Formulário

* Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen}\,u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u'\,\text{sen}\,u$

$(\text{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u} = \sec^2(u)\,u'$

$(\arctan(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$

$(\sec u)' = \sec(u)\tan(u)\,u'$

$(\arcsin(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$h = f \circ g \mid h'(a) = f'(g(a)) \times g'(a)$

* Primitivas

$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}x - \frac{\sin 2x}{4}$ $\qquad$ $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}$

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$	$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
k	$kx + C, \quad k \in \mathbb{R}$	$\sin(u)\,u'$	$-\cos(u) + C$
$u^n u'$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\cos(u)\,u'$	$\sin(u) + C$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + C$	$\tan(u)\,u'$	$-\ln\lvert\cos(u)\rvert + C$
$e^u u'$	$e^u + C$	$\cot(u)\,u'$	$\ln\lvert\sin(u)\rvert + C$
$a^u u'$	$\frac{a^u}{\ln(a)} + C, \quad a \in \mathbb{R}^+\setminus\{1\}$	$\sec^2(u)\,u'$	$\tan(u) + C$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan(u) + C$	$\csc^2(u)\,u'$	$-\cot(u) + C$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin(u) + C$	$\sec(u)\,u'$	$\ln\lvert\sec(u) + \tan(u)\rvert + C$

1. Funções de Várias Variáveis

$$z = f(x,y) \mid t = f(x,y,z)$$

Gráficos = $\{(x, y, f(x)) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y)\}$

Funções LINEARES (AFIM) → **PLANOS**

$$f(x,y) = ax + by + c \quad a,b,c \in \mathbb{R}$$

Funções QUADRÁTICAS (PARABOLOIDES)

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy + d \qquad ab > 0$$

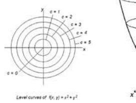
Ex.: $f(x,y) = x^2 + y^2$

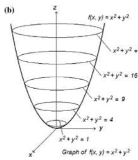
Domínio: $D = \mathbb{R}^2$ $\qquad$ Gráfico: **Paraboloide de Revolução**

Curvas de Nível: $r^2 = x^2 + y^2$

Quando não é de **Revolução**, é **Paraboloide Elíptical**

Ex.: $f(x,y) = 9x^2 + y^2$ ou $f(x,y) = kx^2 + ky^2 + k$

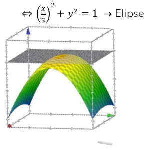




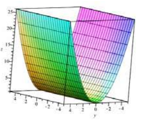
OUTRAS Funções

$f(x,y) = 9 - x^2 - 9y^2$

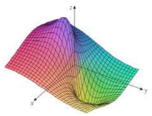
$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{3}\right)^2 + y^2 = 1$ → Elipse



$f(x,y) = y^2 + 1$



$f(x,y) = \frac{-3y}{x^2+y^2+1}$



2. Limites e Continuidade

$$z = f(x,y) \text{ é contínua em } (a,b) \in D_f \text{ sse}$$

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

Para calcular os limites temos de fixar a **1 variável** $\Rightarrow y = mx \mid y = kx^2$ e ver se contínua a dar o mesmo valor de $x = 0$ e $y = 0$ caso $(x,y) \to (0,0)$.

Se continuar a dar, não IMPLICA que o $\lim$ exista!! Porém, se existir o valor do $\lim$ é esse

3. Derivadas Parciais

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$z = f(x,y)$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \qquad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

Ex.: $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$

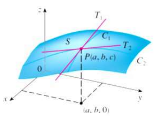


FIGURA 1 As derivadas parciais de f em (a, b) são as inclinações das retas tangentes a C_1 e C_2.

Derivadas Parciais de 2ª Ordem

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b) \qquad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b) \qquad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b)$$

Teorema de Clairaut (aka Lema de Schwarz)

Se f_{xy} e f_{yx} são ambas contínuas numa vizinhança de (a,b), então:

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

4. Planos Tangentes e Aproximações Lineares

Equação do Plano Tangente

$$z = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + f(x_0,y_0)$$

Aproximação Linear

$$f(x,y) \approx f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + f(x_0,y_0)$$

Teorema → Se as derivadas parciais f_x e f_y são contínuas em **(0,0)** $\Rightarrow f$ é diferenciável em (x_0,y_0)

1. f é contínua → f é diferenciável
x ← x

←**2.** f diferenciável em (x_0,y_0) → f_x e f_y existem em (x_0,y_0)
x ← x

5. Regra da Cadeia

$z = f(x,y)$ é uma função diferenciável de x e y, onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são funções diferenciáveis de t. Então z é uma função diferenciável de t e

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Derivação Implícita

Seja $F(x,y(x)) = 0 \leftrightarrow F(x,y) = 0 \to (F(x,y))'_x = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$

$$\frac{\partial y}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

6. Derivadas Direcionais e Vetor Gradiente

Seja $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}$ o vetor unitário → tem a mesma direção (e sentido) de $\vec{v}$
→ $\|\vec{u}\| = 1$

