15.10.2016
- curs 1 -
ID.

Ec. diferențiale

de ordin k, $k \in \mathbb{N}^*$

O ecuație diferențială este dată prin:

$$F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}) = 0 \qquad (1)$$

unde $F : \Delta \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{\text{de } (k+1) \text{ ori}} \to \mathbb{R}^n$

x = variabila independentă

y = variabila dependentă (y funcție de x)

Rezolvarea ec. (1) presupune determinarea variabilei dependente y:

$$y : \Delta_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

a.î. să verifice ec.:

$$F(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(k)}(x)) = 0, \quad \forall x \in \Delta_1 \qquad (2)$$

Adică, o funcție $\varphi : \Delta_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ este soluție a ec. (1) dacă:

$$F(x, \varphi(x), \varphi^{(1)}(x), \dots, \varphi^{(k)}(x)) = 0, \quad \forall x \in \Delta_1$$

Dacă ec. (1) se poate scrie sub forma:

$$y^{(k)} = f(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k-1)}) \qquad (3)$$

atunci spunem că avem forma explicită pt. ec. (1),

unde $f : \Delta \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{\text{de } k \text{ ori}} \to \mathbb{R}^n$

Dacă în (3) $f(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k-1)}) =$

$$= a_0(x) + \sum_{i=1}^{k} a_i(x) \cdot y^{(i-1)}, \qquad (4)$$

atunci ec. (3) este liniară.

Cazul particular $\underline{\underline{n=1}}$, $k=1$ $\Rightarrow$ (1): $F(x, y, y') = 0$

$F : \Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(3): $y' = f(x, y)$

$f : \Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

OBS: Dacă $n>1$, atunci ec. diferențială (1) este vectorială sau s.n. sistem de ecuații diferențiale

Pt. $n=1$ și $k=1$ avem de-a face cu ecuații diferențiale de ordinul întâi, scalare:

$$F(x,y,y')=0 \quad \text{(forma implicită)}$$

$$y'=f(x,y) \quad \text{(forma explicită)}$$

Cazuri particulare de ecuații dif $y'=f(x,y)$ integrabile prin cuadraturi

(1) $\boxed{y'=f(x)}$ – ec. de tip primitivă; $f: I\subset \mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\Downarrow$

mulț. soluțiilor ec. (1) este dată de:

$$\int f(x)\,dx = \text{mult. primitivelor funcției } f.$$

sau

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt, \quad \forall x\in I.$$

$x_0\in I$ fixat

$y_0\in\mathbb{R}$.

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$f(x)=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$	$\int \alpha\,dx=\alpha x+C$, C = mulț. funcțiilor constante
$f(x)=x^r$, $r\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\int x^r dx=\dfrac{x^{r+1}}{r+1}+C$
$f(x)=x^{-1}=\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$	$\int \dfrac{1}{x}dx=\ln\lvert x\rvert+C$
$f(x)=a^x$, $a\in(0,\infty)\setminus\{1\}$	$\int a^x dx=\dfrac{a^x}{\ln a}+C$
$f(x)=e^x$, $e\simeq 2{,}71\ldots$	$\int e^x dx=e^x+C$
$f(x)=\sin x$	$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

$f(x) = \cos x$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$f(x) = tg\, x$ $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\int tg\, x \, dx = -\ln \lvert \cos x \rvert + C$
$f(x) = ctg\, x$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$	$\int ctg\, x \, dx = \ln \lvert \sin x \rvert + C$
$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} =$ $= 1 + tg^2 x$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg\, x + C$ $\int (1 + tg^2 x) dx = tg\, x + C$
$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} =$ $= 1 + ctg^2 x$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int (1 + ctg^2 x) dx = -ctg\, x + C$
$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$	$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
$f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$	$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ $x \in (-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$	$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \ln \lvert x + \sqrt{x^2 - a^2} \rvert + C$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ $x \in (-a, a)$	$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$
$f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$	$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \ln (x^2 + a^2) + C$
$f(x) = \frac{x}{x^2 - a^2}$	$\int \frac{x}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} \ln \lvert x^2 - a^2 \rvert + C$
$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \sqrt{x^2 + a^2} + C$

