Cheat Sheet

Analysis II

Silvan Metzker

Januar 2024

1 Differentialgleichungen

Definition lineare DGL

Eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung ist eine Gleichung, welche Ableitungen enthält. Sie hat die Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y = b(x)$$

wo die Koeffizienten $a_0, \ldots, a_{n-1}$ komplexe Funktionen auf $I \subset \mathbb{R}$ sind, welche von x abhängig sein können. Wenn $b(x) = 0$ gilt, ist die DGL (zugehörig) homogen, ansonsten inhomogen.

Die Menge S an Lösungen ist ein Subset des Raums der komplexen Funktionen auf I mit Dimension n.
S_0 das Set der Lösungen zu einer homogenen DGL. Für ein $b(x)$ ist die Menge der Lösungen

$$S_b = \{f_h + f_p \mid f_h \in S_0\}.$$

Lineare DGL erkennen

- keine Koeffizienten vor der höchsten Ableitung
- alle Koeffizienten sind stetige Funktionen
- keine Produkte von y oder deren Ableitungen
- keine Potenzen von y oder deren Ableitungen
- keine Funktionen von y oder deren Ableitungen

1.1 Lineare DGL erster Ordnung

Wir betrachten DGL der Form

$$y' + a(x)y = b(x)$$

1. **Homogene Lösung:** Löse nach y.
$$\begin{aligned} y' + a(x)y &= 0 \\ \frac{y'}{y} &= -a(x) \\ \ln(y) &= -A(x) + C \\ f_0 := y &= e^{-A(x)+C} = z \cdot e^{-A(x)} \quad z \in \mathbb{C} \end{aligned}$$
2. **Partikuläre Lösung:** Verwende entweder "Variation der Konstanten" oder "Fundiertes Raten".
3. **Allgemeine Lösung:** Vereinige beide Lösungen, $f_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j$ mit $\alpha_j \in \mathbb{C}$
4. **Anfangswerte:** Einsetzen der Anfangswerte in die allg. Lösung $\to$ LGS für $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ mit eindeutiger Lösung.

1.2 Variation der Konstanten

Sei $f_p = z(x)e^{-A(x)}$ für eine Funktion $z : I \to \mathbb{C}$. Dann ist $z'(x) = b(x)e^{A(x)}$ und somit

$$z(x) = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,dt$$

Daraus erhalten wir

$$f_p = \int_{x_0}^{x} b(t)e^{A(t)}\,dt \cdot e^{-A(t)}$$

1.3 Separation der Variabeln

DGL der Form $y' = \frac{1}{a(y)} \cdot b(x)$ mit a, b stetig, $a(y) \neq 0$.

$$\begin{aligned} &\iff a(y) \cdot y' = b(x) \\ &\iff \int a(y) \cdot y'(x)\,dx = \int b(x)\,dx + c \\ &\iff A(y) = B(x) + c \quad \text{(mit } A, B \text{ als Stammfunkt.)} \\ &\iff y = A^{-1}(B(x) + c) \end{aligned}$$

1.4 Fundiertes Raten

Wenn $b(x)$ von einer bestimmten Form ist, versuchen wir folgende f_p, wobei wir unseren Versuch in die DGL einsetzen, was uns dann ein Gleichungssystem für die Konstanten gibt:

$b(x)$	Raten
$P_n(x)$	$R_{n+k}(x)$
$a \cdot e^{\alpha x}$	$b \cdot e^{\alpha x}$
$a^\star \sin(\beta x) + b^\star \cos(\beta x)$	$c\sin(\beta x) + d\cos(\beta x)$
$ae^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$e^{\alpha x}\Big(c\sin(\beta x) + d\cos(\beta x)\Big)$
$be^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$e^{\alpha x}\Big(c\sin(\beta x) + d\cos(\beta x)\Big)$
$P_n e^{\alpha x}$	$R_n \cdot e^{\alpha x}$
$P_n e^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$e^{\alpha x}\left(R_n \sin(\beta x) + S_n \cos(\beta x)\right)$
$P_n e^{\alpha x}\cos(\beta x)$	$e^{\alpha x}\left(R_n \sin(\beta x) + S_n \cos(\beta x)\right)$

P_n, R_n und S_n sind Polynome abh. von x und k ist die Ordnung der kleinsten Ableitung im homogenen Teil.
Gilt auch für $a^\star = 0$ oder $b^\star = 0$.

1. Wenn $b(x)$ eine Linearkombination der Basisfunktionen ist, dann versuche eine Linearkombination.
2. Wenn die geratene Lösung der homogenen Lösung entspricht, dann multipliziere mit x^m, wobei x die Vielfachheit der Wurzel ist.

1.5 Lineare DGL mit konstanten Koeff.

Wir wollen lösen: $y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \cdots + a_0 y = b$.
Dann bekommt man das *Charakteristische Polynom*:

$$\iff \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{(k-1)} + \cdots + a_0 = 0$$

Dann ist die homogene Lösung eine Linearkombination aus $f_\ell = x^j e^{\lambda_i x}$ für jede Nullstelle λ_i und dessen Vielfachheit m, also $j \in \{0, ..., m-1\}$.
Falls Reelle Lösungen gesucht und $a_i \in \mathbb{R}$ und seien $\lambda_{i,i+1} = \beta \pm \gamma i$ zwei Nullstellen des charakteristischen Polynom. Dann gilt $f_i = e^{\beta x}\cos(\gamma x)$ und $f_{i+1} = e^{\beta x}\sin(\gamma x)$.

Um eine partikuläre Lösung zu finden, können wir wieder fundiertes Raten oder Variation der Konstanten verwenden. Variation der Konstanten funktioniert wie folgt (hier 2D, bzw. $\ell \in \{1, 2\}$):

(1) Nimm an, dass die homogene Lösung $f_h = z_1 f_1 + z_2 f_2$ ist, für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(2) Versuche nun $f_p = z_1(x) f_1 + z_2(x) f_2$

(3) Löse das folgende System

$$z_1'(x) f_1 + z_2'(x) f_2 = 0$$
$$z_1'(x) f_1' + z_2'(x) f_2' = b(x)$$

Hier gehen wir wie folgt vor:

$$W = f_1 f_2' - f_2 f_1' \neq 0$$
$$\Rightarrow z_1' = \frac{-f_2 b}{W}, z_2' = \frac{-f_1 b}{W}$$
$$\Rightarrow f_p = -f_1 \int \frac{f_2 b}{W} dt + f_2 \int \frac{f_1 b}{W} dt$$

2 Ableitungen in $\mathbb{R}^n$

Monom

Ein Monom vom Grad e ist

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{d_n}$$
$$e = d_1 + \ldots + d_n$$

$\rightarrow$ ein Polynom, das nur aus einem Glied besteht.

