Ano Letivo 2022/2023

8 de maio de 2023

Trabalho Individual I

Otimização MultiObjetivo

UC Otimização Heurística

Licenciatura Ciência de Dados

CDB1

Docente
Anabela Costa

André Filipe Gomes Silvestre Nº104532

Índice

Introdução

Programação Linear MultiObjetivo

A Programação Linear MultiObjetivo é uma técnica de otimização que procura encontrar a melhor solução num problema que envolve mais de um objetivo a ser maximizado ou minimizado simultaneamente. Isto é, procura encontrar um conjunto de soluções que são consideradas ótimas, face a um conjunto de critérios ou objetivos.

Esta técnica é importante pois muitos dos problemas do mundo real envolvem múltiplos objetivos que são conflitantes entre si, e a escolha de uma solução ótima pode depender de compromissos entre eles. [1]

As suas aplicações são diversas e vão desde a gestão de recursos em empresas até problemas do quotidiano que podem ser otimizados.

Neste sentido, foi proposto no âmbito da UC de *Otimização Heurística* inserida na licenciatura de Ciência de Dados, este trabalho que visa dar resposta a um problema de otimização de uma confeitaria que pretende lançar no mercado três novos doces.

Resolução

a) Formulação do Problema | Plano de Produção

Com base no enunciado fornecido, a empresa pretende alcançar o lucro a longo prazo, manter o atual nível de mão de obra, e travar o investimento de capital na produção de três tipos de doce (D1, D2 e D3), sujeita a um conjunto de restrições.

Para tal, comecei por definir as *Variáveis de Decisão* :

x_i → Quantidade de Doce $\boldsymbol{i}$ a produzir em toneladas. (com $i = 1{,}2$ e 3)

E de seguida as *Restrições* e *Metas* a cumprir:

Restrições *Hard* (não podem ser violadas)

1) $x_1 \leq 6$ → Restrição relativa ao máximo a produzir de D_1 de *6 mil kg*, atendendo ao estudo de mercado efetuado.

2) $x_2 \geq 2$ → Restrição relativa ao mínimo a produzir de D_2 de *2 mil kg*, atendendo ao estudo de mercado efetuado

3) $x_3 \geq 1$ → Restrição relativa ao mínimo a produzir de D_3 de *mil kg*, atendendo ao estudo de mercado efetuado.

Restrições *Soft* (que representam metas a atingir)

4) $12x_1 + 9x_2 + 5x_3 \geq 25000 - d_1^- \Leftrightarrow 12x_1 + 9x_2 + 5x_3 + d_1^- \geq 25000$

Meta 1: Alcançar um lucro a longo prazo de, pelo menos, *125 mil €.*

Em que d_1^- é a variável de desvio que representa o quanto falta alcançar para o valor alvo da **Meta 1**, ou seja, 125. ($d_1^- \geq 0$)

5) $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 60 - d_2^- + d_2^+ \Leftrightarrow 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + d_2^- - d_2^+ = 60$

Meta 2: Manter o atual nível de mão de obra, ou seja, *60 empregados.*

Em que d_2^- é a variável de desvio que representa o quanto falta alcançar para o valor alvo da **Meta 2**, ou seja, 60. ($d_2^- \geq 0$)

E d_2^+ é a variável de desvio que representa em quanto se ultrapassa o valor de referência da **Meta 2**, ou seja, 60. ($d_2^+ \geq 0$)

6) $5x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 55 + d_3^+ \Leftrightarrow 5x_1 + 5x_2 + 8x_3 - d_3^+ \leq 55$

Meta 3: Travar o investimento de capital ao máximo de *55 mil de euros*.

Em que d_3^+ é a variável que representa em quanto se excede o valor alvo da **Meta 3** de 55. ($d_3^+ \geq 0$)

Além das restrições listadas em cima, é ainda necessário garantir que serão produzidas quantidades reais positivas através da restrição $x_i \geq 0 \; e \; \mathbb{R}, \quad i = 1{,}2{,}3$, uma vez que estamos a referir a toneladas de doces.