$a \in \mathbb{R}_+^*$

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \sqrt{x^2-a^2}+C$
$f(x)=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2}+C$

Amintim ca metode de integrare:

- integrarea prin părți:

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

- prima schimbare de variabilă

$$\int \underbrace{f(\varphi(x))}_{(f\circ\varphi)(x)}\cdot\varphi'(x)\,dx = \underbrace{F(\varphi(x))}_{(F\circ\varphi)(x)}+C,$$

unde F este o primitivă pt f.

<u>OBS</u>: Dacă în tabelul de primitive de mai sus înlocuim x cu $\varphi(x)$, atunci obținem formulele pt funcții compuse.

De exemplu:

$$\boxed{\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C}$$

$$\int \frac{1}{\varphi(x)}\underbrace{d\varphi(x)}_{\substack{\shortparallel \\ \varphi'(x)dx}} = \ln|\varphi(x)|+C$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,dx = \ln|\varphi(x)|+C}$$

② <u>Ecuația cu variabile separabile</u>: $\boxed{y'=f(x)g(y)}$

unde $f: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g: J\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. funcții cel puțin continue.

Algoritm de rezolvare a ec. cu var. separabile.

- Se determină soluțiile staționare rezolvând ec. algebrică:

$$g(y)=0$$

Dacă ec. are soluții $y_1, \dots, y_p \in J$, atunci:

$$\varphi_1(x) = y_1, \; \vdots \; \varphi_p(x) = y_p, \quad \forall x \in I, \text{ sunt soluții staționare.}$$

- Pt $y \in J \setminus \{y_1, \dots, y_p\}$, separăm variabilele:

$$y' = f(x) g(y) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f(x) g(y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

Soluția implicită a ec. este: $\boxed{G(y) = F(x) + C, \; C \in \mathbb{R}}$

unde G este o primitivă pt $\frac{1}{g}$ și F este o primitivă pt f.

Dacă există funcția inversă G^{-1}, atunci avem soluția explicită: $\boxed{y = G^{-1}(F(x) + C), \; C \in \mathbb{R}}$.

Exemple: 1) Să se determine mulțimea soluțiilor ecuației:

$$y' = (x-1)\operatorname{ctg} y, \quad x \in \mathbb{R}, \; y \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Soluție: Ec. este cu variabile separabile, unde:

$f(x) = x - 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(y) = \operatorname{ctg} y$, $g : \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}}_{D} \to \mathbb{R}$.

- $g(y) = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ o infinitate de soluții staționare:

$$\varphi_k(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

- pt $y \in D \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ separăm variabilele:

$$\frac{dy}{dx} = (x-1)\operatorname{ctg} y \Rightarrow \frac{dy}{\operatorname{ctg} y} = (x-1) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{ctg\,y} = \int (x-1)\,dx$$

$$\int \frac{dy}{ctg\,y} = \int tg\,y\,dy = \underbrace{-\ln|\cos y|}_{G(y)} + C$$

$$\int (x-1)\,dx = \int x\,dx - \int 1\,dx = \underbrace{\frac{x^2}{2} - x}_{F(x)} + C$$

$\Rightarrow$ soluția generală implicită este:

$$\boxed{-\ln|\cos y| = \frac{x^2}{2} - x + C}$$

2) $y' = \dfrac{x(y^2+1)}{y(x^2+1)}$, $y \in R^*$, $x \in R$

$$y' = \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{f(x)} \cdot \underbrace{\frac{y^2+1}{y}}_{g(y)}$$

• $g(y)=0 \Rightarrow \dfrac{y^2+1}{y} = 0 \Rightarrow y^2+1=0 \Rightarrow y^2=-1$ fals!