Polynom

Ein Polynom mit n Variablen vom Grad d ist eine endliche Summe von Monomen mit Grad $e \leq d$.

2.1 Konvergenz

1. Skalarprodukt: $\langle x, y \rangle = \sum_{i=0} x_i \cdot y_i$
2. Euklidische Norm: $||x|| := \sqrt{x_2^1 + \cdots + x_n^2}$ mit den folgenden Eigenschaften:
   (a) $||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \iff x = 0$
   (b) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
   (c) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$
   (d) $|\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \cdot ||y||$

Definition Konvergenz

Sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$. Die folgenden Definitionen sind für $\lim_{k \to \infty} x_k = y$ äquivalent:

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 1$ so dass $\forall k \geq N \; ||x_k - y|| < \varepsilon$.
2. Für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ konvergiert die Folge $(x_{k,i})_k$ von reellen Zahlen nach y_i.
3. Die Folge der reellen Zahlen $||x_k - y||$ konvergiert nach 0.

2.2 Stetigkeit

Sei $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in \mathcal{X}$.
Funktion f ist **stetig in $\mathbf{x_0}$**, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ so dass $x \in \mathcal{X}, \; ||x - x_0|| < \delta \implies ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$.
2. Für alle Folgen (x_k) in X mit $\lim x_k = x_0$ gilt $\lim f(x_k) = f(\lim x_k)$.
3. $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x \neq x_0}} f(x) = f(x_0)$

Funktion f ist **stetig in $\mathcal{X}$** falls f für jeden Punkt $x_0 \in \mathcal{X}$ stetig ist. Es gilt:

1. $f(x = x_1, \ldots, x_n) \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ und $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dann gilt:
   f stetig $\iff \forall i = 1, \ldots, m \; f_i$ stetig.
2. Polynome sind stetig.
3. Summen + Produkte von stetigen Funktionen sind stetig.
4. Funktionen unterschiedlicher Variablen sind stetig, falls alle Variablen stetig sind.
5. Verknüpfungen stetiger Funktionen sind stetig.

Sandwich-Lemma

Wenn $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Funktionen für die gilt, dass $\forall x \in \mathbb{R}^n, \; f(x) < g(x) < h(x)$, dann gilt

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L \implies \lim_{x \to a} g(x) = L$$

Definition Limit zu x_0

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : X \to R^m$. Sei $x_0 \in X$ und $y \in \mathbb{R}^m$. Falls:

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0, \; \forall x \in X, \; x \neq x_0,$$
$$||x - x_0|| < \delta \implies ||f(x) - y|| < \varepsilon$$

Dann gilt:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = y.$$

2.3 Eigenschaften von Mengen

Eine Menge $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ist

- **beschränkt**, falls die Menge $\{||x|| \mid x \in \mathcal{X}\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist (d.h. $\exists R \geq 0, \; \forall x \in \mathcal{X} : ||x|| \leq R$).
- **abgeschlossen**, falls jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{X}$, die in $\mathbb{R}^n$ konvergiert, zu einem Punkt in $y \in \mathcal{X}$ konvergiert. Dies kann mit einem Ball visualisiert werden. Gegenbeispiele: $\frac{1}{k}, <$.
- **kompakt**, falls sie beschränkt und abgeschlossen ist.
- **offen**, falls ihr Komplement $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{X}$ abgeschlossen ist. $\forall x \in U, \; \exists \delta > 0, \; \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - y_i| < \delta, \forall i \in [n]\}$
- **konvex**, falls $\forall x, y \in \mathcal{X} : \lambda x + (1 - \lambda) y \in \mathcal{X}$ gilt (die Linie zwischen x, y ist in $\mathcal{X}$).

Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig, dann: *(abg.: abgeschlossen)*
$U \in \mathbb{R}^m$ offen/abg. $\implies f^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen/abg.
Beispiele:

- $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist offen.
- $[a, b) \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen.
- $\mathbb{R}^n$ und $\varnothing$ sind offen.
- $(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \subset \mathbb{R}^2$ ist offen.

Bolzano-Weierstrass

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.

Min-Max-Theorem

Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n, \mathcal{X} \neq \varnothing$ eine kompakte Menge und $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f beschränkt und ein Maximum (x^+)/Minimum (x^-) existieren, so dass

$$f(x^+) = \sup_{x\in\mathcal{X}} f(x) \quad f(x^-) = \inf_{x\in\mathcal{X}} f(x)$$

2.4 Partielle Ableitungen

Um eine partielle Ableitung von $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (wobei $\mathcal{X}$ offen) zu finden, betrachten wir alle Variablen bis auf eine als konstant und leiten nach dieser ab.

$$\frac{\partial f}{\partial x_{0,j}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_{0,1}, \ldots, x_{0,j} + h, \ldots, x_{0,n}) - f(x_0)}{h}$$

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_j} := \begin{pmatrix} \frac{\partial *}{\partial f_1(x_0)} x_j \\ \vdots \\ \frac{\partial *}{\partial f_m(x_0)} x_j \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen haben folgende Eigenschaften:

1. $\partial_j(f+g) = \partial_j f + \partial_j g$
2. $\partial_j(f \cdot g) = \partial_j(f) \cdot g + \partial_j(g) \cdot f$
3. $\partial_j(f/g) = \frac{\partial_j(f)\cdot g - \partial_j(g)\cdot f}{g^2}$ für $g \neq 0$

Jacobi-Matrix

Sei $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $\mathcal{X}$ eine offene Menge. Die Jacobi-Matrix ist eine $m \times n$ Matrix.

$$J_f = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq i\leq m}}$$

Gradient

Der **Gradient** von $f : U \to \mathbb{R}$ ist:

$$\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1} f(x) \\ \vdots \\ \partial_{x_n} f(x) \end{pmatrix}$$

Divergenz

Die Divergenz einer Funktion f ist die Spur der Jacobi-Matrix von f.

$$\operatorname{div}(f)(x_0) = \operatorname{Tr}(J_f(x_0)) = \sum_i (J_f)_{i,i} = \sum_i \partial x_i f_i(x)$$

2.5 Differenzierbarkeit

Differenzierbarkeit

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen $f : U \to \mathbb{R}^m$ heisst *differenzierbar* bei $x_0 \in U$ falls es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sodass:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{||x - x_0||} = 0$$

