

UNIVERSITATEA DIN BUCUREŞTI
FACULTATEA DE MATEMATICA

Asist. dr. V. PREDA

Asist. dr. M. BAD

CULEGERE DE PROBLEME
DE
CERCETĂRI OPERATIONALE

— PARTEA I —

BUCUREŞTI
— 1978 —

UNIVERSITATEA DIN BUCURESTI
FACULTATEA DE MATEMATICA

Asist.Dr.V.PREDA

Asist.Dr.M.BAD

CULEGERE DE PROBLEME
DE CERCETARI OPERATIONALE

- Partea I -

1978

Badarauina

INTRODUCERE

Culegerea se adresează studenților din anul IV Matematică și anul III Informatică de la Facultatea de Matematică, ca și specialiștilor din producție ce urmează cursurile Post Universitare. Ea urmărește structura cursului de cercetări operaționale predat în facultate, tratînd problema programării matematice.

Lucrarea este prezentată în două părți: prima cuprinzînd programare liniară și proprietăți ale mulțimilor și funcțiilor convexe, iar a doua parte (care va apărea în 1979) probleme de programare neli- niară - algoritmi. Fiecare capitol cuprinde o prezentare teoretică a metodelor respective, după care urmează probleme rezolvate ce ilustrează toate cazurile prezentate teoretic. Se propun, de asemenea, probleme spre rezolvare.

Autorii vor fi îndatorați specialiștilor care vor face sugestii pentru o prezentare a materialului și mai legată de problemele practice.

Autorii

C U P R I N S

I. PROGRAMARE LINIARA

1. Algoritmul simplex primal	7
2. Algoritmul simplex dual	36
3. Algoritmul simplex revizuit	50
4. Reoptimizări	55
5. Parametrizări	66
6. Probleme de transport	77
7. Programare în numere întregi.	89

II. CONVEXITATE

1. Preliminarii.	117
2. Multimi convexe (în R^n)	121
3. Sisteme de inecuații (în R^n).	129
4. Funcții convexe și generalizat convexe.	138

I. PROGRAMARE LINEARA

1. ALGORITMUL SIMPLEX PRIMAL

1.1. Cazul cînd disponem de o bază primal admisibilă Descrierea algoritmului

Fie problema de programare lineară în forma standard

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\max(\min) c'x$$

cu A matrice $(m \times n)$ de rang m , $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Presupunem că există o bază B primal admisibilă, adică $B^{-1}b \geq 0$.

(1) Se formează tabelul simplex în care se trec:

(a) \bar{x}^B soluția sistemului în care am făcut $x^S = 0$

$$(b) \bar{z}^B = c_B' \bar{x}^B = \sum_{i \in \mathcal{B}} c_i \bar{x}_i^B$$

(c) $y_j^B = B^{-1}a_j^T$, $j \in \mathcal{B} \cup \mathcal{N}$. Cind $B = I$, y_{ij}^B sunt chiar coe-
ficienții din sistem.

$$(d) \begin{cases} z_j^B - c_j = \sum_{i \in \mathcal{B}} c_i y_{ij}^B - c_j & , j \in \mathcal{N} \\ z_j^B - c_j = 0 & , j \in \mathcal{B} \end{cases}$$

(2) Se aplică testul de optimalitate:

Dacă $z_j^B - c_j \geq (\leq) 0$ $\forall j$, atunci problema are un optim finit. Soluția este $(\bar{x}^B, 0)$, iar valoarea optimă a funcției obiectiv este \bar{z}^B .

In caz contrar se continuă algoritmul.

(3) Se aplică testul pentru infinitudinea soluției:

Dacă există j pentru care $z_j^B - c_j < (>) 0$ și $y_{ij} \leq 0$ oricare ar fi $i \in \mathcal{B}$, atunci problema are optim infinit.

In caz contrar se continuă algoritmul.

(4) Se aplică criteriul de imbunătățire a soluției.