$\Rightarrow$ ec. nu are soluții staționare $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ separăm variabilele.

$$\frac{dy}{\frac{y^2+1}{y}} = \frac{x}{x^2+1}\,dx.$$

$$\int \frac{y}{y^2+1}\,dy = \underbrace{\frac{1}{2}\ln(y^2+1)}_{G(y)} + C$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}\ln(x^2+1)}_{F(x)} + C$$

Soluția implicită: $\dfrac{1}{2}\ln(y^2+1) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1) + \dfrac{1}{2}\ln C$

$\Rightarrow \ln(y^2+1) = \ln((x^2+1)\cdot C) \Rightarrow y^2+1 = (x^2+1)C$, $C>0$.

$\Rightarrow y^2 = (x^2+1)C - 1$

$$\boxed{y(x) = \pm\sqrt{(x^2+1)C-1}\ ,\quad C>0}$$

(3) Ec. omogenă:
$$\boxed{\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ \text{cu } f \text{ funcție omogenă:} \\ f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y) \end{array}}$$

sau

$$\boxed{y' = g\left(\frac{y}{x}\right)}$$

Propoziția 1 Prin schimbarea de variabilă: $\frac{y}{x} = z$,

adică, $\frac{y(x)}{x} = z(x)$

$$\underset{\text{ec. omogenă}}{(x,y)} \longrightarrow (x,z)$$

se obține o ec. cu variabile separabile.

Dem: $y(x) = x z(x) \Rightarrow$ în ec. $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$

$$(x \cdot z)' = g\left(\frac{\cancel{x} z}{\cancel{x}}\right)$$

$$\underset{\overset{\parallel}{1}}{x'} z + x z' = g(z)$$

$$z + x z' = g(z)$$

$$x z' = g(z) - z \Rightarrow z' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{f_1(x)} \underbrace{(g(z)-z)}_{g_1(z)} \Rightarrow z' = f_1(x) g_1(z).$$

ec cu var. sep.

Exemplu: Se cere mulț. sol. ec:

$$x y' = x + y \quad , x > 0.$$

Soluția:

$$y' = \underbrace{\frac{x+y}{x}}_{f(x,y)}$$

Verificăm că funcția f este omogenă:

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{\alpha x + \alpha y}{\alpha x} = \frac{\cancel{\alpha}(x+y)}{\cancel{\alpha} x} = f(x,y)$$

$\Rightarrow f$ omogenă $\Rightarrow$ ec. $y' = \frac{x+y}{x}$ este omogenă

Efectuăm s.v. $y = xz \rightarrow (xz)' = \frac{x + xz}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow z + xz' = \frac{\cancel{x}(1+z)}{\cancel{x}} \Rightarrow \cancel{z} + xz' = 1 + \cancel{z} \Rightarrow$

$\Rightarrow z' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{f_1(x)} \cdot \underbrace{1}_{g_1(z)}$

Cum $g_1(z) = 1 \Rightarrow$ ec. cu variabile separabile devine ec. de tip primitivă:

$\Rightarrow z = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \underset{x>0}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \boxed{z(x) = \ln x + C, \ C \in \mathbb{R}}$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{\text{ec. omog}}{(x, y)} \xrightarrow{y = xz} \underset{\text{ec. cu var. sep}}{(x, z)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{y(x) = x \cdot (\ln x + C), \ C \in \mathbb{R}}$

4. Ec de tipul:

$$\boxed{y' = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)}$$

unde a şi a_1 nu sunt zero simultan $\Leftrightarrow |a| + |a_1| > 0$

b şi b_1 — " — $\Leftrightarrow |b| + |b_1| > 0$

c şi c_1 — " — $\Leftrightarrow |c| + |c_1| > 0$

OBS:

- Dacă $a = a_1 = 0 \Rightarrow y' = \underbrace{f\left(\frac{by+c}{b_1y+c_1}\right)}_{g_1(y)} \cdot \underbrace{1}_{f_1(x)} \rightarrow$ ec. cu var. separ.
- Dacă $b = b_1 = 0 \Rightarrow y' = \underbrace{f\left(\frac{ax+c}{a_1x+c_1}\right)}_{f_1(x)} \Rightarrow$ ec. de tip primitivă
- Dacă $c = c_1 = 0 \Rightarrow y' = f\left(\frac{ax+by}{a_1x+b_1y}\right)$ ec. omogenă.

