MP3 Tillämpning av differentialekvationer

1. Inledning

Ordinära differentialekvationer (ODE) kan användas för beskrivning och modellering av fysiska fenomen i naturen. ODE kan lösas analytiskt eller numeriskt, där simpla fall vanligtvis är lösta analytiskt, medan de mer komplicerade fallen med flera påverkande faktorer löses numeriskt. Detta projekt utforskar hur Newton lagar kan tillämpas med hjälp av differentialekvationer för att styra en raket.

1.2 Bakgrund

En raket rörelsebana kan beräknas med hjälp av två ekvationer (1),(2) som beskriver hastigheten i x och y-led som härleds från Newtons lagar.

$$x''(t) = -\frac{c}{m(t)}\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,x' + \frac{m'(t)}{m(t)}u_x(t) \quad (1)$$

$$y''(t) = -\frac{c}{m(t)}\sqrt{(x')^2 + (y')^2}\,y' + \frac{m'(t)}{m(t)}u_y(t) - g \quad (2)$$

Där *x(t)* och *y(t)* är funktionerna som beskriver raketens färd bana, *c* är luftmotståndet (*0.25 kg/m*) och *g* är gravitationskonstanten som definieras som $9.82\ m/s^2$. *m(t)* är en funktion som beskriver förändringen i raketens massa under färden. *u (t)* beskriver motorns riktning.

$$m(t) = \begin{cases} 40 - 0.5t & \text{om } 0 \le t \le 40, \\ 20 & \text{om } t > 40, \end{cases} \quad (3)$$

$$m'(t) = \begin{cases} -0.5 & \text{om } 0 \le t \le 40, \\ 0 & \text{om } t > 40. \end{cases} \quad (4)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_x(t) \\ u_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_m \cos(\theta(t)) \\ k_m \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \quad (5)$$

I ekvation 5 är k_m den konstanta hastigheten 2000 m/s och θ(t) beskriver motorns vinkel.

2. Metod

Matlabs används till illustatonen och beräkningarna av differentialekvationer[1] . Ekvationerna (1), (2) löses numerisk med hjälp av *Matlabs* egna ode45 funktion. *Matlabs* ode45 är en explicit runge kutta av grad 4 & 5 med Dormand-Prince metod vilket är en adaptiv runge kutta metod[2]. Den går ut på att utföra två runge kutta metoder av olika grader per undersökande punkt. Under integrationen anpassas avståndet mellan punkterna så att felet blir under matlabs för definierade tröskel (0.001) mot den analytiska lösningen och om felet är större än tröskeln så minskas avståndet mellan punkterna och görs om. Vid implementationen i *Matlab*[3] så görs en omskrivning av ekvationerna (1), (2) till ett ekvationssystem av första ordningen.

2.2 Modell av raketens rörelse

De numeriska metoderna ger möjligheten att göra en approximerad uppskattning för en rakets rörelsebana. Förhållandena för raketen var att den bränner 0.5 liter per sekund i 40 sekunder och sedan faller fritt. Målet är att få raketen att passera 3 portar och sedan över mållinjen vilket visas på fig (3). Där raketen även börjar med hastigheten 10 m/s och har start positionen (0, 245). För att styra raketen rörelsebana används ett antal vinklar i styrfunktionen. Vid modifiering av vinkeln θ i styrnings ekvationen (5) vid olika tidpunkter så kan raketens navigeras genom målområdena.

3. Resultat

För att styra raketens bana genom portarna och in i målet tog cirka 21 sekunder. Under raketens färd ändras vinkeln av motorn 6 gånger med användning av 4 olika vinklar. Där vinklarna som under hela raketens bana visas i tabell (1) & figur (1) och hastighetsförändringen i figur (2).

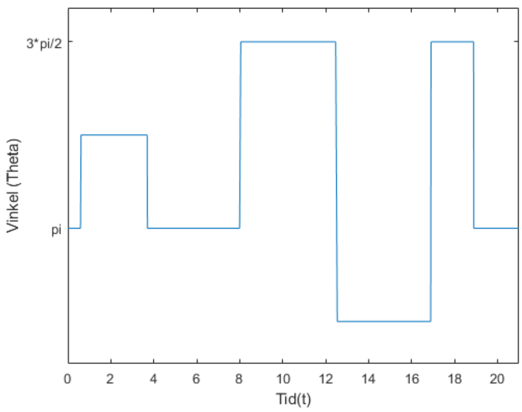
---

[1] B. Savas, "Kort om kastparabler, projektiler och raketer", Linköpings universitet, 2020
[2] Matlab, ode45, https://se.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html, (2020-05-16)
[3] P. Jönsson. MATLAB-beräkningar inom teknik och naturvetenskap. Studentlitteratur, 2010

