

Figure 11 : Diagramme de l'algorithme classique pour trouver la solution périodique

4 INFLUENCE DE DEFORMATION THERMIQUE SUR LE COMPORTEMENT DYNAMIQUE

La déformation thermique du rotor ~~peut introduire le~~ *introduit un* balourd thermique qui influence le comportement dynamique du rotor. Le terme « balourd thermique » est une façon vulgarisée pour expliquer l'augmentation de l'amplitude et le changement de phase de la vibration synchrone à l'origine de la déformation thermique du rotor. Dans la littérature [13], [14], ~~ce~~ *ce* balourd thermique est souvent modélisée par deux approches : ~~approche~~ *approche* masse concentrée et ~~approche~~ *approche* du défaut de la fibre neutre. Dans cette section, ces deux approches sont présentées.

4.1 *Cette* APPROCHE DES MASSES CONCENTREES

L'~~approche des masses concentrées~~ *de* modélise la source d'excitation à l'origine de déformation thermique à partir la définition du balourd, i.e. une masse m décentrée de son axe de rotation par une distance d . Cette approche peut être utilisée sur rotor rigide et rotor flexible. En fait, suite à l'échauffement non-homogène dans la section du palier, le rotor se déforme de manière asymétrique, ce qui engendra une déviation de sa fibre neutre par rapport à l'axe de rotation (**Figure 12**). L'influence de cette déviation de la fibre neutre sur la dynamique de rotors ~~peut être~~ *un* caractérisée par une masse locale d'élément d'arbre et sa déviation. Par exemple, si toute la ligne d'arbre est modélisée par n éléments d'arbre. Chaque élément possède son propre masse m_i . La distance $\overrightarrow{q_{th_i}}$ est la déviation due à la déformation thermique entre le centre de masse de l'élément G_i et l'axe de rotation z . Pour chaque élément i , le balourd généré thermiquement est exprimé :

$$\overrightarrow{U_i^{th}} = m_i \left| \overrightarrow{q_{th_i}} \right| e^{(j\omega t + \varphi_i^{th})} \quad \text{Eq.42}$$

Où : $\varphi_{th_i} = \arctan2(u_i^{th}, v_i^{th})$, il est la phase du balourd thermique généré

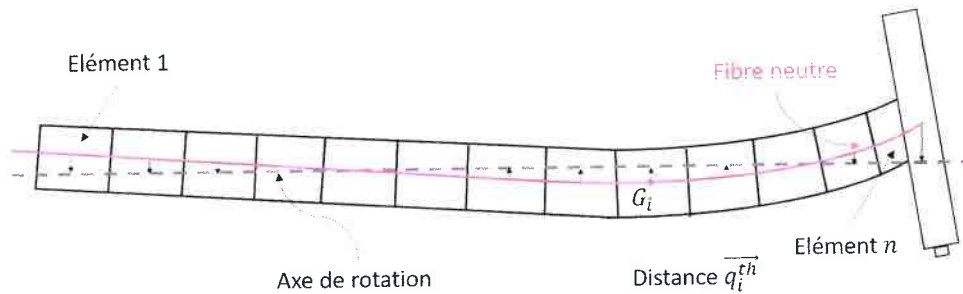


Figure 12 : défaut de la fibre neutre

La force correspondante au balourd généré au niveau de l'élément i , peut être exprimée à l'aide de la matrice élémentaire M_e ou le balourd thermique sous forme d'un vecteur U_i^{th} .

$$F_i^{U^{th}} = \omega^2 M_e \begin{bmatrix} |q_i^{th}| \cos(\omega t + \varphi_i^{th}) \\ |q_i^{th}| \sin(\omega t + \varphi_i^{th}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \omega^2 U_i^{th} e^{j(\omega t + \varphi_i^{th})} \quad \text{Eq.43}$$

ajoutée *ce sont les degrés de liberté de rotation ?* *comme*

Cette force est intégrée au système des équations différentielles de mouvement Eq.23 en tant qu'une force extérieure qui influence le comportement dynamique du rotor. Si cette force est la seule force extérieure appliquée au système et sa phase φ^{th} est supposée nulle, l'équation du mouvement peut être simplifiée sous forme :

$$M\ddot{q} + [C + G(\Omega)]\dot{q} + Kq = \omega^2 U^{th} e^{j\omega t} \quad \text{Eq.44}$$

il faut ajouter le terme propre du rotor

Supposant que la solution de l'équation Eq.44 est sous forme $q(t) = |q|_{mc} e^{j\omega t}$, l'amplitude de vibration obtenue par l'approche de masse concentré (mc) est obtenue par :

$$|q|_{mc} = \frac{\omega^2 U^{th}}{K - \omega^2 M + j\omega(C + G)} \quad \text{Eq.45}$$