Dacă există (i, j) încit $z_j^B - c_j < (>) 0$, $y_{ij} > 0$, atunci soluția se imbunătățește astfel:

Criteriul de intrare în bază

Întră în bază a_k^k , cu k stabilit încit:

$$z_k^B - c_k = \min_j (\max_j (z_j^B - c_j))$$

Criteriul de ieșire din bază

Iese din bază a_ℓ^ℓ , cu ℓ stabilit încit:

$$\frac{\bar{x}_\ell^B}{y_{\ell k}^B} = \min_{\substack{i \in \mathcal{B} \\ y_{ik} > 0}} \frac{\bar{x}_i^B}{y_{ik}^B}$$

Transformarea tabelului

$$\text{linia } k: \quad \tilde{x}_k^B = \frac{\bar{x}_\ell^B}{y_{\ell k}^B}, \quad \tilde{y}_{kj}^B = \frac{y_{\ell j}^B}{y_{\ell k}^B}, \quad \tilde{y}_k^B = \frac{1}{y_{\ell k}^B}$$

$$\text{linia } i, i \neq k: \quad \tilde{x}_i^B = \bar{x}_i^B - \frac{\bar{x}_\ell^B}{y_{\ell k}^B} \frac{y_{ik}^B}{y_{\ell k}^B}$$

$$\tilde{y}_{ij}^B = y_{ij}^B - \frac{y_{\ell j}^B}{y_{\ell k}^B} \frac{y_{ik}^B}{y_{\ell k}^B}, \quad j \neq \ell$$

$$\tilde{y}_{i\ell}^B = y_{i\ell}^B - \frac{y_{\ell \ell}^B}{y_{\ell k}^B} \frac{y_{ik}^B}{y_{\ell k}^B}$$

$$\tilde{z}^B = \bar{z}^B - (z_k^B - c_k) \frac{\bar{x}_\ell^B}{y_{\ell k}^B}$$

$$\tilde{z}_j^B - c_j = (z_j^B - c_j) - (z_k^B - c_k) \frac{y_{\ell j}^B}{y_{\ell k}^B}$$

Se reiau etapele algoritmului.

1) Să se rezolve:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$$

$$x_1 - x_2 \leq 5$$

$$x_1 + 2x_3 \leq 6$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,3$$

$$\max (3x_1 + 4x_2 + x_3)$$

Solutie:

Se aduce problema la forma standard prin introducerea variabilelor ecarte

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10$$

$$x_1 - x_2 + x_5 = 5$$

$$x_1 + 2x_3 + x_6 = 6$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,6$$

$$\max (3x_1 + 4x_2 + x_3)$$

Dispunem de o bază unitară, $\mathcal{B} = \{4, 5, 6\}$, $\mathcal{Y} = \{1, 2, 3\}$,

$B = (a^4, a^5, a^6)$, $B^{-1}b = (10, 5, 6)' > 0$. Baza este primală admisibilă, deci trecem la aplicarea algoritmului simplex.

c_B	x^B	\bar{x}^B	3	4	1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
-10	x_4	10	1	2	3	1	0	0
0	x_5	5	1	-1	0	0	1	0
0	x_6	6	1	0	2	0	0	1
		0	-3	-4	-1	0	0	0

$z_i - c_j < 0 \quad j = 1, 2, 3$, deci soluția nu este optimă. Pentru orice $j = 1, 2, 3$ găsim $y_{ij} > 0$, deci trecem la îmbunătățirea soluției.

Intră în bază a^2 pentru că

$$\min_{j=1,2,3} (z_j^B - c_j) = \min (-3, -4, -1) = z_2^B - c_2$$

Ieșe din bază a^4 căci singurul $y_{i2} > 0$ este $y_{42} = 2$.

Transformăm tabelul simplex

10

c_B	x^B	\bar{x}^B	3	4	1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_2	5	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
0	x_5	10	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
$\leftarrow 0$	x_6	6	1	0	2	0	0	1
			20	-1	0	5	2	0
							0	0

Soluția nu este încă optimă, căci $z_1^B - c_1 < 0$. Deasemenea, soluția nu conduce la concluzia că problema ar avea optim infinit.