$z = f(x,y)$, a derivada direcional de f na direção do vetor unitário $\vec{u} = \langle u_1, u_2 \rangle$ no ponto (a,b) é dada por :

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \langle u_1,u_2 \rangle \cdot \underbrace{\langle f_x(a,b),\ f_y(a,b) \rangle}_{\vec{\nabla} f(a,b)}$$

Maximizando

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \vec{\nabla} f(a,b) \cdot \vec{u} = \|\vec{\nabla} f(a,b)\| \times \|\vec{u}\| \times \cos 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{\|\vec{\nabla} f(a,b)\|}\vec{\nabla} f(a,b)$$

- **Direção de Crescimento Máxima de f em (a,b)**

$$D_{\vec{u}} f(a,b) = \vec{\nabla} f(a,b) \cdot \vec{u} = \langle f_x(a,b),\ f_y(a,b) \rangle$$

Calcula-se as derivadas parciais f_x e f_y → depois o ponto (a,b) nessas derivadas → Como $\vec{u} = \langle 1,1 \rangle$, então $\vec{\nabla} f(a,b) = \langle f_x(a,b),\ f_y(a,b) \rangle$

- **Taxa de Crescimento Máximo em (a,b)**

$$D_{\frac{\vec{\nabla} f}{\|\vec{\nabla} f\|}} f(a,b) = \|\vec{\nabla} f(a,b)\|$$

Se quiser ter uma direção com Taxa de Variação NULA em (a,b) cria-se uma vetor ⊥ ! **P.e.** $\vec{w} = (1,-3)$ → $DTVN = (1,3)$

Se o vetor gradiente $\vec{\nabla} f(a,b)$ é não-nulo, então ele é **perpendicular à curva de nível** $f(a,b)$ da função f, e aponta na direção e sentido de crescimento da função f a partir do ponto (a,b).

NOTA: $\vec{u} = \langle i,j \rangle \qquad \vec{i} = (1,0) \quad e \quad \vec{j} = (0,1)$

7. Valores Máximo e Mínimo

$\begin{cases} f_x(a,b) = 0 \\ f_y(a,b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \vec{\nabla} f(a,b) = 0 \quad \to (a,b)$ é um Ponto Crítico

PONTOS DE SELA

O conceito de ponto de sela é análogo à noção de ponto de inflexão.

É um ponto estacionário a de uma função diferenciável f é um ponto de sela se qualquer bola aberta β de centro a contém pontos x e y tais que: $f(x) < f(a) < f(y)$

Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$det\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = ac - b^2$$

$$D = det\begin{bmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{bmatrix} \to D = f_{xx}(a,b) \times f_{yy}(a,b) - \left(f_{xy}(a,b)\right)^2 \neq 0$$

MATRIZ HESSIANA (Matriz das Derivadas Parciais de 2º Ordem)

MÁXIMOS, MÍNIMOS E PONTOS DE SELA

$D < 0$ → (a,b) é Ponto de Sela

$D > 0,\ f_{xx}(a,b) > 0$ → (a,b) é mínimo

$D > 0,\ f_{xx}(a,b) < 0$ → (a,b) é MÁXIMO

$D = 0$ → nada se pode concluir usando 2ª derivadas

8. Integrais Duplos

Teorema Fundamental do Cálculo → $\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) = [f(x)]_a^b$

$\iint_R f(x,y)\,dA \to dA = dxdy \qquad \iint_D 1\,dA = A_{Base} \qquad \frac{1}{A_{Base}}\iint_D f\,dA$ → Valor média de f em D

Propriedades

$$\iint_D (f+g)dA = \iint_D f\,dA + \iint_D g\,dA \qquad \iint_D k\,f dA = k\iint_D f dA$$

$$\iint_D f\,dA \leq \iint_D g\,dA \quad \to \quad f(x,y) \leq g(x,y)$$

- **Coordenadas Polares**

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, r \geq 0 \qquad \boxed{r^2 = x^2 + y^2}$

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\boldsymbol{r\,d\theta\,dr}$$

9. Aplicações dos Integrais Duplos

- Área

A(D) = $\int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} 1\,dydx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ → Área da Região Limitada por $f(x)$ e $g(x)$ e $x \in [a,b]$

- Volume

V(D) = $\iint_D [f(x,y) - g(x,y)]\,dA$ → Volume da Região Limitada por $f(x)$ e $g(x)$

- Probabilidades

Nota: $\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dA = \sqrt{\pi}$

- ♦ $f(x) \geq 0$
- ♦ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Qualquer função que satisfaz estas condições é uma **Função de Densidade Probabilística**

Função de Densidade Conjunta:

- ♦ $f_{X,Y}(x,y) \geq 0, \forall(x,y)$
- ♦ $\iint_D f_{X,Y}(x,y)\,dA = 1$

Se X e Y são **independentes**

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y)$$

1. Densidade Uniforme

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b, \\ 0 & , c.c. \end{cases}$$