impossible, il faut un déplacement

4.2 APPROCHE DE DEFECTS DE LA FIBRE NEUTRE

Cette approche modélise l'influence de la déformation thermique comme une force interne du système qui est liée à la matrice de raideur du rotor K . L'approche est réservée uniquement pour le modèle du rotor à n degré de liberté. Suite à l'échauffement et la déformation thermique du rotor, la déflexion de sa fibre neutre est exprimée en q_{th} et la déflexion élastique du rotor est notée q_{elas} , alors que la déflexion nodale complète est $q = q_{elas} + q_{th}$. Les expressions des énergies du système rotor sous chargement thermique s'écrivent :

après *il faut ajouter le terme propre du rotor* *impossible, il faut un déplacement*

$$E_{elas} = \frac{1}{2} (q - q_{th})^T K (q - q_{th})$$

$$E_{ciné} = \frac{1}{2} \dot{q}^T M \dot{q} \quad \text{Eq.46}$$

$$E_{diss} = \frac{1}{2} \dot{q}^T [C + G(\Omega)] \dot{q}$$

Avec

- E_{elas} : énergie de déformation élastique du système rotor
- $E_{ciné}$: énergie cinétique du système rotor
- E_{diss} : énergie dissipée du système rotor

Après l'application de l'équation de Lagrange, l'équation du mouvement est obtenue :

$$M\ddot{q} + [C + G(\Omega)]\dot{q} + K(q - q_{th}) = 0 \quad \text{Eq.47}$$

Supposant que la solution de cette équation est sous forme $q(t) = |q|_{dfn} e^{j\omega t}$, l'amplitude de vibration obtenue par le défaut de fibre neutre (dfn) s'écrit :

$$|q|_{dfn} = \frac{K q_{th}}{K - \omega^2 M + j\omega(C + G)} \quad \text{Eq.48}$$

A partir des expressions Eq.45 et Eq.48, si l'amortissement du système rotor est supposé infiniment petit et l'effet gyroscopique est négligé, une comparaison analytique peut être réalisée en fonction de vitesse de rotation. Quand la vitesse de rotation tend vers zéro ($\omega = 0$), les deux approches donnent respectivement l'amplitude de vibration :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |q|_{mc}(\omega) = 0 \quad ; \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} |q|_{dfn} = q_{th} \quad \text{Eq.49}$$

Il est constaté que l'approche masse concentrée n'a pas intégrée la déflexion du rotor due à déformation thermique dans sa solution de la vibration latérale du rotor. Ainsi, quand la vitesse est nulle, son amplitude de vibration tend vers zéro alors que celle de l'approche du défaut de fibre neutre tend vers la déflexion statique du rotor due à la déformation thermique.

Quand la vitesse de rotation tend vers infini ($\omega = \infty$), les deux approches donnent respectivement l'amplitude de vibration :

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |q|_{mc}(\omega) = -\frac{U^{th}}{M} \quad ; \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} |q|_{dfn}(\omega) = 0 \quad \text{Eq.50}$$

Il est observé que l'approche de masse concentrée tend vers une asymptote alors que celle du défaut de fibre neutre tend vers 0.

le rotor est instable !!

Si la vitesse est nulle la déformation thermique est nulle. !!

Je ne comprends pas bien cette comparaison.

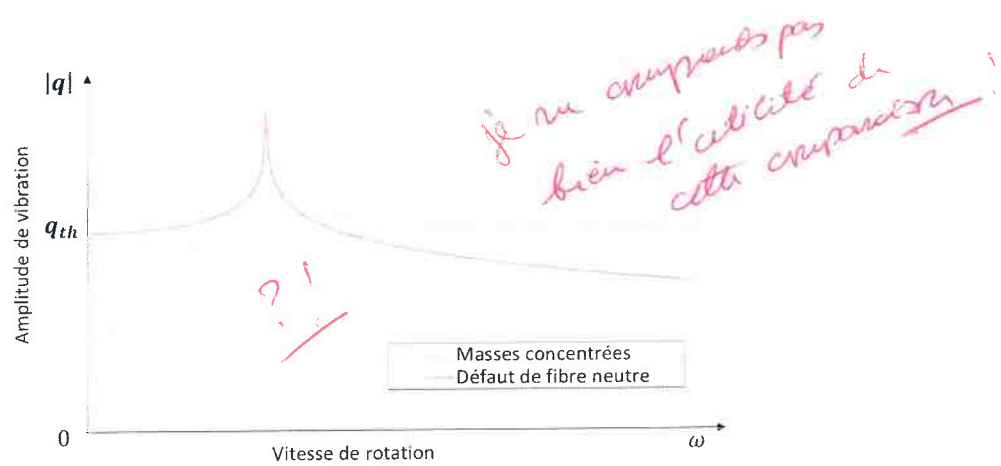


Figure 13 : Résultat de comparaison analytique de deux approche

Selon les résultats de la comparaison analytique obtenus, les deux approches donnent des influences pas tout à faire le même sur le comportement dynamique du système rotor. En fonction de la vitesse de rotation, l'écart sur l'amplitude de vibration obtenues par ces deux approches existe. Dans la littérature, grâce à sa simplicité de l'implémentation, l'approche de masse concentrée est souvent utilisée dans les analyses qualitatives de l'effet Morton comme Kirk [XX] et Lorentz [XX]. Néanmoins, lors de la précision de prédiction de l'effet Morton est visée, la démarché du défaut de fibre neutre est recommandé.