Facem o nouă iterație simplex.

Intră în bază a^1 , căci $z_1^B - c_1$ este singurul mai mic ca zero.

Iesa din bază a^6 , căci

$$\min_{i \in \{2,5,6\}} \frac{\bar{x}_i^B}{y_{i1}} = \min(10, \frac{20}{3}, 6) = \frac{\bar{x}_6^B}{y_{61}}$$

Transformăm tabelul simplex

c_B	x^B	\bar{x}^B	3	4	1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
4	x_2	2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
0	x_5	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$
3	x_1	6	1	0	2	0	0	1
			26	0	0	7	2	0
							0	1

Pentru noua soluție $z_j^B - c_j \geq 0$ oricare ar fi j , deci soluția optimă este $(6, 2, 0, 0, 1, 0)$, iar $z_{\text{optim}} = 26$.

2) Să se rezolve problema:

$$x_1 + \frac{14}{3}x_4 + \frac{1}{3}x_5 - \frac{1}{3}x_6 = \frac{7}{3}$$

$$x_2 + 16x_4 + \frac{1}{2}x_5 - 2x_6 = 5$$

$$x_3 + 3x_4 = 0$$

$$x_1 \geq 0 \quad 1 = \frac{1}{1,6}$$

$$\min(-10x_4 - x_5 - 2x_6)$$

Soluție:

$B = (a^1, a^2, a^3)$ este o bază unitară primal admisibilă, căci
 $B^{-1}b = \left(\frac{7}{3}, 5, 0\right) \geq 0$. Trecem deci la aplicarea algoritmului simplex.

c_B	x^B	\bar{x}^B	0	0	0	-107	-1	-2
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_1	$\frac{7}{3}$	1	0	0	$\frac{14}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
0	x_2	5	0	1	0	16	$\frac{1}{2}$	-2
0	x_3	0	0	0	1	3	0	0
			0	0	0	0	107	1
								2

Soluția nu este optimă, căci $z_j^B - c_j > 0$ $j = 4, 5, 6$.

Problema are optim infinit, căci $z_6^B - c_6 < 0$ și $y_{i6} \leq 0$ oricare ar fi $i \in \mathcal{B}$.

3) Să se rezolve problema

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 16$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 6$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3$$

$$\min(|14x_1 - 3x_2| - 3x_1 + 2x_2 - 4x_3)$$

Soluție:

Funcția obiectiv nu este lineară, dar problema se aduce ușor la forma unei probleme de programare lineară:

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 16$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 6$$

$$4x_1 - 3x_2 - x_4 \leq 0$$

$$-4x_1 + 3x_2 - x_4 \leq 0$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 4$$

$$\min (-3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4)$$

Forma standard a problemei este

$$\begin{aligned}
 3x_1 + 4x_2 + x_3 &+ x_5 = 16 \\
 2x_1 + x_2 + x_3 &+ x_6 = 10 \\
 x_1 + x_2 - 2x_3 &+ x_7 = 6 \\
 4x_1 - 3x_2 - x_4 &+ x_8 = 0 \\
 -4x_1 + 3x_2 - x_4 &+ x_9 = 0 \\
 x_1 \geq 0, \quad i = 1, 9
 \end{aligned}$$

$$\min (-3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4)$$

$B = (a^5, a^6, a^7, a^8, a^9)$ este o bază unitară primală admisibilă, căci
 $B^{-1}b = (16, 10, 6, 0, 0) \geq 0$. Trecem la aplicarea algoritmului simplex.

c_B	x^B	\bar{x}^B	0								
			-3	2	-4	1	0	0	0	0	0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		
0	x_5	16	3	4	1	0	1	0	0	0	0
$\leftarrow 0$	x_6	10	2	1	(1)	0	0	1	0	0	0
0	x_7	6	1	1	-2	0	0	0	1	0	0
0	x_8	0	4	-3	0	-1	0	0	0	1	0
0	x_9	0	-4	3	0	-1	0	0	0	0	1
		0	3	-2	4	-1	0	0	0	0	0

Soluția nu este optimă, căci $z_1^B - c_1 > 0$, $z_3^B - c_3 > 0$.