2. Densidade Exponencial

$$f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b, \\ 0 & , c.c. \end{cases}$$

3. Densidade Normal

Ou Gaussiana

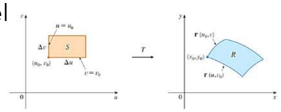
$$f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b, \\ 0 & , c.c. \end{cases}$$

Valor Esperado → $E[x] = \int_{-\infty\,(0)}^{+\infty} x f(x) = \mu$ $\qquad f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}$

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) \qquad P((X,Y) \in D) = \iint_D f_{X,Y}(x,y)\,dA$$

10. Mudança de Variável

$$A(R) = |\det(T)| \times A(S)$$



$$dA = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$ → Matriz Jacubiana

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = det\left[\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] = \det\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial y}{\partial v} - \left(\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\right)^2$$ → Determinante Jacubiano

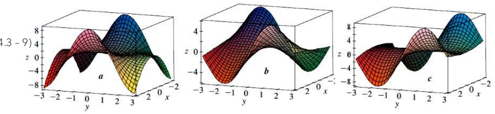
André Silvestre N°104532

Teste Modelo 3

2. (14.2 - 14)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2 = 0$$

3. (14.3 - 9)

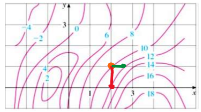


Em primeiro lugar, se começarmos no ponto $(3,-3)$ e movemo-nos na direção positiva y, veremos que b e c diminuem, enquanto a aumenta. Ambos b e c têm um ponto baixo aproximadamente $(3,-1{,}5)$, enquanto a é 0 neste ponto.

Então a é definitivamente o gráfico de f_y, e um de b e c é o gráfico de f . Para ver qual é qual, começamos no ponto $(-3,-1{,}5)$ e movemo-nos na direção x positiva.

b traça uma linha com inclinação negativa, enquanto c traça uma parábola com abertura para baixo. Isso diz-nos que b é a derivada f_x de c .

3.1. (14.3 - 10) Um mapa de contorno de uma função f é apresentado. Utilize-o para estimar $f_x(2,1)$ e $f_y(2,1)$.



$f(2,1) = 10$

$f_x(2,1) = \frac{2}{0{,}76} \approx 2{,}63$

$f_y(2,1) = \frac{12 - 10}{-1} \approx -2$

4. (14.4 - 18) Verificar a Aproximação Linear em $(0,0)$

$$\sqrt{y + \cos^2 x} \approx 1 + \frac{1}{2}y$$

$f_x = \frac{1}{2\sqrt{y + \cos^2 x}} * 2\cos x(-\sin x) \quad \to \quad f_x(0,0) = 0$

$f_y = \frac{1}{2\sqrt{y + \cos^2 x}} \quad \to \quad f_y(0,0) = \frac{1}{2}$

Aproximação Linear:

$$f(x,y) \approx f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0) + f(x_0,y_0)$$

5. (14.5 - 49) Mostre que qualquer função da forma

$$z = f(x + at) + g(x - at)$$

é uma solução da equação de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Let $u = x + at,\ v = x - at$. Then $z = f(u) + g(v)$, so $\partial z/\partial u = f'(u)$ and $\partial z/\partial v = g'(v)$.

Thus $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t} = af'(u) - ag'(v)$ and

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial t}[f'(u) - g'(v)] = a\left(\frac{df'(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{dg'(v)}{dv}\frac{\partial v}{\partial t}\right) = a^2 f''(u) + a^2 g''(v).$$

Similarly $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u) + g'(v)$ and $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u) + g''(v)$. Thus $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

6. (14.6 - 21) Determine a **Taxa de Variação Máxima** de f no ponto dado e a direção em que isso ocorre.

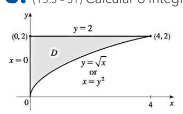
$$f(x,y) = 4y\sqrt{x} \qquad (4,1)$$

$f(x,y) = 4y\sqrt{x} \Rightarrow \nabla f(x,y) = \left\langle 4y \cdot \frac{1}{2}x^{-1/2}, 4\sqrt{x}\right\rangle = \langle 2y/\sqrt{x}, 4\sqrt{x}\rangle$

$\nabla f(4,1) = \langle 1,8 \rangle$ is the direction of maximum rate of change, and the maximum rate is $|\nabla f(4,1)| = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$.