Definidas as restrições, fica a faltar a definição da *Função Objetivo* de forma a criar o modelo matemático que traduz o problema.

Atendendo que as metas têm diferentes graus de importância para o agente decisor, temos de contemplar no modelo esta situação utilizando pesos que expressem o grau de importância das diferentes metas definidos, *à priori*, pelo próprio.

Deste modo, podemos retirar do seguinte excerto do enunciado os pesos.

> A direção […] definiu os seguintes pesos de penalização:
> - 5 pontos por cada milhar de euros abaixo do nível de aspiração do lucro;
> - Por cada 5 trabalhadores, 4 pontos por ultrapassar e 10 pontos por ficar abaixo do valor alvo…;
> - 5 pontos por cada milhar de euros acima do nível de aspiração do investimento de capital.

Assim, a introdução desses pesos levaria à obtenção da seguinte *Função Objetivo*:

$$Min \;\; Z = P_1^- \frac{d_1^-}{t_1} + \frac{P_2^- d_2^- + P_2^+ d_2^+}{t_2} + P_3^+ \frac{d_3^+}{t_3} \quad = \quad 5\frac{d_1^-}{125} + \frac{\frac{10}{5} d_2^- + \frac{4}{5} d_2^+}{60} + 5\frac{d_3^+}{55}$$

Como se pretende obter soluções que se aproximem do valor alvo de cada meta, então iremos minimizar a soma dos valores dos desvios percentuais ponderados.

Em suma, obtém-se a seguinte *Formulação*:

$$Min \;\; Z = P_1^- \frac{d_1^-}{t_1} + \frac{P_2^- d_2^- + P_2^+ d_2^+}{t_2} + P_3^+ \frac{d_3^+}{t_3} \quad = \quad 5\frac{d_1^-}{125} + \frac{\frac{10}{5} d_2^- + \frac{4}{5} d_2^+}{60} + 5\frac{d_3^+}{55}$$

$s.a.:$ $x_1 \leq 6$ [Restrição de Produção de D1]
$x_2 \geq 2$ [Restrição de Produção de D2]
$x_3 \geq 1$ [Restrição de Produção de D3]
$12x_1 + 9x_2 + 5x_3 + d_1^- \geq 125$ [Meta 1 – Lucro a Longo Prazo]
$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + d_2^- - d_2^+ = 60$ [Meta 2 – Mão de Obra]
$5x_1 + 5x_2 + 8x_3 - d_3^+ \leq 55$ [Meta 3 - Investimento]
$x_i \geq 0 \; e \; \mathbb{R}, \quad i = 1{,}2{,}3$ [Restrição de Sinal das Variáveis de Decisão]
$d_1^-, d_2^-, d_2^+, d_3^+ \geq 0$ [Restrição de Sinal das Variáveis de Desvio]

b) Resolução e Interpretação

De modo a resolver este problema por meio de técnicas de *Programação Linear*, que permitem encontrar a solução ótima que minimiza a função objetivo sujeita às restrições definidas, utilizei a biblioteca de *Python* `pulp` lecionada em aula.

Assim, obtive os seguintes resultados:

```
Valor Ótimo: 1.3359999999999999

 ======== Solução Ótima =======
x1: 6.0
x2: 3.4
x3: 1.0

dm1: 17.4
dm2: 19.2
dM2: 0.0
dM3: 0.0

Restricao_D1: 0.0
Restricao_D2: 1.4
Restricao_D3: 0.0
Meta_Lucro: -3.552713678800501e-15
Meta_Emprego: 0.0
Meta_Investimento: 0.0
```

Figura 1 | *Output* obtido na resolução do problema.

Interpretação dos Resultados

Valor Ótimo: $Z^* = 1.336$

Trata-se de um valor que não é fácil de interpretar dada a sua natureza e diferentes graus de importância. Por isso, vou apenas restringir a análise às soluções ótimas.