Trecem la îmbunătățirea soluției

a^3 intră în bază, căci $\max_{j=1,3} (z_j^B - c_j) = z_3^B - c_3 = 4$

a^6 ieșe din bază, căci $\min_{i=5,6} \frac{\bar{x}_1^B}{y_{i3}} = \frac{\bar{x}_1^B}{y_{63}}$

Transformăm tabelul simplex.

c_B	x^B	\bar{x}^B	0								
			-3	2	-4	1	0	0	0	0	0
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9		
0	x_5	6	1	3	0	0	1	-1	0	0	0
-4	x_3	10	2	1	1	0	0	1	0	0	0
0	x_7	26	5	3	0	0	0	2	1	0	0
0	x_8	0	4	-3	0	-1	0	0	0	1	0
0	x_9	0	-4	3	0	-1	0	0	0	0	1
		-40	-5	-6	0	-1	0	-4	0	0	0

Deoarece toți $z_j^B - c_j < 0$, acest program este optim. Deci $z_{\min} = -4a$ se realizează pentru $\bar{x} = (0,0,10,0,6,0,26,0,0)$

4) Să se rezolve următoarea problemă, în care valorile A,B,C, a,b,c sunt pozitive:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq a$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq a + b$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2a + c$$

$$x_i \geq 0, i = 1,2,3$$

$$\min \frac{1}{(A+B+C)x_1 + Bx_2 + Cx_3}$$

Soluție:

A rezolva problema dată, revine la a rezolva următoarea problemă de programare lineară adusă la forma standard:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = a + b \quad a,b,c \geq 0$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2a + c \quad A,B,C > 0$$

$$x_i \geq 0, i=1,6$$

$$\max [(A+B+C)x_1 + Bx_2 + Cx_3]$$

Baza unitară primal admisibilă este (a^4, a^5, a^6) .

c^B	x^B	\bar{x}^B						
			$A+B+C$	B	C	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$\leftarrow 0$	x_4	a	1	1	1	1	0	0
0	x_5	$a+b$	1	-1	2	0	1	0
0	x_6	$2a+c$	2	1	-1	0	0	1
			0	0	$-A-B-C$	-B	-C	0

$z_j^B - c_j < 0$ pt $j = 1,2,3$, deci soluția nu este optimă.

Sîntem în situația de a o îmbunătăți.

Intră în bază a^1 , căci $A+B+C > B,C$.

Ieșe din bază a^4 , căci $a < a+b$, $a < \frac{2a+c}{2}$.

Transformăm tabelul simplex

c_B	x^B	\bar{x}^B	A+B+C	B	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
A+B+C	x_1	a	1	1	1	1	0	0
0	x_5	b	0	-2	1	-1	1	0
0	x_6	c	0	-3	-3	-2	0	1
			a(A+B+C)	0	A+C	A+B	A+B+C	0
								0

Criteriul de optimalitate este satisfăcut.

Valoarea optimă a funcției obiectiv va fi

$$\min \frac{1}{(A+B+C)x_1 + Bx_2 + Cx_3} = \frac{1}{\max [(A+B+C)x_1 + Bx_2 + Cx_3]} = \frac{1}{a(A+B+C)}$$

și se obține pentru programul optim $(a, 0, 0, 0, b, c)$.

5) Să se rezolve următoarea problemă:

$$5x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 0$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 \geq 3$$

$$2x_1 + x_3 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 = 6$$

$$x_1 \leq 0, x_2 \text{ oarecare}, x_3 \geq 0$$

$$\max (3x_1 + 5x_2 - 2x_3)$$

Soluție:

$$\text{Fie } u_1 = -x_1, u_2 = x_2, u_3 = x_3, u_4 = x_4, u_1 \geq 0 \quad i = \overline{1,4}$$

