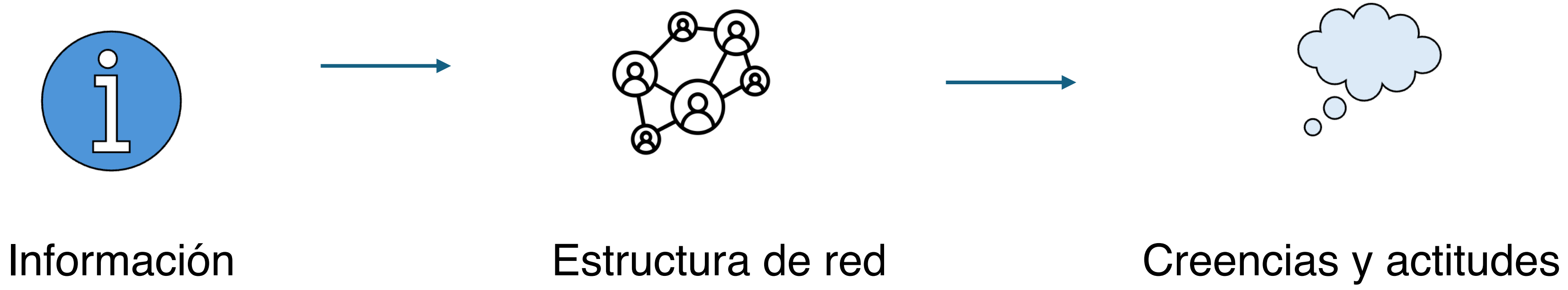
Naïve Learning in Social Networks and the Wisdom of Crowds

Benjamin Golub & Matthew O. Jackson

American Economic Journal: Microeconomics 2010

Problema:



PI : ¿Qué clase de redes permiten que las creencias de los agentes converjan a la **verdad**?

I. Un modelo de aprendizaje

- **Estructura social :** Red ponderada y potencialmente dirigida.

- **Creencias iniciales:**

  Verdadero estado de la naturaleza ($\boldsymbol{\mu}$)

  +

  Ruido idiosincrático ($\boldsymbol{\theta}$)

- **Aprendizaje:** Actualización de creencias a través de interacción.

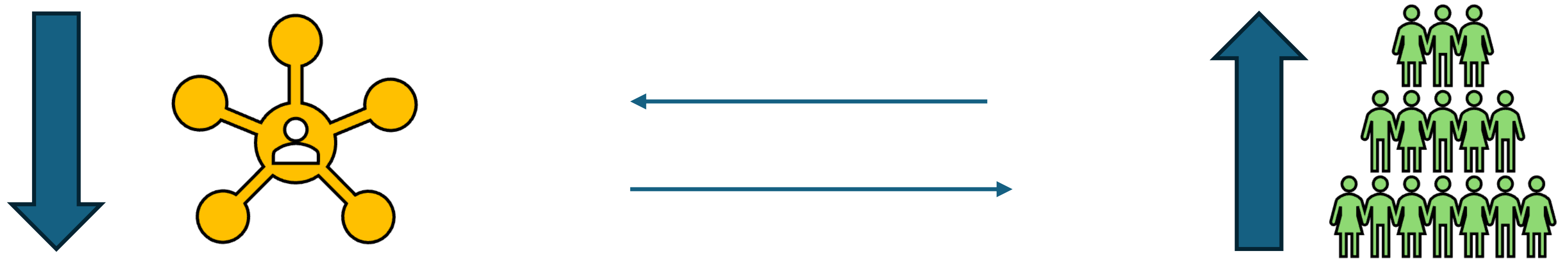
- Regla ***naïve***: Promedio **ponderado** de creencias de vecinos en t-1

- Convergencia a **consenso**

Dos extremos :

- Todos ponen atención a **1**
- Peso igualmente distribuido entre todos (LGN)

Sabiduría:



