

Chapitre III : Modélisation des rotors

1 INTRODUCTION

Au chapitre II, la résolution de l'équation de Reynolds et de l'énergie est présentée en vue de calculer les flux thermiques et la force hydrodynamique générés au sein du palier. Ces deux informations seront utilisées par les modèles thermomécanique et dynamique des rotors détaillés dans ce chapitre afin de réaliser l'analyse de l'effet Morton.

~~A propos des rotors, ils représentent un élément essentiel constituant les machines tournantes. Leur comportement dynamique concerne directement la sécurité de l'exploitation, la maintenance et la performance des machines. Par conséquent, la prédiction du comportement dynamique des rotors constitue un thème de recherche depuis très longtemps. Dans ce contexte, la littérature comprend de nombreux ouvrages qui présentent les phénomènes liés à la dynamique des machines tournantes [3]-[5]. Ces rotors sont modélisés de manière rigide ou flexible montés sur des paliers modélisés de manière linéaire ou non linéaire. Bien que ces modèles des rotors soient conçus pour effectuer des analyses de la dynamique des rotors classiques, ils pourraient également être utilisés dans l'analyse de l'effet Morton. Ces modèles dynamiques permettent de connaître le niveau de vibrations sous différentes conditions de fonctionnement, sachant que l'effet Morton modifie progressivement ces conditions de fonctionnement dans le temps.~~

~~Dans ce chapitre, le~~ modèle thermomécanique du rotor basé sur la méthode d'éléments finis est présenté dans un premier temps. Il permet de prédire la déformation thermique du rotor suite à l'échauffement du fluide dans le palier. Ensuite, une partie concernant la modélisation et les analyses de la dynamique des rotors est décrite. Deux modèles dynamiques des rotors utilisés pour analyser l'effet Morton sont exposés, à savoir un rotor rigide à quatre degrés de liberté et un rotor flexible à N degrés de liberté. En utilisant ces deux modèles, le système des équations du mouvement du rotor est établi. Sa résolution **en transitoire** est effectuée grâce à une **méthode d'intégration temporelle** qui combine la méthode de Newton-Raphson avec le schéma **d'intégration temporelle** de Newmark. Enfin, deux approches de la modélisation du balourd thermique sont décrites. Elles permettent de prendre en compte l'influence de la déformation thermique du rotor sur son comportement dynamique.

2 MODELE THERMOMECHANIQUE DES ROTORS

Suite à l'échauffement non homogène du fluide dans le palier, le rotor se déforme ~~thermiquement~~. Cette déformation thermique se compose d'une dilatation radiale et une flexion thermique quand une chaleur asymétrique y est appliquée [1] **Figure 1**. Son influence ~~apportée~~ sur le comportement dynamique du rotor se divise en deux types suivants :

- la dilatation thermique change l'épaisseur du film mince dans le palier hydrodynamique et se peut influencer la force fluide exercée sur le rotor
- la flexion thermique défléchit la fibre neutre du rotor de l'axe de rotation, ce qui entraîne une source d'excitation synchrone (balourd ou défaut de fibre neutre). Par abus de langage, cette source vibratoire est souvent dénommée balourd thermique.

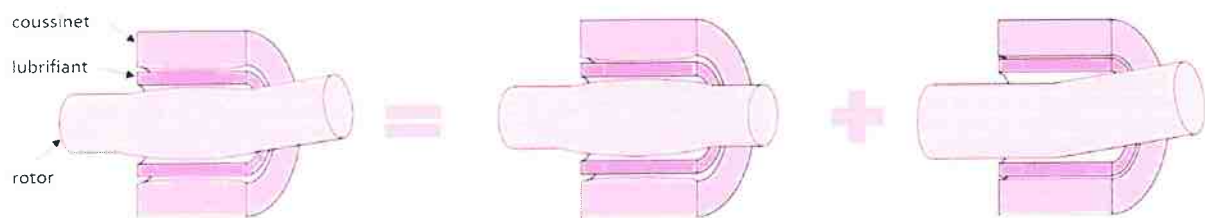


Figure 1 : déformation thermique de rotor

Dans cette thèse, ~~On~~ ^{l'a} concentre uniquement sur l'influence du balourd thermique sur le comportement dynamique du rotor. La modélisation du balourd thermique est détaillée dans la section 4. Elle nécessite de connaître la déflexion de la fibre neutre suite à la déformation thermique. Le modèle thermomécanique des rotors décrit dans cette section sert donc à évaluer la déflexion de la fibre neutre sous le chargement thermique.

2.1 MODELE THERMIQUE LINEAIRE

2.1.1 LOI DE FOURIER

Le mode principal du transfert de chaleur dans le rotor est la conduction ^{de l'axe} ~~et la loi de comportement communément utilisée est~~ la loi de Fourier. En fait, lors de la présence d'un gradient de température dans ces milieux continus, le flux thermique transite du milieu le plus chaud vers le milieu le plus froid. Cette loi donne la relation entre le vecteur de la densité de flux thermique $\vec{\phi}$, le gradient de température \overrightarrow{gradT} et la conductivité thermique λ du milieu étudié par la formule suivante :

$$\vec{\phi} = -\lambda \cdot \overrightarrow{gradT} \text{ ou } \vec{\phi} = -\lambda \cdot \nabla T \quad \text{Eq.1}$$

Le signe négatif dans cette loi est introduit pour respecter la seconde loi de la thermodynamique qui annonce que la chaleur se diffuse des zones chaudes vers celles froides.

Après analyser l'environnement extérieur qui entoure le rotor, en réalisant un bilan d'énergie et appliquant la conservation de l'énergie, l'équation de la chaleur dans le cas du rotor homogène est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{div}(\phi) + \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \\ \phi = -\lambda \cdot \nabla T \end{cases} \quad \text{Eq.2}$$

avec

ρ : masse volumique [kg/m^3]

C_p : capacité thermique massique [$\text{J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$]

λ : conductivité thermique [$\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$]

ρC_p : capacité thermique volumique [$\text{J}/(\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C})$]

Le rotor en acier est supposé isotrope et ses caractéristiques sont indépendantes de la température et détaillé dans le Tableau 1.

Tableau 1 : caractéristiques thermiques de l'acier utilisé

Caractéristiques thermiques de l'acier utilisé	Valeurs utilisées
ρ masse volumique [kg/m^3]	7850
C_p capacité thermique massique [$\text{J}/(\text{kg} \cdot ^\circ\text{C})$]	444
ρC_p capacité thermique volumique [$\text{J}/(\text{m}^3 \cdot ^\circ\text{C})$]	3485609
λ conductivité thermique [$\text{W}/(\text{m} \cdot ^\circ\text{C})$]	50

2.1.2 CONDITIONS AUX LIMITES EN THERMIQUE

Dans le cas de modélisation thermique du rotor, il existe différents types de conditions aux limites en thermique. Elles traduisent les échanges de chaleur entre le rotor et son environnement extérieur (lubrifiant du palier, air, etc...). L'application de ces types de conditions aux limites thermiques est illustrée en se basant sur le rotor du banc de l'effet Morton utilisé dans cette thèse (Figure 2).

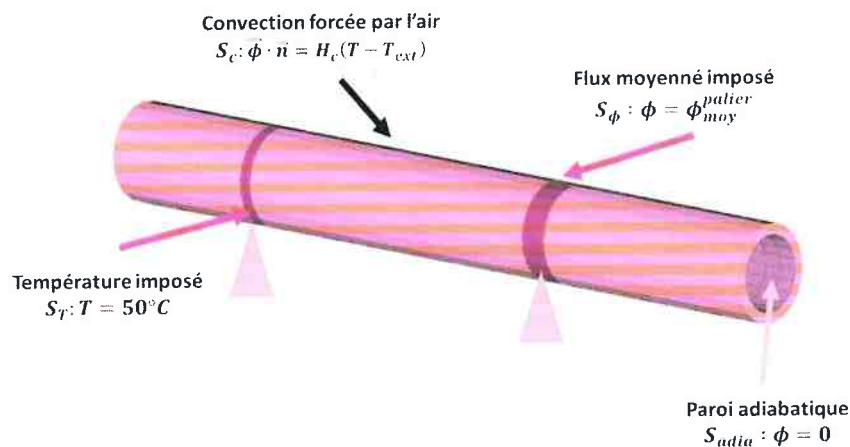


Figure 2 : Conditions aux limites en thermique au cas du banc de l'effet Morton

- Convection

Le phénomène de convection thermique traduit les échanges de chaleur avec l'air. Ces échanges sont réalisés de manière forcée, car le rotor tourne à une vitesse importante. Une variation de température

entre la température du milieu extérieur T_{ext} et celle du rotor T est imposée à la surface jaune S_c . La condition de convection à travers cette surface s'écrit :

$$\vec{\phi} \cdot \vec{n} + H_c(T_{ext} - T) = 0 \quad \text{sur } S_c \quad \text{Eq.3}$$

avec

\vec{n} est la normale à la surface S_c

H_c est le coefficient de convection ou d'échange en $[W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}]$

Le coefficient de convection H_c dépend du milieu extérieur et du caractère forcé ou non de l'échange.