Dreigliedentwicklung

$df(x_0) = A \iff$ hat die sog Dreigliedentwicklung $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \mathrm{R}(x - x_0)$ wobei

$$\mathrm{R}(x - x_0) = \sigma(\|x - x_0\|) \iff \lim_{x\to x_0, x\neq x_0} \frac{\mathrm{R}(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$$

f diffbar bei $x_0 \iff$ Alle $f_i : U \to \mathbb{R}$ diffbar bei x_0
Wenn *alle partiellen Ableitungen* existieren und *diese stetig* sind, dann ist f differenzierbar.
Falls f, g im Punkt $x_0 \in \mathcal{X}$ differenzierbar sind, gilt:

1. f ist stetig im Punkt x_0
2. f hat alle partiellen Ableitungen am Punkt x_0 und die Matrix, welche $df(x_0) : x \mapsto Ax$ repräsentiert, ist die Jacobi-Matrix von f am Punkt x_0, d.h. $A = J_f(x_0)$
3. $d(f+g)(x_0) = df(x_0) + dg(x_0)$
4. Wenn $m = 1$ ist, dann ist $f \cdot g$ differenzierbar. Wenn ausserdem $g \neq 0$ gilt, dann ist es f/g auch.
5. Wenn $f : \mathcal{X} \to Y, g : Y \to \mathbb{R}^m$ beide differenzierbar sind, so gilt $d(g\circ f)(x_0) = dg(f(x_0)) \circ df(x_0)$. Weiter ist $J_{g\circ f}(x_0) = J_g(f(x_0)) \cdot J_f(x_0)$.

Die Ableitung einer Funktion ist gegeben durch

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ \vdots \\ f_n'(x_0) \end{pmatrix}$$

Richtungsableitung

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, $x_0 \in U$. Die *Richtungsableitung* von f in Richtung v bei x_0 ist

$$D_v f(x_0) := \mathcal{J}_g(0) = \begin{pmatrix} \partial_x g_1(0) \\ \vdots \\ \partial_x g_m(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

wobei $g : \{t \in \mathbb{R} \mid x_0 + tv \in u\} \to \mathbb{R}^m, g(t) = f(x_0 + tv)$
Bem: Falls $m = 1$, dann $D_{e_i} f(x_0) = \partial_{x_i} f(x_0)$ für e_i den i-ten *Standardbasisvektor*. Dann gilt auch eine einfachere Schreibweise:

$$D_v f(x) = \nabla_v f(x) = \nabla f(x) \cdot \frac{v}{\|v\|}$$

2.6 Höhere Ableitungen

Mit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen , dann definieren wir $C^\infty \subseteq C^k \subseteq C^1 \subseteq C^0$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
C^0(U, \mathbb{R}^m) &:= \{\text{Stetige Funktionen } f : U \to \mathbb{R}^m\} \\
C^1(U, \mathbb{R}^m) &:= \{\text{“stetig diffbare” } f\} \\
&:= \left\{f \text{ sodass alle } \partial_{x_j} f_i \text{ stetig/existent}\right\} \\
C^k(U, \mathbb{R}^m) &:= \{f \text{ diffbar und alle } \partial_{x_j} f \in C^{k-1}(U, \mathbb{R}^m)\} \\
&:= \{f, \text{ alle } \partial_{x_{j_1}} \cdot \cdots \cdot \partial_{x_{j_k}} f_i \text{ stetig/existent}\}
\end{aligned}$$

$$C^\infty(U, \mathbb{R}^m) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(U, \mathbb{R}^m)$$

Hesse-Matrix

Die Hesse-Matrix ist eine $n\times n$ symmetrische Matrix, welche die zweite Ableitung definiert:

$$\operatorname{Hess}_f(x_0) := \left(\partial_{x_i,x_j} f(x_0)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

2.7 Taylorpolynome

Sei $f \in C^k(U, \mathbb{R})$ und $y_i = (x)_i - (x_0)_i$. Dann ist das *k-te Taylorpolynom* von f bei x_0:

$$T_k f(x) = \sum_{\substack{m_1,\dots,m_n \geqslant 0 \\ m_1+\dots+m_n \leq k}} \underbrace{\frac{1}{m_1! \cdots m_n!} \cdot \partial_1^{m_1} \cdots \partial_n^{m_n} f(x_0)}_{\text{Konstante}} \cdot \underbrace{y_1^{m_1} \cdot \ldots \cdot y_n^{m_n}}_{\text{Monom}} = T_k f(x; x_0)$$

Beispiele:

$$T_1 f(x; x_0) := f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), y \rangle$$
$$T_2 f(x; x_0) := T_1 f + \frac{1}{2} \cdot y^\top \cdot \mathrm{Hess}_f(x_0) \cdot y$$

Landau-Symbol σ

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $g : U \to \mathbb{R}$, $x_0 \in U$. Dann ist $\sigma(g)$ die Menge der Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$, für die gilt:

$$\lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$$

Rechenregeln:

1. $\sigma(x^a) + \sigma(x^b) = \sigma(x^{\min(a,b)})$
2. $\sigma(x^a) \cdot \sigma(x^b) = \sigma(x^{a+b})$
3. $x^a \cdot \sigma(x^b) = \sigma(x^{a+b})$

Für Polynome $P(x), x \in \mathbb{R}^n$(z.B. $x_1^k, x_1 x_2, \ldots$):

4. $P = \sigma(\|x\|^k)$ falls $\deg P > k$
5. $\sigma(P) = \sigma(\|x\|^k)$ falls $\deg P \geq k$
6. $P \cdot \sigma(\|x\|^k) = \sigma(\|x\|^{k+\deg P})$

2.8 Definit

Eine (symmetrische) $n \times n$ Matrix A ist

- **positiv definit**, falls für alle $y \neq 0 : y^\top A y > 0$ (oder falls alle Eigenwerte positiv sind)
- **negativ definit**, falls für alle $y \neq 0 : y^\top A y < 0$ (oder falls alle Eigenwerte negativ sind)
- **indefinit**, falls es y, z gibt mit $y^\top A y > 0, z^\top A z < 0$ (oder falls sowohl positive als auch negative Eigenwerte existieren)

Eigenwerte können mit dem charakteristischen Polynom gefunden werden:

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow ad - (a+d)\lambda + \lambda^2 - bc = 0$$

Determinante in drei Dimensionen

$$a \cdot \det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

Sylvesterkriterium

$$A \text{ pos. definit} \iff \forall k \in \{1, \ldots, n\},\ \det(A_k) > 0$$

mit $A_k = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ als Submatrix (und A symm.).