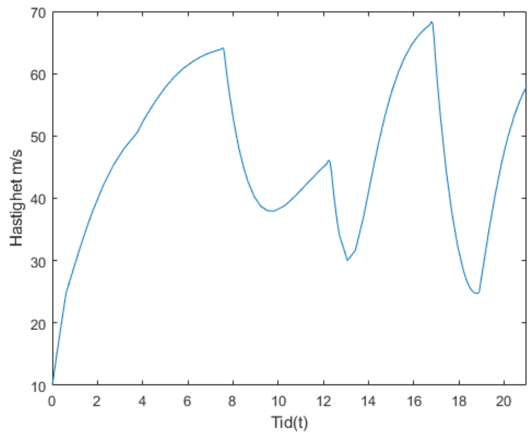
Tabell: Förändringen av vinkeln vid tiden

Tid	**0-0.6s**	**0.6-3.7s**	**3.7-8s**	**8-12.5s**	**12.5-16.9s**	**16.9-18.9s**	**18.9-21s**
Vinkel	π	$\frac{5\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	π

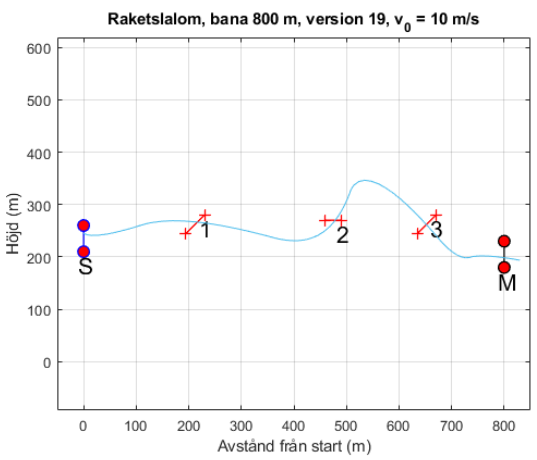
Raketens motor vinkel under färd banan tabell (1)



Raketens motor vinkel under färd banan. fig (1)



hastighets förändring i x-led genom färd banan fig(2)



Raketens rörelsebana genom 3 bestämde områden. fig (3)

4. Diskussion

Differentialekvationer kan tillämpas i flera olika verkliga scenarier exempelvis objekt rörelsebanor. Denna rapport är en simpel demonstration av tillämpning av ett användningsområde för differentialekvationer då den visar att det är möjligt att bestämma rörelsebana för ett objekt.

I denna simulering av raketen färdades den i cirka 21 sekunder genom de tre portar med 7st justeringar av motorns riktning. Det finns flera andra möjliga variationer på vilka vinklar som kan användas för att klara banan och finns med stor sannolikhet en kombination av vinklar som båda kan förkorta tiden och antal justeringar. Ett sätt att minska den totala färdtiden är att minska tiden där raketens motor använder vinklarna $\frac{3\pi}{2}$ och $\frac{3\pi}{4}$ eftersom raketen får en större påverkan på y-ledet än x-ledet. Raketen rör sig mer uppåt/neråt än framåt vilket ger en minskning i hastighet vilket visas på fig (2)

Simulering visar fördelen med att använda en numerisk implementation för att beskriva raketens bana eftersom det ger möjligheten att enkelt ändra parametrarna i styrfunktionen för att se en direkt förändring i raketens bana.

En mer avancerad användning av styra rörelsebanor är drönare. Principen är densamma som visas i denna rapport men enbart fler steg. Det skulle kunna hämta och lämna objekt med olika vikter. Det skulle vara väldigt användbart vid tillfällen folk inte ska lämna sina hem. Andra tillämpningar skulle vara lokalisering av objekt exempelvis ett fartyg efter en storm.

5. Referenser

1. B. Savas, "Kort om kastparabler, projektiler och raketer", Linköpings universitet, 2020
2. Matlab, ode45, https://se.mathworks.com/help/matlab/ref/ode45.html, (2020-05-16)
3. P. Jönsson. MATLAB-beräkningar inom teknik och naturvetenskap. Studentlitteratur, 2010