Solução Ótima

- $x_1 = 6$ → Serão produzidas 6 toneladas de doce D1, sendo estritamente respeitada a restrição de produção máxima determinada.
- $x_2 = 3.4$ → Serão produzidas 3.4 toneladas de doce D2, sendo que será produzido mais 1.4 toneladas do que a restrição de produção mínima estipulada.
- $x_3 = 1$ → Será produzida 1 tonelada de doce D3, sendo estritamente respeitada a restrição de produção mínima estabelecida.

Solução Ótima | Metas/Objetivos

- $d_1^- = 17.4$

  Não é alcançado o valor alvo da **Meta 1** (que é de *125 milhares de €* relativo ao lucro a longo prazo), sendo **17 400€** abaixo do nível de aspiração.

- $d_2^- = 19.2$ e $d_2^+ = 0$

  Não é alcançado o valor alvo da **Meta 2** (que é de *60 empregados* relativo à mão de obra), sendo ≈ **20 empregados** abaixo do nível de aspiração.

- $d_3^+ = 0$

  É alcançado o valor alvo da **Meta 3** (que é travar o investimento em *55 milhares de €*).

Comentário à Solução Obtida

A solução obtida **não é equilibrada**, uma vez que, apenas a **Meta 3** é atingida, sendo que as restantes têm valores muito desviados do objetivo, isto é:

- Na **Meta 1** o lucro a longo prazo é **13.9%** abaixo do definido, totalizando apenas um lucro de **107 600€**, e;
- Na **Meta 2** a mão de obra é **32%** abaixo do estabelecido, apenas necessitando de $\approx 40\ empregados$.

c) Propostas Alternativas

Com o intuito de determinar soluções alternativas, utilizei outro tipo de *Função Objetivo*, a $\boldsymbol{MiniMax}$ e, numa outra proposta, ponderei o problema a pensos diferentes de modo a obter uma proposta alternativa mais equilibrada, podendo ser mais interessante para o agente decisor.

Alternativa 1

Uma possibilidade de alternativa ao modelo apresentado é definir a *Função Objetivo* $MiniMax$, a qual é utilizada quando se pretende minimizar o desvio máximo de qualquer meta:

$$MiniMax\ Z = \left\{P_1^- \frac{d_1^-}{t_1}, P_2^- \frac{d_2^-}{t_2}, P_2^+ \frac{d_2^+}{t_2}, P_3^+ \frac{d_3^+}{t_3}\right\}$$

Que em termos de modelo, se transforma na função objetivo: $Min\ Z = \boldsymbol{Q}$, em que $\boldsymbol{Q}$ é a variável $\boldsymbol{MiniMax}$.

E considera, além das restrições já definidas, as seguintes restrições adicionais:

$$P_1^- \frac{d_1^-}{t_1} \leq Q \Leftrightarrow 5 \times \frac{d_1^-}{125}$$

$$P_2^- \frac{d_2^-}{t_2} \leq Q \Leftrightarrow \frac{10}{5} \times \frac{d_2^-}{60}$$

$$P_2^+ \frac{d_2^+}{t_2} \leq Q \Leftrightarrow \frac{4}{5} \times \frac{d_2^+}{60}$$

$$P_3^+ \frac{d_3^+}{t_3} \leq Q \Leftrightarrow 5 \times \frac{d_3^+}{55}$$

```
Valor Ótimo: 0.541203

 ======== Solução Ótima =======
x1: 6.0
x2: 3.42539
x3: 1.72829

dm1: 13.5301
dm2: 16.2361
dM2: 0.0
dM3: 5.95323
Q: 0.541203

Restricao_D1: ~0.0
Restricao_D2: ~1.425
Restricao_D3: ~0.728
Meta_Lucro: ~0.0
Meta_Emprego: ~0.0
Meta_Investimento: ~0.0
Desvio_Q_Lucro_Abaixo: ~0.0
Desvio_Q_Mao_de_Obra_Abaixo: ~0.0
Desvio_Q_Mao_de_Obra_Acima: ~-0.541
Desvio_Q_Investimento_Acima: ~-0.0
```

Figura 2 | *Output* da Alternativa **1.**

Alternativa 2

Como alternativa possível, atentei as soluções ótimas obtidas em b) e no que o agente decisor pretende como metas, de modo a propor um modelo mais equilibrado aos seus objetivos de *lucro* e *mão de obra* (aqueles que foram violados no modelo em b)).