Propoziția 2.

Fie ec: $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ cu $|a|+|a_1|>0$ $(a^2+a_1^2\neq 0)$ $|b|+|b_1|>0$ $|c|+|c_1|>0$.

Fie $\Delta = ab_1 - ba_1$.

1) Dacă $\Delta = 0$, atunci prin s.v. $ax+by=z$ când $b\neq 0$ sau $a_1x+b_1y=z$ când $b_1\neq 0$ se obține o ec. cu variabile separabile.

2) Dacă $\Delta\neq 0$, atunci prin s.v.: $\begin{cases} u = x - x_0 \\ v = y - y_0 \end{cases}$,

unde (x_0, y_0) este soluția sistemului algebric:
$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$,

se obține o ec. omogenă.

Demonstrație:

1) $\Delta = 0$

Presupunem că $b\neq 0$. $\Rightarrow$ s.v este $ax+by=z$

$ax+by(x) = z(x)$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{z-ax}{b}$$

$$y(x) = \frac{z(x)-ax}{b}.$$

Ec. devine:

$$\left(\frac{z-ax}{b}\right)' = f\left(\frac{ax+\cancel{b}\cdot\frac{z-ax}{\cancel{b}}+c}{a_1x+b_1\cdot\frac{z-ax}{b}+c_1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b}(z'-a) = f\left(\frac{\cancel{ax}+z-\cancel{ax}+c}{\frac{(ba_1-b_1a)x+b_1z+bc_1}{b}}\right)\Bigg|\cdot b$$

$$\Rightarrow z'-a = bf\left(\frac{(z+c)b}{b_1z+bc_1}\right) \Rightarrow z' = \underbrace{bf\left(\frac{(z+c)b}{b_1z+bc_1}\right)+a}_{f_1(z)}\ \underbrace{1}_{g_1(x)}$$

2) $\Delta \neq 0$.

(x_0, y_0) verifică: $\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0 \\ a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0 \end{cases}$

$$\underbrace{(x,y)}_{y=y(x)} \xrightarrow[\begin{cases} x = u + x_0 \\ y = v + y_0 \end{cases}]{} (u,v) \quad v = v(u)$$

$$y(x) = v(u(x)) + y_0.$$

unde $u(x) = x - x_0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1$

Ec. devine:

$$\frac{d(v(u(x)) + y_0)}{dx} = f\left(\frac{a(u+x_0) + b(v+y_0) + c}{a_1(u+x_0) + b_1(v+y_0) + c_1}\right)$$

$$\frac{dv}{du} \cdot \underbrace{\frac{du}{dx}}_{=1} = f\left(\frac{au + \cancel{ax_0} + bv + \cancel{by_0 + c}}{a_1u + \cancel{a_1x_0} + b_1v + \cancel{b_1y_0 + c_1}}\right)$$

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{a_1u + b_1v}\right) \text{ ec. omogenă.}$$

Exemplu: Se cere mulț. sol. ec: $y' = \frac{y - 2x + 3}{x - y - 1}$

Soluția: $y' = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}$; $a = -2$, $b = 1$, $c = 3$

$a_1 = 1$, $b_1 = -1$, $c_1 = -1$

$\Delta = ab_1 - ba_1 = (-2)(-1) - 1 \cdot 1 = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rezolvăm sistemul: $\begin{cases} -2x_0 + y_0 + 3 = 0 \\ x_0 - y_0 - 1 = 0 \end{cases}$ (+)

$-x_0 \quad / \quad +2 = 0 \Rightarrow x_0 = 2$

$-4 + y_0 + 3 = 0$.

