

## TPC 2: Probabilidades - Turma 1

André Filipe Gomes Silvestre N<sup>o</sup>104532 CDB1

---

### Exercício

O *cutefish* existente numa certa barragem é identificado por 60% de *cutefish* dourado e 40% de *cutefish* prateado. Da experiência passada, sabe-se que 80% de *cutefish* dourado nessa barragem tem peso inferior ao estabelecido nos regulamentos de pesca desportiva, enquanto que, no *cutefish* prateado, esse valor é de 30%.

1. Qual a proporção, naquela barragem, de *cutefish* com peso inferior ao regulamentado?
  2. Foi capturado um *cutefish* com peso inferior ao regulamentado. Qual a probabilidade de ser do tipo *cutefish* dourado?
  3. Qual a probabilidade de um *cutefish* capturado ser dourado e ter peso nos parâmetros desejados para a pesca desportiva?
  4. Considere a experiência que consiste em capturar 5 *cutefish* (não interessa a subespécie, dourado ou prateado) e registar para cada um se tem ou não peso inferior ao regulamentado.
    - 4.1. Represente, através de um dataframe adequado, o espaço de resultados associado a esta experiência, com as probabilidades associadas (espaço de probabilidades).
    - 4.2 Explícite a partir do dataframe construído, o acontecimento A – pelo menos 3 (dos 5) *cutefish* têm peso inferior ao regulamentado. Calcule a respetiva probabilidade de ocorrência.
-

## 1. Resolução

Segundo o referido no enunciado, podemos extrair que:

- O acontecimento **CD** ( $A_1$ ) - ser capturado um *cutefish* dourado tem probabilidade de 60% ->  $P[CD]=0,6$
- O acontecimento **CP** ( $A_2$ ) - ser capturado um *cutefish* prateado tem probabilidade de 40% ->  $P[CP]=0,4$

e considerando **PIR** ( $B$ ) como o acontecimento “ser capturado um *cutefish* com peso inferior ao regulamentado”

- $P[PIR | CD] = 0,8$  -> 80% de *cutefish* dourado nessa barragem tem peso inferior ao estabelecido nos regulamentos de pesca desportiva
- $P[PIR | CP] = 0,3$  -> 30% de *cutefish* prateados nessa barragem tem peso inferior ao estabelecido nos regulamentos de pesca desportiva

Como um peixe não pode ser ao mesmo tempo dourado e prateado, i.e.,  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ , e  $P[CD] + P[CP] = 0.6 + 0.4 = 1 = P[\Omega]$ , então  $CD$  e  $CP$  formam uma **partição do universo**.

Podemos aplicar o **Teorema da Probabilidade Total**,

$$P[B] = \sum_{i=1}^n P[B|A_i] \times P[A_i] = \sum_{i=1}^n P[B \cap A_i]$$

Logo, a proporção, naquela barragem, de *cutefish* com peso inferior ao regulamentado, isto equivale a dizer: “probabilidade de ser capturado um *cutefish* com peso inferior ao regulamentado” ( $P[PIR]$ ) é dada por:

```
library(tidyverse) # EXTRA (apenas para visualizar algumas linhas e não todas)

P_CD <- 0.6
P_CP <- 0.4

P_PIR_sabendo_CD <- 0.8
P_PIR_sabendo_CP <- 0.3

# Pela Teoria da Probabilidade Total
P_PIR <- P_CD*P_PIR_sabendo_CD + P_CP*P_PIR_sabendo_CP
P_PIR
```

```
## [1] 0.6
```

$$\therefore P[B] = P[PIR] = 0.6$$

Daqui podemos ainda inferir que a probabilidade do **conjugado de PIR** ( $\overline{B}$ ), ou seja, a probabilidade de ser capturado um *cutefish* com peso nos parâmetros desejados para a pesca desportiva é de 0.4.

$$\therefore P[\overline{B}] = P[\overline{PIR}] = 0.4$$

## 2. Resolução

Sabendo que foi capturado um *cutefish* com peso inferior ao regulamentado, a probabilidade de ser do tipo *cutefish* dourado é dada por  $P[CD | PIR]$

Podemos aplicar a **Fórmula de Bayes**,

$$P[A_j|B] = \frac{P[B|A_j] \times P[A_i]}{\sum_{i=1}^n P[B|A_i] \times P[A_i]} = \frac{P[B \cap A_j]}{P[B]}$$

```
# Pela fórmula da Probabilidade Condicionada
```

```
P_CD_e_PIR <- P_PIR_sabendo_CD * P_CD
```

```
P_CD_sabendo_PIR <- P_CD_e_PIR / P_PIR
```

```
P_CD_sabendo_PIR
```

```
## [1] 0.8
```

$$\therefore P[CD|PIR] = 0.8$$

---

## 3. Resolução

A probabilidade de um *cutefish* capturado ser dourado e ter peso nos parâmetros desejados para a pesca desportiva é simbolicamente dada por  $P[CD \cap \overline{PIR}]$

Logo, e segundo o teorema:

$$P[A] = P[A \cap B] + P[A \cap \overline{B}]$$

```
P_CD_e_não_PIR <- P_CD - P_CD_e_PIR
```

```
P_CD_e_não_PIR
```

```
## [1] 0.12
```

$$\therefore P[CD|\overline{PIR}] = 0.12$$

---

## 4. Resolução

Considere a experiência que consiste em capturar 5 *cutefish* (não interessa a subespécie, dourado ou prateado) e registrar para cada um se tem ou não peso inferior ao regulamentado, sabe-se que:

Os resultados possíveis para a captura são:

- *PIR* (Peso Inferior ao Regulamentado) OU  $\overline{PIR}$  (PNIR - Peso não Inferior ao Regulamentado).

