UPG6—Miniprojekt 3: Tillämpning av differentialekvationer

Mycket inom teknik och naturvetenskap kan beskrivas och modelleras genom ordinära differentialekvationer (ODE). Det är endast i enkla fall som en analytisk lösning kan bestämmas. Det blir därmed viktigt att kunna lösa differentialekvationer numeriskt. I detta projekt kommer vi att undersöka metoder för numerisk lösning av ordinära differentialekvationer. Ekvationerna för modellproblemet vi kommer att behandla kan härledas från Newtons kraft- och rörelselagar.

1 Tillämpning av Newtons lagar för att styra en raket

Miniprojektets huvuduppgift är att lösa rörelseekvationerna för en raket och styra raketen så att den tar sig igenom en slalombana. Raketens rörelse beskrivs av följande system av icke-linjära och kopplade differentialekvationer,

$$x''(t) = -\frac{c}{m(t)}\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,x' + \frac{m'(t)}{m(t)}u_x(t), \tag{1}$$

$$y''(t) = -\frac{c}{m(t)}\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,y' + \frac{m'(t)}{m(t)}u_y(t) - g, \tag{2}$$

där $x(t)$ och $y(t)$ är de sökta funktionerna som beskriver raketens färdbana, t är som vanligt tid, c och g är konstanter, $u_x(t)$ och $u_y(t)$ är funktioner kopplade till raketens styrning, och $m(t)$ är en funktion som beskriver hur raketens massa förändras. Kort bakgrundsinformation och härledning av ekvationen hittar du i [2]. Ekvation (1) och (2) går inte att lösa analytiskt utan måste lösas numeriskt.

2 Projektarbete

För att kunna lösa ekvation (1) och (2) behöver vi:

(a) studera principerna för numerisk lösning av ODE;
(b) undersöka och förstå detaljerna i den matematiska modellen som beskriver en fysikalisk tillämpning; och
(c) experimentera med styrningen av raketen så att den tar sig genom en speciell slalombana.

Förberedelsen, som beskrivs i avsnitt 2.1, kommer att fokusera på punkt (a). Punkt (b) och (c) behandlas i avsnitt 2.2 och 2.3 där uppgiften är att styra raketen genom en slalombana.

2.1 Förberedelse: numerisk lösning av ODE

Ett viktigt steg för projektuppgiften är att kunna principerna för numerisk lösning av ODE. Alla studenter skall skriva en dugga där ni visar att ni kan lösa en given ODE numeriskt. Under duggan kommer du att bli tilldelad en individuell differentialekvation av högre ordning som du ska arbeta med. Duggan består av följande steg:

- Skriva om en högre ordningens ODE till ett system av första ordningens ODE.
- Implementera funktionen för ODEn i MATLAB för att kunna lösa den numeriskt.
- Implementera metod för numerisk lösning av ODE. Detta är antingen Eulers metod, Runge–Kutta av ordning 2 eller Runge–Kutta av ordning 4. Vilken av dessa metoder som du skall implementera kommer att anges under duggan. Implementeringen ska klara av att lösa system av ODE.
- Beräkna och plotta en numerisk lösning till ODEn du har blivit tilldelad.

Alla punkter ovan kommer att genomföras under duggan med hjälp av Möbius och MATLAB. Rättning av duggan sker automatiskt och du får besked direkt i Möbius om lösningen du har angett är korrekt. Mer information om duggan kommer att presenteras på planerad lektion i miniprojekt 3.

Eftersom uppgifterna ovan examineras genom duggan ska denna del inte tas upp i projektrapporten. Projektrapporten ska endast behandla raketen och dess ekvationer (1) och (2).

Som förberedelse för detta är det bra att du på egen hand löser uppgifterna i Exempel 14.3, både (a) och (b), samt Exempel 14.4 i Jönsson [1].

2.2 Raketslalom

Huvuduppgiften för miniprojektet är att simulera rörelsen av en raket som modelleras med ekvationer (1) och (2), och styra raketen genom en slalombana likt den som visas i Figur 1. Slalombanan har en startlinje, markerad med `S`, en mållinje, markerad med `M`, samt tre portar markerade med `1`, `2` och `3`. Raketen ska starta någonstans på startlinjen, ta sig igenom de tre portarna och avsluta sin färd genom mållinjen.