$\boxed{y_0 = 1}$

S.v. este: $\begin{cases} u = x - 2 \\ v = y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + u \\ y = v + 1 \end{cases}$

$$(x,y) \xrightarrow{\qquad\qquad} (u,v) \xrightarrow[v(u)=u\cdot w(u)]{} (u,w)$$

$$x = u+2$$
$$y = v+1$$
$$y(x) = v(u(x))+1$$

Avem:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(v(u(x))+1\right) = \frac{dv}{du}\cdot\underbrace{\frac{du(x)}{dx}}_{1} = \frac{dv}{du} \Rightarrow$$

pt că $u(x)=x-2$.

$$\Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{v+\cancel{1}-2u-\cancel{4}+\cancel{3}}{u+\cancel{2}-v-\cancel{1}-1} \Rightarrow \frac{dv}{du} = \frac{v-2u}{u-v} \text{ ec. omogenă}$$

în care ef. s.v.: $\frac{v}{u} = w \Rightarrow$

$$\Rightarrow (uw)' = \frac{uw-2u}{u-uw} \Rightarrow w+u\,w' = \frac{\cancel{u}(w-2)}{\cancel{u}(1-w)}$$

$$\Rightarrow uw' = \frac{w-2}{1-w} - w$$

$$w' = \frac{1}{u}\left(\frac{\cancel{w}-2-\cancel{w}+w^2}{1-w}\right) \Rightarrow w' = \underbrace{\frac{1}{u}}_{f_1(u)}\cdot\underbrace{\frac{w^2-2}{1-w}}_{g_1(w)}$$

- $g_1(w)=0 \Rightarrow w^2-2=0 \Rightarrow w^2=2 \Rightarrow w=\pm\sqrt{2}$

$$w_1(u)=\sqrt{2} \Rightarrow v_1(u) = u\cdot w_1(u) = u\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1(x) = v_1(u(x))+1 = v_1(x-2)+1 \Rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{y_1(x) = (x-2)\sqrt{2}+1}$$

$$w_2(u) = -\sqrt{2} \Rightarrow \dots \Rightarrow y_2(x) = -(x-2)\sqrt{2}+1$$

- $g_1(w)\neq 0 \Rightarrow w^2 \neq 2 \Rightarrow$ sep variabilele: $\frac{dw}{du} = \frac{1}{u}\cdot\frac{w^2-2}{1-w}$

$$\Rightarrow \frac{1-w}{w^2-2}\,dw = \frac{1}{u}\,du \Rightarrow \int\frac{1-w}{w^2-2}\,dw = \int\frac{1}{u}\,du$$

Avem: $\displaystyle\int \frac{1-w}{w^2-2}\,dw = \int \frac{1}{w^2-2}\,dw - \int \frac{w}{w^2-2}\,dw =$

$$= \int \frac{1}{w^2-(\sqrt{2})^2}\,dw - \frac{1}{2}\ln|w^2-2| =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{w-\sqrt{2}}{w+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{2}\ln|w^2-2|}_{G_1(w)} + C$$

$$\int \frac{1}{u}\,du = \underbrace{\ln|u|}_{F_1(u)} + C$$

Sol. implicită a ec. în (u,w) este:

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{w-\sqrt{2}}{w+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{2}\ln|w^2-2| = \ln|u| + C,\quad C\in\mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ Sol. implicită a ec. în (u,v) este:

$w=\frac{v}{u}$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\frac{v}{u}-\sqrt{2}}{\frac{v}{u}+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v^2}{u^2}-2\right| = \ln|u| + C \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sol. implicită a ec în (x,y)

$u=x-2$
$v=y-1$

$$\underbrace{\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\frac{y-1}{x-2}-\sqrt{2}}{\frac{y-1}{x-2}+\sqrt{2}}\right| - \frac{1}{2}\ln\left|\frac{(y-1)^2}{(x-2)^2}-2\right| = \ln|x-2| + C}_{C\in\mathbb{R}}.$$

5 Ecuația liniară de ordinul întâi

$$\boxed{y' = a(x)y + b(x)}$$

unde $a, b : I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sunt funcții cel puțin continue.

Cazul omogen: $b(x)=0,\ \forall x\in I \Rightarrow \boxed{y' = a(x)\cdot y}$

ec. cu var. sep.