Cu aceste variabile problema devine:

$$-5u_1 + 2u_2 - 2u_3 - u_4 \geq 0$$

$$-2u_1 - u_2 + u_3 + u_4 \geq 3$$

$$-2u_1 + u_3 + u_4 \leq 4$$

$$u_1 + u_2 - u_3 = 6$$

$$u_1 \geq 0, \quad i = \overline{1,4}$$

$$\max (-3u_1 + 5u_2 - 5u_3 - 2u_4)$$

Forma standard a acestei probleme se obține introducind variabilele exces u_5, u_6, u_7 :

$$\begin{array}{ll} 5u_1 - 2u_2 + 2u_3 + u_4 + u_5 & = 0 \\ 2u_1 + u_2 - u_3 - u_4 + u_6 & = 3 \\ -2u_1 + u_4 + u_7 & = 4 \\ u_1 + u_2 - u_3 & = 6 \end{array}$$

$$u_1 \geq 0 \quad i = 1, 2$$

$$\max (-3u_1 + 5u_2 - 5u_3 - 2u_4)$$

$B = (a^2, a^4, a^5, a^6)$ reprezintă o bază pentru sistemul dat.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$B^{-1}b = (6, 4, 9, 1)' \geq 0$. Deci B este o bază primal admisibilă. Trecem la întocmirea tabloului simplex.

c_B	u^B	\bar{u}^B	-3 5 -5 -2 0 0 0						
			u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
5	u_2	6	1	1	-1	0	0	0	0
-2	u_4	4	-2	0	0	1	0	0	1
0	u_5	9	9	0	0	0	1	0	-1
-6	u_6	1	-1	0	0	0	0	1	(1)
		22	12	0	0	0	0	0	-2↑

Soluția nu este optimă pentru că $z_7^B - c_7 < 0$.

Trecem la îmbunătățirea ei.

Intră în bază a_7^7 .

Ieșe din bază a_6^6 , căci $\min_{i=4,6} \frac{\bar{x}_1^B}{y_{i7}} = \frac{\bar{x}_6^B}{y_{67}} = 1$

Refacem tabelul simplex.

u^B	\bar{u}^B	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
u_2	6	1	1	-1	0	0	0	0
u_4	3	-1	0	0	1	0	1	0
u_5	10	8	0	0	0	1	1	0
u_7	1	-1	0	0	0	0	1	1
	24	14	0	0	0	0	2	0

Acest program este optim pentru că toti $z_j^B - c_j \geq 0$.

Functia obiectiv ia valoarea maxima 24 pentru solutia $\bar{u} = (0,6,0,3,10,0,1)$.

Convergenta algoritmului. Ciclaj

In cazul in care indicele ℓ al vectorului a^ℓ careiese din baza nu se determina unic, pentru evitarea ciclajului se procedeaza astfel:

- Se aseaza vectorii bazei pe primele m pozitii

- Fie $I_1 = \{ s \mid \min_{\substack{s \\ y_{sk} > 0}} \frac{\bar{x}_s^B}{y_{sk}} \text{ este atins}\}$

- Se calculeaza

$$\min_{s \in I_1} \frac{y_{sl}}{y_{sk}}$$

Daca acest minim se realizeaza pentru un singur indice s , atunci se elimină din baza a^s . In caz contrar, fie $I_2 = \{ s \mid$

$$\min_{s \in I_1} \frac{y_{sl}}{y_{sk}} \text{ este atins}\}$$

- Se calculeaza $\min_{s \in I_2} \frac{y_{s2}}{y_{sk}}$ etc.

Cel tîrziu la iteratia $(m+1)$ se obtine un minim unic, deci se stabileste vectorul careiese din baza.

