TPC 5: Variáveis Aleatórias - Turma 1

André Filipe Gomes Silvestre Nº104532 CDB1

Exercício

1.

Sabe-se que nos municípios de uma certa região turística, 40% mais que duplicam a sua população nos meses de verão.

Suponha que o **acréscimo no consumo de água por cada turista alojado, por dia**, pode ser descrito através de uma variável aleatória com distribuição Normal, de média $0,50m^3$ e desvio-padrão $0,05\ m^3$.

a) Qual a probabilidade do acréscimo no consumo, por turista e por dia, ser inferior a $0,437\ m^3$?

b) Calcule o maior acréscimo de consumo dos 25 menores acréscimos.

c) Numa certa unidade de turismo rural casa, a capacidade é de 20 hóspedes. Considerando um momento em que a unidade está totalmente cheia, qual a probabilidade do consumo de água diário aumentar em pelo menos $10,75\ m^3$?

d) Em relação à casa de turismo rural da alínea anterior:

- i) Simule **uma** observação do acréscimo de consumo de água de 20 hóspedes dessa casa de turismo rural. Pretende-se que simule o acréscimo de consumo gerado por cada um desses 20 hóspedes, e que reporte os acréscimos individuais e o acréscimo total (soma dos acréscimos) para esta simulação.
- ii) Simule **1000** observações nas mesmas condições, guardando **apenas** a soma para cada uma delas, e, com base nessa simulação, estime a probabilidade que calculou de forma exata em *c)*

---

1. Resolução

a)

Seja $X =$ *consumo de água acrescido por cada turista alojado, por dia* a variável aleatória de interesse,

com parâmetros $\mu = 0.5$ (média) e $\sigma = 0.05$ (desvio-padrão), a sua distribuição normal é dada por

$$X \sim N(\mu = 0.5,\ \sigma = 0.05)$$

Logo, a *probabilidade do acréscimo no consumo, por turista e por dia, ser inferior a* $0,437m^3$ dada por $P[X < 0.437]$ pode ser obtida da seguinte forma

```
# Probabilidade do acréscimo no consumo, por turista e por dia, ser inferior a 0,437 m3 -> P[X<0.437]
pnorm(0.437,0.5,0.05)
```

```
## [1] 0.1038347
```

b)

Mantendo-se as condições e inferências da alínea anterior, *o maior acréscimo de consumo dos 25% menores acréscimos* é o dado pelo $Q1$ em que $q_{0.25} : P[X \leq q_{0.25}] = 0.25$ da distribuição normal, pelo que é dado por

```
# Maior acréscimo de consumo dos 25% menores acréscimos -> Q1
qnorm(0.25,0.5, 0.05,lower.tail =TRUE)
```

```
## [1] 0.4662755
```

c)

Dado que *numa certa unidade de turismo rural, a capacidade é de 20 hóspedes.* podemos através do **TAN** (Teorema da Aditividade da Normal)

considerar $X_i =$ *acréscimo no consumo de água de um hóspede* ***i*** *, por dia* uma variável ***iid*** e $X_T =$ *acréscimo total no consumo de água dos hóspede dessa unidade de turismo rural*

então,

$$X_T = \sum_{i=1}^{20} X_i \sim N(\mu_T = n\mu, \sigma_T = \sigma\sqrt{n}) \quad com \quad n = 20$$

ou seja, $\mu_T = 20 \times \mu = 20 \times 0.5 = 10$ e $\sigma_T = \sigma\sqrt{20} = 0.05\sqrt{20}$

Logo, a *probabilidade do consumo de água diário aumentar em pelo menos* $10,75m^3$ é dada por $P[X_T \geq 10.75]$

```
# Probabilidade do consumo de água diário aumentar em pelo menos 10,75 m3 -> P[XT >= 10.75]
round(pnorm(10.75,20*0.5,0.05*sqrt(20),lower.tail=FALSE),6)
```

```
## [1] 0.000398
```

d)

