广义逆矩阵与解方程组实验报告

姓名: 刘然

学号: 2023202120001

学院: 电子信息学院

专业: 无线电物理

日期: 2023.12.7

目录

广义逆	矩阵与解方程组实验报告	1
— :	广义逆矩阵	3
1.	广义逆矩阵定义	3
2.	广义逆矩阵性质	4
_:	广义逆矩阵求解方法	5
1.	Hermite 标准形计算矩阵{1}-逆、{1, 2}-逆	5
2.	满秩分解计算矩阵 Moore-Penrose 逆	6
三:	MATLAB 仿真求解线性方程组	7
1.	求解线性方程组条件	7
2.	线性方程组相容/矛盾判断	7
3.	相容线性方程组极小范数解	8
4.	矛盾线性方程组最小二乘解	8
5.	矛盾线性方程组极小范数最小二乘解	9
6.	MATLAB 实测	9
7.	实验总结	13

一: 广义逆矩阵

1. 广义逆矩阵定义

定义: 设矩阵 $A \in C^{m \times n}$, 若矩阵 $X \in C^{m \times n}$ 满足如下四个 Penrose 方程

$$AXA = A \tag{0.1}$$

$$XAX = X \tag{0.2}$$

$$(AX)^{H} = AX \tag{0.3}$$

$$(XA)^{H} = XA \tag{0.4}$$

则称 X 为 A 的 Moore-Penrose 逆,记为 A^+ 。

显而易见的是,若矩阵 A 是非奇异矩阵,则其逆矩阵 A^{-1} 满足上述四个 Penrose 方程,因此,此时有 $A^{-1} = A^{+}$ 。

定理: 对任意 $A \in C^{m \times n}$, A^+ 存在且唯一。

该定理可以利用 SVD 分解证明 A^+ 的存在性,再根据方程之间的关系证明唯一性。证明过程表明 A^+ 的求解可以依据 SVD 分解得到。

实际上,满足 Penrose 方程若干个的矩阵 X 均为的广义逆矩阵。然而,只有 \mathbf{A}^+ 是唯一的,其余均不唯一,具体定义如下:

定义:对任意 $A \in C^{m \times n}$,若 $X \in C^{m \times n}$ 满足 Penrose 方程中的 $(i),(j),\cdots,(l)$ 等方程,则称X为A的 $\{i,j,\cdots,l\}$ -逆,记为 $A^{(i,j,\cdots,l)}$,其全体记为 $A\{i,j,\cdots,l\}$ 。

根据上述定义可知,从 Penrose 四个方程中任选若干个成立,可以得到一类广义逆矩阵,根据选择的不同,最终可以得到 15 类广义逆矩阵,即

$$C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 15$$

应用较多的是以下五类:

 $A\{1\}, A\{1,2\}, A\{1,3\}, A\{1,4\}, A\{1,2,3,4\}$

显然,只有 A{1,2,3,4} 这一类矩阵中只会含有一个矩阵,即 Moore-Penrose 矩阵,同时该矩阵也属于其他所有广义逆矩阵,故一般求广义逆矩阵时,指的是求 Moore-Penrose 逆矩阵。

2. 广义逆矩阵性质

广义逆矩阵的性质诸多,此处仅给出少数几条较为常用的性质。

定理: 矩阵 $A \in C^{m \times n}$ 有唯一 $\{1\}$ – 逆的充要条件是 A 是非奇异矩阵,且这个 $\{1\}$ – 逆与 A^{-1} 。

该定理说明,矩阵的{1}-逆对于奇异矩阵而言一般是不唯一的,仅当是非奇异矩阵时,才有唯一的{1}-逆。

有关 A^{\dagger} 的一些性质:

$$rank(A^{+}) = rank(A)$$

$$(A^{H}A)^{+} = A^{+}(A^{H})^{+}; (AA^{H})^{+} = (A^{H})^{+}A^{+}$$

$$(A^{H})^{+} = (A^{+})^{H}; (A^{T})^{+} = (A^{+})^{T}$$

二: 广义逆矩阵求解方法

前文已提及,可以根据矩阵 A 的 SVD 分解从而求解 A^{\dagger} ,然而矩阵的 SVD 分解较为复杂,耗时较长,一般采取较为简单的方法。下面主要介绍 Hermite 标准形和满秩分解计算广义逆矩阵的方法。

1. Hermite 标准形计算矩阵{1}-逆、{1, 2}-逆

根据矩阵分解的知识可知,任意矩阵 $A \in C_r^{m\times n}(r>0)$ 都可以通过初等行变换化为 Hermite 标准形B,即存在有限个初等矩阵的乘积,记作Q,满足

$$QA = B$$

根据矩阵B,可以构造置换矩阵P,使得

$$QAP = \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix}$$

其中K是 $r \times (n-r)$ 的子阵。

对于上述定义做部分解释:

