Aplicaciones a los negocios y la economía de derivadas

problema de aplicación

Una importante compañía que vende cosméticos y productos de belleza y que se especializa en la venta domiciliaria (casa por casa) descubrió que la respuesta de las ventas a la asignación de más representantes se ajusta a la ley de los rendimientos decrecientes. En un distrito regional de ventas, la compañía ha averiguado que la utilidad anual P, expresada en cientos de dólares, es una función del número de representantes x asignados a ese distrito. Específicamente, la función que relaciona esas dos variables es la siguiente:

$P = f(x) = (-12.5x^2 + 1375x - 1500)$

a) ¿Qué número de representantes producirá la utilidad máxima en el distrito?
b) ¿Cuál es la utilidad máxima esperada?

Estos resultados significan que se espera que el ingreso total anual se maximice en $1,250, cuando la empresa cobre $5 por unidad.

Resolviendo esta ecuación, se tiene que p vale 5. Por lo tanto un máximo relativo ocurre en f cuando p = 5.

Problemas de aplicación

La demanda del producto de una compañía varía según el precio que le fije al producto. La compañía ha descubierto que el ingreso total anual (R) es una función del precio p (en dólares).

$R = f(p) = -50p^2 + 500p$

a) Determina el precio que debería cobrarse con objeto de maximizar el ingreso total
b) ¿Cuál es el valor máximo del ingreso total anual?

el nivel de producción que maximizará la producción es de 1612 productos

Solución

La función de ingreso es $R(x) = x\,p(x) = 3.5x - 0.01x^2$

De modo que la función de ingreso marginal es $R'(x) = 3.5 - 0.02x$

Y la función de costo marginal es $C'(x) = 1.26 - 0.02x + 0.00021x^2$

Por consiguiente, el ingreso marginal es igual al costo marginal cuando $3.5 - 0.02x = 1.26 - 0.02x + 0.00021x^2$

Al resolver se obtiene

Ejemplo

Si se venden x unidades, entonces la utilidad total es el ingreso menos el costo

$P(x) = R(x) - C(x)$

y la función marginal de utilidad sería

$P'(x) = R'(x) - C'(x) = 0$

Para maximizar la utilidad, buscamos los números donde la utilidad marginal es 0. Por ello se puede decir que si la utilidad es un máximo, entonces... ingreso marginal= costo marginal.

Es decir, en ese caso podríamos determinar que el término utilidad viene a ejercer como sinónimo de beneficio. Ya que sería la diferencia que existe entre los costos que tiene un negocio determinado y los ingresos que ha obtenido.

En el campo de la economía y las finanzas, la utilidad está asociada a la ganancia que se obtiene a partir de un bien o una inversión.

Solución

total de costo/cantidad

Ejemplo

Ingreso por un producto

Utilidad

Prezi

Aplicaciones a los negocios y la economía de derivadas

Matemáticas Aplicadas a la Economia

- Costos
- Ingreso
- Utilidad

Introducción

- Objetivo: demostrar la aplicación empírica de las derivadas en diferentes áreas de la empresa.

Costo (función)

- Costo de un producto: Es la erogación económica que representa la fabricación de un producto o la prestación de un servicio.
  - $C(x)$ es la función costo.

Costo pr

Prezi

Matemáticas Aplicadas a la Economía

- Costos
- Ingreso
- Utilidad

Prezi

Introducción

- Objetivo: demostrar la aplicación empírica de las derivadas en diferentes áreas de la empresa.

Costo (función)

- Costo de un producto: Es la erogación económica que representa la fabricación de un producto o la prestación de un servicio.
  - $C(x)$ es la función costo.

Costo marginal

Es el aumento en el costo total que se produce cuando la cantidad producida cambia en una unidad. Es decir, es el costo de producir una unidad más de un producto o servicio. El costo marginal es la derivada C' (x) de la función costo.