Für *negativ definit*, wende das Kriterium mit $-A$ an.
Achtung: $\det(-A_k) = (-1)^n \det(A_k)$ für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Also gilt für symmetrische $A \in \mathbb{R}^{2,2}$:
A pos definit $\iff \det A > 0, A_{11} > 0$

2.9 Extrema

Kritische Punkte

Ein Punkt $x_0 \in \mathcal{X}$ wo $\nabla f(x_0) = 0$ gilt ist ein kritischer Punkt. Wenn zusätzlich gilt, dass $\det(\mathrm{Hess}_f(x_0)) = 0$, dann ist x_0 *degeneriert*.

Lokale Extrema

Sei $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ differenzierbar und $\mathcal{X}$ eine offene Menge. Dann ist $x_0 \in \mathcal{X}$ ein **lokales Maximum (Minimum)** falls es ein ε gibt, wo gilt:

$$\|x - x_0\| < \varepsilon, x \in U \implies f(x_0) \leq (\geq) f(x)$$

Wenn $x_0 \in \mathcal{X}$ ein **lokales Extrema** ist, dann gilt ausserdem $\nabla f(x_0) = 0$.

Sattelpunkt

Wenn ein kritischer Punkt weder Maximum noch Minimum ist, dann nennen wir ihn Sattelpunkt.

Globale Extrema

Sei $f : K \mapsto \mathbb{R}$ und K kompakt, dann existiert ein globales Extrema von f und es ist entweder ein kritischer Punkt oder am Rand von K. Um ein solches Extrema zu bestimmen, teilen wir K in sein Inneres $\mathcal{X}$ und den Rand B auf.

Nun bestimmen wir zuerst wie zuvor die kritischen Punkte von $\mathcal{X}$. Um die Maximas/Minimas von B zu bestimmen, benötigen wir nur Wissen aus Analysis I (da von der Form $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$).

Testen von kritischen Punkten

Sei $f : \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, \mathcal{X}$ offen und $f \in C^2$. Sei x_0 ein *nicht-degenerierter* kritischer Punkt von f. Dann gilt:

1. $\mathrm{Hess}_f(x_0)$ pos. def. $\implies x_0$ ist lokales Minimum.
2. $\mathrm{Hess}_f(x_0)$ neg. def. $\implies x_0$ ist lokales Maximum.
3. $\mathrm{Hess}_f(x_0)$ indefinit $\implies x_0$ ist Sattelpunkt.

Dies funktioniert nicht, wenn x_0 ein degenerierter kritischer Punkt ist. In einem solchen Fall müssen die Vorzeichen überprüft werden.

Es gilt für *alle kritischen Punkte* x_0 (auch degenerierte):
$H_f(x_0)$ hat pos. Eigenwerte $\implies x_0$ kein lokales Max.
$H_f(x_0)$ hat neg. Eigenwerte $\implies x_0$ kein lokales Min.

Kritische Punkte mit Nebenbedingungen

Wenn wir Minimas/Maximas einer Funktion $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ mit einer Nebenbedingung $g(x) = 0, g : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ bestimmen wollen, können wir dafür Lagrange-Multiplikatoren verwenden.

Lagrange-Multiplikator

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, g \in C^1(U, R)$ Falls x_0 lokales Extremum von $f\mid_{g^{-1}(0)}$ (f eingeschränkt auf $\{x \in U \mid g(x) = 0\}$), dann $\nabla g(x_0) = 0$ oder es gibt ein $\lambda \in \mathbb{R}$ sodass

$$\nabla f(x_0) = \lambda \cdot \nabla g(x_0)$$

Niveaumengen (Level Sets):

$$ax + by + cz = K, \quad \text{wobei } K \text{ eine Konstante ist}$$

Die **Normale** zur Oberfläche wird durch den **Gradienten** der Funktion an einem bestimmten Punkt x_0 gegeben, daher ist die Normale der Gradient der Funktion.

Tagentialraum

Der Tangentialraum eines Graphen f am Punkt x_0 ist gegeben durch $g(x) = f(x_0) + df(x_0)(x - x_0)$.

Lokale Invertierbarkeit

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $f : U \to \mathbb{R}^x$ diffbar. f heisst **lokal invertierbar** bei $x_0 \in U$ falls eine offene Menge B existert mit $x_0 \in B$, für die gilt: $f(B) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, und es gibt ein diffbares $g : f(B) \to B$ (sodass $f \circ g = id_{f(B)}, g \circ f = id_B$).
Falls $\det(J_f(x_0)) \neq 0$, dann ist f lokal invertierbar bei x_0. Sei g die lokale Umkehrfunktion, dann: $J_g(f(x_0)) = J_f(x_0)^{-1}$ falls f $C^k \Rightarrow g$ C^k.

3 Integrale in $\mathbb{R}^n$

3.1 Einfache Integrale

Für $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ ist das Integral definiert als

$$\int_a^b f(t)dt = \begin{pmatrix} \int_a^b f_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_a^b f_n(t)dt \end{pmatrix}$$

Parametrisierte Kurve

Eine parametrisierte Kurve in $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ wobei γ stückweise in C^1 ist, d.h. wir können γ so partitionieren, dass alle Partitionen in stetig diffbar sind. Eine parametrisierte Kurve muss nicht injektiv sein.

Geschlossener Weg

Ist $\gamma(a) = \gamma(b)$ heisst γ *geschlossener Weg*. Dann schreibt man auch $\oint_\gamma$ für $\int_\gamma$.

3.2 Wegintegrale

Sei $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve und $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, welche das Bild von γ beinhaltet. Sei $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Dann ist ein Wegintegral (auch: Kurvenintegral) definiert als:

$$\int_\gamma f(s)ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

Wegintegrale haben folgende Eigenschaften:

1. Sie sind unabhängig von orientierte Unparametrisierungen, d.h. sie hängen nur vom Bild der Kurve und nicht von der Parametrisierung ab.
   Eine **orientierte Unparametrisierung** eines Wegs $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, ist ein Weg $\sigma : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ mit $\sigma = \gamma \circ \varphi$ wobei $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ stetig, diffbar auf (c, d), streng monton wachsend und es gilt $\varphi(c) = a,\ \varphi(d) = b$ (insbesondere ist φ bijektiv).
   $$\Rightarrow \int_\gamma f(s)\ ds = \int_{\tilde{\gamma}} f(s)\ ds$$
2. Sei $\gamma_1 + \gamma_2$ ein Pfad gegeben durch die Vereinigung zweier Kurven. Dann gilt
   $$\gamma_1 + \gamma_2 := \begin{cases} \gamma_1(t) & t \in [a,\ b] \\ \gamma_2(t) & t \in [b,\ d + b - c] \end{cases}$$
   $$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f(s)\ ds = \int_{\gamma_1} f(s)\ ds + \int_{\gamma_2} f(s)\ ds$$
3. Sei $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$ ein Pfad und $-\gamma$ ist der Pfad in die Gegenrichtung (d.h. $(-\gamma)(t) = \gamma(a + b - t)$). Dann gilt
   $$\int_{-\gamma} f(s)ds = -\int_\gamma f(s)ds$$