- Le tableau à l'issue de [10] donne quelques ordres de grandeur de ce coefficient.

Tableau 2 : Ordres de grandeur du coefficient de convection thermique

Fluide	Convection libre	Convection forcée
Air	5-25	10-50
Eau	100-900	100-1500
Huile	-	50-2000

- Flux imposé

Cette condition aux limites est appliquée à la surface d'interaction lubrifiant-rotor, notée S_ϕ , au niveau du palier hydrodynamique. En utilisant le modèle complet du palier, le flux thermique à l'interface fluide-structure peut être calculé par la résolution de l'équation de l'énergie du film mince. Une démarche du moyennage de ce flux dans le temps, détaillé dans la section XXX, est utilisée pour réduire le temps de calcul. En outre, puisque l'espace à l'intérieur du rotor creux forme une espace enfermée qui est isolé thermiquement du milieu extérieur, un flux nul $\phi = 0$ est imposé à la surface intérieure du rotor, S_{adia} pour traduire la paroi adiabatique.

- Température imposée

Cette condition aux limites est utilisée pour représenter l'échauffement du roulement utilisé dans le cadre de cette thèse. La surface sur laquelle cette condition est appliquée est nommée S_T .

2.1.3 RESOLUTION EN TRANSITOIRE

La résolution des équations de la chaleur en transitoire permet d'avoir le champ de température du rotor dans le temps. Sa résolution au sein du rotor fait appeler la méthode des éléments finis en mécanique du solide. Une synthèse de sa démarche pour résoudre la mécanique de solide en thermique par la méthode des éléments finis est détaillée en Annexe 6. Après la discrétisation en espace de l'équation de chaleur (Eq.2), le système des équations différentielles du premier ordre est obtenu :

$$M \frac{\partial T}{\partial t} = K T(t) + \phi(t) \quad \text{Eq.4}$$

Avec

$T(t)$: vecteur des températures nodales

~~M~~: matrice de masse thermique

~~K~~: matrice de rigidité thermique

~~ϕ~~ : vecteur du second membre.

un- autre

Sa résolution ~~en transitoire~~ est généralement réalisée avec deux types de schéma de l'intégration temporelle ~~(explicite et implicite)~~. Si un pas de temps Δt est utilisé pour la discrétisation temporelle ~~et un schéma explicite est utilisé pour l'intégration temporelle~~, à l'instant t_{i+1} ($0 \leq i \leq n_{pt}$), *il s'agit*
l'équation **Erreur ! Source du renvoi introuvable.** peut être développée sous forme :

$$T^{i+1} = \underbrace{(I + \Delta t M^{-1} K)}_A T^i + M^{-1} \phi(t_i) \quad \text{Eq.5}$$

Il faut souligner que le pas de temps Δt est ~~de~~ limité par le rayon spectral de la matrice A , correspondant à la valeur maximum ~~des~~ *de* valeurs propres λ_i ~~données par la matrice A~~. Pour que le schéma explicite utilisé soit stable, le rayon spectral doit être inférieur à 1.

$$\rho(A) = \max(|\lambda_i|) < 1 \quad \text{Eq.6}$$

La simulation de l'effet Morton utilise θ -méthode [11] pour discrétiser l'Eq.4 dans le temps par un schéma aux différences finies.

$$M \frac{(T^{n+1} - T^n)}{\Delta t} = \theta(KT^{n+1} + \phi^{n+1}) + (1 - \theta)(KT^n + \phi^n) \quad \text{Eq.7}$$

Avec $\theta \in [0,1]$

Quand $\theta = 0$, le schéma est explicite, la stabilité du schéma dépend de la valeur propre de la matrice A . Quand $\theta \neq 0$, le schéma devient implicite. Selon la référence CodeAster© [11], si $\theta \geq 0.5$, le schéma est inconditionnellement stable, alors que lors ~~du~~ *sur* paramètre $\theta < 0.5$, la méthode est stable si le pas de temps Δt vérifie la condition suivante :

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{\max}(1 - 2\theta)} \quad \text{Eq.8}$$

Avec $\omega_{\max} = \max(M^{-1}K)$, ~~le mode propre maximum~~ *le plus grand valeur propre*

Dans le cadre de la thèse, le progiciel CodeAster© développé chez l'entreprise EDF fournit l'outil des éléments finis qui assure la résolution numérique de l'équation de la chaleur.

Modélisation de ce

2.2 MODELE DE DEFORMATION THERMIQUE

2.2.1 EQUATION DE COMPORTEMENT THERMOMECHANIQUE

Une fois le champ de température ~~est~~ *est* obtenu, la déformation thermique du rotor peut être ~~ensuite~~ *1 3 2 4* déterminée ~~et la~~ *et* notion du couplage thermomécanique est ainsi introduite. Ce couplage ici est un couplage faible, car seulement les effets thermiques sur la mécanique sont considérés. ~~Les effets inverses, c'est à dire que les effets mécaniques sur ceux-ci de la thermique~~ *qui entraînent les élévations de température dues aux déformations, ne sont pas considérés.*

Quand les effets de dilatation thermique sont pris en compte, le couplage thermomécanique se fait par la relation de comportement qui s'écrit :

$$\epsilon = C_{el}^{-1} \sigma + \alpha \Delta T I \quad \text{Eq.9}$$

Ou dans l'autre sens :

$$\sigma = C_{el} \epsilon - \alpha \Delta T C_{el} I \quad \text{Eq.10}$$

avec

$$C_{el} = \begin{bmatrix} \lambda_{el} + 2\mu_{el} & \lambda_{el} & \lambda_{el} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{el} & \lambda_{el} + 2\mu_{el} & \lambda_{el} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{el} & \lambda_{el} & \lambda_{el} + 2\mu_{el} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_{el} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{el} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{el} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{el} = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)} ; \mu_{el} = \frac{E}{2(1+v)}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} ; \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ 2\epsilon_{xy} \\ 2\epsilon_{xz} \\ 2\epsilon_{yz} \end{pmatrix} ; I = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C_{el} est la matrice du comportement élastique.

λ_{el} est le coefficient de Lamé

μ_{el} est le module de cisaillement

E est le module de Young.

ν est le coefficient de Poisson.

I est le vecteur identité au sens de la représentation vectorielle des contraintes et des déformations.

Cette relation de comportement exprime que :

– s'il y a élévation de température ($\Delta T > 0$), il peut y avoir dilatation (les composantes de cisaillement ne sont pas affectées) sans contrainte ($\sigma = 0$).

– s'il y a élévation de température sans possibilité de déformation, il y a compression du milieu qui est équivalent à une contrainte de compression à l'origine thermique.

α est le coefficient de dilatation thermique exprimé en K^{-1} . Il est un paramètre scalaire dans le cas de la dilatation thermique isotrope. Le Tableau 3 issu de [10] présente de ses valeurs pour quelques matériaux usuels.

Tableau 3 : Ordres de grandeur du coefficient de dilatation thermique

Matériau	α
Fer	1.22E-5
Cuivre	1.70E-5
Aluminium	2.33E-5
Zinc	2.90E-5

Quand la déformation thermique sur une structure libre sous l'effet d'une élévation de température se fait sans création de contrainte, l'expression de la dilation thermique est déduite :

$$\epsilon_{th} = \alpha \Delta T l \quad \text{Eq.11}$$

2.2.2 CONDITION AUX LIMITES MECANIQUE

Différent d'une structure libre, lors du calcul de la déformation thermique, le rotor est supporté par les paliers qui créent les forces en fonction de la position latérale du rotor. Ces forces produisent les champs de contrainte locale aux interfaces rotor-palier ou rotor-roulement qui permettent de contraindre le système rotor. Afin de prendre en compte cette condition aux limites mécanique, les forces générées aux paliers sont distribuées aux nœuds du rotor présentés aux interfaces. Cette implémentation de la condition aux limites mécanique est assurée par une liaison RBE3 définie dans le CodeAster [12]. La liaison RBE3 définit la relation cinématique linéaire qui a pour effet de distribuer les efforts appliqués au nœud maître sur les nœuds esclaves. Deux points fictifs, confondus avec deux nœuds des paliers dans le modèle dynamique des rotors, jouent le rôle du nœud maître sur lequel la force du palier ou du roulement est appliquée. Les nœuds à la surface du rotor au droit du palier ou du roulement sont les nœuds esclaves. Les hypothèses de construction des contraintes linéaires imposent, pour chaque nœud esclave, une répartition des efforts pondérée par la distance entre le nœud maître et le nœud esclave. Ainsi, lors de l'application d'une force au nœud maître, la force sera également transmise aux nœuds esclaves du rotor par cette liaison RBE3.