7. (14.7 - 9)

8. (15.3 - 51) Calcular o Integral trocando a ordem de integração



$$\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1}\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{y^2} \frac{1}{y^3+1}\,dx\,dy = \int_0^2 \frac{1}{y^3+1}[x]_{x=0}^{x=y^2}\,dy = \int_0^2 \frac{y^2}{y^3+1}\,dy = \frac{1}{3}\ln|y^3+1|\Big]_0^2 = \frac{1}{3}(\ln 9 - \ln 1) = \frac{1}{3}\ln 9$$

9. (15.4 - 25) Acima do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

The cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ intersects the sphere $x^2+y^2+z^2 = 1$ when $x^2+y^2+\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 1$ or $x^2+y^2 = \frac{1}{2}$. So

$$V = \iint_{x^2+y^2 \leq 1/2} \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}\right) dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{1/\sqrt{2}} \left(\sqrt{1-r^2} - r\right) r\,dr\,d\theta$$

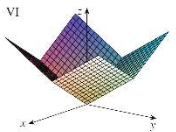
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(r\sqrt{1-r^2} - r^2\right) dr = [\theta]_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2} - \frac{1}{3}r^3\right]_0^{1/\sqrt{2}} = 2\pi\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right) = \frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$$

10. (15.5 - 29 c))

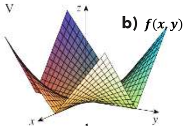
11. (15.10 - 25)

Teste Modelo 1

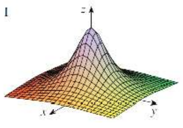
1. (14.1. - 32) Faça uma correspondente entre a função e seu gráfico Justifique sua escolha.



a) $f(x,y) = |x| + |y|$ **>** O eixo em $x=0$ é $z = |y|$, e em $y=0$ é $z = |x|$

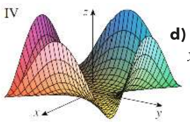


b) $f(x,y) = |xy|$ **>** O eixo em $x=0$ é $z=0$, e em $y=0$ é $z=0$

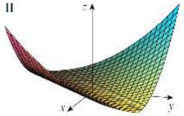


c) $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ **>** O eixo em $x=0$ é $z = \frac{1}{1+y^2}$, e em $y=0$ é $z = \frac{1}{1+x^2}$

Além disso, pode-se observar que $f(x,y)$ é próximo de 0 para grandes valores de x e y

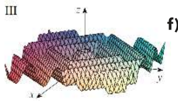


d) $f(x,y) = (x^2+y^2)^2$ **>** O eixo em $x=0$ é $z = y^4$, e em $y=0$ é $z = x^4$ Adicionalmente, em $z=0 \Leftrightarrow 0 = (x^2+y^2)^2 \Leftrightarrow x = \pm y$



e) $f(x,y) = (x-y)^2$ **>** O eixo em $x=0$ é $z = y^2$, e em $y=0$ é $z = x^2$

Adicionalmente, para $z=0 \Leftrightarrow 0 = (x-y)^2 \Leftrightarrow x = y$



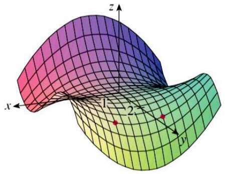
f) $f(x,y) = sin(|x|+|y|)$ **>** O eixo em $x=0$ é $z = \sin|y|$, e em $y=0$ é $z = \sin|x|$

Adicionalmente, a natureza oscilante do gráfico é característica das funções trigonométricas.

2. (14.2 - 11) Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x\,y\cos(y)}{3x^2+y^2}\right) \to não\ existe$$

3. (14.3 | 5-8) Determine os sinais das derivadas parciais da função f cujo gráfico está mostrado.



5. (a) $f_x(1,2)$ (b) $f_y(1,2)$
6. (a) $f_x(-1,2)$ (b) $f_y(-1,2)$
7. (a) $f_{xx}(-1,2)$ (b) $f_{yy}(-1,2)$
8. (a) $f_{xy}(1,2)$ (b) $f_{xy}(-1,2)$

3.1 (14.3 | 4) A altura h de ondas em mar aberto depende da velocidade do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v,t)$ são apresentados na seguinte tabela.

a) Qual o significado das derivadas parciais?

Duration (hours)

Wind speed (knots) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

$\partial h/\partial v$ representa a taxa de variação do h quando fixamos t e consideramos h em função de v, isto é, a rapidez que a altura das ondas muda quando a v do vento muda num Δt fixo

Já $\partial h/\partial t$ representa a taxa de variação do h quando fixamos v e consideramos h em função de t, isto é, a rapidez que a altura das ondas muda quando a t muda a uma e consideramos h em função de v constante.

b) Estime os valores de $f_v(40, 15)$ e $f_t(40, 15)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

$$f_v(40,15) = \lim_{h\to0}\frac{f(40+h,15)-f(40,15)}{h} \sim \frac{f(50,15)-f(40,15)}{10} = \frac{36-25}{10} = 1.1$$
$$\sim \frac{f(30,15)-f(40,15)}{-10} = \frac{16-25}{-10} = 0.9$$

$$f_t(40,15) = \lim_{h\to0}\frac{f(40,15+h)-f(40,15)}{h} \sim \frac{f(40,20)-f(40,15)}{5} = \frac{28-25}{5} = 0.6$$
$$\sim \frac{f(40,10)-f(40,15)}{-5} = \frac{28-25}{-5} = 0.8$$

