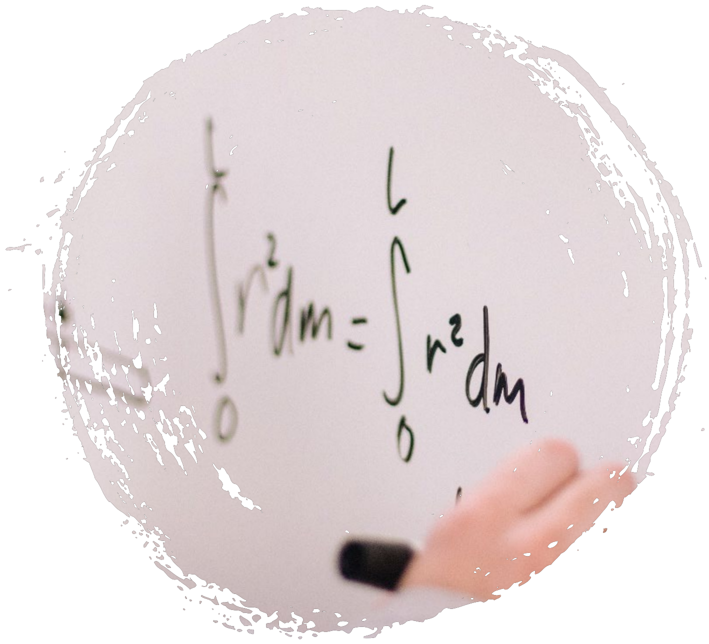
ISCTE INSTITUTO UNIVERSITÁRIO DE LISBOA

Ano Letivo 2021/2022

6 de janeiro de 2022

Integração e Derivação Numérica



UC Tópicos de Matemática I

LDC Licenciatura em Ciência dos Dados

Grupo 2, CDA1

Docente
Abdul Kadir Suleman

André Silvestre Nº104532 | Diogo Catarino Nº104745

Eduardo Silva Nº104943 | Francisco Gomes Nº104944

Trabalho de Tópicos de Matemática I

Grupo I

$$\int_{0}^{1} e^{-x^2}\, \boldsymbol{dx}$$

a) Determinar o *n:*

- $f(x) = e^{-x^2}$
- $f'(x) = -2xe^{-x^2} = -\frac{2x}{e^{(x^2)}}$
- $f''(x) = (4x^2-2)e^{-x^2} = \frac{4x^2-2}{e^{(x^2)}}$

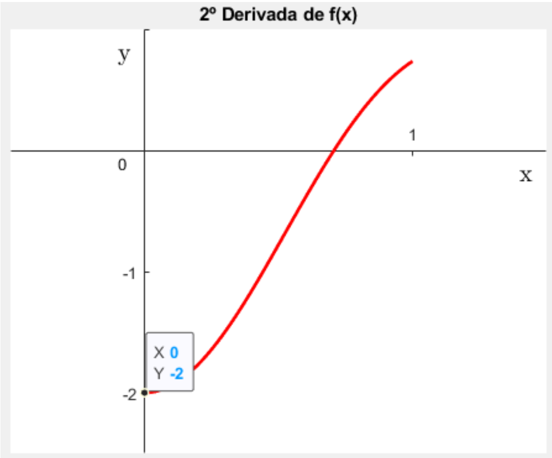


Fig. 1 - 2º Derivada de *f(x).*

Através da realização do gráfico da segunda derivada de *f(x)* (**Fig. 1**) em *MatLab* constata-se que o $|f''(x)| \leq \alpha$ no intervalo [0,1] ocorre no ponto de coordenadas (0, 2). Ou seja, f é diferenciável duas vezes e $|f''(x)| \leq 2$, logo $\alpha = 2$.