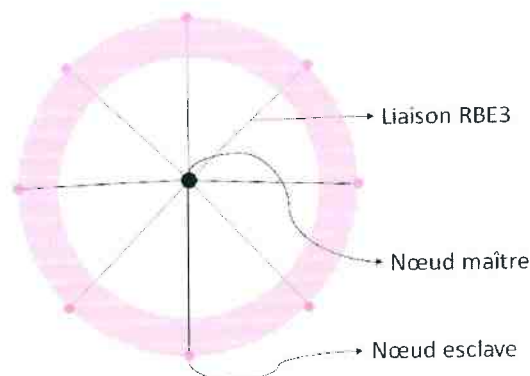


Figure 3 : liaison RBE3 au niveau du roulement ou du palier

En outre, afin de contraindre la translation et la rotation axiale, les degrés de liberté de déplacement et la rotation au niveau du roulement sont bloqués. La condition aux limites mécanique lors de la résolution du problème thermomécanique est résumée dans la Figure 4.

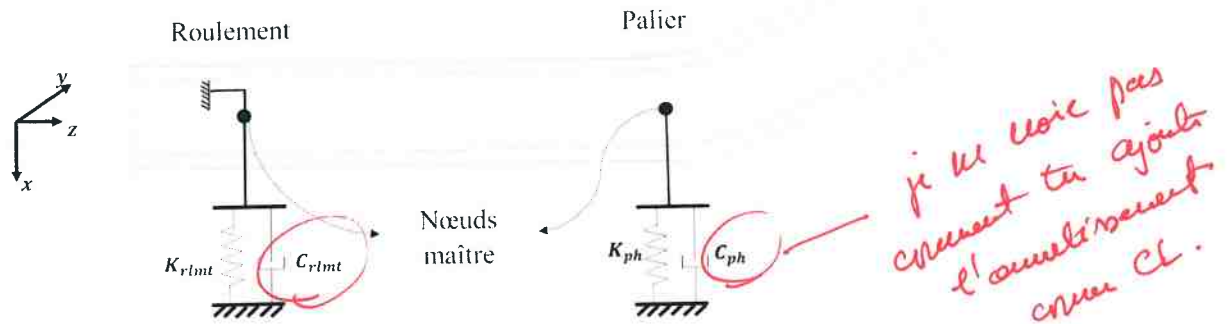


Figure 4 : Conditions aux limites mécaniques du modèle thermomécanique du rotor

La déformation thermique du rotor peut être calculée après avoir ^{déterminé} le champ de température T et après ^{calculer} appliquer les conditions aux limites mécaniques. Les déplacements nodaux du modèle de rotor en 3D dû à l'effet thermique sont ensuite obtenus. La résolution du problème utilise également la méthode des éléments finis. Elle partage le même maillage avec le modèle thermique et est réalisé par le CodeAster©.

2.2.3 DEPLACEMENT DE LA FIBRE NEUTRE DU ROTOR

En théorie de poutre, la fibre neutre désigne une ligne passant par le centre de gravité des sections droites du rotor. ~~Dans le cas général, sans la déformation thermique ou avec la dilatation thermique homogène, la fibre neutre est confondue avec l'axe de rotation.~~ Dans le cas de l'effet Morton, sous le chargement thermique asymétrique, la fibre neutre dévie de l'axe de rotation (Figure 5) et la déformation thermique du rotor obtenue permet ^{la} de caractériser cette déviation de la fibre neutre du rotor par rapport à son axe de rotation.

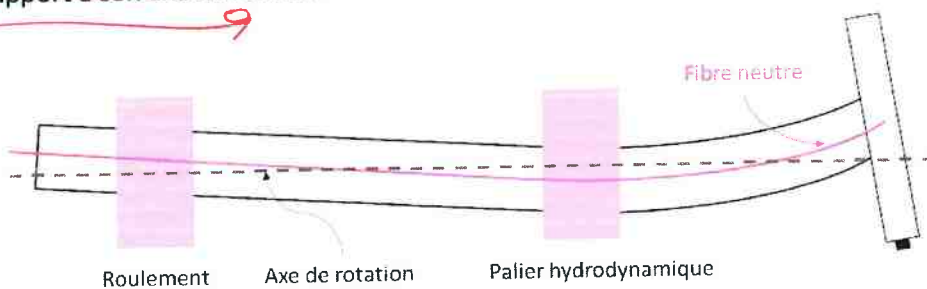


Figure 5 : Déformation thermique du rotor dans le cas de l'effet Morton

~~Pour caractériser cette déviation de la fibre neutre,~~ ^{alors} il suffit de calculer la position du centre de gravité G de chaque section droite du rotor après la déformation thermique. Pour une section du rotor

composé de n sous-ensembles dont les centres de gravité sont $G_i(x, y)$ et les poids p_i , son centre de gravité est le barycentre des G_i pondérés par les poids p_i .

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{p} \sum_1^n p_i \overrightarrow{OG_i} \quad \text{Eq.12}$$

où p est le poids total, $p = \sum_1^n p_i$.

Quand les n sous-ensembles sont délimités de manière identique, le poids total est $p = np_i$. Le calcul de la position du centre de gravité d'une section revient à calculer la moyenne des centres de gravité $G_i(x, y)$ par la formule suivante :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{n} \sum_1^n \overrightarrow{OG_i} \quad \text{Eq.13}$$

Les centres des sous-ensembles G_i peuvent être représentés par les nœuds du maillage dans une section droite du modèle du rotor 3D. Ainsi, le déplacement nodal après la déformation thermique permet de déterminer la déviation de la fibre neutre. Cette déviation est ensuite utilisée par les deux approches de modélisation du balourd thermique présenté dans la section 4.

3 MODELES DYNAMIQUES DES ROTORS

3.1 ROTOR RIGIDE A 4DDL

Le rotor peut être considéré un solide indéformable (i.e. infiniment rigide) si la première fréquence du mode de flexion est très importante devant les fréquences d'intérêt et/ou d'excitation. Par conséquent, les mouvements latéraux peuvent être décrits à l'aide de quatre degrés de liberté : deux translations et deux rotations.

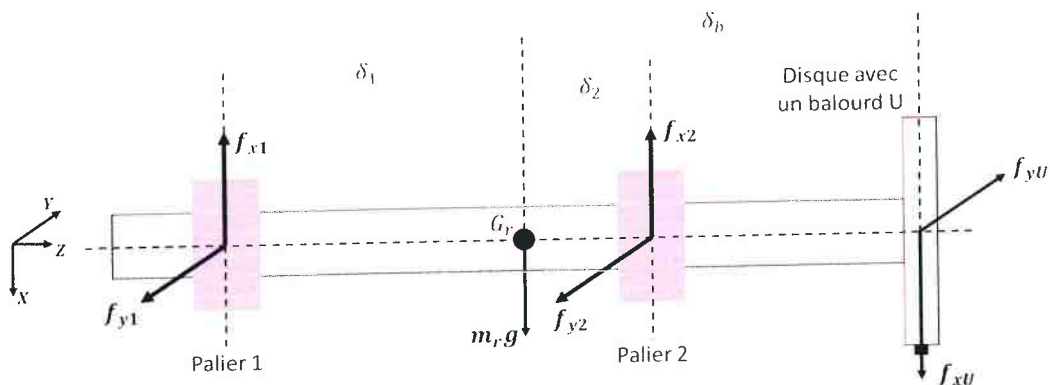


Figure 6 : schéma du rotor rigide avec un disque guidé par deux paliers

La Figure 6 illustre un rotor supposé rigide avec un disque en porte-à-faux guidé par deux paliers. En se basant sur la modélisation à quatre degrés de liberté, les équations de mouvement s'écrivent au centre de masse du rotor G_r de manière suivante:

$$\begin{aligned}
m_r \ddot{u} &= f_x^1 + f_x^2 + f_x^U + m_r g \\
m_r \ddot{v} &= f_y^1 + f_y^2 + f_y^U \\
J_t \ddot{\theta} &= \delta_1 f_y^1 + \delta_2 f_y^2 + \delta_b f_y^U - J_p \Omega \dot{\psi} \\
J_t \ddot{\psi} &= -\delta_1 f_x^1 - \delta_2 f_x^2 - \delta_b f_x^U + J_p \Omega \dot{\theta}
\end{aligned}
\tag{Eq.14}$$

Où

u, v : translation du centre de masse G dans les directions X et Y

θ, ψ : rotations autour de l'axe X et de l'axe Y

J_t et J_p : le moment d'inertie diamétral et polaire du rotor (arbre + disque)

(f_x^1, f_y^1) et (f_x^2, f_y^2) : les forces fluides générées au niveau des deux paliers

(f_x^U, f_y^U) : la force du balourd positionné au disque.