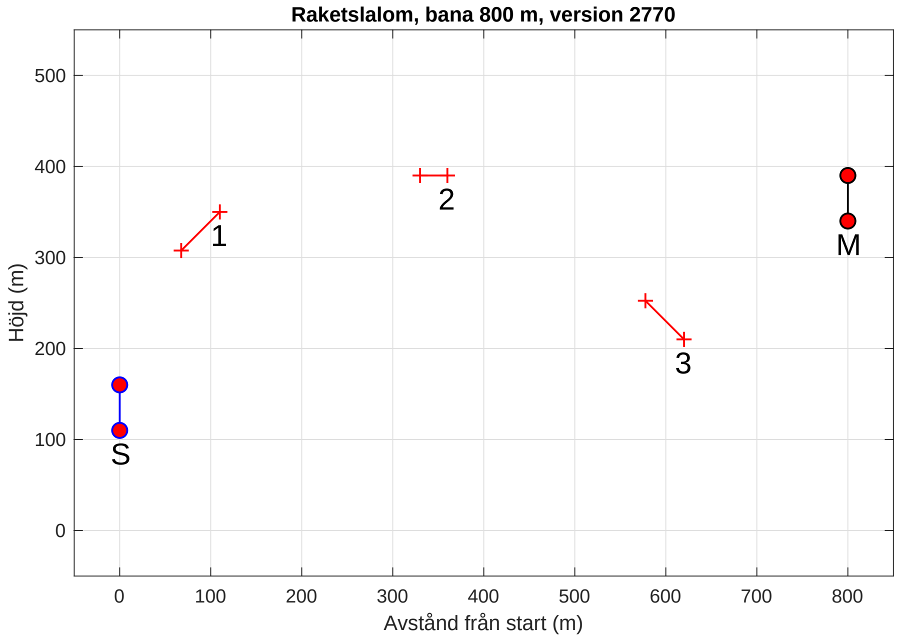
Slalombanorna är individuella. Datafiler för respektive bana samt funktion att plotta banan finns på Lisam → Kursdokument → Miniprojekt 3 → Banor. Du kan läsa in datan och visualisera banan genom[1]

```
>> load bana800-34
>> plotTrack(portx,porty,ver,v1)
```

2.3 Modell av raketens rörelse

Vi behöver ange ett antal förutsättningar för att kunna lösa differentialekvationerna (1) och (2). Låt konstanten för luftmotstånd vara $c = 0.25$ kg/m och tyngdaccelerationen $g = 9.82$ m/s^2 Raketens egenskaper, begynnelsevillkor och dess styrning presenteras nedan.

[1] I anropet till `load` skall du så klart välja din egen fil.



Figur 1: Exempel på slalombana med startlinje (`S`), tre stycken portar (`1`, `2`, `3`) och mållinje (`M`).

Raketens egenskaper

Vi utgår från att raketens initiala massa är 40 kg, varav 20 kg är bränsle.[2] Under tiden som motorn är igång förbränner den 0.5 kg bränsle per sekund.[3] Detta gör att motorn kan vara igång som mest 40 sekunder. Om vi startar raketmotorn vid $t = 0$ och håller motorn igång tills bränslet är slut kommer raketens massa $m(t)$ och dess derivata $m'(t)$,[4] att se ut enligt följande

$$m(t) = \begin{cases} 40 - 0.5t & \text{om } 0 \le t \le 40, \\ 20 & \text{om } t > 40, \end{cases} \qquad m'(t) = \begin{cases} -0.5 & \text{om } 0 \le t \le 40, \\ 0 & \text{om } t > 40. \end{cases}$$

Raketens begynnelsevillkor

Raketen ska utgå från startlinjen för slalombanan. Det finns därmed en viss frihet (i y-led) att ange startpositionen för raketen. Utöver det ska du se till att raketen får en viss begynnelsefart. Begynnelsefarten v_0 är individuell och angiven i datafilen tillsammans med övriga variabler. Ni måste använda den v_0 ni har fått.

Begynnelseriktningen α däremot är fritt för dig att bestämma. Vinkeln α mäts från positivt x-led, och du skulle, exempelvis, kunna välja α så att raketen har en begynnelseriktning mot den första porten. Begynnelsefarten skulle kunna förklaras av en katapult som skjuter iväg raketen.[5]

Notera att fullständiga begynnelsevillkor behöver anges i rapporten för reproducerbarhet.

[2] Vad är förhållandet mellan vikten på en riktig raket och vikten på dess bränsle?
[3] Vad är bränsleförbrukningen vid uppskjutning av en riktig raket?
[4] Notera att $m(t)$ är inte deriverbar i $t = 40$ och vi sätter $m'(40)$ som vänsterderivatan för $m(40)$.
[5] Kan du relatera till hur snabbt begynnelsefarten är? Jämför exempelvis med farten som ett jaktplan får när det skjuts iväg med katapult från hangarfartyg.

Styrning av raketen

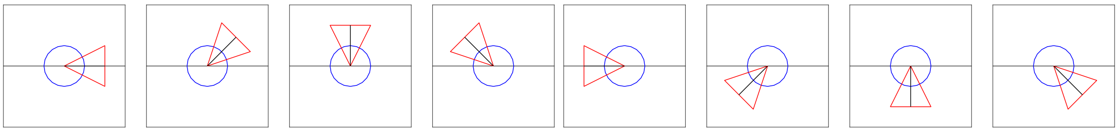
Raketen styrs genom funktionerna $u_x(t)$ och $u_y(t)$ i ekvation (1) respektive (2). Vi utgår från följande form på dessa funktioner