Fazendo a média dos valores, temos que $f_v(40,15) = 1.0$ e $f_t(40,15) = 0.7$

∴ Quando o vento está a 40 km/h e a 15h na mesma intensidade, a altura das ondas aumentou cerca de 1 km/h num mesmo Δt

∴ Quando o vento está a 40 km/h e a 15h na mesma intensidade, a altura das ondas aumentou cerca de 0.7 km/h para cada hora

4. (14.4. | 1) Equação do plano tangente à superfície no ponto.

$$z = 3y^2 - 2x^2 + x \qquad (2,-1,-3)$$

$f_x = (3y^2 - 2x^2 + x)' = 1 - 4x \rightarrow \quad f_x(2,-1) = -7$

$f_y = (3y^2 - 2x^2 + x)' = 6y \quad \rightarrow \quad f_y(2,-1) = -6$

$f(2,-1) = -3$

∴ **Equação do Plano Tangente:**

$$z = (-7)(x-2) + (-6)(y+1) - 3 \Leftrightarrow z = -7x - 6y + 5$$

5. (14.5. | 52)

Se $z = f(x,y), onde\ x = r\cos(\theta)\ e\ y = r\sin(\theta)\ determine:$

a) $\frac{\partial z}{\partial r}$ b) $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ c) $\frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta}$

(a) $\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$ (b) $\frac{\partial z}{\partial \theta} = -\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial z}{\partial y}r\cos\theta$

Regra de Derivação com o Produto — Fazer à parte! — Em vez de por z, por f — Fazer à parte!

$$\text{(c)}\ \frac{\partial^2 z}{\partial r\,\partial\theta} = \frac{\partial^2 z}{\partial\theta\,\partial r} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta\right) = -\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \cos\theta\frac{\partial z}{\partial y} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$
$$= -\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \cos\theta\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\frac{\partial y}{\partial\theta}\right) + \cos\theta\frac{\partial z}{\partial y} + \sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial\theta} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial x}{\partial\theta}$$
$$= -\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + \cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\right) + \cos\theta\frac{\partial z}{\partial y} + \sin\theta\left(r\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - r\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)$$
$$= -\sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} - r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + r\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} + \cos\theta\frac{\partial z}{\partial y} + r\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - r\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$
$$= \cos\theta\frac{\partial z}{\partial y} - \sin\theta\frac{\partial z}{\partial x} + r\cos\theta\sin\theta\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + r(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

6. (14.6. | 30) Próximo a uma boia, a profundidade de um lago com coordenadas (x,y) é $z = 200 + 0.02x^2 - 0.001y^3$, onde x, y, e z são medidos em metros. Um pescador que está em um pequeno barco parte do ponto (80, 60) em direção à boia, que está localizada no ponto (0, 0). A água sob o barco está ficando mais profunda ou mais rasa quando ele começa a se mover? Explique.

R: O pescador está a viajar na direção <80,60>. Um vetor unitário nessa direção é $u = \frac{1}{100} < -80, -60 > = < -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5} >$ e se a profundidade do lago é dada por $f(x,y)$, então $\nabla f(x,y) = < 0.04x, -0.003y^2 >$. $\quad D_u f(80,60) = \nabla f(80,60) \cdot u = \cdots = 3.92.$

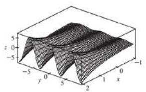
Como $D_u f(80,60)$ é positivo, a profundidade do lago é aumentada próximo do ponto (80, 60) na direção da bóia.

7. (14.6. | 13) Determinar MÁXIMOS e mínimos

$$f(x,y) = e^x\cos y$$

$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x\cos y = 0 \\ -e^x\sin y_x = 0 \end{cases}$ Não se consegues calcular

∴ Não há ponto crítico



8. (15.3. | 49) Calcula o integral trocando a ordem de integração.

$$\int_0^1\int_{3y}^3 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^3\int_0^{x/3} e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^3\left[e^{x^2}y\right]_{y=0}^{y=x/3}dx$$
$$= \int_0^3\left(\frac{x}{3}\right)e^{x^2}\,dx = \tfrac{1}{6}\,e^{x^2}\Big]_0^3 = \frac{e^9-1}{6}$$

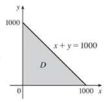
9. (15.4. | 11) Calcula o integral em Coordenadas Polares

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dA = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^2 e^{-r^2}r\,dr\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^2 re^{-r^2}\,dr$$
$$= \left[\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^2 = \pi\left(-\tfrac{1}{2}\right)(e^{-4}-e^0) = \tfrac{\pi}{2}(1-e^{-4})$$

10. (15.5 | 30 b)