$\delta_1, \delta_2, \delta_b$: les distances algébriques définies comme :

$$\delta_k = z_k - z_G \tag{Eq.15}$$

Les déplacements¹ au niveau des paliers u_1, v_1 et u_2, v_2 sont liés aux déplacements du centre de masse du rotor G_r par :

$$\begin{aligned}
u_k &= u + \delta_k \psi \\
v_k &= v - \delta_k \theta
\end{aligned}
\tag{Eq.16}$$

Lorsque les déplacements au niveau d'un palier hydrodynamique sont faibles, les efforts fluides peuvent être linéarisés autour d'une position d'équilibre statique à l'aide de coefficients dynamiques linéaires (coefficients de raideur et d'amortissement). En utilisant ces coefficients dynamiques, les efforts fluides de palier agissant sur le rotor peuvent être exprimés :

$$\begin{aligned}
f_x^k - f_{xst}^k &= -(K_{xx} u_k + K_{xy} v_k + C_{xx} \dot{u}_k + C_{xy} \dot{v}_k) \\
f_y^k - f_{yst}^k &= -(K_{yx} u_k + K_{yy} v_k + C_{yx} \dot{u}_k + C_{yy} \dot{v}_k)
\end{aligned}
\tag{Eq.17}$$

Si on exprime ces forces par les paramètres cinématiques au centre de masse du rotor G_r , **Eq.17** devient :

$$\begin{aligned}
f_x^k - f_{xst}^k &= -K_{xx}^k u - C_{xx}^k \dot{u} - K_{xy}^k v - C_{xy}^k \dot{v} - K_{xx}^k \delta_k \psi - C_{xx}^k \delta_k \dot{\psi} + K_{xy}^k \delta_k \theta + \\
&C_{xy}^k \delta_k \dot{\theta} \\
f_y^k - f_{yst}^k &= -K_{yx}^k u - C_{yx}^k \dot{u} - K_{yy}^k v - C_{yy}^k \dot{v} - K_{yx}^k \delta_k \psi - C_{yx}^k \delta_k \dot{\psi} + K_{yy}^k \delta_k \theta + \\
&C_{yy}^k \delta_k \dot{\theta}
\end{aligned}
\tag{Eq.18}$$

Ainsi en remplaçant les forces des paliers dans Eq.14 par leurs expressions (**Eq.18**), les équations du mouvement se mettent sous la forme matricielle suivante :

$$M \ddot{\mathbf{q}} + \left[\sum_{k=1}^2 \mathbf{C}_k + \mathbf{G}(\Omega) \right] \dot{\mathbf{q}} + \sum_{k=1}^2 \mathbf{K}_k \mathbf{q} = \mathbf{F}_U + \mathbf{F}_G \tag{Eq.19}$$

¹ Les vitesses au niveau des paliers s'écrivent d'une manière similaire en décrivant Eq.16 par rapport au temps.

où $q = [u, v, \psi, \theta]^T$,

$$M = \begin{bmatrix} m_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_t \end{bmatrix}; G(\Omega) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_p \Omega \\ 0 & 0 & -J_p \Omega & 0 \end{bmatrix}; F_U = \begin{bmatrix} f_x^U \\ f_y^U \\ \delta_b f_y^U \\ -\delta_b f_x^U \end{bmatrix}; F_G = \begin{bmatrix} m_r g \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_k = \begin{bmatrix} K_{xx}^k & K_{xy}^k & -K_{xy}^k \delta_k & K_{xx}^k \delta_k \\ K_{yx}^k & K_{yy}^k & K_{yx}^k \delta_k & -K_{yy}^k \delta_k \\ -K_{yx}^k \delta_k & K_{yy}^k \delta_k & K_{yy}^k \delta_k^2 & -K_{yx}^k \delta_k^2 \\ K_{xx}^k \delta_k & -K_{xy}^k \delta_k & -K_{xy}^k \delta_k^2 & K_{xx}^k \delta_k^2 \end{bmatrix}$$

$$C_k = \begin{bmatrix} C_{xx}^k & C_{xy}^k & -C_{xy}^k \delta_k & C_{xx}^k \delta_k \\ C_{yx}^k & C_{yy}^k & C_{yx}^k \delta_k & -C_{yy}^k \delta_k \\ -C_{yx}^k \delta_k & C_{yy}^k \delta_k & C_{yy}^k \delta_k^2 & -C_{yx}^k \delta_k^2 \\ C_{xx}^k \delta_k & -C_{xy}^k \delta_k & -C_{xy}^k \delta_k^2 & C_{xx}^k \delta_k^2 \end{bmatrix}$$

Il détermine les vitesses et les déplacements dans le palier...

Cette équation peut être utilisée pour connaître le niveau de vibration au niveau du palier et du disque lors de la simulation de l'effet Morton. Cependant, dans ce cas, la vibration est souvent accompagnée par le grand déplacement du rotor qui rend l'hypothèse de linéarisation des forces fluides non valable. Ainsi, la force calculée par les coefficients dynamiques est peu précise. A cause de cette raison, il est indispensable d'utiliser le modèle complet du palier, appelé modèle non linéaire de palier, qui résout l'équation de Reynolds couplée avec l'équation de l'énergie en régime transitoire, afin d'évaluer les forces fluides de manière précise.

3.2 ROTOR FLEXIBLE A NDDL

Dans la section précédente, un modèle du rotor rigide a été proposé pour réaliser l'analyse dynamique des rotors. Cependant, de nombreux rotors ne peuvent pas être simplement modélisés comme un corps rigide. Par exemple, les rotors ont un petit diamètre par rapport à leur longueur. Ces rotors peuvent vibrer même s'ils sont supportés par un palier rigide sur des supports rigides. D'une manière générale, si la première fréquence du mode de flexion est proche de la fréquence de l'excitation, un modèle du rotor flexible à N degrés de liberté est nécessaire pour présenter correctement son comportement dynamique.

La modélisation de tel rotor s'est basée généralement sur la méthode d'éléments finis. La démarche en détail de cette méthode est largement décrite dans les ouvrages (voir [3]-[5]). Pour rappeler, une synthèse de la méthode utilisée en dynamiques des rotors est décrite ensuite.

La modélisation des rotors par la méthode d'éléments finis en dynamique des rotors revient à développer et de mettre en place un système des équations différentielles du mouvement sous forme matricielle à l'aide des éléments appropriés. Ces éléments permettent de modéliser tous les composants essentiels du rotor tels que l'arbre, le disque, la source d'excitation et le palier.