3.3 Potential

Ein differenzierbares skalares Feld $g : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ mit $\nabla g = f, f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}^n$ wird ein **Potential** von f genannt. Dies kann wie folgt verwendet werden:

$$\begin{aligned} \int_\gamma f\ ds &= \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt \\ &= \int_a^b \nabla g(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\ dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(g(\gamma(t)))\ dt \\ &= g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)) \end{aligned}$$

3.4 Konservative Vektorfelder

Sei $\mathcal{X}$ offen und $f : \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Falls für irgendwelche $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ das Wegintegral $\int_\gamma f(s)ds$ unabhängig von der Kurve in $\mathcal{X}$ von x_1 nach x_2 ist, dann ist das Vektorfeld f konservativ.
2. Jedes Wegintegral in f entlang einer geschlossenen Kurve (Schlaufe) ist 0.
3. Ein Potential für f existiert.
4. $J_f(x)$ ist symmetrisch.

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ in C^1, dann gilt: (falls f sternförmig, gilt die Rückrichtung)

$$f \text{ ist konservativ} \implies \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$$

Zusammenfassend gilt:

$$f \in C^0(U, \mathbb{R}^n) \text{ konservativ mit } U \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$\Updownarrow$$
$$f = \nabla g \text{ für } g \in C^1(U, \mathbb{R})$$
$$\Downarrow \quad (\Uparrow \quad U \text{ sternförmig})$$
$$J_f(x) \text{ symmetrisch}$$

Wegzusammenhängend

Sei $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ offen. $\mathcal{X}$ ist wegzusammenhängend, falls für jedes Paar an Punkten $x, y \in \mathcal{X}$ ein Pfad $\gamma : (0,1] \mapsto \mathcal{X}$ existiert, der in C^1 ist und $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ hält.

Sternförmig

Eine Teilmenge $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ wird sternförmig genannt, falls $\exists x_0 \in \mathcal{X}$ so dass $\forall x \in \mathcal{X}$ eine gerade Strecke x_0 nach x existiert, die komplett in $\mathcal{X}$ enthalten ist.

$$\mathcal{X} \text{ ist konvex} \implies \mathcal{X} \text{ ist sternförmig}$$

Wenn $\mathcal{X}$ eine sternförmige, offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^1$ ein Vektorfeld ist, dann gilt:

$$\partial_j f_i = \partial_i f_j \quad \forall i, j \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist konservativ}$$

$$\operatorname{curl}(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f \text{ ist konservativ}$$

$\operatorname{curl}(f)$ ist definiert als

$$\operatorname{curl}(f) := \begin{pmatrix} \partial_y f_3 - \partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 - \partial_x f_3 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix}$$

3.5 Riemann-Integral in $\mathbb{R}^2$

Partition in zwei Dimensionen

Eine Partition P eines abgeschlossenen Rechtecks $R = [a,b] \times [c,d]$ ist eine Menge von Rechtecken. Für jede Partition $P_x : a = x_0 < \ldots < x_n = b$ von $[a,b]$ und P_y (analog) erhalten wir eine Partition $P_{i,j} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ von R mit der Fläche $\mu(P_{i,j} = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}))$.

Mit den Hilfsdefinitionen

$$f_{i,j} = \inf_{P_{i,j}} f(x,y), \quad F_{i,j} = \sup_{P_{i,j}} f(x,y)$$

können wir die Unter- und Obersumme bestimmen:

$$s(P_x \times P_y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} f_{i,j} \cdot \mu(P_{i,j})$$
$$S(P_x \times P_y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} F_{i,j} \cdot \mu(P_{i,j})$$

Sei $f : R \mapsto \mathbb{R}$ beschränkt. f ist auf R integrierbar, falls $\sup_{(P_x, P_y)} s(P_x, P_y) = \inf_{(P_x, P_y)} S(P_x, P_y)$ gilt. Dieser Wert ist dann definiert als:

$$\int_R f(x,y)\, d(x,y) \text{ oder } \int\int_R f(x,y)\, d(x,y)$$

Nicht-Quadratische Flächen

Sei $A \subset R$ eine Fläche. $f : A \subset R \mapsto \mathbb{R}$ ist auf A integrierbar, falls $f \cdot \mathcal{X}_A$ auf R integrierbar ist.

$$\int_R f(x,y) \cdot \mathcal{X}_A(x,y)\, d(x,y) \text{ oder } \int_A f(x,y)\, d(x,y)$$

$\mathcal{X}_A$ ist die charakteristische Funktion von A.

Eigenschaften des Integrals

Sei $f, g : A \subset R \mapsto \mathbb{R}$ auf A integrierbar, dann gilt folgendes:

1. $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha f + \beta g$ ist integrierbar:
$$\int_A \alpha f + \beta g\, d(x,y) = \alpha \int_A f\, d(x,y) + \beta \int_A g\, d(x,y)$$
2. Falls $\forall (x,y) \in A : f(x,y) \leq g(x,y)$, dann gilt:
$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) \leq \int_A g(x,y)\, d(x,y)$$
3. Falls $f(x,y) \geq 0$ und $B \subset A$, dann gilt:
$$\int_B f(x,y)\, d(x,y) \leq \int_A f(x,y)\, d(x,y)$$
4. Dreiecksungleichung:
$$\left| \int_A f(x,y)\, d(x,y) \right| \leq \int_A |f(x,y)|\, d(x,y)$$
5. Falls $f = 1$, dann gilt:
$$\int_A f(x,y)\, d(x,y) = \int_A 1\, d(x,y) = \gamma(A) = \operatorname{vol}_n(A)$$
6. Falls $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, $f : U_1 \cup U_2 \to \mathbb{R}$ stetig:
$$\int_{U_1 \cup U_2} f(x)\, d(x,y) = \int_{U_1} f(x)\, d(x,y) + \int_{U_2} f(x)\, d(x,y) - \int_{U_1 \cap U_2} f(x)\, d(x,y)$$

Satz von Fubini

Für eine Region $D \subset \mathbb{R}^2 := \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, g(x) < y < h(x)\}$ gilt:

$$\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$$

Für eine Region $D \subset \mathbb{R}^2 := \{(x,y) \mid c \leq y \leq d, G(y) < x < H(y)\}$ gilt:

$$\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_{G(y)}^{H(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Satz von Stolz

Sei $f : R \mapsto \mathbb{R}$ integrierbar auf $R = [a,b] \times [c,d]$. Sei $y \mapsto f(x,y)$ integrierbar auf $[c,d]$ für jedes $x \in [a,b]$. Dann folgt:

$$\int_R f(x,y)\, d(x,y) = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx$$

Paramet. l-Mengen und Vernachlässigbarkeit

1. Für $1 \leq l \leq n$ ist eine *parametrisierte l-Menge* in $\mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion
$$f : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_l, b_l] \to \mathbb{R}^n$$
2. $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *vernachlässigbar* (*negligible*), falls $B \subseteq \text{Bild}(f_1) \cup \cdots \cup \text{Bild}(f_k)$ für l_i-Mengen f_i mit $l_i < n$, sodass f auf $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_l, b_l) \in C^1$.
(Informell: Wir können die ganze Menge mit einer endlichen Menge an Rechtecken beliebiger Grösse überdecken.)