- 初等矩阵Q 由单位矩阵进行初等行列变换所得,对矩阵A 做初等行变换可以表示为左乘初等矩阵。要得到矩阵Q,可以通过对矩阵块[A : I]进行初等行变换,得到[B : Q]
- 置换矩阵指的是每一行恰有一个 1,每一列也恰有一个 1 的矩阵。

定理: 设 $A \in C_r^{m \times n}$, 又设 $Q \in C_m^{m \times m}$ 和 $P \in C_n^{n \times n}$, 使得

$$QAP = \begin{bmatrix} I_r & K \\ O & O \end{bmatrix}$$

成立,则对任意 $L \in C^{(n-r)\times(n-r)}$, $n \times m$ 矩阵

$$X = P \begin{bmatrix} I_r & O \\ O & L \end{bmatrix} Q$$

是**A**的{1}-逆。

同时,若取L=0,则 $X \in A\{1,2\}$ 。

2. 满秩分解计算矩阵 Moore-Penrose 逆

应用满秩分解的方法,可以快捷的求解 Moore-Penrose 逆。

定理: 设 $A \in C_r^{m \times n}(r > 0)$ 的满秩分解为式A = FG,据此可得矩阵A 的 Moore-Penrose 的逆:

$$A^{+} = G^{H} (GG^{H})^{-1} (F^{H}F)^{-1} F^{H}$$

= $G^{H} (F^{H}AG^{H})^{-1} F^{H}$

由于矩阵的满秩分解并非唯一,因此使用刚方法时,F 和G 可以在满足满秩分解的基础上任意选择。但根据定理公式计算得到的 Moore-Penrose 逆是唯一的。

三: MATLAB 仿真求解线性方程组

1. 求解线性方程组条件

一个线性方程组,通常可以表示为

$$Ax = b$$

其中, $A \in C^{m \times n}$, $b \in C^m$ 都是给定的值,向量 $x \in C^n$ 为待估向量。若存在向量x 使得线性方程组成立,则称该方程组相容,反之称不相容或矛盾。

一般而言,求解线性方程组存在四种情况:

- 线性方程组相容,存在唯一解。
- 线性方程组相容,不存在唯一解,仅有通解,此时可以求具有极小范数的解 (对于向量而言一般是二范数),即

$$\min_{Ax=b} ||x||$$

此时的解是唯一的, 称为极小范数解。

● 线性方程组不相容,不存在通常意义的解。对于许多实际问题,一般需要求最小二乘解,即

$$\min || Ax = b ||$$

该解一般不唯一, 称为最小二乘解。

● 线性方程组不相容,在最小二乘解的集合中,具有极小范数的解

$$\min_{\min \|Ax=b\|} \|x\|$$

是唯一的, 称为极小范数最小二乘解。

2. 线性方程组相容/矛盾判断

对于线性方程组而言,若系数矩阵A为非奇异矩阵,则解 $x = A^{-1}b$ 是唯一解。 而若A为奇异矩阵或非方阵时,一般需要利用广义逆矩阵求方程组的解。 首先从线性方程组是否相容进行判断,只有相容的线性方程组才有通常意义 上的解。

定理: 线性方程组 Ax = b 相容的充要条件为

$$AA^{(1)}b = b$$

且通解为

$$x = A^{(1)}b + (I - A^{(1)}A)y$$

其中, $y \in \mathbb{C}^n$ 为任意n向量。

定理说明,在给定 $\{1\}$ —逆矩阵 $A^{(1)}$ 的情况下,可以对矩阵是否相容进行直接判断。而由于 $\{1\}$ —逆矩阵不唯一,因此,可以选用其中的一个确定矩阵,Moore-Penrose 逆进行判断线性方程组是否相容,即 $AA^{\dagger}b=b$ 成立,则存在通解

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$$

3. 相容线性方程组极小范数解

上一小节已经指出,相容的线性方程组可能存在通解,而其极小范数解唯一。

定理: 若方程组Ax = b相容,则

$$x = A^{(1,4)}b$$

是极小范数解,其中 $A^{(1,4)} \in A\{1,4\}$ 。

该定理说明,可以通过求系数矩阵 A 的 $\{1,4\}$ – 逆来求解线性方程组的极小范数解。而事实上,由于该极小范数解唯一,而 $\{1,4\}$ – 逆不唯一,同时 Moore-Penrose 逆有属于 $\{1,4\}$ – 逆,因此可以说 Moore-Penrose 逆即为这个唯一的解,也即极小范数解,表示为 A^+b 。

4. 矛盾线性方程组最小二乘解

前已论及,若方程组矛盾,则不存在通常意义的解,但根据实际要求存在最

小二乘解,该解可由广义逆矩阵表示。

定理: 设 $A \in C^{m \times n}, b \in C^m, A^{(1,3)} \in A\{1,3\}$,则

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{(1,3)}\boldsymbol{b}$$

是方程组Ax = b的最小二乘解。

该定理说明,可以通过求系数矩阵 A 的 $\{1,3\}$ – 逆 求线性方程组的最小二乘解。需要说明的是,一般情况下,最小二乘解是不唯一的,仅当 A 是列满秩时,此时的最小二乘解才唯一。类似的,当要求某个最小二乘解时,可以直接应用 Moore-Penrose 矩阵求解, A^+b 为特解,通解为 $x = A^+b + (I - A^+A)y$ 。