3.2.1 ARBRE

L'arbre est modélisé par des éléments finis de poutre basés sur la théorie des poutres de Timoshenko. Ces éléments sont utilisés pour discrétiser l'arbre en n éléments appelés "éléments d'arbre". Pour un élément d'arbre e_{ai} (Figure 7), il comprend deux nœuds n_i et n_{i+1} sur l'axe Oz , chacun de ses nœuds possède quatre degrés de liberté $\mathbf{q}_i = [u_i, v_i, \theta_i, \psi_i]$ pour décrire son mouvement local. À partir du mouvement de ces nœuds et les fonctions de forme $f^k(z)$, $k \in (u, v, \theta, \psi)$, les mouvements sur tout le domaine étudié (i.e. arbre entier) peuvent être interpolés et approximatés. Ainsi, les calculs de l'énergie cinétique et celle de déformation de l'arbre deviennent possibles selon la théorie de la résistance des matériaux. C'est à partir des expressions mathématiques des énergies que les matrices élémentaires de raideur \mathbf{M}_e^a , de masse \mathbf{K}_e^a et de gyroscope \mathbf{G}_e^a qui modélisent le comportement de chaque élément d'arbre sont déduites. Il faut souligner que ces matrices élémentaires peuvent être évoluées en fonction des hypothèses faites sur l'élément d'arbre. Typiquement, la construction des matrices \mathbf{M}_e^a et \mathbf{K}_e^a en utilisant la poutre de Timoshenko est différente de ceux-ci en se basant sur la poutre d'Euler-Bernoulli, cette dernière ayant négligé l'effet de cisaillement et inertie de rotation. Une fois toutes les matrices élémentaires sont obtenues, l'assemblage de ces matrices dans un système matriciel de $4(n+1) \times 4(n+1)$ degrés de liberté permet d'avoir la matrice de masse \mathbf{M}^a , de raideur \mathbf{K}^a et de gyroscope \mathbf{G}^a pour l'arbre entier. Ces matrices seront utilisées pour établir le système des équations différentielles du mouvement du rotor.

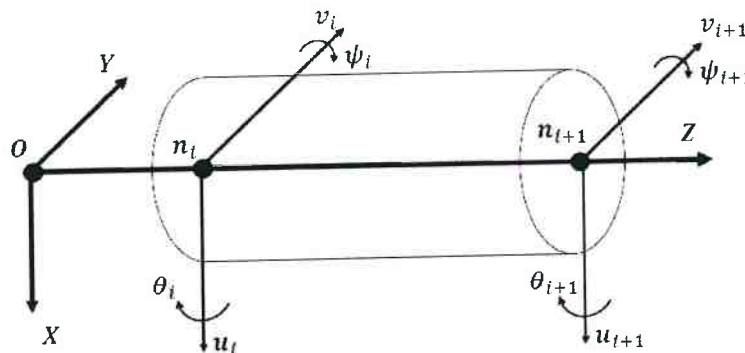


Figure 7 : l'élément d'arbre e_{ai}

3.2.2 DISQUE

Le disque est modélisé par un élément fini de nœud situé au centre de masse du disque, celui-ci étant souvent confondu avec un nœud de l'élément d'arbre. Comme mentionné dans la section 3.2.1, le nœud de l'élément d'arbre possède 4 degrés de liberté, l'élément du disque partage ces degrés de liberté avec le nœud du disque. Souvent supposant être rigide, le disque ne contient pas d'énergie de déformation. Ses matrices élémentaires de masse \mathbf{M}_e^d et de gyroscope \mathbf{G}_e^d peuvent être déduites à partir de seulement l'énergie cinétique sur laquelle l'équation de Lagrange est appliquée.

Tu n'a pas besoin de ça .

3.2.3 SOURCES D'EXCITATION SYNCHRONES

Les sources d'excitation sur le système tournant sont diverses. Dans le cadre de cette thèse, l'intérêt se porte particulièrement sur les sources d'excitation synchrones telles que le balourd et le défaut de fibre neutre, car celles-ci sont à l'origine de l'effet Morton.

Concernant la modélisation du balourd, il est modélisé à l'aide d'un élément fini de nœud confondu avec un nœud de l'arbre. Différent de la modélisation d'arbre et de disque, le balourd est traité comme une force extérieure périodique qui appliqué sur le rotor. Il existe également le moment de balourd engendré par la rotation de disque dans les plans parallèles à l'axe de rotation Oz [5]. Dans cette thèse, seule la force de balourd est considérée. Le vecteur de la force nodale de balourd F_i^U est décrit :

$$F_i^U = \begin{bmatrix} m\varepsilon\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \\ m\varepsilon\omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{Eq.20}$$

où :

m : masse du balourd [kg]

ε : excentricité du centre géométrique de l'arbre [m]

ω : vitesse de rotation [rad/s]

φ : phase du balourd [rad] par rapport à l'axe X

i : numéro du nœud sur le rotor flexible sur lequel la force du balourd est appliqué.

Lors de la modélisation de l'effet Morton, on peut également rencontrer une sollicitation périodique interne engendré par la flexion thermique du rotor. Le fait que la flexion thermique du rotor dévie la fibre neutre du rotor par rapport à l'axe de rotation, un défaut de fibre neutre est ainsi créée. La modélisation de cette source d'excitation sera discuté en détaillée dans la partie 0.

3.2.4 PALIERS

Le palier est modélisé en utilisant un élément de nœud positionné au centre de la section de l'arbre. Il partage les quatre degrés de liberté attribués au nœud de l'arbre où se positionne le palier. A partir du mouvement de ce nœud $q_a^{n_{pal}}$ et $\dot{q}_a^{n_{pal}}$, le vecteur de la force nodale linéaire, appliquée du palier au rotor, peut être représentée par l'approche des coefficients dynamiques (Eq.21).

$$F_{n_{pal}}^{palier} = \begin{bmatrix} f_x^{palier} \\ f_y^{palier} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & 0 & 0 \\ K_{yx} & K_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q_a^{n_{pal}} - \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} & 0 & 0 \\ C_{yx} & C_{yy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_a^{n_{pal}} \quad \text{Eq.21}$$

Ces coefficients dynamiques peuvent être directement assemblés dans les matrices globales de raideur K et d'amortissement C du système rotor. Cette démarche est souvent utilisée dans l'analyse modale et l'analyse de stabilité, car elle permet de calculer directement les valeurs propres et les vecteurs propres du système simplement par les matrices globales de masse, de raideur et d'amortissement.

tu n'a pas besoin du φ

Lors de la modélisation de l'effet Morton, à cause de l'hypothèse de linéarisation des forces fluides susceptible d'être non valable, la démarche linéaire risque d'introduire d'erreur. Ainsi, il est préférable d'utiliser le modèle non-linéaire de palier qui a été présenté au chapitre II pour calculer la force du palier $F_{n_{pal}}^{palier}$. Compte tenu de l'expression (Eq.II.33), le vecteur des forces nodales non linéaires de l'élément fini de palier est donné par :

$$F_{n_{pal}}^{palier}(q_a^{n_{pal}}, \dot{q}_a^{n_{pal}}) = - \begin{bmatrix} f_x^{palier} \\ f_y^{palier} \\ M_x^{palier} \\ M_y^{palier} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.22}$$

3.2.5 EQUATION DU MOUVEMENT

Les matrices élémentaires et les vecteurs des forces nodales sont assemblés de manière appropriée. Les matrices et les vecteurs assemblés sont généralement appelés les matrices globales et les vecteurs globaux. Ils sont respectivement de dimensions $n_{ass} \times n_{ass}$ et $n_{ass} \times 1$ où $n_{ass} = 4(n+1)$ est le nombre total de degrés de liberté du système rotor. Les équations différentielles de mouvement du système rotor flexible sont ainsi écrites sous forme matricielle :

$$M\ddot{q} + [C + G(\Omega)]\dot{q} + Kq = F_U + F_G + F_{palier}(q, \dot{q})$$

où:

- q, \dot{q} et \ddot{q} sont respectivement les vecteurs d'accélération, de vitesse et de déplacement globaux rangés de manière correspondante à la connectivité des éléments finis.
- $M, C, G(\Omega)$ et K sont respectivement la matrice globale de masse, d'amortissement, de gyroscope et de raideur.
- F_U, F_G et $F_{palier}(q, \dot{q})$ sont respectivement le vecteur global de la force des balourds, de la force de gravité et des forces générées dans les paliers.

3.3 METHODE NUMERIQUE D'INTEGRATION TEMPORELLES

Comme mentionné précédemment, le modèle linéaire du palier est imprécis pour le grand déplacement du rotor, qui est souvent rencontré lors de l'analyse de l'effet Morton. De plus, afin de connaître le flux thermique qui s'échange entre le fluide lubrifiant et le rotor, la résolution de l'équation de l'énergie pour le film mince est également nécessaire. Pour ces deux raisons, il est inévitable de résoudre simultanément les équations du mouvement du rotor et les équations de lubrification hydrodynamique en transitoire et la résolution des équations devient un problème dynamique non linéaire. Afin de résoudre de manière efficace les équations du mouvement, une méthode d'intégration temporelle qui combine la méthode de Newton-Raphson avec le schéma d'intégration temporelle de Newmark est utilisée [7].