$$\therefore \forall\, x \in [0,1], |f''(x)| \leq 2,$$

$$Logo\ \boldsymbol{\alpha} = 2$$

$$\alpha = 2\ ;\ [a,b] = [0,1]$$

Se $\varepsilon_{mpm} = \alpha \frac{(b-a)^3}{24n^2}$, **então** $0{,}001 = 2\frac{(1-0)^3}{24n^2} \Leftrightarrow$

$$\boldsymbol{n} = 10$$

*Utilizando o **Método do Ponto Médio:***

```
>> x=sym('x')
f=@(x) exp(-x.^2)
a=0
b=1
M=IntMPM(f,a,b,10)
```

```
>> M=IntMPM(f,a,b,10)

M =

    0.7471
```

Fig.2 - Cálculo numérico do integral $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$, utilizando o ***Método do Ponto Médio***, com recurso à ferramenta *MatLab*.

b)

Fórmula de MacLaurin (3ª ordem de e^{-x^2})

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} x^n = \frac{f(0)}{0!} x^0 + \frac{f'(0)}{1!} x^1 + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 + r_3$$

- $f(x) = e^{-x^2}$
- $f'(x) = -2xe^{-x^2} = -\frac{2x}{e^{(x^2)}}$
- $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2} = \frac{4x^2-2}{e^{(x^2)}}$
- $f'''(x) = (-8x^3 + 12x)e^{-x^2} = \frac{12x-8x^3}{e^{(x^2)}}$

  - $f(0) = e^{-0^2} = 1$
  - $f'^{(0)} = -\frac{2*0}{e^{(0^2)}} = 0$
  - $f''(0) = \frac{4x^2-2}{e^{(x^2)}} = -2$
  - $f'''(0) = \frac{12x-8x^3}{e^{(x^2)}} = 0$

$\therefore \frac{1}{0!} + \frac{0}{1!} x + \frac{-2}{2!} x^2 + \frac{0}{3!} x^3 = \mathbf{1 - x^2} \rightarrow$ ***Fórmula de MacLaurin*** até aos termos de 3º ordem para a função *f(x)*

$$\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \mathbf{1 - x^2\ d(x)} = \left[\int 1\ d(x) - \int x^2\ d(x)\right]_0^1 = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{1^3}{3}\right) - 0 = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

$\therefore$ Na alínea ***a)*** calculámos numericamente a aproximação do integral da função *f(x)* no intervalo [0,1], usando o **Método do Ponto Médio**, obtendo o valor de **0.7471**.

Na alínea ***b)*** calculámos o mesmo integral, porém, usando a **Fórmula de MacLaurin** que permite o cálculo do valor de uma função por aproximação local através de uma função polinomial, no qual obtivemos o valor de $\mathbf{\frac{2}{3}} = \mathbf{0.66(6)}$.

Podemos concluir que a variação destes valores não é significativa e que os mesmos correspondem a uma aproximação da verdadeira área do integral em análise, estando, por isso, sujeitos a um certo erro.

Grupo II

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; tal \; que \; \boldsymbol{g(x)} = \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{arctan[sin(t)] \, dt}$$

x	*g(x)*	1ª Derivada (MDDSO)	2ª Derivada (MDDSO)	1ª Derivada *g´(x)*	2ª Derivada *g´´(x)*	1ª Derivada Erro Absoluto	1ª Derivada Erro Relativo (%)	2ª Derivada Erro Absoluto	2ª Derivada Erro Relativo (%)
0	0	0,287	0,304	0	1	0,287	NaN	0,696	69,6
π/5	0,180	0,478	0,607	0,531	0,601	0,054	10,1	0,006	1
2π/5	0,601	0,723	0,173	0,760	0,162	0,037	4,9	0,010	6,5
3π/5	1,089	0,723	-0,173	0,760	-0,162	0,037	4,9	0,010	6,5
4π/5	1,508	0,478	-0,606	0,531	-0,601	0,053	10,0	0,004	0,7
5π/5	1,690	0	-0,916	0	-1	0	NaN	0,084	8,4
6π/5	1,509	-0,478	-0,606	-0,531	-0,601	0,053	10,0	0,005	0,9
7π/5	1,089	-0,723	-0,172	-0,760	-0,162	0,038	0	0,010	0
8π/5	0,601	-0,723	0,172	-0,760	0,162	0,038	0	0,010	0
9π/5	0,181	-0,478	0,606	-0,531	0,601	0,053	0	0,005	0
10π/5	0	-0,288	0,303	0	1	0,288	0	0,697	0

Fig. 3 – Resolução do Grupo II.

