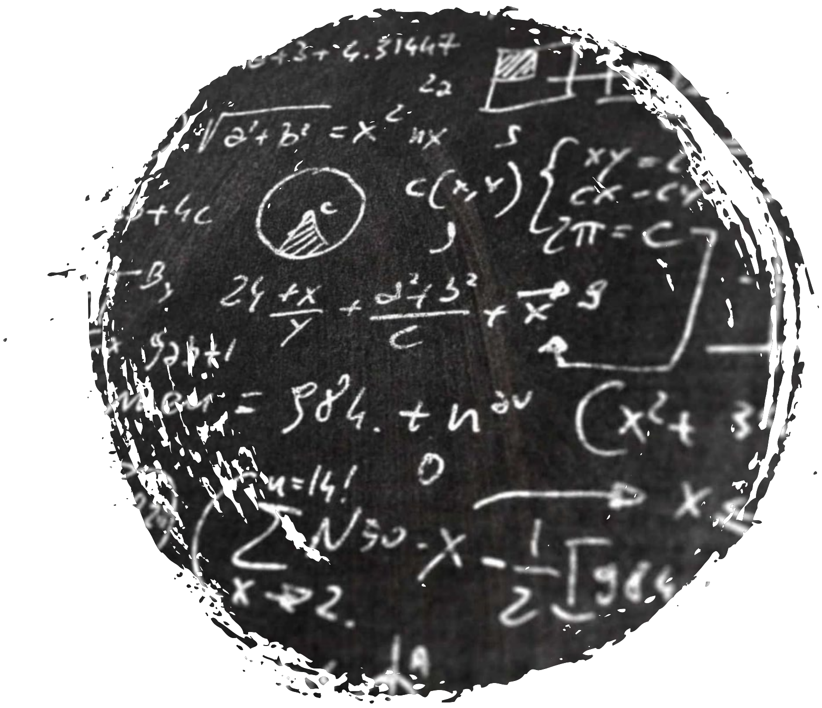
iscte INSTITUTO UNIVERSITÁRIO DE LISBOA

Ano Letivo 2021/2022

Gráficos de funções e pesquisa de zeros



UC Tópicos de Matemática I

LDC Licenciatura em Ciência dos Dados

Grupo 2 , CDA1

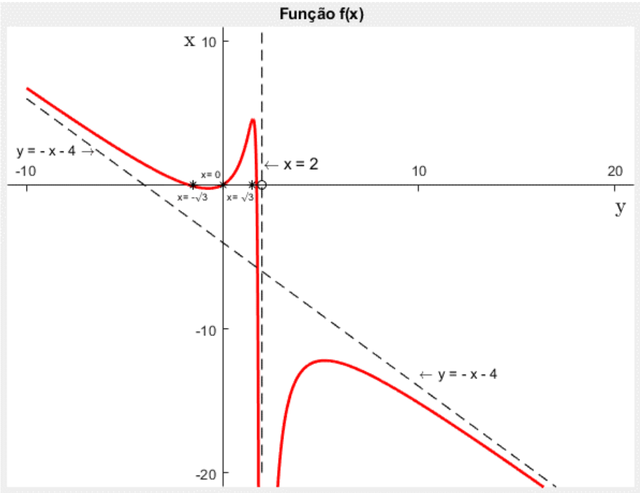
Docente
Abdul Kadir Suleman

André Silvestre Nº104532 | Diogo Catarino Nº104745
Eduardo Silva Nº104943 | Francisco Gomes Nº104944

Trabalho de Tópicos de Matemática I

Grupo I

Grupo 2 → Função atribuída: $\boldsymbol{f(x) = \frac{3x - x^3}{(x-2)^2}}$



Domínio: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{2\}$

Zeros:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - x^3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(3 - x^2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{x = -\sqrt{3} \ \vee x = 0 \ \vee x = \sqrt{3}}$$

Paridade

$Se\ f(x) = f(-x)\ é\ par$ $\qquad f(-x) = \frac{3(-x)-(-x)^3}{((-x)-2)^2} \neq f(x)$ $\quad \therefore\ Logo\ não\ é\ par$

$Se - f(x) = f(-x)\ é\ impar$ $\qquad -f(x) = -\left(\frac{3x-x^3}{(x-2)^2}\right) \neq f(-x)$ $\ \therefore\ Logo\ não\ é\ ímpar$

Limites Importantes e Assíntotas

Assíntotas verticais

$$\lim_{x \to 2^-} \left(\frac{3x - x^3}{(x-2)^2}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \left(\frac{3x - x^3}{(x-2)^2}\right) = -\infty$$