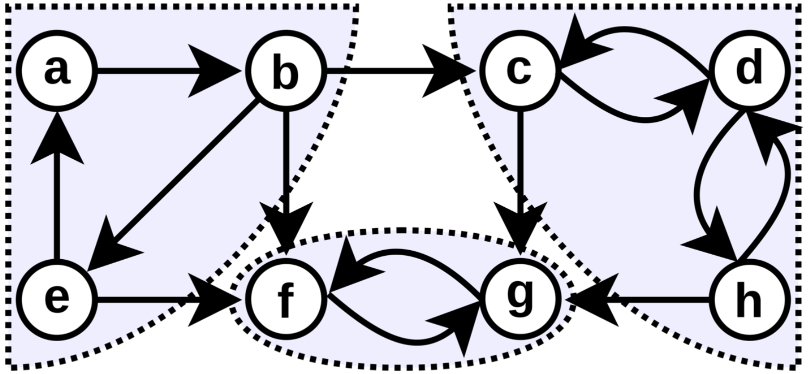
II. Modelo DeGroot

- **Nodos:** $N = \{1, 2, \ldots, n\}$
- **Interacciones:** matriz estocástica $\mathbf{T}_{n \times n}$
- **Confianza (peso) :** $T_{ij} > 0$

Actualización:

- $p_i^{(t)} \in [0,1]$ en periodos $t \in \{0,1,2,\ldots\}$.
- $\mathbf{p}^{(t)} = \mathbf{T}\mathbf{p}^{(t-1)}$
- $\mathbf{p}^{(t)} = \mathbf{T}^t\,\mathbf{p}^{(0)}$
- <u>La regla no cambia.</u>

Conectividad fuerte:



III. Convergencia bajo actualización *naïve*

- **DEF 1:** La matriz **T** es **convergente** si $\lim_{t\to\infty} \mathbf{T}^t \mathbf{p}$ existe para **todos** los vectores iniciales $\mathbf{p} \in [0,1]^n$.

¿Qué asegura convergencia en la matriz?

1. Aperiodicidad

Periodicidad…

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad \mathbf{T}^t = \begin{cases} \mathbf{T} & \textit{if } t \textit{ is odd} \\ \mathbf{I} & \textit{if } t \textit{ is even.} \end{cases}$$

- **DEF 2:** La matriz **T** es aperiódica si el máximo común divisor de sus ciclos simples es 1.

Proposición 1: Si **T** está **fuertemente conectada**, entonces lo siguiente es equivalente:

i. **T** es **convergente**

ii. **T** es **aperiódica**.

iii. Existe un eigenvector izquierdo único **s** de **T** correspondiente al eigenvalor 1 cuyas entradas suman 1, tal que para todo **p** ∈ $[0,1]^n$:

$$\left(\lim_{t\to\infty}\mathbf{T}^t\mathbf{p}\right)_i = \mathbf{sp}$$

Donde…

$$s_i = \sum_{j\in N} T_{ji}s_j$$

Notar que si $\lim_{t\to\infty}\mathbf{T}^t\mathbf{p} = \lim_{t\to\infty}\mathbf{T}^t(\mathbf{Tp})$, entonces

$$\mathbf{sp} = \mathbf{sTp}, \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{s} = \mathbf{sT}, \qquad \mathbf{p}\in[0,1]^n$$

IV. SABIDURÍA

- **DEF 3:** La secuencia $(\mathbf{T}(n))^{\infty}_{n=1}$ es **sabia** si:

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \max_{i\leq n} |p_i^{(\infty)}(n) - \mu| = 0.$$

- En términos de **influencia**…

Ordenamiento:

$$s_i(n) \geq s_{i+1}(n) \geq 0$$

- **LEMMA 1:** [*LGN*] Si $(\mathbf{s}(n))^{\infty}_{n=1}$ es una secuencia de vectores de influencia