6) Să se rezolve următoarea problema:

$$x_1 + \frac{1}{4}x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0$$

$$x_2 + \frac{1}{2}x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 3x_7 = 0$$

$$x_3 + x_6 = 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 7$$

$$\min (-\frac{3}{4}x_4 + 20x_5 - \frac{1}{2}x_6 + 6x_7)$$

Solutie:

$B = (a^1, a^2, a^3)$ este o bază unitară, primal admisibilă a problemei.
Formăm tabelul simplex:

c_B	x^B	\bar{x}^B	0.	0	0	$-\frac{3}{4}$	20	$-\frac{1}{2}$	6
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9
$\leftarrow 0$	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3
0	x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
		0	0	0	0	$\frac{3}{4}$	-20	$\frac{1}{2}$	-6

Deoarece $z_4^B - c_4 > 0$, $z_6^B - c_6 > 0$, soluția nu este optimă.
Ea poate fi îmbunătățită.

Aplicând criteriul de intrare în bază, intră în bază a^4 , căci
 $\max(3/4, 1/2) = 3/4 = z_4^B - c_4$.

Aplicând criteriul de ieșire, a^6 nu se obține unic

$$I_1 = \left\{ s \mid \min_{s=1,2} \frac{\bar{x}^s}{y_{s4}} \text{ e atins} \right\} = \{1, 2\}$$

Dacă n-am aplica metoda lexicografică și am alege la întâmplare spre a-l scoate din bază pe a^1 , după 6 iterări se revine la același tabel, adică se intră în ciclaj. Pentru evitarea ciclajului procedăm cum am descris mai înainte.

Vectorii din bază sănt deja pe primele 3 poziții:

$$\text{Calculăm } \min_{s \in I_1} \frac{y_{s1}}{y_{s4}} = \min \left\{ \frac{1}{1/4}, \frac{0}{1/2} \right\} = \frac{y_{21}}{y_{24}}$$

Deci ieșe din bază a^2 . Refacem tabelul simplex:

c_B	x^B	\bar{x}^B	0	0	0	$-\frac{3}{4}$	20	$-\frac{1}{2}$	6
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_1	0	1	$-1/2$	0	0	-2	$-3/4$	$15/2$
$-3/4$	x_4	0	0	2	0	1	-24	-1	6
$\leftarrow 0$	x_3	1	0	0	1	0	0	(1)	0
		0	0	$-3/2$	0	0	-2	$\frac{5}{4} - \frac{21}{2}$	

Soluția nu este încă optimă, căci $z_6^B - c_6 > 0$.

Intră în bază a^6 și ieșe din bază a^3 .

	x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_1	$3/4$	1	$-1/2$	$3/4$	0	-2	0	$15/2$
$-\frac{3}{4}$	x_4	1	0	2	1	1	-24	0	6
$-\frac{1}{2}$	x_6	1	0	0	1	0	0	1	0
		$-\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	$-\frac{21}{2}$

Soluția optimă a problemei este deci $\bar{x} = (\frac{3}{4}, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$ iar $z_{\min} = -\frac{5}{4}$.

7) Să se arate că vectorul scos din bază într-o iteratăie a algoritmului simplex nu poate intra în bază la iteratăia următoare.

Solutie:

Fie $a^j \in B$. Atunci $z_j^B - c_j = 0$, $y_j^B = e_j$, $y_{jj} = 1$.

Presupunem că a^j ieșe din bază, iar a^k intră în baza imediat următoare \tilde{B} . Asta înseamnă că:

$$\min_{\{i | y_{ik} > 0\}} \frac{\bar{x}_1^B}{y_{ik}} = \frac{\bar{x}_j^B}{y_{jk}} \quad \text{și că}$$

$$\min_{\{i | z_i^B - c_i < 0\}} (z_i^B - c_i) = z_k^B - c_k \quad (\text{pentru o problemă de maximizare}),$$

sau că

$$\max_{\{i | z_i^B - c_i > 0\}} (z_i^B - c_i) = z_k^B - c_k \quad (\text{pentru o problemă de minimizare}).$$

Formulele de trecere de la baza B la \tilde{B} dau:

$$z_j^{\tilde{B}} - c_j = (z_j^B - c_j) - (z_k^B - c_k) \frac{y_{ij}}{y_{jk}}$$

Pentru o problemă de maximizare avem $z_j^B - c_j = 0$, $y_{jj} = 1$, $y_{jk} > 0$, $z_k^B - c_k < 0$, adică $z_j^{\tilde{B}} - c_j > 0$ și deci vectorul a^j nu mai poate participa la calculul indicat de criteriul de intrare în bază la o iteratăie imediat următoare celei la care a ieșit din bază.