Costo promedio : representa el costo por unidad, cuando se producen x unidades. la formula para hallar costo promedio es ..

total de costo/cantidad

Si el costo promedio es un minimo,

entonces ... costo marginal = costo promedio

Ejemplo

Una compañía estima que el costo de producir x artículos es $C(x)= 2600+2x+0.001x^2$

a) Encuentre el costo, el costo promedio y el costo marginal de producir 2000 articulos.

b) ¿ A qué nivel de producción el costo promedio será el mas bajo y cual es este costo promedio minimo?l

Solución

Para hallar el costo usamos la formula de la función C(x):

$C(x)= 2,600+2\ (2,000)+ 4,000$

$C(x)= 10,600$

Para hallar el costo promedio utilizamos la formula de la función c(x):

$c(x)= C(x)/x = 10,600/\ 2,000$

$c(x)=5.3$

Para hallar costo marginal utilizamos la derivada de C(x):

$C'(x)=2+0.002x$

$C'(x)=2+0.002(2,000)$

$C'(x)=6$

Cant. de productos	Costo (C(x))	Costo Promedio (c(x))	Costo Marginal (C'(x))
2000	10600	5.3	6

Ingreso por un producto:

- La cantidad de dinero que recibe una empresa por la venta de sus productos o servicios.
-
- $R(x)= p(q)$ es la función de ingreso.

Ingreso promedio:

Es una medida de los ingresos generados por cada usuario o unidad. El ingreso promedio por unidad permite el análisis de la generación de ingresos de la empresa y el crecimiento a nivel unitario, lo que puede ayudar a los inversores a identificar qué productos son altos o bajos generadores de ingresos.

Ingreso marginal:

es el cambio en el ingreso total que se produce cuando la cantidad vendida se incrementa una unidad, es decir, al incremento del ingreso total que supone la venta adicional de una unidad de un determinado bien. El ingreso marginal es la derivada de $R'(x)$ de la función ingreso.

Utilidad

Utilidad : Interés, provecho o fruto que se obtiene de algo.

Utilidad : Interés, provecho o fruto que se obtiene de algo.

Utilidad total : La utilidad que brinda la cantidad consumida de un bien.

Prezi

Utilidad marginal : Es el incremento en la utilidad total que produce la última unidad consumida de dicho bien. La

Utilidad marginal : Es el incremento en la utilidad total que produce la última unidad consumida de dicho bien. La utilidad marginal es decreciente: al aumentar el consumo de un bien, la satisfacción que produce cada nueva unidad es menor que la producida por el bien anterior.

Por ejemplo..

Por ejemplo..

Prezi

En el campo de la economía y las finanzas, la utilidad está asociada a la ganancia que se obtiene a partir de un bien o una inversión.

Es decir, en ese caso podríamos determinar que el término utilidad viene a ejercer como sinónimo de:

beneficio.

Ya que sería la diferencia que existe entre los costos que tiene un negocio determinado y los ingresos que ha obtenido.

Si se venden x unidades, entonces la utilidad total es el ingreso menos el costo:

$$P(x)= R(x)- C(x)$$

y la función marginal de utilidad sería:

$$P'(x)= R'(x) \quad C'(x)= 0$$

Para maximizar la utilidad, buscamos los números donde la utilidad marginal es 0.

Por ello se puede decir que si la utilidad es un máximo, entonces..

Ingreso marginal= costo marginal.

Problemas de aplicación

La demanda del producto de una compañía varía según el precio que le fije al producto. La compañía ha descubierto que el ingreso total anual (R) es una función del precio p (en dólares).

$$R = f(p) = -50p^2 + 500p$$

a) Determina el precio que debería cobrarse con objeto de maximizar el ingreso total

b) ¿Cuál es el valor máximo del ingreso total anual?

La función de ingreso es cuadrática, por lo tanto su gráfica es una parábola hacia abajo y su valor máximo ocurrirá por lo tanto en el vértice de la misma.