$$\operatorname*{plim}_{n\to\infty} \mathbf{s}(n)\mathbf{p}^{(0)}(n) = \mu$$

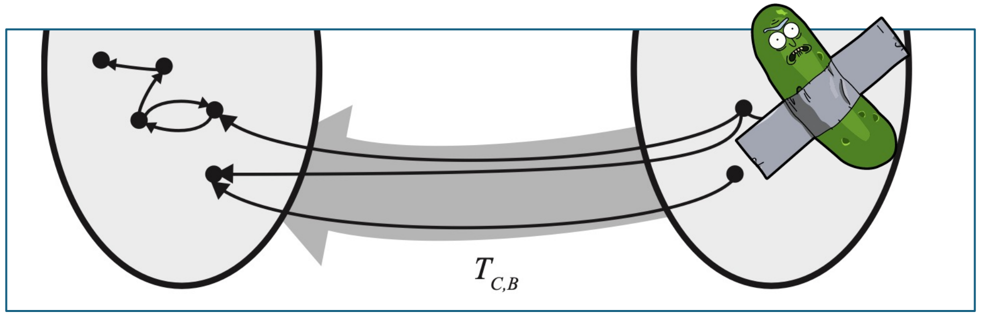
Si y solo si $s_1(n) \to 0$

IV. SABIDURÍA

En términos de **estructura social…**

- **Prominencia**

DEF 4: Un grupo B es **<u>prominente</u>** en t pasos con respecto a **T** si $(\mathbf{T}^t)_{i,B} > 0$ para cada $i \notin B$.



- **Uniformemente prominente** (límite α $\forall$ *n*)
- **Finito**

Proposición 3. Si existe un grupo uniformemente prominente y finito con respecto a **T**(n), entonces la sociedad <u>no es sabia</u>.

V. Condiciones estructurales para la sabiduría

Propiedad 1 (Balance) : Si existe una secuencia $j(n) \to \infty$ tal que $|B_n| \leq j(n)$ entonces:

$$\sup_n \frac{T_{B_n^c, B_n}(n)}{T_{B_n, B_n^c}(n)} < \infty.$$

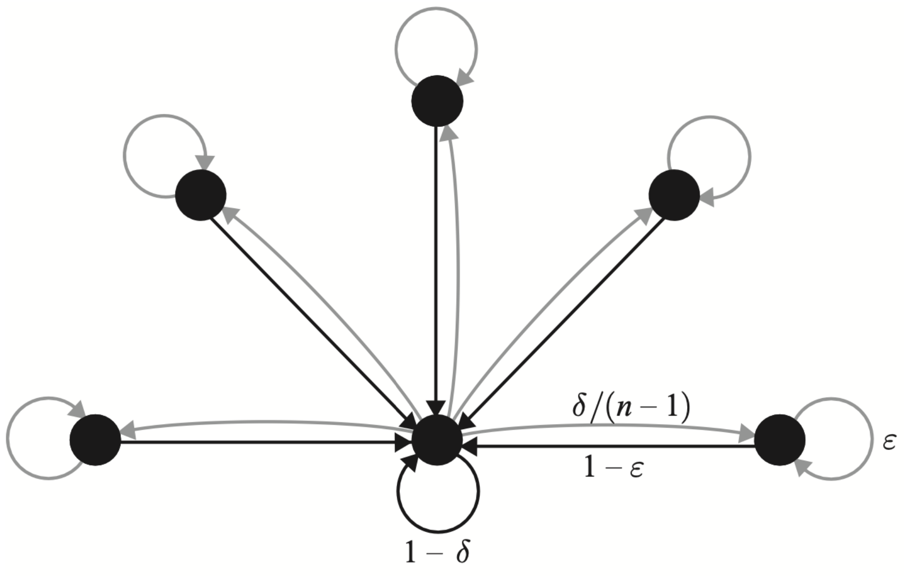


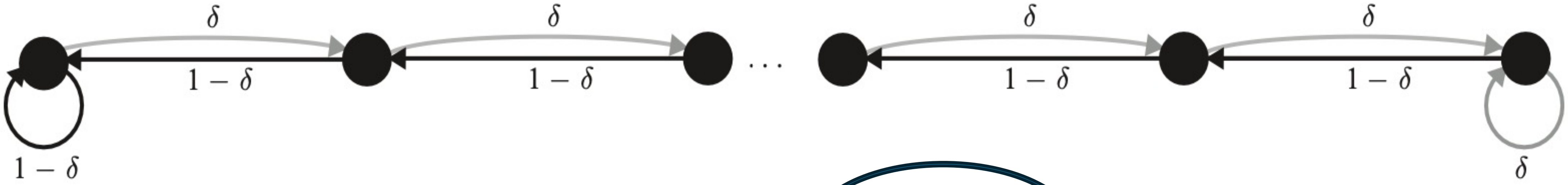
Figure 2

$$s_i(n) = \begin{cases} \dfrac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon+\delta} & \text{if } i = 1 \\ \dfrac{\delta}{(n-1)(1-\varepsilon+\delta)} & \text{if } i > 1 \end{cases}.$$

V. Condiciones estructurales para la sabiduría

Propiedad 2. Dispersión (externa) mínima: Existe una $q \in \mathbb{N}$ y $r > 0$ tal que si B_n es finito, $|B_n| \geq q$, y $|C_n|/n \to 1$, entonces $\mathbf{T}_{Bn,Cn}(n) > r$ para cualquier n suficientemente grande.