∴ Como a função *f* resulta de operações entre funções continuas, é continua no seu domínio, e como o seu domínio é $\mathbb{R}\backslash\{2\}$, então a única reta que pode ser assíntota vertical do gráfico de *f(x)* é a reta de equação *x = 2,* o que se confirma, pois o $\lim_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to 2^+} f(x) = -\infty$

Assíntotas não verticais

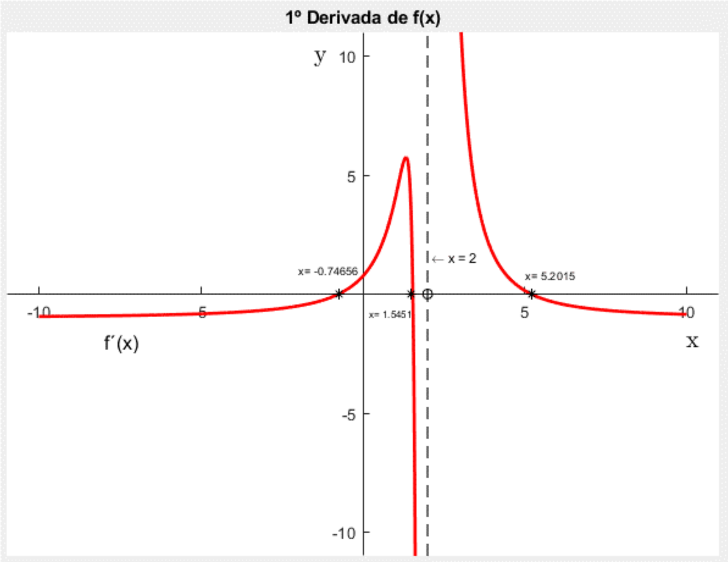
$$m = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{\frac{3x-x^3}{(x-2)^2}}{x}\right) = -1 \qquad b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x-x^3}{(x-2)^2} - x\right) = -4$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\frac{3x-x^3}{(x-2)^2}}{x}\right) = -1 \qquad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{3x-x^3}{(x-2)^2} - x\right) = -4$$

∴ A reta de equação $y = -x - 4$ é assíntota oblíqua ao gráfico de *f* quando $x \to \pm\infty$.

1ª Derivada | Monotonia e Extremos

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{-x^3 + 6x^2 - 3x - 6}{(x-2)^3}}$$



Zeros: Com recurso à ferramenta *MatLab*.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{x = -0.7466} \lor$$

$$\boldsymbol{x = 1.5451} \lor$$

$$\boldsymbol{x = 5.2015}$$

```
M=MetNR(f,f1,1,0.001,0.001,50)
M =

        0    1.0000    4.0000    6.0000       NaN
   1.0000    0.3333    1.3760    2.3328    0.6667
   2.0000   -0.2565    0.4194    1.1038    0.5898
   3.0000   -0.6365    0.0765    0.7338    0.3800
   4.0000   -0.7407    0.0038    0.6616    0.1043
   5.0000   -0.7466    0.0000    0.6579    0.0058
   6.0000   -0.7466    0.0000    0.6579    0.0000
```

```
M=MetNR(f,f1,1.5,0.001,0.001,50)
M =

        0    1.5000    3.0000  -48.0000       NaN
   1.0000    1.5625   -1.7464 -112.5931    0.0625
   2.0000    1.5470   -0.1707  -91.3179    0.0155
   3.0000    1.5451   -0.0021  -89.0396    0.0019
   4.0000    1.5451   -0.0000  -89.0107    0.0000
```

```
M=MetNR(f,f1,3,0.001,0.001,50)

        0    3.0000   12.0000  -30.0000       NaN
   1.0000    3.4000    5.0496   -9.6835    0.4000
   2.0000    3.9215    2.0015   -3.4177    0.5215
   3.0000    4.5071    0.6857   -1.4460    0.5856
   4.0000    4.9813    0.1635   -0.8312    0.4742
   5.0000    5.1781    0.0157   -0.6784    0.1967
   6.0000    5.2012    0.0002   -0.6630    0.0231
   7.0000    5.2015    0.0000   -0.6628    0.0003
```

Fig.1 - Descoberta dos zeros através do método da bisseção, com recurso à ferramenta *MatLab*. Pode-se observar que os valores convergem para **-0.7466**, **1.5451** e **5.2015.**

	$-\infty$	-0.7466		1.5451		2		5.2015	$+\infty$
f´(x)	-	0	+	0	-	*n.d*	+	0	-
f (x)	↘	*mín*	↗	*máx*	↘	*n.d*	↗	*máx*	↘

Fig. 2 - Quadro de Sinal da 1º Derivada de *f(x)*.