Para hallar el valor del punto de maximización de los ingresos, hay que igualar la derivada de la función a 0. Por lo tanto se tiene que:

$$F'(p) = -100p + 500 = 0$$

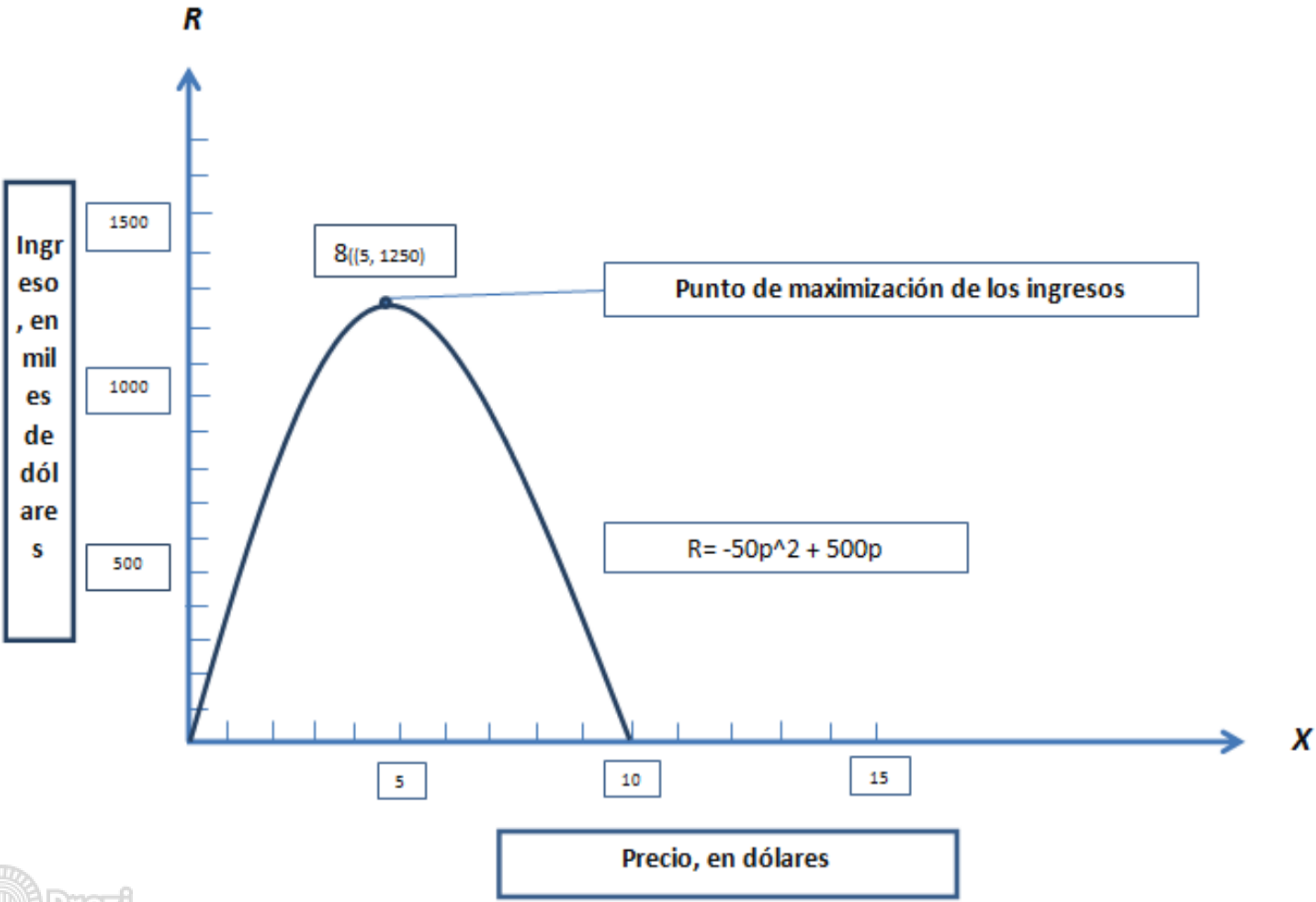
Resolviendo esta ecuación, se tiene que p vale 5. Por lo tanto un máximo relativo ocurre en f cuando $p = 5$.

