则解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ 是唯一解。而若 $\boldsymbol{A}$ 为奇异矩阵或非方阵时，一般需要利用广义逆矩阵求方程组的解。

首先从线性方程组是否相容进行判断，只有相容的线性方程组才有通常意义上的解。

定理：线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 相容的充要条件为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$$

且通解为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{(1)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$$

其中，$\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{C}^n$ 为任意 n 向量。

定理说明，在给定 $\{1\}-$ 逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{(1)}$ 的情况下，可以对矩阵是否相容进行直接判断。而由于 $\{1\}-$ 逆矩阵不唯一，因此，可以选用其中的一个确定矩阵，Moore-Penrose 逆进行判断线性方程组是否相容，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$ 成立，则存在通解

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$$

3. 相容线性方程组极小范数解

上一小节已经指出，相容的线性方程组可能存在通解，而其极小范数解唯一。

定理：若方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 相容，则

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{(1,4)}\boldsymbol{b}$$

是极小范数解，其中 $\boldsymbol{A}^{(1,4)}\in A\{1,4\}$。

该定理说明，可以通过求系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,4\}-$ 逆来求解线性方程组的极小范数解。而事实上，由于该极小范数解唯一，而 $\{1,4\}-$ 逆不唯一，同时 Moore-Penrose 逆有属于 $\{1,4\}-$ 逆，因此可以说 Moore-Penrose 逆即为这个唯一的解，也即极小范数解，表示为 $\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}$。

4. 矛盾线性方程组最小二乘解

前已论及，若方程组矛盾，则不存在通常意义的解，但根据实际要求存在最

小二乘解，该解可由广义逆矩阵表示。

定理：设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{C}^{m},\boldsymbol{A}^{(1,3)}\in A\{1,3\}$，则

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$$

是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的最小二乘解。

该定理说明，可以通过求系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\{1,3\}-$逆 求线性方程组的最小二乘解。需要说明的是，一般情况下，最小二乘解是不唯一的，仅当 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩时，此时的最小二乘解才唯一。类似的，当要求某个最小二乘解时，可以直接应用 Moore-Penrose 矩阵求解， $\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}$ 为特解，通解为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$。

5. 矛盾线性方程组极小范数最小二乘解

虽然矛盾线性方程组的最小二乘解一般不唯一，但是极小范数最小二乘解却是唯一的，并且它可以由 Moore-Penrose 逆表出。

定理：设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{C}^{m\times n},\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{C}^{m}$，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}$ 是方程组的唯一极小范数最小二乘解。

该定理说明，对于矛盾方程组，一般情况下可以直接求解 Moore-Penrose 逆得到唯一的极小范数最小二乘解，即。 $\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b}$ 求解实际问题时常常是该情况。

6. MATLAB 实测

为探究线性方程组的解和广义逆矩阵的关系，使用 MATLAB 平台进行实验，系统采用 Windows10。

在求解线性方程组过程中，无论是相容还是矛盾，都可以使用 Moore-Penrose 逆进行显式表达。当线性方程组相容时，若系数矩阵为非奇异矩阵，则使用 Moore-Penrose 逆求解得到的结果与 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ 一致；而若系数矩阵为奇异矩阵或非方阵时，使用 Moore-Penrose 逆求解得到的结果为极小范数解。当线性方程组矛盾时，使用 Moore-Penrose 逆求解得到的结果为极小范数最小二乘解。

MATLAB 中求解 Moore-Penrose 逆的函数/方法为 pinv()，该方法基于 SVD 分解。此外，利用满秩分解也可以计算 Moore-Penrose 逆，只是存在一定的计算误差（主要是由于满秩分解存在误差）。

综上，MATLAB 仿真步骤如下：

1. 根据 3.4 节中的判断条件，分别生成三个相容和矛盾线性方程组。
2. 使用 pinv()函数对线性方程组求解，对于相容线性方程组，求的是极小范数解；对于矛盾线性方程组，求的是极小范数最小二乘解。
3. 对解进行验证，对于相容线性方程组，首先验证是否符合线性方程组，其次利用通解评估范数大小；对于矛盾线性方程组，利用通解评估解的最小二乘解的范数大小。

实验结果如下：

```
相容线性方程组及其极小范数解为:

A =

    54    65    46    23    16    11    97
    10    48    91    24    24    45    21

x =

    0.0076
    0.0103
    0.0093
    0.0039
    0.0030
    0.0030
    0.0137

b =

     3
     2

验证正确比例50/50
```

图 1：相容线性方程组 1 的广义逆解

相容线性方程组及其极小范数解为：

```
A =

    94    14

x =

    0.0104
    0.0016

b =

     1
```

验证正确比例50/50

图 2：相容线性方程组 2 的广义逆解

矛盾线性方程组及其极小范数最小二乘解为：

```
A =

    17    37     3    61    10    75     1    25
    91    14    21    34    86     9    30    52
    70    94    42    21    10    37    13    49
    67    68    43    58    13    76    80    68
    89    74    48    54    39    69    88    52
    39    93     7    90    42    92    35    68
    44    73     8    33    19    82    43     7
    82    95    55    61    17    62    15    84
    38    74    51    36    73    81    92    95
    36    64    73    56    15    24    98    44

x =

   -0.0087
    0.0737
   -0.0223
   -0.0163
    0.0351
    0.0334
   -0.0282
    0.0330

b =

     5
     5
     8
     8
     1
    10
     9
     9
     9
     3
```

验证正确比例50/50

图 3：矛盾线性方程组 1 的广义逆解

矛盾线性方程组及其极小范数最小二乘解为：

```
A =

     4    39
    62    97
    23    88
    22    71
```

```
x =

   -0.2023
    0.1397
```

```
b =

     6
     1
     5
     8
```

验证正确比例50/50

图 4：矛盾线性方程组 2 的广义逆解

此外，还利用满秩分解进行简单验证，结果如下：

```
A =

     2     1     0     2
     0     0     1     2
     2     1     1     4


A_inv =

   28.0000  -26.0000    2.0000
   14.0000  -13.0000    1.0000
  -17.0000   22.0000    5.0000
   -6.0000   18.0000   12.0000
```

图 5：满秩分解求 Moore-Penrose 逆

该结果与课件例题所示一致(整数显示)：

$$A^{+} = G^{+}F^{+} = \frac{1}{87}\begin{bmatrix} 28 & -26 & 2 \\ 14 & -13 & 1 \\ -17 & 22 & 5 \\ -6 & 18 & 12 \end{bmatrix}$$

图 6：课件例题结果

7. 实验总结

利用 MATLAB 自带的 pinv()函数可以较为快速的求解线性方程组，同时可以据此生成相容或矛盾线性方程组。实验结果表明，pinv()在一定容限内，针对相容线性方程组，可以得到较好的极小范数解；而针对矛盾线性方程组，则可以得到较好的极小范数最小二乘解。

然而，由于 MATLAB 计算存在误差，实际所求的解不一定是极小范数的。仿真过程中发现由于 pinv()函数容限的影响，方程组的解不一定总是极小范数，其与通解可能存在极小的差距（可正可负），一般是10^{-14}数量级的，而在这个范围内，可以认为得到了极小范数解，仿真过程中设置10^{-13}为可容忍的范围。