Outra luminária tem somente uma lâmpada do mesmo tipo das da parte (a). Se a lâmpada queima e é trocada por outra do mesmo tipo, determine a probabilidade de que as duas venham a falhar dentro de 1000 horas. -> $P(X+Y\le 1000)$

$$P(X+Y\le1000) = \iint_D f(x,y)\,dA$$
$$= \int_0^{1000}\int_0^{1000-x}10^{-6}e^{-(x+y)/1000}\,dy\,dx$$
$$= 10^{-6}\int_0^{1000}\left[-1000e^{-(x+y)/1000}\right]_{y=0}^{y=1000-x}dx = -10^{-3}\int_0^{1000}\left(e^{-1}-e^{-x/1000}\right)dx$$
$$= -10^{-3}\left[e^{-1}x + 1000e^{-x/1000}\right]_0^{1000} = 1-2e^{-1} \approx 0.2642$$



11. (15.10 | 26) $\iint_R \sin(9x^2+4y^2)\,dA$ limitado pela região $9x^2+4y^2=1$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\end{vmatrix} = \frac{1}{6}.$$

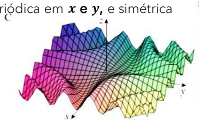
In polar co-ordinates the region S is $S = \left\{(r,\theta): 0\le r\le 1, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$

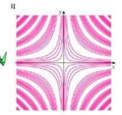
$$\iint_R \sin\left(9x^2+4y^2\right)dA = \iint_S \sin\left(u^2+v^2\right)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$$
$$= \tfrac{1}{6}\int_0^{\pi/2}\int_0^1\sin\left(r^2\right)rdrd\theta$$
$$= \tfrac{1}{6}\int_0^{\pi/2}d\theta\cdot\int_0^1 r\sin\left(r^2\right)dr$$
$$= \tfrac{1}{6}(\theta)_0^{\pi/2}\left[\tfrac{-1}{2}\cos r^2\right]_0^1$$
$$= \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{\pi}{2}\right)\left[\tfrac{-1}{2}\cos1 + \tfrac{1}{2}\cos0\right]$$
$$= \tfrac{\pi}{12}\left(-\tfrac{1}{2}\cos1 + \tfrac{1}{2}\right)$$
$$= \tfrac{\pi}{24}(1-\cos1)$$

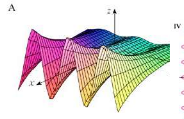
Teste Modelo 2

1. (14.1)

59) $z = sin(xy)$ **>** A função é periódica em x e y, e simétrica em relação ao plano $y = z$

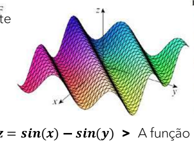


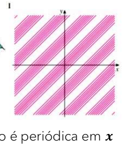


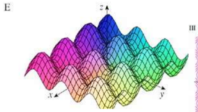


60) $z = e^x cos\ y$ **>** A função é periódica em y, mas não em x. Para além disso, note-se que as curvas em $x = k$ são de cossenos com amplitude que aumenta à medida que x aumenta

61) $z = sin(x-y)$ **>** A função é periódica em x e y, mas é constante ao longo da reta $y = x + k$

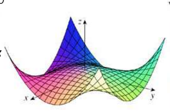


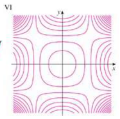


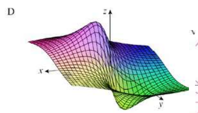


62) $z = sin(x) - sin(y)$ **>** A função é periódica em x e y, mas não é constante ao longo de $y = x + \pi$. Simultaneamente, as retas em $y = k$ são cópias deslocadas verticalmente da onda senoidal $z = sin(x)$

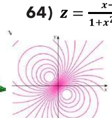
63) $z = (1-x^2)(1-y^2)$ **>** A função é 0 ao longo de $x = \pm1$ e $y = \pm1$ Além disso, a função no plano xz é a parábola $z = 1 + x^2$ e no plano yz é a parábola $z = 1 + y^2$







64) $z = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$ **>** A função não é periódica! Para além disso, os valores em z tendem para 0 quando se distanciam da origem



2. (14.2 - 13)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

Calculando o **lim** para $y = mx$ e para $y = k^2x$ o valor dá **0.**

Por isso, **se existir lim** este terá de ser 0.

Prova:

$$0 \le \left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le |x| \text{ since } |y| \le \sqrt{x^2+y^2}, \text{ and } |x|\to0 \text{ as } (x,y)\to(0,0). \text{ So } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

3. (14.3 - 5 a 8 + **3**) O índice de sensação térmica W é a temperatura sentida quando a temperatura real é T e a velocidade do vento, v. Portanto, podemos escrever $W = f(T,v)$

b) Em geral, o que se pode dizer sobre o sinal de $\partial W/\partial T$ e $\partial W/\partial v$?

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C) T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

Para uma v fixa, os valores de índice de sensação térmica W aumentam à medida que a T real aumenta. Então $\partial W/\partial T$ é positivo.