Pentru o problemă de minimizare avem $z_j^B - c_j = 0$, $y_{jj} = 1$, $y_{jk} > 0$, $z_k^B - c_k > 0$, adică $z_j^{\tilde{B}} - c_j < 0$ și, din nou, a^j nu poate intra în bază la iteratăia imediat următoare celei în care a părăsit bază.

8) Un vector care a intrat în bază în cursul aplicării algoritmului simplex poate fi eliminat la iteratărea imediat următoare? În ce caz răspunsul este afirmativ?

Soluție:

Să presupunem că a^k intră în bază la o iteratăre carecăre. Pentru ca el să iasă din bază la iteratărea imediat următoare, în cazul în care la această iteratăre intră în bază a^ℓ , trebuie să fie verificată următoarea relație:

$$\min_{\{i \mid y_{il} > 0\}} \frac{\bar{x}_i^B}{y_{il}} - \frac{\bar{x}_k^B}{y_{k\ell}}, \text{ ceea ce se poate întâmpla cind } y_{k\ell} > 0.$$

Deci a^k poate ieși din bază dacă $y_{k\ell} > 0$, chiar dacă el a intrat la iteratărea anterioară.

Variatarea funcției obiectiv este dată de

$$\frac{\bar{x}_k^B}{y_{k\ell}} (z_\ell^B - c_\ell).$$

Deci, transformarea prin care a^k părăsește baza cind a intrat la iteratărea anterioară nu asigură cea mai mare variație a funcției obiectiv.

9) Să se arate că orice program de bază poate fi un program optim pentru un vector c ales în mod convenabil. Cite componente ale vectorului c pot fi alese în mod arbitrar?

Soluție:

Fie problema de programare lineară $Ax = b$, $x \geq 0$, $\min c'x$, cu rang $A = m < n$ și fie B o bază a sistemului. Fie $\bar{x}^B = B^{-1}b \geq 0$, $x^S = 0$ un program de bază.

Să considerăm $c = (c_1, \dots, c_m, c_{m+1}, \dots, c_n)$, cu c_1, \dots, c_m fixate arbitrar (corespunzător indicilor din bază).

Vom determina c_j , $m+1 \leq j \leq n$ astfel încât programul de bază să fie optim.

Trebuie ca $z_j^B - c_j \leq 0$ pentru orice $j \in \mathcal{J}$, adică

$$c_j \geq c_B' B^{-1} a^j, \quad m+1 \leq j \leq n.$$

Pentru o problemă de maximizare se iau $c_j \leq c_B' B^{-1} a^j$ pentru $j = m+1, \dots, n$.

lo) Să se arate că, dacă mulțimea programelor optime ale unei probleme de programare lineară este mărginită și nevidată, atunci orice program optim este o combinație convexă a programelor optime de bază.
Solutie:

Fie problema de programare lineară $Ax = b$, $x \geq 0$, $\min c'x$,
fie $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ și fie $S = \{x \in P \mid c'x = \min_{y \in P} c'y\}$.

Presupunem că rang $A = m \leq n$.

Numărul bazelor pentru problema dată este cel mult egal cu C_n^m .
Fie B o bază.

Prin ipoteză $S \neq \emptyset$, deci există programe optime de bază, și anume un număr finit, strict mai mic decât C_n^m programe optime de bază.

Fie T poliedrul convex generat de programele optime de bază, adică mulțimea combinațiilor convexe ale programelor optime de bază.

Vom demonstra că $S = T$.

Să verificăm întâi că S este convexă:

Fie $x_1, x_2 \in S$, $\lambda \in (0,1)$.

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda Ax_1 + (1-\lambda)Ax_2 = \lambda b + (1-\lambda)b = b$$

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geq 0.$$

Deci $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in P$.

$$c'(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda c'x_1 + (1-\lambda)c'x_2 =$$

$$\lambda \min_{y \in P} c'y + (1-\lambda) \min_{y \in P} c'y = \min_{y \in P} c'y.$$

Deci $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$, adică S este convexă.