Propoziția 3: Soluția generală a ecuației liniare omogene de ordinul întâi este: $\boxed{y(x) = C\cdot e^{A(x)}}$

unde A este o primitivă pt. a.

Dem:

$$y' = \underbrace{a(x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{y}_{g(y)}$$

- $g(y)=0 \Rightarrow$ sol. staționară $y=0$
- $y \neq 0 \Rightarrow$ sep. variabilele: $\frac{dy}{y} = a(x)\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int a(x)\,dx$

$\ln|y| = A(x) + c \Rightarrow |y| = e^{A(x)+c} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \pm e^{A(x)} \cdot e^{c}$

notăm $\pm e^{c} = c_1 \in \mathbb{R}^*$ $\Big\} \Rightarrow$ $y = c_1 e^{A(x)}$, $c_1 \in \mathbb{R}^*$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow y = c_1 e^{A(x)}$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

Cazul neomogen: $\boxed{y' = a(x)y + b(x)}$ (4)

Met. I: Propoziția 4: Dacă $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ este soluție a ec. liniare neomogene (4), atunci prin schimbarea de variabile:

$$\boxed{y = z + \varphi_0}$$

se obține o ec. liniară omogenă.

Dem: φ_0 soluție $\Rightarrow \varphi_0'(x) = a(x)\cdot\varphi_0(x) + b(x)$ $\forall x \in I$.

$$(x,y) \xrightarrow[y = z+\varphi_0]{} (x,z)$$

Ec. (4) devine: $(z+\varphi_0(x))' = a(x)\cdot(z+\varphi_0(x)) + b(x)$

$z' + \cancel{\varphi_0'(x)} = a(x)z + \cancel{a(x)\varphi_0(x) + b(x)}$

$\Rightarrow \underline{z' = a(x)z} \Rightarrow z(x) = Ce^{A(x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow y(x) = Ce^{A(x)} + \varphi_0(x)$; A = prim. a lui a.

Met. II (metoda variației constantelor)

- se rezolvă ec. liniară omogenă atașată:

$$\bar{y}' = a(x)\,\bar{y} \underset{prop\,3}{\Longrightarrow} \bar{y}(x) = C \cdot e^{A(x)}$$

cu A prim. pt. a

- se aplică metoda variației constantelor, adică: se determină o funcție $C : I \to \mathbb{R}$ a.î. $y(x) = C(x)e^{A(x)}$ să fie soluție a ec. liniare neomogene (4) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(C(x)\,e^{A(x)}\right)' = a(x)\cdot C(x)e^{A(x)} + b(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x)\cdot e^{A(x)} + \cancel{C(x)\cdot e^{A(x)}\cdot \underbrace{A'(x)}_{a(x)}} = \cancel{a(x)\cdot C(x)e^{A(x)}} + b(x)$$

$$\Rightarrow C'(x)e^{A(x)} = b(x) \quad \Big|\cdot e^{-A(x)} \Rightarrow \underline{C'(x) = b(x)\cdot e^{-A(x)}}$$

$$\Rightarrow C' = \underbrace{b(x)e^{-A(x)}}_{f(x)}$$, ec. de tip primitivă pt. determinarea lui C. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow C(x) = \int b(x)e^{-A(x)}dx + K, \quad K \in \mathbb{R}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = \left(\int b(x)e^{-A(x)}dx + K\right)e^{A(x)}, \quad K \in \mathbb{R}}$$

⑥ Ec. Bernoulli: $$\boxed{\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)\cdot y^{\alpha}} \quad (5)$$

unde $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

OBS: $\alpha = 0 \Rightarrow$ ec. (5) se reduce la ec. (4) (liniară neomogenă)

$\alpha = 1 \Rightarrow$ ec. (5) se reduce la ec. (4) omogenă.

Met. I: cu variația constantelor:

- rez. întâi ec. liniară omogenă atașată: $\bar{y}' = a(x)\bar{y} \Rightarrow$

(prop. 3) $\Rightarrow$ $\bar{y}(x) = C e^{A(x)}$, $C \in \mathbb{R}$
A prim. pt. a.