Prezi

El valor máximo del ingreso anual se calcula sustituyendo $p=5$ en f, osea:

$$F(5) = -50\,(5)^2 + 500(5)$$
$$= -1{,}250 + 2{,}500$$
$$= 1{,}250$$

FIGURA CUADRÁTICA DE INGRESO



Estos resultados significan que se espera que el ingreso total anual se maximice en $1,250, cuando la empresa cobre $5 por unidad.

El costo total de la producción de q unidades de cierto producto se describe por medio de la función:

$C = 100,000 + 1,500q + 0.2q^2$

donde C es el costo total expresado en dólares.

a) Determine cuántas unidades (q) deberían fabricarse a fin de minimizar el costo promedio por unidad.

El costo promedio por unidad se calcula dividiendo el costo total entre el número de unidades producidas.

Por ejemplo, si el costo total de la fabricación de 10 unidades de un producto es de $275, el costo promedio por unidad será $275/10 = $27.50. Así pues, la función que representa el costo promedio por unidad en este ejemplo es:

$$\overline{C} = f(q) = \frac{C}{Q} = \frac{100000}{q} + 1500 + 0.2q$$

La primera derivada de la función del costo promedio es:

$$f'(q) = -100000q^{-2} + 0.2q$$

si f´ se hace igual a 0,

$$0.2 = \frac{100000}{q^2} = 500000 \quad \text{o bien} \quad q^2 = \frac{100000}{0.2} = 500000$$

Al obtener la raíz cuadrada de ambos miembros, se tiene un valor critico de

$q = 707.11$ unidades

Prezi

la naturaleza del punto crítico se determina por medio de la prueba de la segunda derivada:

$$f''(q) = 200000q^{-3}$$

$$= \frac{200000}{q^3}$$

$$f''(707.11) = \frac{200000}{(707.11)^3} = 0.000561 > 0$$

Por tanto, un mínimo relativo ocurre para f cuando $q = 707.11$. Este costo promedio mínimo por unidad es:

$$f(707.11) = \frac{100000}{707.11} + 1500 + 0.2(707.11)$$

$$= 141.42 + 1500 + 141.42 = \$1782.84$$

Prezi

Una importante compañía que vende cosméticos y productos de belleza y que se especializa en la venta domiciliaria (casa por casa) descubrió que la respuesta de las ventas a la asignación de más representantes se ajusta a la ley de los rendimientos decrecientes. En un distrito regional de ventas, la compañía ha averiguado que la utilidad anual P, expresada en cientos de dólares, es una función del número de representantes x asignados a ese distrito. Específicamente, la función que relaciona esas dos variables es la siguiente:

$$P = f(x) = (-12{\cdot}5x^2 + 1375x - 1500)$$

a) ¿Qué número de representantes producirá la utilidad máxima en el distrito?

b) ¿Cuál es la utilidad máxima esperada?