### 4.1.

Então o espaço de resultados ( $\Omega$ ) corresponde às combinações possíveis da captura de 5 *cutefish* é dado por:

```
peso <-c('PIR','PNIR')
peso
```

```
## [1] "PIR" "PNIR"
```

```
# Espaço de Resultados
esp_de_resultados <- expand.grid(peso,peso,peso,peso,peso)
#esp_de_resultados
```

Considerando que as probabilidades a usar são:

- $P[PIR] = 0,6$
- $P[\overline{PIR}] = P[PNIR] = 0,4$

```
# Espaço de Probabilidades
peso_prob <- c(0.6,0.4)
esp_p <- expand.grid(peso_prob,peso_prob,peso_prob,peso_prob,peso_prob)

probs <- esp_p$Var1 * esp_p$Var2 * esp_p$Var3 * esp_p$Var4 * esp_p$Var5

# OU Aplica-se a função prod (produto dos elementos), em linha (1)
# esp_de_probabilidades$probs<-apply(prob_5peixe,1,prod)

esp_de_probabilidades <- data.frame(esp_de_resultados, probs)
as_tibble(esp_de_probabilidades)
```

```
## # A tibble: 32 x 6
##   Var1 Var2 Var3 Var4 Var5 probs
##   <fct> <fct> <fct> <fct> <fct> <dbl>
## 1 PIR   PIR   PIR   PIR   PIR   0.0778
## 2 PNIR  PIR   PIR   PIR   PIR   0.0518
## 3 PIR   PNIR  PIR   PIR   PIR   0.0518
## 4 PNIR  PNIR  PIR   PIR   PIR   0.0346
## 5 PIR   PIR   PNIR  PIR   PIR   0.0518
## 6 PNIR  PIR   PNIR  PIR   PIR   0.0346
## 7 PIR   PNIR  PNIR  PIR   PIR   0.0346
## 8 PNIR  PNIR  PNIR  PIR   PIR   0.0230
## 9 PIR   PIR   PIR   PNIR  PIR   0.0518
## 10 PNIR PIR   PIR   PNIR  PIR   0.0346
## # ... with 22 more rows
```

## 4.2.

Seja o acontecimento **A** “*pelo menos 3 (dos 5) cutefish têm peso inferior ao regulamentado*”, ou seja, serem capturados 3,4 ou 5 *cutefish* com peso inferior ao regulamentado”, a probabilidade de ocorrência é dada por:

```
# Para facilitar o cálculo de casos favoráveis, criei um data.frame com 0 e 1,
# correspondente ao PIR e PNIR, respectivamente

# 0 peso é inferior ao regulamentado (1),
# OU 0 peso não é inferior ao regulamentado (0).

peso_cod <-c(0,1)
esp_de_probabilidades_cod <- data.frame(expand.grid(peso_cod,peso_cod,peso_cod,
                                                    peso_cod,peso_cod), probs)

# Assim, para que `A` ocorra, a soma da captura dos cutefish tem de ser inferior
#ou igual a 2
soma <- esp_de_probabilidades_cod$Var1 + esp_de_probabilidades_cod$Var2 +
  esp_de_probabilidades_cod$Var3 + esp_de_probabilidades_cod$Var4 +
  esp_de_probabilidades_cod$Var5
soma_df <- data.frame(esp_de_probabilidades_cod, soma)

# Probabilidade do acontecimento A
quais_A <- which(soma_df$soma <= 2)

acontecimento_A <- soma_df[quais_A,]
acontecimento_A
```

```
##      Var1 Var2 Var3 Var4 Var5   probs soma
## 1      0    0    0    0    0 0.07776    0
## 2      1    0    0    0    0 0.05184    1
## 3      0    1    0    0    0 0.05184    1
## 4      1    1    0    0    0 0.03456    2
## 5      0    0    1    0    0 0.05184    1
## 6      1    0    1    0    0 0.03456    2
## 7      0    1    1    0    0 0.03456    2
## 9      0    0    0    1    0 0.05184    1
## 10     1    0    0    1    0 0.03456    2
## 11     0    1    0    1    0 0.03456    2
## 13     0    0    1    1    0 0.03456    2
## 17     0    0    0    0    1 0.05184    1
## 18     1    0    0    0    1 0.03456    2
## 19     0    1    0    0    1 0.03456    2
## 21     0    0    1    0    1 0.03456    2
## 25     0    0    0    1    1 0.03456    2
```

```
p_de_A <- sum(acontecimento_A$probs)
p_de_A
```

```
## [1] 0.68256
```