· aplicăm variația constantelor: det. $C: I \to \mathbb{R}$ a.î.
$\underbrace{y(x) = C(x)\, e^{A(x)}}$ sol. a ec. (5) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(C(x) e^{A(x)}\right)' = a(x)\, C(x)\, e^{A(x)} + b(x)\left(C(x)\, e^{A(x)}\right)^{\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow C'(x) e^{A(x)} + \cancel{C(x) e^{A(x)} \cdot \underbrace{A'(x)}_{a(x)}} = \cancel{a(x)\, C(x)\, e^{A(x)}} +$
$+ b(x)\left(C(x)\right)^{\alpha} e^{\alpha A(x)}$

$\to C'(x)\, e^{A(x)} = b(x) \cdot \left(C(x)\right)^{\alpha} \cdot e^{\alpha A(x)} \quad \Big| \cdot e^{-A(x)}$

$\Rightarrow \quad C' = \underbrace{b(x) \cdot e^{(\alpha-1)A(x)}}_{f_1(x)} \cdot \underbrace{C^{\alpha}}_{g_1(C)}$ ec. cu var. sep.

Obs.: Dacă $\alpha > 0$, atunci ec. în C are soluția staționară $C = 0 \Rightarrow y(x) = 0$.

Met. II: Reducerea ec. (5) la o ecuație liniară neomogenă.

Prop. 5: Prin s.v. $z = y^{1-\alpha}$, adică $z(x) = \left(y(x)\right)^{1-\alpha}$, ec. (5) devine ec. liniară neomogenă. (Bernoulli)

Dem: $z = y^{1-\alpha} \Leftrightarrow y = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \overset{(5)}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow \left(z^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)' = a(x) \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(x) \cdot \left(z^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha} \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1-\alpha}{1}} \cdot z' = a(x) \cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(x) \cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \Big| \cdot (1-\alpha)$

$\Rightarrow \underbrace{z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \cdot z' = a(x)\, z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(x) \cdot \underbrace{z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}} \quad \Big| \cdot z^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad z' = a(x)\, z + b(x)$, ec. liniară neomogenă.

Ecuatia Riccati: $\boxed{y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)}$ (6)

unde $a, b, c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcții continue.

OBS: 1) $a(x) \equiv 0 \Rightarrow$ ec. liniară neomogenă

2) $c(x) \equiv 0 \Rightarrow$ ec. Bernoulli cu $\alpha = 2$.

3) a, b, c funcții constante : $\left.\begin{array}{l} a(x) \equiv a \\ b(x) \equiv b \\ c(x) \equiv c \end{array}\right\}$ = const

$\Rightarrow y' = \underbrace{(ay^2 + by + c)}_{g(y)} \cdot \underbrace{1}_{f(x)}$ ec. cu var. sep.

Prop. 6: Dacă $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ este soluție a ec. Riccati (6) atunci prin s.v. $z = y - \varphi_0$ ec. se transformă într-o ecuație Bernoulli cu $\alpha = 2$.

Dem: $y(x) = z(x) + \varphi_0(x)$

φ_0 soluție pt. ec (6) $\Rightarrow \varphi_0$ verifică (6) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_0'(x) = a(x) \cdot \varphi_0^2(x) + b(x) \cdot \varphi_0(x) + c(x)$

Prin s.v. $y = z + \varphi_0$ ec. (6) devine:

$(z + \varphi_0(x))' = a(x)(z + \varphi_0(x))^2 + b(x)(z + \varphi_0(x)) + c(x)$

$\Rightarrow z' + \cancel{\varphi_0'(x)} = a(x) \cdot z^2 + 2a(x) \cdot \varphi_0(x) z + \cancel{\varphi_0^2(x) a(x)} + b(x) \cdot z + \cancel{b(x) \cdot \varphi_0(x)} + \cancel{c(x)} \Rightarrow$

$\Rightarrow z' = \underbrace{[2a(x)\varphi_0(x) + b(x)]}_{a_1(x)} z + \underbrace{a(x)}_{b_1(x)} \cdot z^2 \Rightarrow$ ec. Bernoulli cu $\alpha = 2$.