Dans un premier temps, l'équation du mouvement **Eq.23** est discrétisée par n_{pt} pas de temps. A l'instant t_{i+1} ($0 \leq i \leq n_{pt}$), elle peut s'exprimer comme **Eq.24** pour faciliter la compréhension.

$$M\ddot{\mathbf{q}}^{i+1} = \mathbf{F}_U + \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_{palier}(\mathbf{q}^{i+1}, \dot{\mathbf{q}}^{i+1}) - \left[[\mathbf{C} + \mathbf{G}(\Omega)]\dot{\mathbf{q}}^{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{q}^{i+1} \right] \quad \text{Eq.24}$$

Cette équation est non linéaire en raison que le calcul de l'accélération $\ddot{\mathbf{q}}$ à t_{i+1} du système rotor a besoin de connaître la force non linéaire du palier qui dépend du déplacement et de la vitesse du rotor à t_{i+1} au niveau du palier. Les vecteurs du déplacement et de la vitesse des nœuds du rotor entre les instants t_i et $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ (où Δt est le pas de temps) sont approximés par le schéma implicite de Newmark :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}^{i+1} &= \mathbf{q}^i + \Delta t \dot{\mathbf{q}}^i + \frac{(\Delta t)^2}{2} [(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{q}}^i + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}^{i+1}] \\ \dot{\mathbf{q}}^{i+1} &= \dot{\mathbf{q}}^i + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}^i + \gamma\ddot{\mathbf{q}}^{i+1}] \end{aligned} \quad \text{Eq.25}$$

où les paramètres $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$ sont utilisés et ils définissent le schéma correspondant à une accélération moyenne qui assure une stabilité numérique inconditionnellement.

Etant donné que le calcul de l'accélération $\ddot{\mathbf{q}}^{i+1}$ est non linéaire, une stratégie itérative basée sur la méthode de Newton-Raphson est mise en place pour traiter la non-linéarité due au problème de lubrification hydrodynamique de palier. D'après cette stratégie itérative, les vecteurs du déplacement \mathbf{q}^{i+1} et de la vitesse $\dot{\mathbf{q}}^{i+1}$ sont cherchés de manière précise et itérative comme limite d'une suite des vecteurs $\{\mathbf{q}_{(1)}^{i+1}, \dot{\mathbf{q}}_{(1)}^{i+1}\}^T, \dots, \{\mathbf{q}_{(k)}^{i+1}, \dot{\mathbf{q}}_{(k)}^{i+1}\}^T$ dont les éléments sont consécutivement corrigés. L'indice k signifie le nombre d'itération de la Newton-Raphson. Afin de faciliter l'implémentation de la méthode, les équations Eq.25 sont exprimées sous la forme d'un vecteur résiduel \mathbf{R} (Eq.26) qui contient le vecteur résiduel du déplacement \mathbf{R}_q et de la vitesse $\mathbf{R}_{\dot{q}}$.

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}^{i+1}, \dot{\mathbf{q}}^{i+1}) = \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_q \\ \mathbf{R}_{\dot{q}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^{i+1} - \left[\mathbf{q}^i + \Delta t \dot{\mathbf{q}}^i + \frac{(\Delta t)^2}{2} [(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{q}}^i + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}^{i+1}] \right] \\ \dot{\mathbf{q}}^{i+1} - [\dot{\mathbf{q}}^i + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}^i + \gamma\ddot{\mathbf{q}}^{i+1}]] \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \quad \text{Eq.26}$$

Le vecteur résiduel \mathbf{R} peut être exprimé en utilisant le développement limité en série de Taylor à l'ordre 1 au voisinage du vecteur de déplacement $\mathbf{q}_{(k)}^{i+1}$ ou de la vitesse $\dot{\mathbf{q}}_{(k)}^{i+1}$. La linéarisation du vecteur résiduel \mathbf{R} permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_q(\Delta \mathbf{q}_{(k)}^{i+1}, \Delta \dot{\mathbf{q}}_{(k)}^{i+1}) &\cong \mathbf{R}_q + \frac{\partial \mathbf{R}_q}{\partial \mathbf{q}^{i+1}} \Delta \mathbf{q}_{(k)}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{R}_q}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{i+1}} \Delta \dot{\mathbf{q}}_{(k)}^{i+1} = \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{\dot{q}}(\Delta \mathbf{q}_{(k)}^{i+1}, \Delta \dot{\mathbf{q}}_{(k)}^{i+1}) &\cong \mathbf{R}_{\dot{q}} + \frac{\partial \mathbf{R}_{\dot{q}}}{\partial \mathbf{q}^{i+1}} \Delta \mathbf{q}_{(k)}^{i+1} + \frac{\partial \mathbf{R}_{\dot{q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{i+1}} \Delta \dot{\mathbf{q}}_{(k)}^{i+1} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad \text{Eq.27}$$

Après le rangement des expressions, la formule essentielle de la méthode Newton-Raphson est obtenue et il permet de calculer le vecteur d'incrément de correction.

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{R}_q \\ \mathbf{R}_{\dot{q}} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}_q}{\partial \mathbf{q}^{i+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_q}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{i+1}} \\ \frac{\partial \mathbf{R}_{\dot{q}}}{\partial \mathbf{q}^{i+1}} & \frac{\partial \mathbf{R}_{\dot{q}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{i+1}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q}_{(k)}^{i+1} \\ \Delta \dot{\mathbf{q}}_{(k)}^{i+1} \end{Bmatrix} = -\mathbf{J}_R \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q}_{(k)}^{i+1} \\ \Delta \dot{\mathbf{q}}_{(k)}^{i+1} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.28}$$

où \mathbf{J}_R est la matrice jacobienne de cette méthode d'intégration temporelle.

Après la résolution, la correction sur les vecteurs du déplacement et de la vitesse peut être réalisée :

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{(k+1)}^{i+1} \\ \dot{\mathbf{q}}_{(k+1)}^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{(k)}^{i+1} \\ \dot{\mathbf{q}}_{(k)}^{i+1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{q}_{(k)}^{i+1} \\ \Delta \dot{\mathbf{q}}_{(k)}^{i+1} \end{Bmatrix} \quad \text{Eq.29}$$

Cette correction est répétée de manière itérative jusqu'à la norme du vecteur résiduel \mathbf{R} descend au-dessous d'une tolérance petite, e.g. 1E-3.

La matrice jacobienne est en fonction du vecteur de déplacement et de vitesse. Compte tenu des dépendances et des calculs du dérivé de chaque terme, elle peut s'écrire :

$$\mathbf{J}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - (\Delta t)^2 \beta \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}^{i+1}}{\partial \mathbf{q}^{i+1}} & -(\Delta t)^2 \beta \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}^{i+1}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{i+1}} \\ -\Delta t \gamma \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}^{i+1}}{\partial \mathbf{q}^{i+1}} & \mathbf{I} - \Delta t \gamma \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}^{i+1}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{i+1}} \end{bmatrix} \quad \text{Eq.30}$$

Le dérivé d'accélération $\ddot{\mathbf{q}}^{i+1}$ (Eq.24) par rapport au déplacement \mathbf{q}^{i+1} et à la vitesse $\dot{\mathbf{q}}^{i+1}$ revient à calculer la raideur et l'amortissement du le système rotor où celles de palier est compris.

Mathématiquement, ce dérivé peut être développé de manière suivant :

$$\frac{\partial(\ddot{\mathbf{q}}^{i+1})}{\partial \mathbf{q}^{i+1}} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{palier}}}{\partial \mathbf{q}^{i+1}} - \mathbf{K} \right) / \mathbf{M} \quad ; \quad \frac{\partial(\ddot{\mathbf{q}}^{i+1})}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{i+1}} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{palier}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{i+1}} - [\mathbf{C} + \mathbf{G}(\Omega)] \right) / \mathbf{M} \quad \text{Eq.31}$$

où :

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{palier}}}{\partial \mathbf{q}^{i+1}} = \mathbf{K}_{\text{palier}} \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{palier}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{i+1}} = \mathbf{C}_{\text{palier}}$$