∴ **Monotonia de *f(x)*:**

- $f(x)$ é crescente no intervalo [-0.7466; 1.5451] ∪ (2 ; 5.2015).
- $f(x)$ é decrescente no intervalo (-∞; -0.7466] ∪ [1.5451; 2) ∪ [5.2015; +∞).

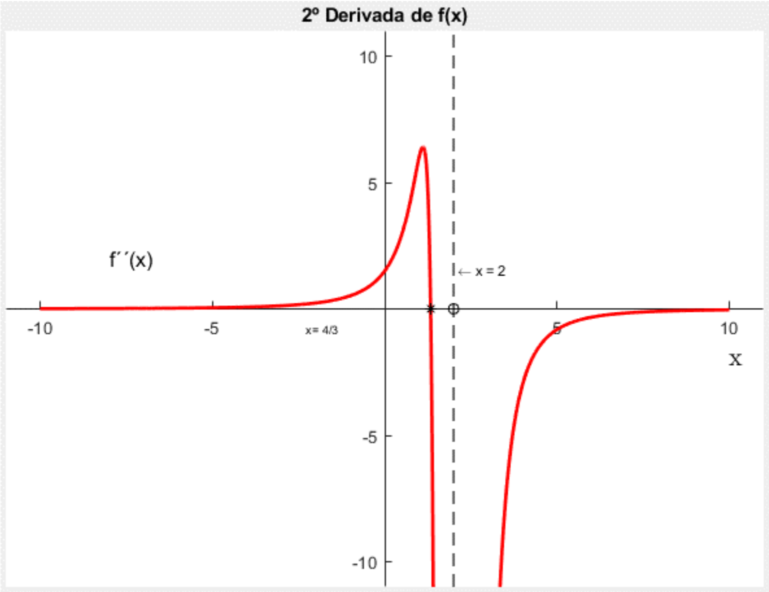
∴ **Máximos relativos** (locais)**:** $x = 1.5451 \; e \; f(1.5451) = 4.5746$

$x = 5.2015 \; e \; f(5.2015) = -12.2078$

∴ **Mínimo relativo** (local)**:** $x = -0.7466 \; e \; f'(-0.7466) = -0.2417$

2ª Derivada | Concavidade e Pontos de Inflexão

$$\boldsymbol{f''(x) = \frac{-18x + 24}{(x-2)^4}}$$



Zeros:

$$f''(x) = 0 \iff$$

$$-18x + 24 = 0 \iff$$

$$24 = 18x \iff$$

$$x = \frac{24}{18} \iff$$

$$\boldsymbol{x = \frac{4}{3}}$$

	$-\infty$	$\frac{4}{3}$		2	$+\infty$
f ´´(x)	+	0	-	*n.d*	-
f (x)	∪	*P.I.*	∩	*n.d*	∩

Fig.3 - Quadro de Sinal da 2º Derivada de *f(x)*.

∴ **Concavidades de *f(x)*:**

- $f(x)$ tem concavidade voltada para cima em $(-\infty; \frac{4}{3}]$.
- $f(x)$ tem concavidade voltada para baixo em $[\frac{4}{3}; 2) \cup (2\,;\,+\infty)$.

∴ **Ponto de inflexão:** $x = \frac{4}{3}$, $f''\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{23}{4}$

Grupo II

$$\boldsymbol{f(x) = \sqrt{3 - x + \sqrt{x}}}$$

a) $f(x) = \sqrt{3 - x + \sqrt{x}}$

$f(1) = \sqrt{3 - 1 + \sqrt{1}} \approx 1.73 \ \left(\sqrt{3}\right)$

$f(2) = \sqrt{3 - 2 + \sqrt{2}} \approx 1.55$

- $f'(x) = \left(\sqrt{3 - x + \sqrt{x}}\right)' = \frac{-2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{3-x^2+\sqrt{x}\,x}}$

$$f'(1) = \frac{-2\sqrt{1}+1}{4\sqrt{3-1^2+\sqrt{1}\,1}} = -\frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$\approx -0.144$$

$$f'(2) = \frac{-2\sqrt{2}+1}{4\sqrt{3-2^2+\sqrt{2}\,2}} \approx -0.338$$

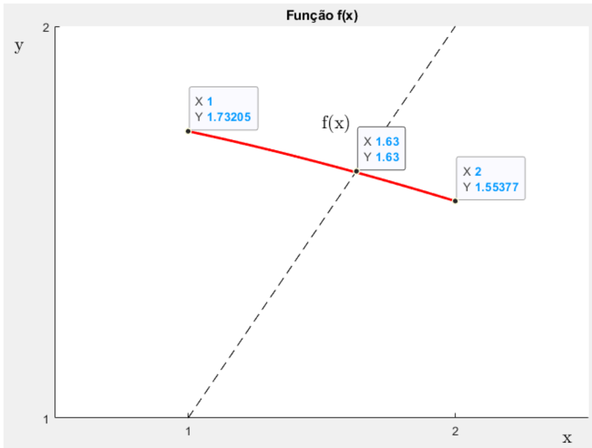


Fig.4 - Representação da função *f(x)* e respetivo *Ponto Fixo*.