Es gilt: $\int_U f(x)\ \mathrm{d}x = 0$, falls U kompakt und vernachlässigbar

Weitere Integrationskriterien

1. Sei R ein kompaktes Rechteck und $f : R \mapsto \mathbb{R}$ ist stetig. Dann ist f integrierbar auf R.
2. Sei $f : R \mapsto \mathbb{R}$ beschränkt und X die Menge aller nicht stetigen Punkte von f. Wenn X vernachlässigbar ist, dann ist f auf R integrierbar.
3. Sei $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ stetig mit $\forall x \in [a, b] : \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ und $A = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$. Falls $f : A \mapsto \mathbb{R}$ stetig ist, so ist f auf A integrierbar und es folgt dass
$$\int_A f(x, y)\, d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx$$

Polarkoordinaten

Polarkoordinaten werden definiert durch
$$\varphi : [0, R] \times [-\pi, \pi] \to B_R(0)$$
mit
$$\varphi(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$$
und
$$B_R = \{(r, \theta) \in X_R : r = 0 \text{ oder } r = R \text{ oder } |\theta| = \pi\}$$
$\Rightarrow$ "$\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta$"

Lipschitz-Kurve

Eine Kurve $\varphi : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$ ist Lipschitz, falls
$$||\varphi(s) - \varphi(t)|| \leq M \cdot |s - t|\ \forall s, t \in [0, 1]$$
Es folgt ausserdem, dass $\varphi([0, 1]) \subset \mathbb{R}^2$ eine Nullmenge ist.

3.6 Variablenwechsel

Wenn gilt:

- $\bar{U}$ kompakt, $\bar{U} = U \cup B$, U offen, B vernachlässigb.
- $\bar{V}$ kompakt, $\bar{V} = V \cup C$, V offen, C vernachlässigb.
- $\varphi : \bar{U} \to \bar{V}$ stetig und C^1 auf U
- $\varphi(U) = V,\ \varphi : U \to V$ bijektiv
- Es gibt eine stetige Funktion $\bar{U} \to \mathbb{R}$, deren Einschränkung auf U gleich $|\det J_\varphi|$ ist.
- $f : \bar{V} \to \mathbb{R}$ stetig.

Dann:
$$\int_{\bar{V}} f(y)\, dy = \int_{\bar{U}} f(\varphi(x)) \cdot |\det J_\varphi(x)|\, dx$$

1. Generell: $dy = |\det J_\varphi(x)|\, dx$
2. Polarkoordinaten: $dx\, dy = r\ dr\, d\theta$
3. Zyl. Koordinaten: $dx\, dy\, dz = r\ dr\, d\varphi\, dz$
4. Kugelkoordinaten: $dx\, dy\, dz = r^2 \sin(\varphi)\ dr\, d\theta\, d\varphi$

Für mehr Infos siehe letzte Seite.

Achtung: Multiplikation mit der Determinante von Jacobi-Matrix nicht vergessen!

Uneigentliches Integral

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $a \in \mathbb{R}$, $f : [a, \infty) \times I \to \mathbb{R}$ stetig.
$$\int_{[a,\infty) \times I} f(x, y) d(x, y) := \lim_{b \to \infty} \int_{[a,b] \times I} f(x, y)\, d(x, y)$$
Falls $f \geq 0$ folgt aus Fubini:
$$= \int_a^\infty \int_I f(x, y) d(x, y) = \int_I \int_a^\infty f(x, y)\, d(y, x)$$
Für $f \geq 0$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:
$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d(x, y) := \lim_{R \to \infty} \int_{[-R,\pi]^2} f(x, y)\, d(x, y)$$
$$= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y)\, d(x, y)$$

Schwerpunkt

Der *Schwerpunkt* $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ einer kompakten Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch
$$\bar{x}_i = \frac{1}{\text{vol}(U)} \int_U x_i\ \mathrm{d}x$$

Beispiel mit Kettenregel

Sei $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ eine glatte Funktion mit $\nabla f \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}, 7 \right) = (6, 2, 0)$. Wenn wir nun $\frac{\partial f}{\partial r} \left(\sqrt{3}, \frac{2}{3}\pi, 7 \right)$ mit zylindrischen Koordinaten berechnen wollen, dann ist
$$\frac{\partial f(g(r, \theta, z))}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g_1}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g_2}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial g_3}{\partial r}$$
Nun können wir die obige Information brauchen, um für $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ einzusetzen.

3.7 Satz von Green

Der Satz von Green stellt eine Beziehung zwischen Linienintegralen und Doppelintegralen über einen von einer parametrisierten Kurve umschlossenen Bereich her.

Eine parametrisierte Jordan-Kurve ist eine geschlossene parametrisierte Kurve $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, wobei $\gamma :]a, b] \mapsto$

$\mathbb{R}$ injektiv ist. Eine Jordan-Kurve in $\mathbb{R}^2$ ist das Bild einer parametrisierten Jordan-Kurve.

Seien b_1, b_2 die Basisvektoren von $\mathbb{R}^2$. Dann ist die Orientierung genau dann positiv, wenn die Matrix $[b_1, b_2]$ eine positive Determinante hat.

Ein reguläres Gebiet ist eine offene, beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^2$, deren Rand ∂A endliche Vereinungen von disjunkten Jordan-Kurven ist.

Eine parametrisierte Jordan-Kurve γ, die eine Randkomponente von A bildet, hat einen positiven Umlaufsinn, falls $(n(t), \gamma'(t))$ eine positiv orientierte Basis von $\mathbb{R}^2$ bildet. Dabei ist $n(t)$ der Einheitsvektor, welcher orthogonal zu $\gamma'(t)$ steht und von A weg zeigt. (Intuitiv: wenn die umschlossene Menge immer "links" liegt.)