a) La derivada de la función de utilidad es

$$f'(x) = -25x + 1{,}375$$

Si f' se hace igual a 0,

$$-25x = -1{,}375$$

O bien, ocurre un valor critico cuando

$$X = 55$$

Al comprobar la naturaleza del punto crítico, se obtiene

$$f''(55) = -25$$

Así pues, un máximo relativo ocurre para f cuando x = 55

Prezi

c) La utilidad máxima esperada es

$$f(55) = (-12.55\,(55)\,2 \; + \; 1{,}375\,(55) \; - 1{,}500)$$

$$=(\,-37{,}812.5 \; + \; 75{,}625 \; - 1500) \; = 36{,}312.5$$

Prezi

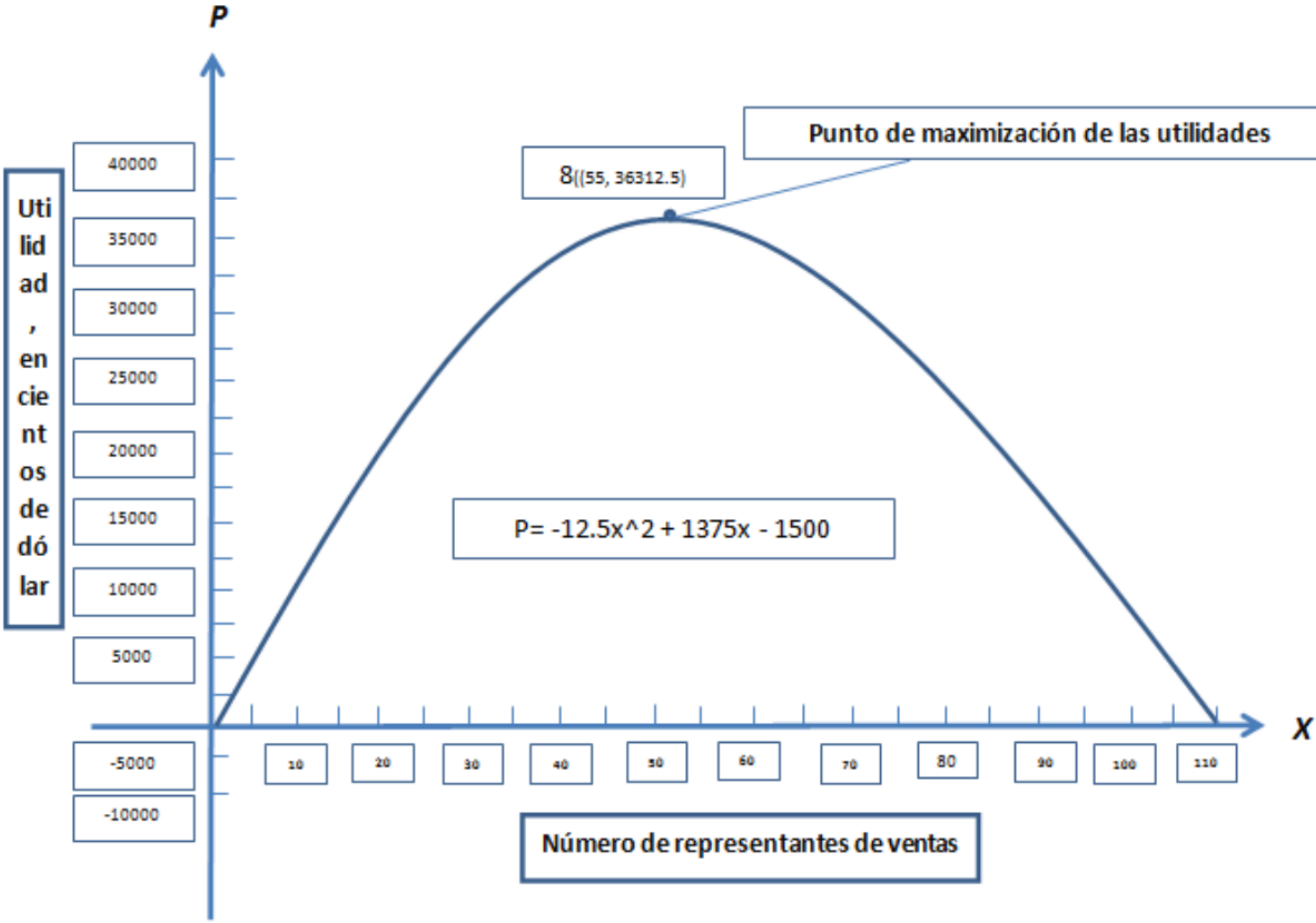
Podemos concluir que la utilidad anual máxima en el distrito será de $36,312.5 si se asignan 55 representantes al distrito.

problema de aplicación

Un fabricante ha ideado un nuevo diseño para los paneles solares para calentar el agua. Según los estudios de mercadotecnia que se han realizado, la demanda anual de los paneles dependerá del precio al que se venden. La función de su demanda es:

$$q = 100{,}000 - 200p$$

FIGURA DE UTILIDAD



q = números de unidades demandadas al año.

p = precio en dólares.