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{\mathrm{m}} \cos(\theta(t)) \\ k_{\mathrm{m}} \sin(\theta(t)) \end{pmatrix},$$

där k_m anger farten som masspartiklar skjuts från motorn vid förbränning, och $\theta(t)$ anger masspartiklarnas riktning från positiv x-led. Notera att vinkeln för motorn $\theta(t)$ är en funktion av tiden t och vi väljer att använda $\theta(t)$ för att styra raketen. Det visas enkelt att $\|\mathbf{u}(t)\| = k_{\mathrm{m}}$. Vi antar att masspartiklarna har en konstant fart $k_{\mathrm{m}} = 2000$ m/s ut från motorn.[6] Vi förutsätter vidare att motorns riktning $\theta(t)$ får endast anta vinklarna:

$$0, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \pi, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{7\pi}{4}.$$

Figur 2 illustrerar dessa vinklar. Om raketmotorn vinklas ner, dvs den får vinkeln $\theta = 3\pi/2$, då kommer förbränningsgaser att skjutas rakt ner och raketen kommer att utsättas för en kraft i motsatt riktning—rakt upp.



$\theta = 0$ $\quad$ $\theta = \pi/4$ $\quad$ $\theta = \pi/2$ $\quad$ $\theta = 3\pi/4$ $\quad$ $\theta = \pi$ $\quad$ $\theta = 5\pi/4$ $\quad$ $\theta = 3\pi/2$ $\quad$ $\theta = 7\pi/4$

Figur 2: Illustrering av tillåtna vinklar θ för raketmotorn. Cirkeln symboliserar raketen, triangeln symboliserar raketmotorn, och vinkel mäts mellan x-axeln och mittenlinjen på motorn.

Numerisk lösning av ODE

Implementera nödvändiga funktioner i MATLAB för att kunna lösa ODE (1) och (2) med de antaganden som har presenterats i dokumentet. I rapporten skall du beskriva modellen samt de antaganden som görs för att kunna lösa ODEn.

Du skall nu experimentellt bestämma en funktion $\theta(t)$ som tar raketen från startlinjen, genom de tre portarna och in i mål.

Använd antingen din egen RK-4 eller MATLABs inbyggda ode45 lösare. Välj t_{slut} så att raketens bana slutar strax efter att raketen passerar mållinjen. Redovisa med figur raketens färdbana genom slalombanan. Visa även en plot av motorns riktning $\theta(t)$, som du har tagit fram. Diskutera och relatera olika skeden av $\theta(t)$ till hur raketens bana påverkas. Plotta även raketens fart så att begynnelsefarten framgår och stämmer överens med den v_0 ni har fått. Plotta helst farten som funktion av raketens x-position (istället för tid) för att enklare se vad raketens fart blir genom olika portar och målgång. Notera att ni behöver först beräkna farten från resultatet av ODE-lösaren.

[6] Detta är väldigt snabbt! Är det orimligt snabbt? Vilken fart har avgaserna från en riktig raketmotor vid förbränning?

3 Programmeringstips

1. Exempel 14.7 i Jönsson [1] har mycket gemensamt med raketekvationen du ska lösa i projektet. Implementera löningen till exempel 14.7 först och få den att fungera innan du ger dig på raketekvationen.
2. Implementera både $m(t)$ och $m'(t)$ i en och samma funktionsfil. Funktionen tar in t som in-variabel och returnerar massan $m(t)$ och dess derivata $m'(t)$ för den aktuella tidpunkten.
3. Implementera $\theta(t)$ i en egen funktion. Funktionen tar in tiden t som in-variabel och returnerar $\theta(t)$ vinkeln för raketmotorn för den aktuella tidpunkten. Låt vinkelfunktionen vara styckvis konstant exempelvis genom en serie if-else-satser.

4 Rapport och muntlig redovisning

Miniprojektet skall redovisas i en skriftlig teknisk rapport om max 2 sidor. I rapporten skall du redogöra för ditt arbete och det resultat du har fått vid genomförande av projektuppgifterna beskrivna i avsnitt 2.2 och 2.3.

I en avslutande del, diskutera och reflektera kring miniprojektet med utgångspunkt i tillämpningen. Hur skulle du kunna gå vidare med projektet inom ramen för tillämpningen?

I den muntliga redovisningen skall du presentera innehållet i din projektrapport. Visualisera flitigt dina resultat i olika figurer.

OBSERVERA: Denna gång blir det ingen andra inlämning som i miniprojekt 1 och 2. Det är därför viktigt att rapporten redan vid den första inlämningen är korrekt och fullständig. Använd en lämplig disposition likt tidigare miniprojekt; krav på reproducerbarhet gäller; använd källor och referera i texten till alla källor; referera till alla figurer i texten; låt alla figurer ha en beskrivande figurtext, osv.

Referenser

[1] P. Jönsson. *MATLAB-beräkningar inom teknik och naturvetenskap - med symbolisk matematik.* Studentlitteratur, 2020.

[2] B. Savas. Kort om kastparabler, projektiler och raketer. ITN, Linköpings universitet, 2020.