Legenda : MDDSO (Método das Diferenças Divididas de Segunda Ordem**)**

a)

<u>Determinar o *n:*</u>

- $g'(x) = \arctan[\sin(x)]$
- $g''(x) = \frac{\cos(x)}{1+\sin(x)^2}$
- $g'''(x) = \frac{-\sin(x) - \sin(x)^3 - \cos(x)\sin(2x)}{(1+\sin(x)^2)^2}$

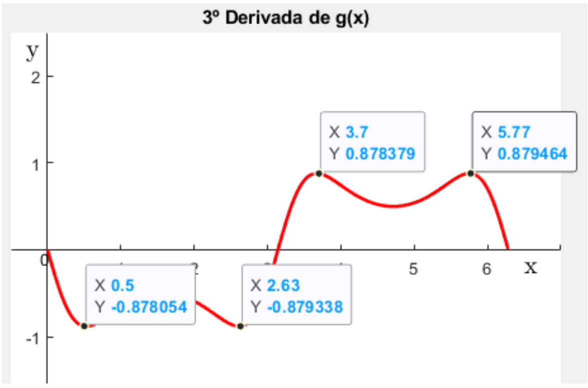


Fig. 4 - 3º Derivada de *g(x).*

Através da realização do gráfico da segunda derivada de *f(x)* (**Fig. 4**) em *MatLab* constata-se que o $|g'''(x)| \leq \alpha$ no intervalo $[0, x]$ ocorre nos pontos de ordenadas $y \cong \pm 0.88$. Ou seja, *f* é diferenciável duas vezes e $|f''(x)| \leq 0.88$, logo $\alpha = 0.88$.

$\therefore \forall x \in \left[0, \frac{10\pi}{5}\right]$, $|f''(x)| \leq 0.88$, $Logo\ \boldsymbol{\alpha} = 0.88$

A título de exemplo, $\alpha = 0{,}88$; $[a, b] = \left[0, \frac{10\pi}{5}\right]$; $n \in \mathbb{N}$

Se $\left[0, \frac{10\pi}{5}\right] \varepsilon_{mt} = \alpha \frac{(b-a)^3}{12n^2}$, **então** $0{,}001 = 0{,}88 \frac{\left(\frac{10\pi}{5} - 0\right)^3}{12n^2} \Leftrightarrow \boldsymbol{n} = 135$

Como a **2ª Derivada da função *f(x)*** é periódica, sendo que os extremos mantêm o valor, o $\alpha = 0.88, \forall x \in [0, x]$. Os vários $\boldsymbol{n}$ no intervalo $[0, x]$ foram calculados e estão presentes na seguinte tabela.

$\boldsymbol{x}$	0	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{5}$	$\frac{6\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{5}$	$\frac{8\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{5}$	$\frac{10\pi}{5}$
$\boldsymbol{n}$	0	5	13	23	35	48	63	79	97	116	135

Utilizando o **Método dos Trapézios (**Anexo 1**)**, através do *MatLab*, efetuamos o cálculo numérico da integral $\int_0^x g(t)\,dt$, cujos resultados são visíveis na **Fig. 3.** Para tal, utilizamos os vários valores de *x* e os diferentes *n,* uma vez que o intervalo é de $[0, x]$.

b) A fim de obtermos a 1ª e 2ª Derivadas pelo **Método das Diferenças Divididas de 2ª Ordem,** elaborámos um *script* em *MatLab* tal como visível no **Anexo 2**, cujos resultados estão presentes na tabela da **Fig. 3.**

c) Pelo **Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo Integral**, se *f* é integrável em *I = [a,b]* e contínua em *c* ∈]*a*, *b*[então $\varphi(x) = \int_{\mathbf{0}}^{x} f(t)\,dt$ é diferenciável em *c*, e tem--se $\varphi'(c) = f(c)$. No caso de *f* ser contínua em [*a*, *b*], então $\varphi'(x) = f(x), \forall x \in I$.