5 CONCLUSION

Ce chapitre a permis de présenter en détail les modèles numériques des rotors utilisé pour réaliser les analyses de l'effet Morton. Le modèle dynamique des rotors couplé avec le modèle non linéaire du palier a permis d'évaluer le niveau de vibration. En parallèle, le flux thermique à l'issue du modèle de palier est servi d'une condition aux limites thermiques dans le modèle thermique du rotor. La résolution du modèle thermique a permis d'évaluer le champ de température dans le temps et puis de simuler la déformation du rotor. La connaissance de la déflexion de la fibre neutre du rotor due à sa déformation thermique a rendu possible d'entamer deux approches pour modéliser le balourd thermique. Dans le chapitre suivant, ces outils numériques seront utilisés pour calculer les paramètres physiques qui permet de réaliser l'analyse de l'effet Morton.

6 REFERENCE

- [1] Suh J, Palazzolo A. "Three-Dimensional Thermohydrodynamic Morton Effect Simulation — Part I: Theoretical Model", ASME Journal of Tribology. 2014; 136(3):031706-031706-14. doi:10.1115/1.4027309.
- [2] Feng K, Kaneko S. "Thermohydrodynamic study of multiwound foil bearing using Lobatto point quadrature", ASME Journal of Tribology, Vol.131, April 2009
- [3] M. Lalanne and G. Ferraris. "Rotor dynamics prediction in engineering" , John Wiley and Sons, Chichester (UK), 1990, ISBN 0471 926337
- [4] J. Vance, Z. Fouad et B. Murphy, "Machinery Vibration and Rotordynamics", John Wiley & Sons, 2010, ISBN: 9780471462132
- [5] M. Friswell, J. Penny, S. Garvey et A. Lees, "Dynamics of Rotating Machines" Cambridge: Cambridge University Press, 2010, doi:10.1017/CBO9780511780509
- [6] Lalanne, M., Ferraris, G., Genta, G., 1998, Rotordynamics prediction in engineering, Springer.
- [7] DAKEL M., BAGUET S., DUFOUR R. Nonlinear dynamics of a support-excited flexible rotor with hydrodynamic journal bearings. Journal of Sound and Vibration, 2014, vol. 333, n° 10, pp. 2774-2799.
- [8] DAKEL M., 2014, "Stabilité et dynamique non linéaire de rotors embarqués", thèse de INSA de Lyon
- [9] Zienkiewicz O.C. et Taylor R.T. : The Finite Element Method Volume 1 : The Basics, 5th Ed, Butterworth-Heinemann, 2000.
- [10]Levenspiel, O., Engineering Flow and Heat Exchange, Revised Edition, Plenum Press, 1998, pp. 173-78, 182-84.
- [11] CodeAster© Référence R5.02.01, "Algorithme de thermique linéaire transitoire"
- [12] CodeAster© Référence R3.03.08, "Relations cinématiques linéaires de type RBE3"
- [13] Tong X, Palazzolo A, Suh J., "Rotordynamic Morton Effect Simulation With Transient, Thermal Shaft Bow," ASME J. Tribol., 138(3), p. 031705, 2016.
- [14] Tong X, Palazzolo A, Suh J., "A Review of the Rotordynamic Thermally Induced Synchronous Instability (Morton) Effect". ASME. Appl. Mech. Rev. 2017;69(6):060801-060801-13. doi:10.1115/1.4037216.
- [15]

7 ANNEXE : METHODE DES ELEMENTS FINIS POUR LA CONDUCTION THERMIQUE

7.1 FORMULATION VARIATIONNELLE DU PROBLEME CONDUCTION THERMIQUE

La résolution de l'équation du transfert de chaleur ~~au sein du rotor~~ fait appeler la méthode des éléments finis en ~~mécanique du solide~~. Afin d'appliquer la méthode, il est systématique de passer l'équation Eq.2 sous forme faible ~~en une~~ formulation variationnelle. Soit Ω est le domaine étudié \mathbb{R}^3 qui contient les frontières $S = S_c \cup S_\phi \cup S_{adia} \cup S_T$, la formulation faible de l'équation de la chaleur est :

$$\int_{\Omega} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \cdot T^* d\Omega - \int_{\Omega} \text{div}(\lambda \nabla T) \cdot T^* d\Omega = 0 \quad \text{Eq.A.1}$$

Où T^* est l'ensemble des champs de température qui s'annule avec la température imposée aux surfaces S_T .