Satz von Green

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ ein reguläres Gebiet und $F : U \mapsto \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld der Klasse C^1, wobei $(A \cup \partial A) \subset U \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\int_{\partial a} F(x)\, ds = \int\int_A (\partial_x f_2 - \partial_y f_1)\, dx\, dy$$

Um Flächen mit dem Satz von Green zu berechnen, benutzen wir ein Vektorfeld mit $\mathrm{curl}(f) = 1$, beispielsweise

$$f = (0, x) \text{ oder } f(-y, 0)$$

4 Themen aus Analysis I

Partielle Integration

$$\int f'(x)g(x)\ \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\ \mathrm{d}x$$

- Grundsätzlich gilt: Polynome ableiten ($g(x)$), wo das Integral periodisch ist ($\sin, \cos, e^x$,...) integrieren ($f'(x)$)
- Teils ist es nötig, mit 1 zu multiplizieren, um partielle Integration anwenden zu können (z.B. im Fall von $\int \log(x)\ \mathrm{d}x$)
- Muss eventuell mehrmals angewendet werden

Substitution

Um $\int_a^b f(g(x))\ \mathrm{d}x$ zu berechnen: Ersetze $g(x)$ durch u und integriere $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) \frac{\mathrm{d}u}{g'(x)}$.

- $g'(x)$ muss sich irgendwie herauskürzen, sonst nutzlos.
- Grenzen substituieren nicht vergessen.
- Alternativ kann auch das unbestimmte Integral berechnet werden und dann u wieder durch x substituiert werden.

Mitternachtsformel

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Partialbruchzerlegung

Seien $p(x), q(x)$ zwei Polynome. $\int \frac{p(x)}{q(x)}$ wird wie folgend berechnet:

1. Falls $\deg(p) \geq \deg(q)$, führe eine Polynomdivision durch. Dies führt zum Integral $\int a(x) + \frac{r(x)}{q(x)}$.
2. Berechne die Nullstellen von $q(x)$.
3. Pro Nullstelle: Einen Partialbruch erstellen.
   - Einfach, reell: $x_1 \to \frac{A}{x - x_1}$
   - n-fach, reell: $x_1 \to \frac{A_1}{x - x_1} + \ldots + \frac{A_r}{(x - x_1)^r}$
   - Einfach, komplex: $x^2 + px + q \to \frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$
   - n-fach, komplex: $x^2 + px + q \to \frac{A_1 x + b_1}{x^2 + px + q} + \ldots$
4. Parameter $A_1, \ldots, A_n$ (bzw. $B_1, \ldots, B_n$) bestimmen. (x jeweils gleich Nullstelle setzen, umformen und lösen).

5 Trigonometrie

5.1 Regeln

5.1.1 Periodizität

- $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha) \quad \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha) \quad \cot(\alpha + \pi) = \cot(\alpha)$

5.1.2 Parität

- $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$
- $\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(-\alpha) = -\cot(\alpha)$

5.1.3 Ergänzung

- $\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi - \alpha) = -\cot(\alpha)$

5.1.4 Komplemente

- $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha) \quad \cos(\pi/2 - \alpha) = \sin(\alpha)$
- $\tan(\pi/2 - \alpha) = -\tan(\alpha) \quad \cot(\pi/2 - \alpha) = -\cot(\alpha)$

5.1.5 Doppelwinkel

- $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$

5.1.6 Addition

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

5.1.7 Diverse

- $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$
- $\cosh^2(\alpha) - \sinh^2(\alpha) = 1$
- $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ und $\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
- $\exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z)$

- $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)}$
- $\sin(x) \leq x$
- $\cos(nx) = 2\cos x \cos((n-1)x) - \cos((n-2)x)$
- $\cos((n-1)x + x) = \cos((n-1)x)\cos x - \sin((n-1)x)\sin x$
- $\cos((n-1)x - x) = \cos((n-1)x)\cos x + \sin((n-1)x)\sin x$
- $\cos((n+2)x) = \cos((n+1)x)\cos x - \sin((n+1)x)\sin x$

5.1.8 Subtraktion

- $\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

5.1.9 Multiplikation

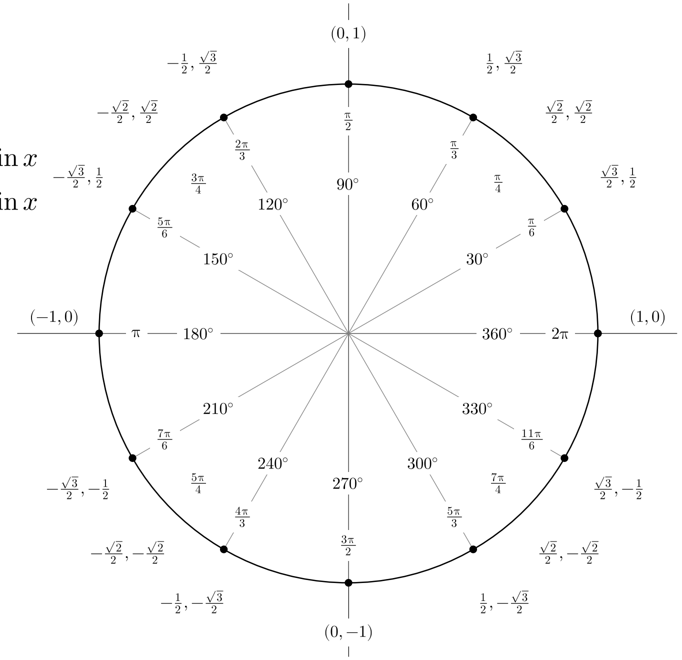
- $\sin(\alpha)\sin(\beta) = -\frac{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2}$
- $\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{2}$

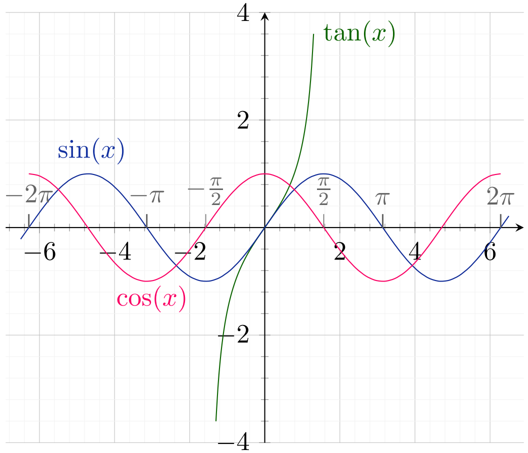
5.1.10 Potenzen

- $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$
- $\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$
- $\tan^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{1 + \cos(2\alpha)}$

Wichtige Werte

deg	0°	30°	45°	60°	90°	180°
rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$	0