Qualquer função *g(x)*, contínua em [a, b], é integrável neste intervalo.

$$\lim_{x \to 0+} arctan[sin(x)] = 0 \qquad f\ (0) = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{10\pi}{5}-} arctan[sin(x)] = 0 \qquad f\left(\frac{10\pi}{5}\right) = 0$$

Como o $\lim_{x \to \frac{10\pi}{5}-} f(x) = f\left(\frac{10\pi}{5}\right)$ e $\lim_{x \to 0+} f(x) = f(0)$ então a função é contínua no intervalo $\left[0, \frac{10\pi}{5}\right]$, e integrável.

∴ Depois de demonstrado que a função é contínua e integrável, obtivemos os valores exatos da 1ª e 2ª derivadas da função $g(x)$, tal como indicado no *script* do **Anexo 2**, cujos resultados estão presentes na tabela da **Fig. 3.**

Ao analisar os erros obtidos, verificámos que as disparidades entre métodos e o cálculo numérico são reduzidas, uma vez que maior parte dos erros percentuais obtidos se localizam abaixo dos 10% para a primeira derivada e para a segunda, tendo apenas sido observado um erro superior a 10% na segunda derivada.

Posto isto, concluímos que os valores obtidos utilizando o **Método das Diferenças Divididas de 2ª Ordem** e aplicando o **Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo Integral** são similares, verificando-se então que o primeiro método é de facto válido.

Anexos

Anexo 1 – Código de *MatLab* utilizado para calcular numericamente o integral.

```
x=sym('x');
g=@(x) atan(sin(x));
a=0;
lista_n=[0 5 13 23 35 48 63 79 97 116 135]';
i=1;
for B=0:pi/5:10*pi/5
    b=B;
    s=IntTrap(g,a,b,lista_n(i,1));
    [B s]
    i=i+1;
end
```

Anexo 2 – Código de *MatLab* utilizado para construir a tabela do Grupo II.

```
g=[0 0.1804 0.6005 1.0888 1.5089 1.6899 1.5092 1.0891 0.6010 0.1809 0]';
inicio = 0.00;
h = pi/5;
D = Deriv2(g, inicio, h);

% Na matriz D temos: 1ª coluna x; 2ª coluna g(x); 3ª coluna: derivada numerica;
% 4ª coluna: segunda derivada numerica.

V = [];
V = horzcat(V, D);    % faz concatenação de colunas; acrescenta as colunas de D a V, à direita
sym 'x';
glinha = @(x)(atan(sin(x)));
R = f1inha(D(:, 1)); % calcula os valores da 1ª derivada nos pontos x

V = horzcat(V, R);   % a 5ª coluna de V tem a primeira derivada verdadeira

g2linhas = @(x)((cos(x)./(1+sin(x).^2)));
R = f2linhas(D(:,1)); % calcula os valores da 2ª derivada nos pontos x

V = horzcat(V,R);    % a 6ª coluna de V tem a segunda derivada verdadeira

V(:, 7) = abs(V(:,3) - V(:,5));  % a 7ª coluna de V tem o erro absoluto da primeira derivada

[row_V, col_V] = size(V);   % nº de linhas e colunas de V
for i = 1 : col_V
    if (abs(V(i,5)) < 1e-6)  % um valor pequeno, em vez de zero;
        V(i, 8) = NaN;
    else
        V(i,8) = V(i,7) / abs(V(i,5)) * 100;  % o erro relativo vem em percentagem (8ª coluna)
    end
end

V(:,9) = abs(V(:,4) - V(:,6));  % a 9ª coluna de V tem o erro absoluto da segunda derivada
for i = 1 : col_V
    if (abs(V(i,6)) < 1e-6)  % um valor pequeno, em vez de zero;
        V(i, 10) = NaN;
    else
        V(i, 10) = V(i, 9) / abs(V(i, 6)) * 100;  % o erro relativo vem em percentagem (10ª coluna)
    end
end

V
xlswrite('Trabalho_2.xlsx',V);  % pode abrir este ficheiro no excel
```