Par l'intégration par partie,

$$\int_{\Omega} \text{div}(\lambda \nabla T) \cdot T^* d\Omega = \int_{\Omega} \lambda \nabla T \cdot \nabla T^* d\Omega - \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \cdot T^* dS \quad \text{Eq.A.2}$$

On obtient :

$$\int_{\Omega} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \cdot T^* d\Omega - \int_{\Omega} \lambda \nabla T \cdot \nabla T^* d\Omega + \int_S \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \cdot T^* dS = 0 \quad \text{Eq.A.3}$$

En appliquant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = H_c(T - T_{ext}) & \text{sur } S_c \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \phi & \text{sur } S_\phi \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0 & \text{sur } S_{adia} \\ T = T_{impo} & \text{sur } S_T \end{cases} \quad \text{Eq.A.4}$$

La formulation variationnelle du problème est enfin obtenue :

$$\int_{\Omega} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \cdot T^* d\Omega = \int_{\Omega} \lambda \nabla T \cdot \nabla T^* d\Omega + \int_{S_c} H_c(T - T_{ext}) \cdot T^* dS + \int_{S_\phi} \phi \cdot T^* dS \quad \text{Eq.A.5}$$

7.2 APPROXIMATION NODALE ELEMENTAIRE ET ASSEMBLAGE FINAL

Le champ de température est approximé par la fonction de forme N :

$$T(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) T_i = \mathbf{N} \mathbf{T} \quad \text{Eq.A.6}$$

où \mathbf{T} est le vecteur des températures nodales et \mathbf{N} est la fonction de forme qui permet d'approximer et interpoler la température.

Ensuite, le gradient de température s'écrit :

$$\nabla T = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial x} T_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial y} T_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial z} T_i \end{bmatrix} = \partial \mathbf{N} \mathbf{T} \quad \text{Eq.A.7}$$

Dans le membre droite de la formulation variationnelle Eq.A.5, le terme issu de la conduction thermique devient, après assemblage sur tous les éléments :

$$\int_{\Omega} \lambda \nabla T \cdot \nabla T^* d\Omega = \int_{\Omega} \lambda \mathbf{T}^{*T} \partial \mathbf{N}^T \cdot \partial \mathbf{N} \mathbf{T} d\Omega = \mathbf{T}^{*T} \mathbf{K}_{\lambda} \mathbf{T} \quad \text{Eq.A.8}$$

où \mathbf{K}_{λ} est la matrice de rigidité pour l'effet de conduction.

Le terme provenant des conditions d'échange devient après assemblage sur les éléments :

$$\int_{S_c} H_c (T_{ext} - T) \cdot T^* dS = \int_{\Omega} H_c \mathbf{T}^{*T} \mathbf{N}^T \mathbf{N} (T - T_{ext}) d\Omega = \mathbf{T}^{*T} \mathbf{K}_H \mathbf{T} - \mathbf{T}^{*T} \boldsymbol{\phi}_{ext} \quad \text{Eq.A.9}$$

où \mathbf{K}_H est la matrice de rigidité pour les effets de convection.

$$\int_{S_{\phi}} \phi \cdot T^* dS = \mathbf{T}^{*T} \boldsymbol{\phi} \quad \text{Eq.A.10}$$

Le terme transitoire dans le membre gauche devient

$$\int_{\Omega} \frac{\partial T}{\partial t} \cdot T^* d\Omega = \int_{\Omega} \rho C_p \mathbf{T}^{*T} \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{N} \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = \mathbf{T}^{*T} \mathbf{M} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{Eq.A.11}$$

La formulation variationnelle approchée devient donc :

$$\mathbf{T}^{*T} \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = \mathbf{T}^{*T} \mathbf{K}_{\lambda} \mathbf{T} + \mathbf{T}^{*T} \mathbf{K}_H \mathbf{T} - \mathbf{T}^{*T} \boldsymbol{\phi}_{ext} + \mathbf{T}^{*T} \boldsymbol{\phi} \quad \text{Eq.A.12}$$

Trouver le vecteur d'élévation de température nodale \mathbf{T} satisfaisant aux conditions aux limites en températures imposées et tel que :

$$\mathbf{T}^{*T} \left(\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} - \mathbf{K}_d \mathbf{T} - \mathbf{K}_e \mathbf{T} + \boldsymbol{\phi}_{ext} - \boldsymbol{\phi} \right) = \mathbf{0} \quad \text{Eq.A.13}$$

Ainsi le système du problème de conduction discrétisé en transitoire est :

$$\mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = \mathbf{K} \mathbf{T}(t) + \boldsymbol{\phi}(t) \quad \text{Eq.A.14}$$