6 Tabellen

6.1 Taylorpolynome

Funktion	x_0	Taylorpolynom
$\sin(x)$	0	$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880} \dots$
$\cos(x)$	0	$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} \dots$
$\tan(x)$	0	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} \dots$
$\arccos(x)^{(1)}$	0	$\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112} - \frac{35x^9}{1152} - \dots$
$\arcsin(x)^{(1)}$	0	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} + \dots$
$\arctan(x)^{(1)}$	0	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \dots$
e^x	0	$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \dots$
$\ln(x)^{(2)}$	1	$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} \dots$
$\ln(1+x)$	0	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \dots$
$\sqrt{1+x}$	0	$1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} \dots$
$\frac{ax}{(b-x)^2}$	0	$\frac{ax}{b^2} + \frac{2ax^2}{b^3} + \frac{3ax^3}{b^4} + \frac{4ax^4}{b^5} + \frac{5ax^5}{b^6} \dots$

Einschränkungen: (1): $|x| < 1$, (2): $0 < x \leq 2$

6.2 Grenzwerte

$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$	$\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$
$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$
$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$	$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \infty$
$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^m} = \infty$	$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
$\lim_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$	$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$
$\lim_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$	$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
$\lim_{x\to\pm\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$	$\lim_{x\to\infty} (1-\frac{1}{x})^x = \frac{1}{e}$
$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$, $\forall a > 0$	$\lim_{x\to\infty} x^a q^x = 0$, $\forall 0 \leq q < 1$
$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{x^a} = 0$
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$	$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{2^x} = 0$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{a} \cdot x\right) = \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

6.3 Ableitungen

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{f'(x)}$
$\frac{x^{-a+1}}{-a+1}$	$\frac{1}{x^a}$	$\frac{-a}{x^{a+1}}$
$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$x^a \ (a \neq -1)$	$a \cdot x^{a-1}$
$\frac{1}{k\ln(a)}a^{kx}$	a^{kx}	$ka^{kx}\ln(a)$
$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\frac{2}{3}x^{3/2}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{n}{n+1}x^{\frac{1}{n}+1}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\sin^2(x)$	$2\sin(x)\cos(x)$
$\frac{1}{2}(x + \frac{1}{2}\sin(2x))$	$\cos^2(x)$	$-2\sin(x)\cos(x)$
$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$ $1+\tan^2(x)$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh(x)$
$\log(\cosh(x))$	$\tanh(x)$	$\frac{1}{\cosh^2(x)}$
$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\frac{1}{c}\cdot e^{cx}$	e^{cx}	$c\cdot e^{cx}$
$x(\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\ln\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{2}(\ln(x))^2$	$\frac{\ln(x)}{x}$	$\frac{1-\ln(x)}{x^2}$
$\frac{x}{\ln(a)}(\ln\lvert x\rvert - 1)$	$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{\ln(a)x}$

6.4 Weitere Ableitungen

$\mathbf{F(x)}$	$\mathbf{f(x)}$
$\frac{1}{a\cdot(n+1)}(ax+b)^{n+1}$	$(ax+b)^n$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsinh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{arccosh}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arctanh}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$x^x \ (x>0)$	$x^x\cdot(1+\ln x)$
$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x\ln a} = \log_a(e)\frac{1}{x}$
$\frac{(ax+b)^{n+2}}{a^2(n+1)(n+2)}$	$\frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)}$
$\sqrt{1-x^2} + x\cdot\arcsin(x)$	$\arcsin(x)$
$x\cdot\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$	$\arccos(x)$
$x\cdot\arctan(x) - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$	$\arctan(x)$
$x\cdot\operatorname{arcsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$	$\operatorname{arcsinh}(x)$
$x\cdot\operatorname{arccosh}(x) - \sqrt{x^2-1}\sqrt{x^2+1}$	$\operatorname{arccosh}(x)$
$\frac{1}{2}\log(1-x^2) + x\cdot\operatorname{arctanh}(x)$	$\operatorname{arctanh}(x)$
$\frac{\alpha}{\gamma}\log\lvert\gamma x+\beta\rvert$	$\frac{\alpha}{\gamma x+\beta}$

6.5 Definite Integrale

$$\int_0^{2\pi}\sin(x) = \int_0^{2\pi}\cos(x) = 0,$$
$$\int_0^{2\pi}\sin^2(x) = \int_0^{2\pi}\cos^2(x) = \pi$$

6.6 Integrale

$\mathbf{f(x)}$	$\mathbf{F(x)}$
$\int f'(x)f(x)\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2}(f(x))^2$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \mathrm{d}x$	$\ln\lvert f(x)\rvert$
$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ \mathrm{d}x$	$\sqrt{\pi}$
$\int(ax+b)^n\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}$
$\int x(ax+b)^n\ \mathrm{d}x$	$\frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}$
$\int(ax^p+b)^n x^{p-1}\ \mathrm{d}x$	$\frac{(ax^p+b)^{n+1}}{ap(n+1)}$
$\int(ax^p+b)^{-1}x^{p-1}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{ap}\ln\lvert ax^p+b\rvert$
$\int\frac{ax+b}{cx+d}\ \mathrm{d}x$	$\frac{ax}{c} - \frac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$
$\int\frac{1}{x^2+a^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\int\frac{1}{x^2-a^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert$
$\int\sqrt{a^2+x^2}\ \mathrm{d}x$	$\frac{x}{2}f(x) + \frac{a^2}{2}\ln(x+f(x))$

Koordinatentransformationen in $\mathbb{R}^2$		
Definition	Max. Definitionsbereich	Volumenelement
Polarkoordinaten		
$x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$	$0 \le r < \infty$ $0 \le \theta < 2\pi$	$dxdy = r\ drd\theta$
Elliptische Koordinaten		
$x = ra\cos\theta$ $y = rb\sin\theta$	$0 \le r < \infty$ $0 \le \theta < 2\pi$	$dxdy =$ $abr\ drd\theta$
Koordinatentransformationen in $\mathbb{R}^3$		
Zylinderkoordinaten		
$x = r\cos\theta$ $y = r\sin\theta$ $z = z$	$0 \le r < \infty$ $0 \le \theta < 2\pi$ $-\infty < z < \infty$	$dxdydz =$ $r\ drd\theta dz$
Kugelkoordinaten		
$x = r\sin\theta\cos\varphi$ $y = r\sin\theta\sin\varphi$ $z = r\cos\theta$	$0 \le r < \infty$ $0 \le \theta \le \pi$ $0 \le \varphi < 2\pi$	$dxdxydz =$ $r^2\sin\theta\ drd\theta d\varphi$