Neste sentido, fiz várias tentativas de modo a suavizar alguns desvios e colocar outros mais rígidos de modo que os desvios fossem mais benéficos para o agente decisor (cujos resultados estão no *Notebook*).

Assim, no meu ponto de vista, o modelo mais equilibrado dentro dos que obtive, e tendo em conta uma alternativa díspar das restantes foi com os pesos:

$$P_1^- = 10,\ P_2^- = 20,\ P_2^+ = 1 \text{ e } P_3^+ = 10$$

Esta solução dará mais relevância à Meta 1 e Meta 2 que não foram atingidas no problema inicial.

```
Valor Ótimo: 6.7972

 ======== Solução Ótima =======
x1: 6.0
x2: 2.38462
x3: 6.30769

dm1: 0.0
dm2: 0.0
dM2: 0.0
dM3: 37.3846

Restricao_D1: ~0.0
Restricao_D2: ~0.385
Restricao_D3: ~5.308
Meta_Lucro: ~0.0
Meta_Emprego: ~0.0
Meta_Investimento: ~0.0
```

Figura 3 | *Output* da Alternativa **2.**

Interpretação da Alternativa 1

◈ Valor Ótimo: $Z^* = 0.541203$

Solução Ótima

- $x_1 = 6$

Serão produzidas 6 toneladas de doce D1, sendo estritamente respeitada a restrição de produção máxima determinada.

- $x_2 = 3.42539$

Serão produzidas ≈ 3.43 toneladas de doce D2, sendo que será produzido mais ≈ 1.425 ton. do que a restrição de produção mínima estipulada.

- $x_3 = 1.72829$

Será produzida ≈ 1.73 toneladas de doce D3, sendo que será produzido mais ≈ 0.728 ton. do que a restrição de produção mínima estipulada.

Solução Ótima | Metas/Objetivos

◎ $d_1^- = 13.5301$

Não é alcançado o valor alvo da **Meta 1** (atingir *125 milhares de €* de lucro a longo prazo), sendo $\approx$ 13 530€ abaixo do nível de aspiração.

◎ $d_2^- = 16.2361$ e $d_2^+ = 0$

Não é alcançado o valor alvo da **Meta 2** (de *60 empregados* relativo à mão de obra), sendo $\approx$ 17 empregados abaixo do nível de aspiração.

◎ $d_3^+ = 5.95323$

Não é alcançado o valor alvo da **Meta 3** (que é travar o investimento em *55 milhares de €*), sendo $\approx$ 5 953 € acima do nível de aspiração.

◎ $\mathrm{Q} = 0.541203$

Corresponde ao desvio máximo ocorrido.

Comentário dos Resultados 1

A solução obtida continua **não equilibrada**, não sendo cumprida nenhuma meta.

Interpretação da Alternativa 2

◈ Valor Ótimo: $Z^* = 6.7972$

Solução Ótima

- $x_1 = 6$

Serão produzidas 6 toneladas de doce D1, sendo estritamente respeitada a restrição de produção máxima determinada.

- $x_2 = 2.38462$

Serão produzidas ≈ 2.38 toneladas de doce D2, sendo que será produzido mais ≈ 0.39 ton. do que a restrição de produção mínima estipulada.

- $x_3 = 6.30769$

Será produzida ≈ 6.31 ton. de doce D3, sendo produzido mais ≈ 5.31 ton. do que a restrição de produção mínima estipulada.

Solução Ótima | Metas/Objetivos

◎ $d_1^- = 0$

É alcançado o valor alvo da **Meta 1** (que é de *125 milhares de €* relativo ao lucro a longo prazo).

◎ $d_2^- = 0$ e $d_2^+ = 0$

É alcançado o valor alvo da **Meta 2** (que é de *60 empregados* relativo à mão de obra).

◎ $d_3^+ = 37.3846$

Não é alcançado o valor alvo da **Meta 3** (que é travar o investimento em *55 milhares de €*), sendo $\approx$ 37 385 € acima do nível de aspiração.