Mantendo a distribuição normal resultante do *Teorema da Aditividade da Normal* da alínea anterior,

i) A *simulação de uma observação do acréscimo de consumo de água de 20 hóspedes dessa casa de turismo rural* é dada por

```
# Simulação de uma observação do acréscimo de consumo de água de 20 hóspedes
simul_1 <- rnorm(20,0.5,0.05)

# Acréscimo individual de consumo gerado por cada um desses 20 hóspedes
simul_1
```

```
##  [1] 0.4713143 0.5799869 0.4451300 0.4598098 0.5754959 0.5287888 0.5575663
##  [8] 0.5098648 0.5301009 0.5134724 0.4794588 0.5917078 0.5173849 0.4771904
## [15] 0.4989253 0.4741109 0.5055224 0.4960809 0.4490203 0.5468983
```

```
# Acréscimo total (soma dos acréscimos) de consumo gerado por cada um desses 20 hóspedes
round(sum(simul_1),2)
```

```
## [1] 10.21
```

ii) A *simulação de 1000 observações nas mesmas condições, guardando apenas a soma para cada uma delas* é obtida através de

```
# Simulação de 1000 observação
simul2 <- replicate(1000,sum(rnorm(20,0.5,0.05)))
```

EXTRA

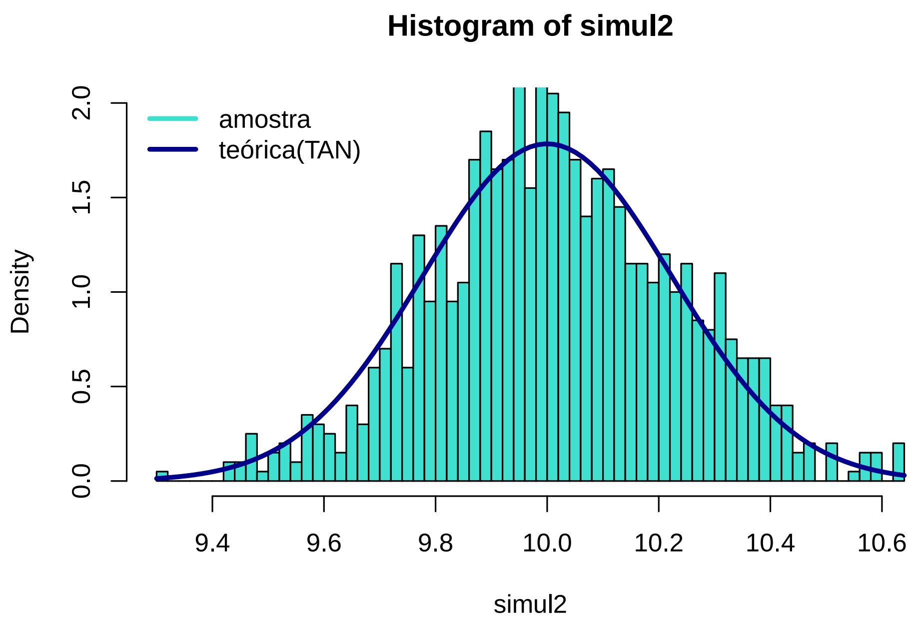
Distribuição dos totais observados:

```
miuT<-20*0.5
sigmaT<-0.05*sqrt(20)

hist(simul2,
     freq = FALSE,
     breaks=50,
     ylim = c(0,2),
     col="turquoise")

curve(dnorm(x,miuT,sigmaT),
      col="dark blue",
      lwd=3,
      add = TRUE)

legend("topleft",
       legend = c("amostra","teórica(TAN)"),
       col = c("turquoise","dark blue"),
       lwd=3,
       bty = "n")
```



A amostra (das somas) apresenta média e desvio-padrão em linha com os valores teoricamente deduzidos acima.

```
medidas<-rbind(c(miuT,mean(simul2)),
c(sigmaT,sd(simul2)))
medidas<-round(as.table(medidas),4)
rownames(medidas)<-c("Média","Desvio-padrão")
colnames(medidas)<-c("TAN","Amostral,n=1000")

library(knitr)
kable(medidas)
```

	TAN	Amostral,n=1000
Média	10.0000	10.0168
Desvio-padrão	0.2236	0.2205

Probabilidade de c)

Pretende-se obter uma aproximação a $P[XT \geq 10.75]$ a partir da simulação efetuada.

Pelo que se observa acima, a $P[XT \geq 10.75]$ deverá estar muito próximo de 0, ou ser mesmo esse valor (caso não existam observações nas condições indicadas).

```
# Probabilidade do consumo de água diário aumentar em pelo menos 10,75 m3 -> P[XT >= 10.75]
mean((simul2 >= 10.75))
```

```
## [1] 0
```