¿Cuál será la utilidad anual p en función del número de unidades q que se producen y venden?

Solución

Se tiene la ecuación que representa el costo total de la producción, pero todavía se necesita formular una función del ingreso total en términos de q.

$$\text{Ingreso total} = R = pq$$

Queremos expresar R en términos de q, entonces reemplazamos p en la ecuación anterior por una expresión igual que deriva de la función de demanda. Así obtenemos:

$$200p = 100\,000 - q$$

$$\downarrow$$

$$p = 500 - 0.005q$$

Ahora sustituimos la función del ingreso total:

$R = (500 \quad 0.005q)q = 500q - 0.005\, q\text{^}2$

Al ser reemplazadas las funciones de ingreso y de costo en términos de q, es posible definir la función de utilidad así:

$p = f(q) \longrightarrow R - C = 500q - 0.005\, q\text{^}2 - (150\,000 + 100q + 0.003\text{^}2)$

$p = 500q - 0.005\, q\text{^}2 - 150\,000 - 100q - 0.003\text{^}2$

$p = -0.008q\text{^}2 + 400q - 150\ 000$

problema de aplicación

El costo total de la producción de q unidades de cierto producto se describe por medio de la función:

$$C = 100{,}000 + 1{,}500q + 0.2q^2$$

donde C es el costo total expresado en dólares.

a) Determine cuántas unidades q deberían fabricarse a fin de minimizar el costo promedio por unidad.

El costo promedio por unidad se calcula dividiendo el costo total entre el número de unidades producidas.

Por ejemplo, si el costo total de la fabricación de 10 unidades de un producto es de \$275, el costo promedio por unidad será \$275/10 = \$27.50. Así pues, la función que representa el costo promedio por unidad en este ejemplo es:

$$\overline{C} = f(q) = \frac{C}{Q} = \frac{100000}{q} + 1500 + 0.2q$$

La primera derivada de la función del costo promedio es:

$$f'(q) = -100000q^{-2} + 0.2q$$

si f´ se hace igual a 0,

$$0.2 = \frac{100000}{q^2} = 500000 \quad \text{o bien} \quad q^2 = \frac{100000}{0.2} = 500000$$

Al obtener la raíz cuadrada de ambos miembros, se tiene un valor crítico de:

$q = 707.11$

Al obtener la raíz cuadrada de ambos miembros, se tiene un valor crítico de:

q= 707.11

Donde q es el valor de las cantidades de productos que deberían fabricarse para minimizar el costo promedio.

La naturaleza del punto crítico se determina por medio de la prueba de la segunda derivada:

$$f''(q) = 200000q^{-3}$$

$$= \frac{200000}{q^3}$$

Donde q es el valor de las cantidades de productos que deberían fabricarse para minimizar el costo promedio.

La naturaleza del punto crítico se determina por medio de la prueba de la segunda derivada:

$$f''(q) = 200000q^{-3}$$

$$= \frac{200000}{q^3}$$

$$f''(707.11) = \frac{200000}{(707.11)^3} = 0.000561 > 0$$

Por tanto, un mínimo relativo ocurre para f cuando q = 707.11. Este costo promedio mínimo por unidad

$$f(707,11)=(100000/101,11)+1500+0,2(707,11)$$

$$= 141.42 + 1500 + 141.42 = \$1782.8$$