5. 矛盾线性方程组极小范数最小二乘解

虽然矛盾线性方程组的最小二乘解一般不唯一,但是极小范数最小二乘解却是唯一的,并且它可以由 Moore-Penrose 逆表出。

定理: 设 $A \in C^{m \times n}$, $b \in C^m$, 则 $x = A^+b$ 是方程组的唯一极小范数最小二乘解。 该定理说明,对于矛盾方程组,一般情况下可以直接求解 Moore-Penrose 逆得到唯一的极小范数最小二乘解,即。 A^+b 求解实际问题时常常是该情况。

6. MATLAB 实测

为探究线性方程组的解和广义逆矩阵的关系,使用 MATLAB 平台进行实验,系统采用 Windows 10。

在求解线性方程组过程中,无论是相容还是矛盾,都可以使用 Moore-Penrose 逆进行显式表达。当线性方程组相容时,若系数矩阵为非奇异矩阵,则使用 Moore-Penrose 逆求解得到的结果与 $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$ 一致;而若系数矩阵为奇异矩阵或 非方阵时,使用 Moore-Penrose 逆求解得到的结果为极小范数解。当线性方程组 矛盾时,使用 Moore-Penrose 逆求解得到的结果为极小范数最小二乘解。

MATLAB 中求解 Moore-Penrose 逆的函数/方法为 pinv(),该方法基于 SVD 分解。此外,利用满秩分解也可以计算 Moore-Penrose 逆,只是存在一定的计算误差(主要是由于满秩分解存在误差)。

综上, MATLAB 仿真步骤如下:

- 1. 根据 3.4 节中的判断条件,分别生成三个相容和矛盾线性方程组。
- 2. 使用 pinv()函数对线性方程组求解,对于相容线性方程组,求的是极小范数解:对于矛盾线性方程组,求的是极小范数最小二乘解。
- 3. 对解进行验证,对于相容线性方程组,首先验证是否符合线性方程组,其次利用通解评估范数大小;对于矛盾线性方程组,利用通解评估解的最小二乘解的范数大小。

实验结果如下:

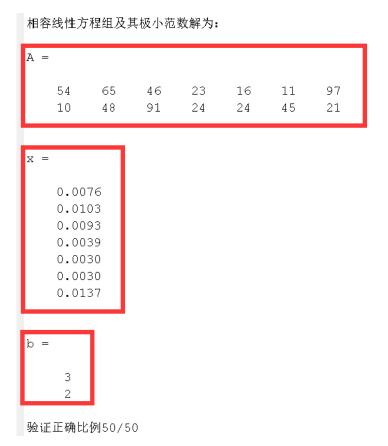
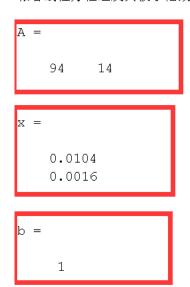


图 1: 相容线性方程组 1 的广义逆解

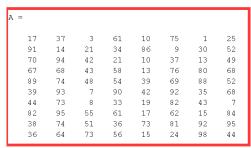
相容线性方程组及其极小范数解为:

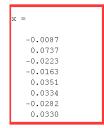


验证正确比例50/50

图 2: 相容线性方程组 2 的广义逆解

矛盾线性方程组及其极小范数最小二乘解为:







验证正确比例50/50

图 3: 矛盾线性方程组 1 的广义逆解

矛盾线性方程组及其极小范数最小二乘解为:

验证正确比例50/50

图 4: 矛盾线性方程组 2 的广义逆解

此外,还利用满秩分解进行简单验证,结果如下:

图 5: 满秩分解求 Moore-Penrose 逆

该结果与课件例题所示一致(整数显示):

$$A^{+} = G^{+}F^{+} = \frac{1}{87} \begin{bmatrix} 28 & -26 & 2 \\ 14 & -13 & 1 \\ -17 & 22 & 5 \\ -6 & 18 & 12 \end{bmatrix}$$

图 6: 课件例题结果

7. 实验总结

利用 MATLAB 自带的 pinv()函数可以较为快速的求解线性方程组,同时可以据此生成相容或矛盾线性方程组。实验结果表明,pinv()在一定容限内,针对相容线性方程组,可以得到较好的极小范数解;而针对矛盾线性方程组,则可以得到较好的极小范数最小二乘解。

然而,由于 MATLAB 计算存在误差,实际所求的解不一定是极小范数的。仿真过程中发现由于 pinv()函数容限的影响,方程组的解不一定总是极小范数,其与通解可能存在极小的差距(可正可负),一般是10⁻¹⁴数量级的,而在这个范围内,可以认为得到了极小范数解,仿真过程中设置10⁻¹³为可容忍的范围。