Comentário dos Resultados 2

A solução obtida **é equilibrada** nas **Metas 1 e 2**, e muito desequilibrada na **Meta 3**, sendo esta a única meta que não foi atingida, tendo um grande desvio face ao valor de referência do agente decisor.

d) Comparação dos Planos Obtidos

Na tabela seguinte resumem-se as soluções obtidas de cada problema, bem como, o respetivo valor ótimo e os valores das metas atingidos:

	Z^*	x_1	x_2	x_3	Lucro (milhares de €) $12x_1 + 9x_2 + 5x_3$	Mão de Obra (empregados) $5x_1 + 2x_2 + 4x_3$	Investimento (milhares de €) $5x_1 + 5x_2 + 8x_3$
B)	1.34	6.0	3.4	1.0	107.6	40.8	55
C1)	0.54	6.0	3.43	1.73	111.5	43.7	60.95
C2)	1.39	6.0	2.39	6.31	125	60	92.385

Analisando os resultados obtidos, podemos verificar que, comparando as soluções B) e C1), ambas não cumprem as Metas 1 (lucro a longo prazo) e 2 (mão de obra), e em C1) não é cumprida igualmente a Meta 3 (investimento). Contudo, em C1) os desvios face ao valor de referência são menores, à exceção do investimento. Assim, nenhum destes planos domina o outro, sendo ambas soluções desequilibradas para o agente decisor.

Comparando as soluções de B) e C2), observa-se que as Metas 1 e 2 não cumpridas em B) são cumpridas em C2), já a Meta 3 cumprida em B), não é atingida em C2) tendo um desvio de ≈ 37 385€ (≈ 67,97% acima do valor de referência), o que pode ser considerado um encargo muito grande de investimento para o agente decisor, porém, pode-lhe interessar mais esta solução dado o cumprimento das restantes metas. Uma vez mais, nenhum destes planos domina o outro.

E, por último, comparando as soluções de C1) e C2), observamos um problema semelhante ao descrito na comparação anterior, sendo que em C1) nenhuma das soluções é atingida, porém têm desvios mais próximo das metas que B). Assim, põe-se o mesmo problema do elevado investimento a considerar pelo agente decisor. Novamente, nenhum destes planos domina o outro.

Em suma, nenhuma solução é dominada, dado que não há nenhuma solução melhor que as outras, isto é, que seja a melhor num objetivo e menos desviada que as restantes nos outros objetivos. Assim, a este conjunto de soluções não dominadas no espaço das soluções admissíveis, designamos *Conjunto Ótimo de Pareto*.

e) Programação por Metas Preemptiva

A direção da Confeitaria reavaliou os níveis de importância atribuídos a cada uma das três metas. Em consequência, foi decidido dar uma prioridade muito elevada à meta relativa à mão de obra. Além disso, a direção constatou que angariar mais de 55 milhões(*) de euros para investimento de capital em equipamentos seria extremamente difícil, pelo que também decidiu atribuir uma prioridade muito elevada à meta do investimento de capital.

A informação acima referida encontra-se sintetizada na tabela seguinte:

Nível Prioridade	Fator	Meta
Primeiro nível	Mão de obra	= **60** (empregados)
	Investimento	≤ **55** (milhões de euros*)
Segundo nível	Lucro a longo prazo	≥ **125** (milhões de euros*)

(*) Depois de confirmar com a docente que esta unidade de medida foi um lapso e que era suposto utilizar os valores como referidos na alínea **a)**, utilizei os valores como **milhares de €**.

Atendendo à definição das prioridades dos objetivos, a função objetivo seria dada por:

$$Lex\ Min\ Z = \left\{ \frac{P_2^- d_2^- + P_2^+ d_2^+}{t_2} + P_3^+ \frac{d_3^+}{t_3},\ P_1^- \frac{d_1^-}{t_1} \right\}$$

Para resolver este problema de **Programação por Metas Preemptiva**, segui os vários passos tal como lecionado.