Para uma T fixa, os valores de índice de sensação térmica W diminui à medida que a v aumenta. Então $\partial W/\partial v$ é negativo.

a) Estime os valores de $f_T(-15, 30)$ e $f_v(-15, 30)$. Quais são as interpretações práticas desses valores?

$$f_T(-15,30) = \lim_{h\to0}\frac{f(-15+h,30)-f(-15,30)}{h} \sim \frac{f(-10,30)-f(-15,30)}{5} = \frac{-20-(-26)}{5} = 1.2$$
$$\sim \frac{f(-20,30)-f(-15,30)}{-5} = \frac{-33-(-26)}{-5} = 1.4$$
$$f_v(-15,30) = \lim_{h\to0}\frac{f(-15,30+h)-f(-15,30)}{h} \sim \frac{f(-15,40)-f(-15,30)}{10} = \frac{-27-(-26)}{10} = -0.1$$
$$\sim \frac{f(-15,20)-f(-15,30)}{-10} = \frac{-24-(-26)}{-10} = -0.2$$

Fazendo a média dos valores, temos que $f_T(-15,30) = 1.3$ e $f_v(-15,30) = -0.15$

∴ Quando a temperatura real é de 15°C e a velocidade do vento 30km/h, a temperatura aparente aumenta cerca de 1,3°C para cada grau em que a temperatura real aumenta.

∴ Quando a temperatura real é de 15°C e a velocidade do vento 30km/h, a temperatura aparente diminui cerca de 0,15°C para cada km/h que a velocidade do vento aumenta.

c) Qual parece ser o valor do limite $\lim_{v\to\infty}\partial W/\partial v = 0$ (pq para T fixo, v parece tornar-se constante)

4. (14.4 | 46)

$$f(x,y) = \begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\ne(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\end{cases}$$

a) Mostre que $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$ existem, mas f não é diferenciável em (0,0).

b) Explique por que f_x e f_y não são contínuas em (0,0).

(a) $\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{0-0}{h} = 0$ and $\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to0}\frac{0-0}{h} = 0$. Thus $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$. To show that f isn't differentiable at $(0,0)$ we need only show that f is not continuous at $(0,0)$ and apply Exercise 45. As $(x,y)\to(0,0)$ along the x-axis $f(x,y) = 0/x^2 = 0$ for $x\ne0$ so $f(x,y)\to0$ as $(x,y)\to(0,0)$ along the x-axis. But as $(x,y)\to(0,0)$ along the line $y=x$, $f(x,x) = x^2/(2x^2) = \frac{1}{2}$ for $x\ne0$ so $f(x,y)\to\frac{1}{2}$ as $(x,y)\to(0,0)$ along this line. Thus $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ doesn't exist, so f is discontinuous at $(0,0)$ and thus not differentiable there.

(b) For $(x,y)\ne(0,0)$, $f_x(x,y) = \frac{(x^2+y^2)y - xy(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$. If we approach $(0,0)$ along the y-axis, then $f_x(x,y) = f_x(0,y) = \frac{y^3}{y^4} = \frac{1}{y}$, so $f_x(x,y)\to\pm\infty$ as $(x,y)\to(0,0)$. Thus $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_x(x,y)$ does not exist and $f_x(x,y)$ is not continuous at $(0,0)$. Similarly, $f_y(x,y) = \frac{(x^2+y^2)x - xy(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$ for $(x,y)\ne(0,0)$, and if we approach $(0,0)$ along the x-axis, then $f_y(x,y) = f_x(x,0) = \frac{x^3}{x^4} = \frac{1}{x}$. Thus $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f_y(x,y)$ does not exist and $f_y(x,y)$ is not continuous at $(0,0)$.

5. (14.5 | 37) X

6. (14.6 | 7) $\quad f(x,y) = sin(2x+3y) \quad P(-6{,}4) \quad u = \frac{1}{2} < \sqrt{3}i - j >$

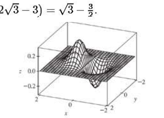
a) Calcular $\nabla f(x,y)$ **b)** Calcular $\nabla f(x,y)$ em P **c)** Determinar a Taxa de Variação

$$\nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} = [\cos(2x+3y)\cdot2]\,\mathbf{i} + [\cos(2x+3y)\cdot3]\,\mathbf{j} = 2\cos(2x+3y)\,\mathbf{i} + 3\cos(2x+3y)\,\mathbf{j}$$
$$\nabla f(-6,4) = (2\cos0)\,\mathbf{i} + (3\cos0)\,\mathbf{j} = 2\,\mathbf{i} + 3\,\mathbf{j}$$

By Equation 9, $D_{\mathbf{u}}f(-6,4) = \nabla f(-6,4)\cdot\mathbf{u} = (2\,\mathbf{i}+3\,\mathbf{j})\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{3}\,\mathbf{i}-\mathbf{j}) = \frac{1}{2}(2\sqrt{3}-3) = \sqrt{3}-\frac{3}{2}$.