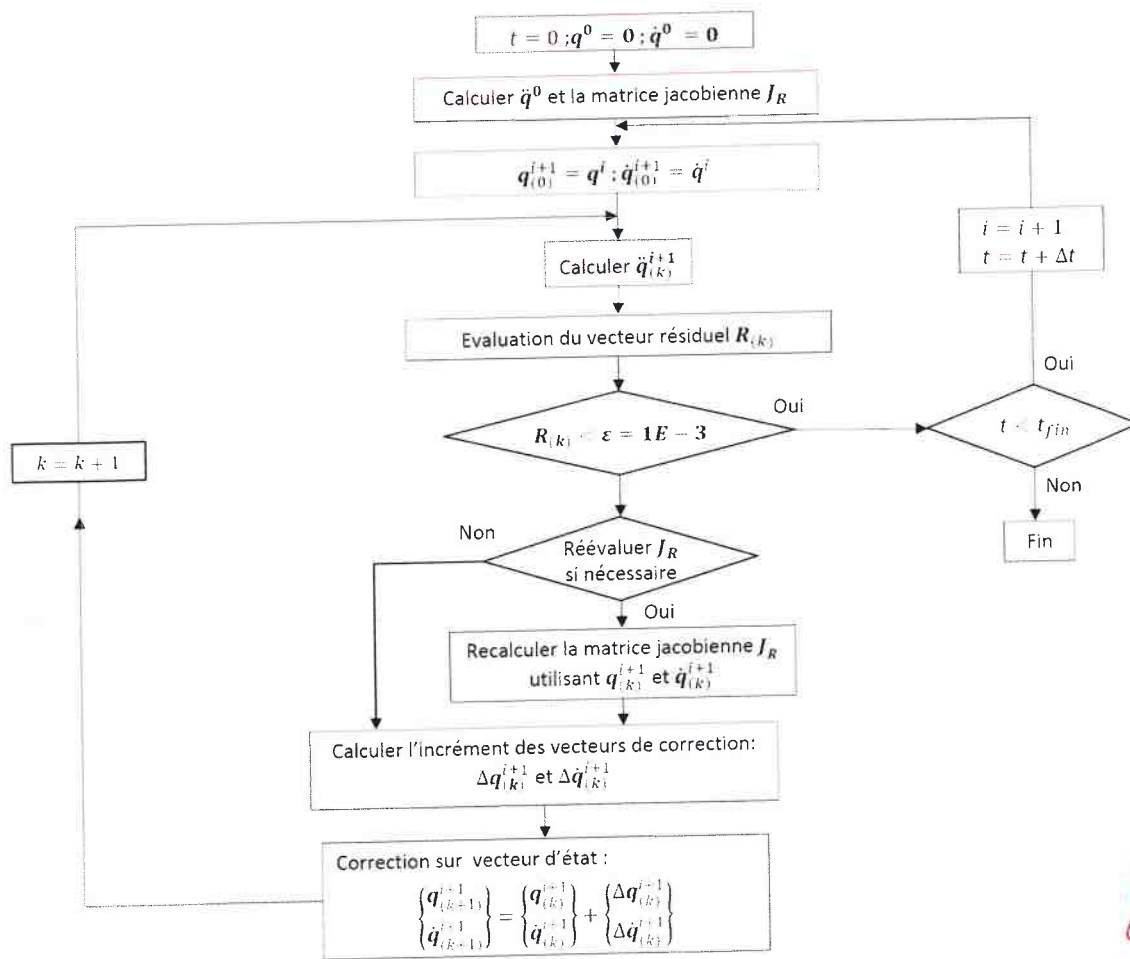


Figure 8 : algorithme utilisé pour l'analyse transitoire non linéaire

Il est constaté que la raideur et l'amortissement du palier sont nécessaires pour évaluer le dérivé de l'accélération. Ces informations sont calculées de manière numérique par différences finies ⁵ comme ~~le calcul des coefficients dynamiques du palier~~. En comparant avec les coefficients dynamiques, les raideurs et les amortissements utilisés ici ne sont pas obtenus à la position statique du palier. Ils sont ~~évalué de manière dynamique de telle sorte la force hydrodynamique~~ précise est utilisée.

Il faut souligner qu'il n'est pas nécessaire d'évaluer J_R pour chaque itération, voire chaque instant du temps. La matrice jacobienne pourrait être valable pour les instants successives après son évaluation à t_{i+1} puisque la raideur et l'amortissement du palier restent valable ⁵ au voisinage de la position q^{i+1} . Deux critères de réévaluation de la matrice jacobienne sont proposés dans l'algorithme utilisé qui permettent d'éviter le calcul redondant et non nécessaire de J_R , sachant que l'évaluation de matrice est onéreux en terme de temps de calcul. Un des critères suppose que la réévaluation de la matrice J_R est nécessaire quand la norme euclidienne du vecteur résidu $R_{(k)}$ augmente par rapport à son dernier évaluation $R_{(k-1)}$. L'autre suppose simplement que la réévaluation est réalisée quand le nombre d'itération de la méthode Newton-Raphson dépasse 5. L'algorithme complet de cette méthode d'intégration temporelle est présenté dans la **Figure 8**.

3.4 VIBRATION SYNCHRONES ET SA SOLUTION PERIODIQUE

Puisque le régime stationnaire périodique est ciblé dans l'analyse de l'effet Morton, deux méthodes qui permettent de trouver la réponse périodique sont présentées dans la suite.

3.4.1 METHODE DE SHOOTING

Le principe de cette méthode consiste à corriger une solution initiale de façon à ce qu'elle corresponde à une solution périodique. Pour cela, une stratégie itérative utilisant la méthode Newton-Raphson est appliquée. A l'itération k de la méthode Newton-Raphson, un vecteur de résiduel R_T est exprimé dans Eq.32 afin de définir la condition de périodicité.

$$R_T(\delta_{(k)}^0) = \delta_{(k)}^T - \delta_{(k)}^0 = \mathbf{0} \quad \text{Eq.32}$$

Avec :

$$\delta(t) = \begin{pmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{pmatrix} \quad \text{Eq.33}$$

Où :

T : la période de la rotation du rotor

k : l'itération de Newton-Raphson

q : le vecteur de déplacement du rotor

\dot{q} : le vecteur de vitesse du rotor

$\delta_{(k)}^0$: le vecteur de la solution initiale (position et vitesse initiales)

$\delta_{(k)}^T$: le vecteur de la solution obtenue après une période T à partir de la solution initiale $\delta_{(k)}^0$

$R_T(\delta_{(k)}^0)$: le vecteur résiduel entre la solution initiale et la solution périodique

$\delta(t)$: le vecteur d'état qui représente la solution de l'équation dynamique du mouvement.

La condition de périodicité impose que l'écart entre la solution initiale $\delta_{(k)}^0$ et la solution périodique $\delta_{(k)}^T$ est nul. Afin de connaître l'incrément de correction, une petite perturbation $\Delta\delta_{(k)}^0$ est introduisant au vecteur $\delta_{(k)}^0$. Puis, une linéarisation appropriée de l'équation Eq.32 perturbée est réalisée en construisant un développement en série de Taylor du 1er ordre de cette équation. Il devient :

$$R_T(\delta_{(k)}^0 + \Delta\delta_{(k)}^0) \cong R_T(\delta_{(k)}^0) + \frac{\partial R_T(\delta_{(k)}^0)}{\partial \delta_{(k)}^0} \Delta\delta_{(k)}^0 = \mathbf{0} \quad \text{Eq.34}$$

alors

$$J_{R_T} \Delta\delta_{(k)}^0 = -R_T(\delta_{(k)}^0) \quad \text{Eq.35}$$

la matrice jacobienne peut être évaluée en calculant la dérivée du vecteur résiduel par rapport à l'état initial $\delta_{(k)}^0$.

$$J_{R_T} = \frac{\partial R_T(\delta_{(k)}^0)}{\partial \delta_{(k)}^0} = \frac{\partial \delta_{(k)}^T}{\partial \delta_{(k)}^0} - I \quad \text{Eq. 36}$$

où on peut définir la matrice de monodromie Φ d'après [8] :

$$\Phi = \frac{\partial \delta_{(k)}^T(\delta_{(k)}^0)}{\partial \delta_{(k)}^0} \quad \text{Eq. 37}$$

Le calcul de la matrice de monodromie peut être effectué par la définition du dérivé de la solution $\delta_{(k)}^T$ par rapport à la solution initiale $\delta_{(k)}^0$ (Eq.38).

$$\frac{\partial \delta_{(k)}^T(\delta_{(k)}^0)}{\partial \delta_{(k)}^0} = \lim_{\Delta \delta \rightarrow 0} \frac{\delta_{(k)}^T(\delta_{(k)}^0 + \Delta \delta) - \delta_{(k)}^T(\delta_{(k)}^0)}{\Delta \delta} \quad \text{Eq. 38}$$