Como **Passo 0**, atribuímos valores aos pesos. Nesta alínea, considerei os mesmos pesos sugeridos no enunciado – $P_1^- = 5$, $P_2^- = \frac{10}{5}$, $P_2^+ = \frac{4}{5}$ e $P_3^+ = 5$.

De seguida, no **1º Passo**, construí e resolvi o modelo em que se considera apenas a função objetivo, as restrições *hard* e as restrições do **Nível 1**, ou seja, o prioritário.

Assim, a formulação do modelo para o **1° Nível de Prioridade** é:

$$Min\ Z = \frac{P_2^- d_2^- + P_2^+ d_2^+}{t_2} + P_3^+ \frac{d_3^+}{t_3} = \frac{\frac{10}{5} d_2^- + \frac{4}{5} d_2^+}{60} + 5 \frac{d_3^+}{55}$$

$s.a.$ $\quad x_1 \leq 6$ [Restrição *hard* de Produção de D1]

$x_2 \geq 2$ [Restrição *hard* de Produção de D2]

$x_3 \geq 1$ [Restrição *hard* de Produção de D3]

$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + d_2^- - d_2^+ = 60$ [**Meta 2** – Mão de Obra]

$5x_1 + 5x_2 + 8x_3 - d_3^+ \leq 55$ [**Meta 3** - Investimento]

$x_i \geq 0\ e\ \mathbb{R}, \quad i = 1,2,3$ [Restrição de Sinal das Variáveis de Decisão]

$d_2^-, d_2^+, d_3^+ \geq 0$ [Restrição de Sinal das Variáveis de Desvio]

Resolvendo o problema, obtemos o seguinte *output* com o valor e soluções ótimas (**Fig. 4**).

```
Valor Ótimo: 18.5

 ======== Solução Ótima =======
x1: 6.0
x2: 2.0
x3: 1.875

dm2: 18.5
dM2: 0.0
dM3: 0.0

Restricao_D1: 0.0
Restricao_D2: 0.0
Restricao_D3: 0.875
Meta_Emprego: 0.0
Meta_Investimento: 0.0
```

Figura 4 | *Output* obtido na resolução do problema do **1° Nível de Prioridade**.

Como $Z^* \neq 0$ e $d_2^- = 18.5$, conclui-se que não é possível ter um plano de produção que cumpra a **Meta 2** do nível prioritário, isto é, a confeitaria não conseguirá ter **60** empregados e um investimento inferior a **55** mil **€**, em simultâneo.

Assim, teríamos de renegociar este valor de referência para $60 - 18.5 = 41.5$ *empregados*, ou seja, subtrai-se ao valor de referência da mão de obra o desvio d_2^- obtido. Todavia, sendo este valor de referência um número relativo a pessoas, faz mais sentido arredondar para $\mathbf{41}$ empregados de modo a ser inteiro.

Assumindo que o cliente aceitaria a renegociação do valor da **Meta 2**, o modelo passará a ter a restrição $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + d_2^- - d_2^+ = 41$ e ao resolvê-lo, verificamos que o valor ótimo passa a ser $\mathbf{0}$, tal como é desejado. Neste caso, a solução ótima obtida foi $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 1.75$, que correspondem às quantidades, em toneladas, de **Doce** $\boldsymbol{i}$ a produzir, sendo $i = 1{,}2\ e\ 3$, respetivamente, caso apenas considerássemos estes dois objetivos (*Mão de Obra* e *Investimento*).

Uma vez que ficou satisfeito o nível prioritário, passamos para o **2º passo** da resolução de programação por metas preemptiva que consiste na construção e resolução de um novo modelo, que inclua como objetivo as metas do **Nível Prioritário 2** e que nas restrições incorpore a solução obtida no **Passo 1**, bem como as restrições *hard* e as restrições do **Nível de Prioridade 2**.