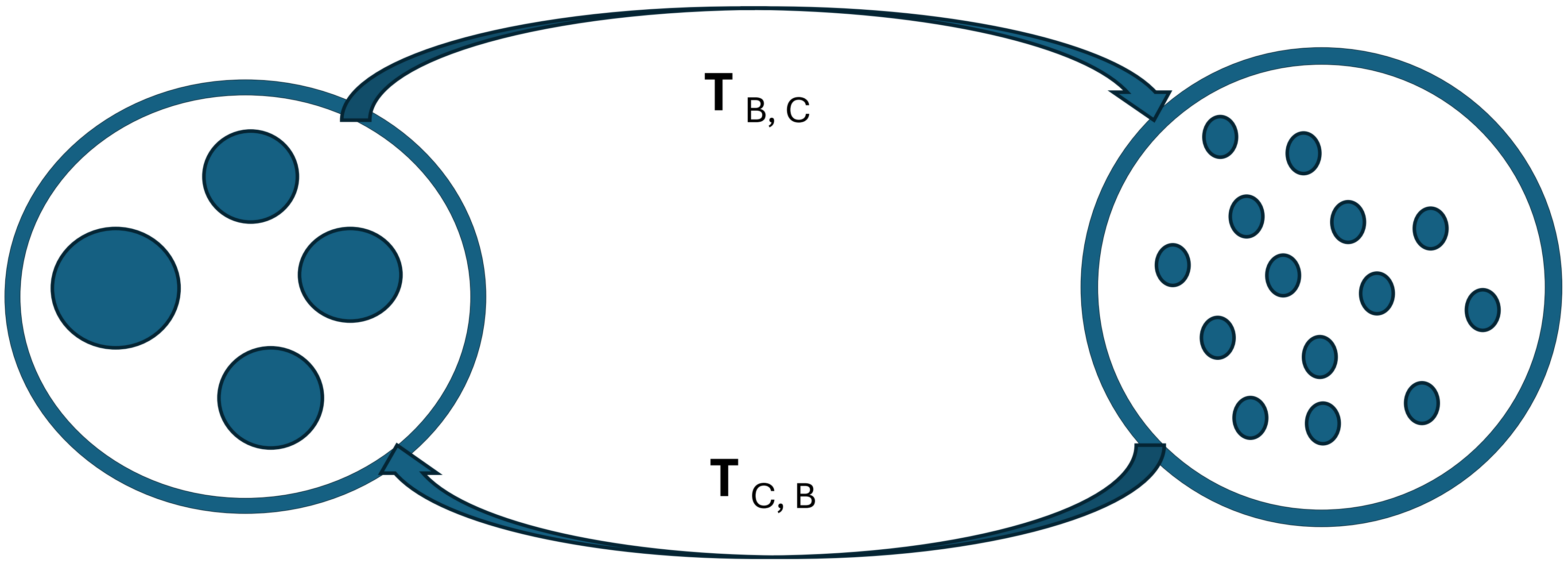
Ejemplo: $\delta \in (0,1/2)$



$$s_i(n) = \left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{i-1} \cdot \frac{1-\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)}{1-\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)^{n}}.$$

Teorema: Si $(\mathbf{T}(n))_{n=1}^{\infty}$ es una secuencia de matrices estocásticas que satisface balance y dispersión externa mínima entonces es **sabia**.

1. Ausencia de desbalances extremos entre pesos.
2. Ausencia de grupos que interactúen solo con una pequeña parte de la sociedad.



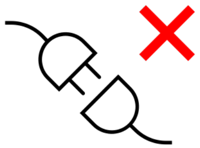
Conclusión

¿Pueden ser sociedades grandes con agentes naïve sabias en el agregado?

Sí, si…

✓ Ausencia de grupo que concentre la atención.

✓ Ausencia de grupos grandes insulares.




That's all folks!