Enfin, le calcul de la matrice jacobienne peut également écrire de manière équivalente par le vecteur résiduel $R_T(\delta_{(k)}^0)$:

$$J_{R_T} = \lim_{\Delta \delta \rightarrow 0} \frac{R_T(\delta_{(k)}^0 + \Delta \delta) - R_T(\delta_{(k)}^0)}{\Delta \delta} \quad \text{Eq. 39}$$

Le calcul de la matrice jacobienne nécessite de choisir un vecteur de perturbation $\Delta \delta$ suffisamment petit pour que l'évaluation J_{R_T} soit correcte. Une fois la matrice jacobienne J_{R_T} est obtenue, l'incrément de correction peut être déduit grâce à **Eq.35** et la solution initiale $\delta_{(k)}^0$ peut ainsi être corrigée par :

$$\delta_{(k+1)}^0 = \delta_{(k)}^0 + \Delta \delta_{(k)}^0 \quad \text{Eq. 40}$$

L'algorithme de la méthode de shooting est résumé dans le diagramme (**Figure 9**). La solution initiale $\delta_{(1)}^0$ est prise égale à un vecteur d'état $\delta(t)$ défini par l'utilisateur. Lorsque le vecteur résiduel $R_T(\delta_{(k)}^0)$ est calculé par l'équation **Eq.32**, l'incrément du vecteur de correction $\Delta \delta_{(k)}^0$ est produit par **Eq.35** et ainsi la solution initiale $\delta_{(k)}^0$ est corrigée et mise à jour.

Le fait que $R_T(\delta_{(k)}^0)$ représente la différence des positions et vitesses entre la solution initiale et la solution périodique, deux tolérances de convergence du calcul $\varepsilon_q = 1e^{-7}$ et $\varepsilon_{\dot{q}} = 1e^{-3}$ sont appliquées séparément aux $R_T(q)$ et $R_T(\dot{q})$. Quand la norme euclidienne des vecteurs résiduels $R_T(q)$ et $R_T(\dot{q})$ est au-dessous des deux tolérances ε_q et $\varepsilon_{\dot{q}}$. La solution périodique $\delta_{(k)}^T$, i.e. l'orbite périodique, est supposée avoir obtenue. Sinon, une nouvelle correction itérative de Newton-Raphson commence. Après la correction par $\Delta \delta_{(k)}^0$, le vecteur $\delta_{(k+1)}^T$ est recalculé à partir de $\delta_{(k+1)}^0$ grâce au schéma d'intégration temporelle. Enfin, la solution périodique en utilisant la méthode de shooting est généralement obtenue en quelques itérations seulement.

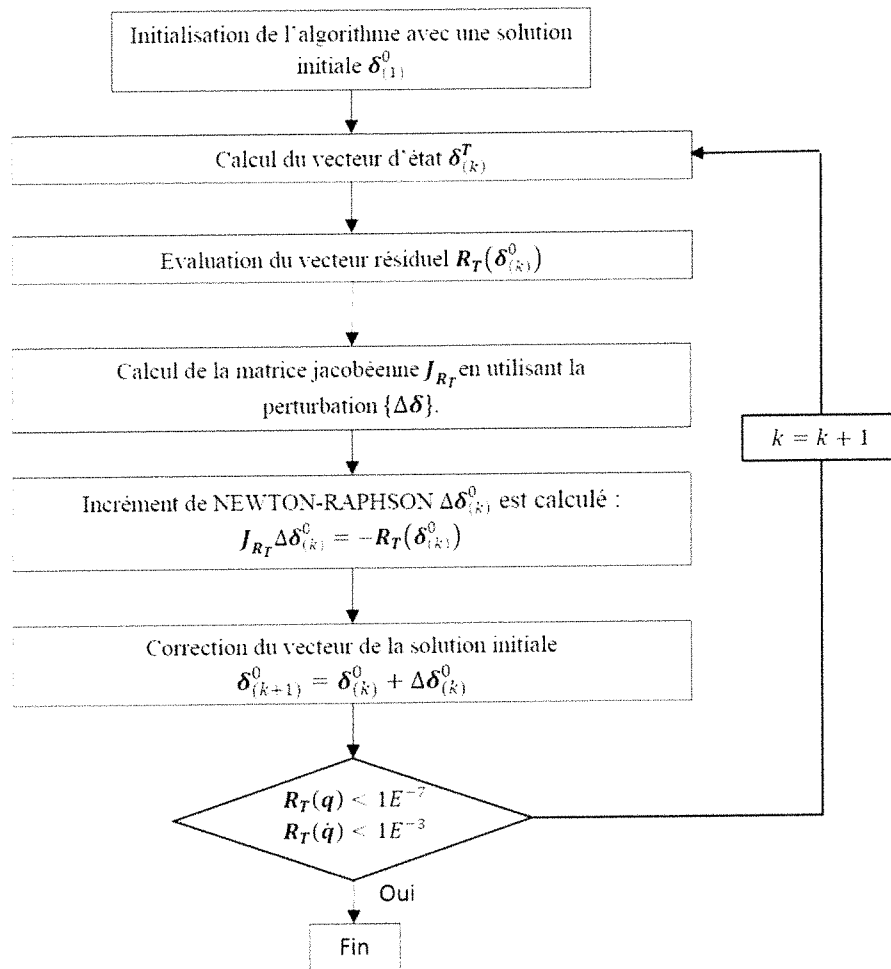


Figure 9 : Diagramme de l'algorithme de Shooting

Il faut savoir que la méthode de shooting converge non seulement vers des solutions stables mais aussi vers celles instables. Cependant, seules les solutions stables peuvent être expérimentalement obtenues. La solution instable vérifie les équations du mouvement mais n'est pas physiquement observable. C'est pourquoi, après avoir obtenu la solution périodique, sa stabilité peut être vérifiée en appliquant la théorie de Floquet [8], c'est-à-dire en calculant les valeurs propres (multiplicateurs caractéristiques de Floquet) de la matrice de monodromie Φ .

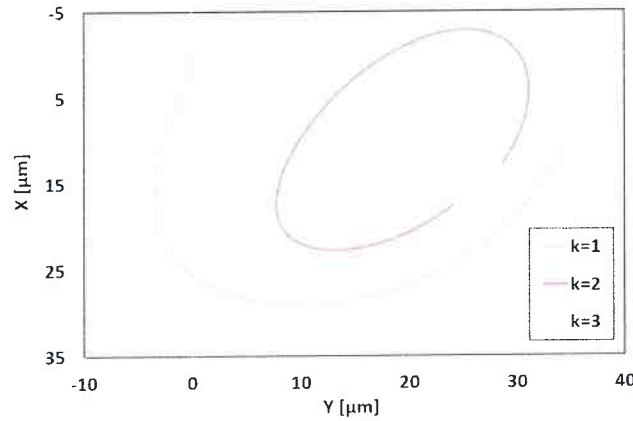


Figure 10 : exemple d'application de la méthode Shooting qui converge en 3 itérations

3.4.2 METHODE CLASSIQUE

La méthode classique consiste à effectuer un calcul transitoire suffisamment long afin de capter la réponse périodique. Le vecteur d'état $\delta(t)$ qui représente la solution des équations du mouvement est enregistré au début de chaque période $t = kT$ (k est le nombre de période de rotation) et sont comparés avec les ceux-ci stocké à la période précédente $t = (k - 1)T$. Un vecteur résiduel est défini pour définir la condition de périodicité :

$$R_T(\delta_{kT}^0) = \delta_{kT}^0 - \delta_{(k-1)T}^0 = 0 \quad \text{Eq.41}$$

Où :

T est la période de la rotation du rotor

k est le nombre de période de rotation

Comme utilisant la méthode de shooting, deux tolérances de convergence du calcul $\varepsilon_q = 10^{-7}$ et $\varepsilon_{\dot{q}} = 10^{-3}$ sont appliquées séparément aux vecteurs résiduels de déplacement $R_T(q^0)$ et de la vitesse $R_T(\dot{q}^0)$. Quand la norme euclidienne des vecteurs résiduels $R_T(q^0)$ et $R_T(\dot{q}^0)$ est au-dessous des deux tolérances ε_q et $\varepsilon_{\dot{q}}$. La solution périodique $\delta_{(k)}^T$, i.e. l'orbite périodique, est supposée avoir obtenue.

Comparant avec la méthode shooting, la méthode classique est plus avantageux quand l'orbite synchrone s'établie assez vite. Dans le cas où contraire, la méthode de shooting est plus efficace en terme de temps de calcul. L'algorithme de la méthode classique est présenté dans la Figure 11.