∴ Verifica-se que $f([1,2]) = [1.55; 1.73] \subset [1,2]$ e que $|f'(x)| < 1, \forall x \in [1,2]$, o que o coloca nas condições de aplicação do ***Corolário do Teorema de Lagrange.***

Se $f \in C^1([a,b]),\ f([a,b]) \subset [a,b]$ e $\max_{x\in[1,2]} |f'(x)| < 1, f$ tem um e só um ponto fixo c $\in [a,b]$.

$\boldsymbol{c.q.d.}$

b)

```
>> x=sym("x");
f=@(x)((3-x+x^(1/2))^(1/2));
G=PontoFixo(f, 0, 0.001, 100)

G =
```

0	0	1.7321	NaN
1.0000	1.7321	1.6075	1.7321
2.0000	1.6075	1.6311	0.1246
3.0000	1.6311	1.6267	0.0236
4.0000	1.6267	1.6275	0.0044
5.0000	1.6275	1.6273	0.0008

Fig.5 - Descoberta do ponto fixo através do *Método do Ponto Fixo*, recurso à ferramenta *MatLab*.

Pode-se observar que os valores convergem para **1.6275** ao final da 5ª iteração, o que corresponde ao *Ponto Fixo* como vemos na **Fig.5**.

c) $$f(x) = \sqrt{(3 - x + \sqrt{x})} \qquad f'(x) = \frac{-2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{3x-x^2+\sqrt{x}x}}$$

$$h(x) = f(x) - x \qquad h(x) = 0$$

```
>> x=sym('x');
h=@(x)((3-x+(x)^(1/2))^(1/2))-x
h1=@(x)(-2*((x)^(1/2))+1)/(4*((3*(x)-((x)^(2))+((x)^(1/2))*(x))^(1/2)))-1
m=MetNR(h,h1,1.5,0.001,0.001,100)
```

0	1.5000	0.1507	-1.1792	NaN
1.0000	1.6278	-0.0005	-1.1868	0.1278
2.0000	1.6274	-0.0000	-1.1868	0.0004

Fig.6 - Descoberta do ponto fixo através do *Método de Newton-Raphson*, com recurso à ferramenta *MatLab*.

Pode-se observar que os valores convergem para **1.6274** ao fim da 2 ª iteração, o que corresponde ao ponto fixo como vemos na **Fig.6**.

d) Em ambas as alíneas, o ciclo parou ao fim de *n* iterações, 5 na alínea ***b)*** e 2 na alínea ***c),*** convergindo ambos para um mesmo valor aproximado de **1.627**, uma vez que o erro é menor que o erro absoluto definido, **0.001**. Este valor corresponde, em ambos, ao ponto fixo de ***f(x)*** que provámos existir na alínea ***a)***.

No ***Método do Ponto Fixo*** (Fig.5), com recurso à ferramenta *MatLab*, iniciamos a pesquisa no ponto $x_0 = 0$ (escolha arbitrária), definimos o $\varepsilon_{passo} = 0.001$ e limitámos o número de iterações a 100, onde obtivemos como resultado para o ponto fixo no intervalo $[1,2]$ de **1.6275** com erro de **0.0008**.

No ***Método de Newton-Raphson*** (Fig.6), igualou-se a expressão ***f(x) = x*** a 0 ($h(x) = f(x) - x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$), com o objetivo de procurar os zeros desta equação, de forma a obter o ponto fixo no intervalo definido. Para tal determinamos a função derivada de $f(x) - x$ para aplicar o *Método de Newton-Raphson* ($h'(x)$); escolhemos o $x_0=1.5$ (ponto médio do intervalo), definimos o $\varepsilon_{passo} = 0.001$ e $\varepsilon_{abs} = 0.001$ com um limite máximo de 100 iterações ($niter = 100$), onde obtivemos como resultado para o ponto fixo no intervalo $[1,2]$ de **1.6274** com erro de **0.0004**.

Assim, é possível concluir que o ***Método de Newton-Raphson*** é mais eficaz do que o ***Método do Ponto Fixo,*** uma vez que obtivemos um zero com menor erro (0,004), sendo este um valor mais próximo do zero da função.