Neste sentido, a sua formulação será:

$$Min\ \ Z = P_1^- \frac{d_1^-}{t_1} = 10\frac{d_1^-}{125}$$

$s.a.$

$x_1 \leq 6$ [Restrição de Produção de D1]

$x_2 \geq 2$ [Restrição de Produção de D2]

$x_3 \geq 1$ [Restrição de Produção de D3]

$12x_1 + 9x_2 + 5x_3 + d_1^- \geq 125$ [**Meta 1** – Lucro a Longo Prazo]

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + d_2^- - d_2^+ = 41 \\ d_2^- = 0 \\ d_2^+ = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 41.5$$

[**Meta 2** – Mão de Obra – Passa a *hard*]

$$\left.\begin{array}{l} 5x_1 + 5x_2 + 8x_3 - d_3^+ \leq 55 \\ d_3^+ = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow 5x_1 + 5x_2 + 8x_3 \leq 55$$

[**Meta 3 –** Investimento - Passa a *hard*]

$x_i \geq 0\ e\ \mathbb{R},\quad i = 1{,}2{,}3$ [Restrição de Sinal das Variáveis de Decisão]

$d_1^- \geq 0$ [Restrição de Sinal da Variável de Desvio]

Resolvendo o problema, obtemos o seguinte *output* com o valor e soluções ótimas (**Fig. 5**).

```
Valor Ótimo: 0.79

 ======== Solução Ótima =======
x1: 6.0
x2: 3.0
x3: 1.25

dm1: 19.75

Restricao_D1: 0.0
Restricao_D2: 1.0
Restricao_D3: 0.25
Meta_Lucro: 0.0
Primeiro_Nivel_Prioridade_Meta_Emprego: 0.0
Primeiro_Nivel_Prioridade_Meta_Investimento: 0.0
```

Figura 5 | *Output* obtido na resolução do problema do **2º Nível de Prioridade**.

Uma vez mais, como $Z^* \neq 0$ e $d_3^+ = 19.75$, conclui-se que não é possível cumprir o nível de aspiração da **Meta 3** do segundo nível de prioridade, isto é, a confeitaria não conseguirá obter um lucro de 125 *milhares de €*, garantindo as metas do *1º Nível de Prioridade*.

Logo, teríamos de renegociar o valor para $125 - 19.75 = \mathbf{105.25}$ mil €, ou seja, subtrai-se ao valor de referência do lucro a longo prazo o desvio d_1^- obtido, de modo a cumprir o **2º Nível de Prioridade**.

Igualmente ao ocorrido anteriormente, assumimos que o agente decisor aceitaria a redefinição deste valor de referência do lucro, e resolvemos um novo problema alterando a restrição relativa a esta meta para

$$12x_1 + 9x_2 + 5x_3 + d_1^- \geq 105.25$$

E, resolvendo o problema com esta alteração, o valor ótimo passa a ser $Z^* = 0$, significando por isso que o **2º Nível de Prioridade** é cumprido.

Deste modo, finalizamos o problema com a solução ótima $x_1 = 6$, $x_2 = 3$ e $x_3 = 1.25$, que correspondem às quantidades, em toneladas, de **Doce $\boldsymbol{i}$** a produzir, sendo $i = 1,2 \; e \; 3$, respetivamente. Quanto às metas, neste plano ótimo, o **Lucro a longo prazo** será de 105.25 *milhares de €;* a **Mão de Obra** ficará nos 41 *empregados* e o **Investimento** será de 55 *milhares de €.*

Podemos assim inferir, que atendendo à definição das prioridades dos objetivos definidas pelo agente, o plano é **pouco equilibrado**, dado que terá de fazer cedências para os novos valores de aspiração nas **Metas 1 e 2**, tal como ocorreu na resolução do problema por Metas Não Preemptivas (alíneas **a)** e **b)**).

Conclusões

Na resolução deste projeto foi possível definir, formular e resolver vários problemas de Otimização MultiObjectivo, utilizando neles Programação por Metas não Preemptiva e Preemptiva.

Em suma, cumpri com sucesso o objetivo pretendido neste projeto de responder a um problema de otimização de uma confeitaria que pretende lançar no mercado três novos doces.

Bibliografia

[1] Ragsdale, C.T. (2017). *Spreadsheet Modeling and Decision Analysis: A Practical Introduction to Business Analytics.* 8th Ed. Cemgage Learning.