7. (14.7 | 8) Determinar MÁXIMOS e mínimos

$$f(x,y) = xe^{-2x^2-2y^2}\cos y$$



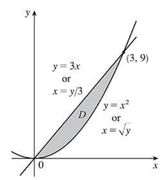
$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1-4x^2)e^{-2x^2-2y^2} = 0 \\ -4xye^{-2x^2-2y^2} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\frac{1}{2} \\ y = 0\end{cases} \to \left(\pm\tfrac{1}{2}, 0\right) \text{ são os pontos críticos.}$$

$f_{xx} = (16x^2-12)xe^{-2x^2-2y^2} \quad \to f_{xx} = (-1/2\,,0) = -1/2\,e^{1/2} \quad \to$ Máximo

$f_{xy} = (16x^2-4)ye^{-2x^2-2y^2} \quad \to f_{xx} = (1/2\,,0) = 1/2\,e^{1/2} \quad \to$ Mínimo

$f_{yy} = (16y^2-4)xe^{-2x^2-2y^2} \qquad H > 0$

8. (15.3 | 14) Calcular $\iint_D xy\,dA$ limitado em $y = x^2$, $y = 3x$ com as **2** ordens de integração.



$$\iint_D xydA = \int_0^3 \frac{xy^2}{2}dx\Big|_{y=x^2}^{y=3x}$$
$$= \int_0^3\left(\frac{x(3x)^2}{2} - \frac{x\left(x^2\right)^2}{2}\right)dx$$
$$= \int_0^3\left(\frac{x(9x^2)}{2} - \frac{x(x^4)}{2}\right)dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\int_0^3\left(9x^3 - x^5\right)dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9x^4}{4} - \frac{x^6}{6}\right)\Big|_0^3$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9(3)^4}{4} - \frac{(3)^6}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{9(0)^4}{4} - \frac{(0)^6}{6}\right)$$
$$= \frac{1}{2}(3)^6\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right]$$
$$= \frac{729}{2}\left(\frac{3-2}{12}\right) == \frac{243}{8}$$

$$\iint_D xydA = \int_0^9\int_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}} xydxdy$$
$$= \int_0^9 y\left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{y}}dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^9 y\left(y - \frac{1}{9}y^2\right)dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^9\left(y^2 - \frac{1}{9}y^3\right)dy$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3} - \frac{1}{9}\cdot\frac{y^4}{4}\right]_0^9$$
$$= \frac{1}{2}\left[81(3) - \frac{9(81)}{4}\right]$$
$$= \frac{81}{2}\left(3 - \frac{9}{4}\right)$$
$$= \frac{81}{2}\left(\frac{3}{4}\right) == \frac{243}{8}$$

9. (15.4. | 9) Calcula o integral em Coordenadas Polares

$$\iint_R \sin(x^2+y^2)\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_1^3\sin(r^2)\,r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{\pi/2}d\theta\right)\left(\int_1^3 r\sin(r^2)\,dr\right)$$
$$= \left[\theta\right]_0^{\pi/2}\left[-\tfrac{1}{2}\cos(r^2)\right]_1^3$$
$$= \left(\tfrac{\pi}{2}\right)\left[-\tfrac{1}{2}(\cos9-\cos1)\right] = \tfrac{\pi}{4}(\cos1-\cos9)$$

10. (15.5. | 27)

A função densidade conjunta para um par de variáveis aleatórias X e Y é

$$f(x,y) = \begin{cases} Cx(1+y) & \text{se } 0\le x\le1,\ 0\le y\le2 \\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$$

(a) Determine o valor da constante C.

$f(x,y)$ is a joint density function, so we know $\iint_{\mathbb{R}^2}f(x,y)\,dA = 1$. Since $f(x,y) = 0$ outside the rectangle $[0,1]\times[0,2]$, we can say

$$\iint_{\mathbb{R}^2}f(x,y)\,dA = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^2 Cx(1+y)\,dy\,dx$$
$$= C\int_0^1 x\left[y+\tfrac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=2}dx = C\int_0^1 4x\,dx = C\left[2x^2\right]_0^1 = 2C$$

Then $2C = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$.

11. (15.10. | 17) $\iint_R (x^2 - xy + y^2)dA$ limitado pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 36; x = 2u\ e\ y = 3v$

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{vmatrix} = 6$, $x^2 = 4u^2$ and the planar ellipse $9x^2+4y^2\le36$ is the image of the disk $u^2+v^2\le1$. Thus

$$\iint_R x^2\,dA = \iint_{u^2+v^2\le1}(4u^2)(6)\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^1(24r^2\cos^2\theta)\,r\,dr\,d\theta = 24\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^1 r^3\,dr$$
$$= 24\left[\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin2x\right]_0^{2\pi}\left[\tfrac{1}{4}r^4\right]_0^1 = 24(\pi)\left(\tfrac{1}{4}\right) = 6\pi$$