Exemplu: Se cere mulț. soluțiilor ec:

$$y' = y^2 - x^2 + 1$$

știind că admite soluție de forma $\varphi_0(x) = mx + n$, cu $m, n \in \mathbb{R}$ convenabil determinate.

Soluție:

· det. $m, n \in \mathbb{R}$ ai $\varphi_0(x) = mx+n$ să fie soluție:

$$(mx+n)' = (mx+n)^2 - x^2 + 1$$

$$m = m^2x^2 + 2mnx + n^2 - x^2 + 1$$

$$m = x^2(m^2-1) + 2mnx + (n^2+1)$$

identificăm coef. puterilor lui x $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = m^2 - 1 \\ 0 = 2mn \Rightarrow mn = 0 \Rightarrow m = 0 \text{ sau } n = 0 \\ m = n^2 + 1 \end{cases}$$

$m=0 \Rightarrow 0 = -1$ fals.

$\boxed{n=0} \Rightarrow \boxed{m=1}$ verifică ec $0 = m^2 - 1$

$\longrightarrow \boxed{\varphi_0(x) = x}$

· efectuăm s.v: $\boxed{z = y - \underbrace{x}_{\varphi_0(x)}}$ $\Rightarrow$ ec. devine:

$$(z+x)' = (z+x)^2 - x^2 + 1$$

$$z' + \cancel{1} = z^2 + 2xz + \cancel{x^2} - \cancel{x^2} + \cancel{1} \Rightarrow z' = \underbrace{2x}_{a(x)} \cdot z + \underbrace{1}_{b(x)} \cdot z^2$$

ec. Bernoulli

$(x, y) \xrightarrow{y = z+x} (x, z)$

· ec. omog. atașată:

$$\bar{z}' = 2x\bar{z}$$

$$\bar{z}(x) = c \cdot e^{\int 2x\,dx} = c e^{x^2}$$

· aplicăm variația constantelor: det $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ai $z(x) = c(x) e^{x^2}$ sol. a ec. Bernoulli

$$\Rightarrow \left(c(x) \cdot e^{x^2}\right)' = 2x \cdot c(x) \cdot e^{x^2} + c^2(x) \cdot e^{2x^2}$$

$$\Rightarrow c'(x) \cdot e^{x^2} + \cancel{c(x) \cdot e^{x^2} \cdot \underbrace{(x^2)'}_{2x}} = \cancel{2x\, c(x) e^{x^2}} + c^2(x) e^{2x^2}$$

$$\Rightarrow c' \cdot e^{x^2} = c^2 e^{2x^2} \Big/ \cdot e^{-x^2} \Rightarrow c' = c^2 \cdot e^{x^2}$$

ec. cu var. separabile

· sol. staționare:

$$c^2 = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow z(x) = 0 \Rightarrow y(x) = x = \varphi_0(x).$$

.. pt $c \neq 0 \Rightarrow$ (separăm variabilele) $\dfrac{dc}{c^2} = e^{x^2}dx$

$$\int \frac{dc}{c^2} = \int e^{x^2}dx + K$$

$$\frac{c^{-1}}{-1} = \int e^{x^2}dx + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{c} = \int e^{x^2}dx + K \Rightarrow c(x) = -\frac{1}{\int e^{x^2}dx + K} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x) = -\frac{e^{x^2}}{\int e^{x^2}dx + K} \Rightarrow y(x) = -\frac{e^{x^2}}{\int e^{x^2}dx + K} + x$$

$K \in \mathbb{R}$.

- ec. implicite de ordin 1 ✓
- sisteme ; sisteme liniare ✓ √
- ec. de ordin n ; liniare
- ec. cu deriv. parțiale de ordin 1
- formă canonică pt ec. cu derivate parțiale de ordin 2.