Să demonstrăm că $T \subseteq S$:

Presupunem că problema dată are r programe optime de bază, $r \leq C_n^m$, și anume:

$$\bar{x}_i = B_i^{-1}b, \quad 1 \leq i \leq r.$$

Fie $x \in T$, deci $x = \lambda_1 \bar{x}^1 + \dots + \lambda_r \bar{x}^r$, cu $\lambda_i \geq 0$,

$$\sum_1^r \lambda_i = 1.$$

$$Ax = \lambda_1 A \bar{x}^1 + \dots + \lambda_r A \bar{x}^r = \sum_{i=1}^r \lambda_i A (\bar{x}^1, 0)' = \sum_{i=1}^r \lambda_i A \bar{x}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^r \lambda_i b = b$$

$x \geq 0$, deci $x \in P$,

$c' \bar{x}^B_i = \min_{y \in P} c'y$, pentru $1 \leq i \leq r$. Deci

$$c'x = c'\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i \bar{x}_i^B\right) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \left(\min_{y \in P} c'y\right) = \min_{y \in P} c'y, \text{ ceea ce}$$

înseamnă că $x \in S$, deci că $T \subseteq S$.

Să demonstrează acum că $S \subseteq T$.

Fie \bar{x}^B_k un program optim de bază fixat dintre cele r programe

optime de bază ale problemei. $\bar{x} = (\bar{x}^B_k, 0)$ este un program optim, deci un element din S . Să arătăm că $\bar{x} \in T$. Ar trebui să găsim $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$,

$$\lambda_1 \geq 0, \sum_{i=1}^r \lambda_i = 1 \text{ astfel încât}$$

$$\bar{x}_1^B = \lambda_1 \bar{x}_1^B + \dots + \lambda_r \bar{x}_1^B$$

$$\bar{x}_2^B = \lambda_1 \bar{x}_2^B + \dots + \lambda_r \bar{x}_2^B$$

⋮

$$\bar{x}_m^B = \lambda_1 \bar{x}_m^B + \dots + \lambda_r \bar{x}_m^B$$

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1$$

Am obținut un sistem linear de $m+1$ ecuații cu r necunoscute. Rezolvând sistemul găsim $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ căutați. Deci $S \subseteq T$.

Probleme propuse:

$$11) \quad x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7$$

$$- 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$$

$$- 4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, 6$$

$$\min (x_2 - 3x_3 + 2x_5)$$

Soluție optimă $\bar{x} = (0, 4, 3, 0, 0, 11)$, $\min = -11$

$$\begin{aligned}
 12) \quad & 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 2 \\
 & -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_7 = 5 \\
 & 3x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 9 \\
 & x_1 \geq 0, \quad i = \overline{1,7} \\
 & \max (-3x_1 + 7x_2 - \frac{1}{2}x_3 - 5x_4 - 3x_5)
 \end{aligned}$$

Solutie optimă: $\bar{x} = (0, \frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{21}{2}, 0, 0)$, $z_{\max} = -\frac{155}{8}$

$$\begin{aligned}
 13) \quad & x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\
 & 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 6 \\
 & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 7 \\
 & x_1 \geq 0, \quad i = \overline{1,5} \\
 & \min (-2x_1 - x_2 + x_3 + x_4)
 \end{aligned}$$

Solutie optimă: $\bar{x} = (3, 3, 1, 0, 0)$, $z_{\min} = -8$

$$\begin{aligned}
 14) \quad & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
 & x_2 - x_3 \leq 3 \\
 & -x_3 + x_4 \leq 2 \\
 & x_1 \geq 0, \quad i = \overline{1,4} \\
 & \min (x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4)
 \end{aligned}$$

Solutie optimă: $\bar{x} = (0, 1, 0, 2, 2, 0)$, $z_{\min} = -4$

$$\begin{aligned}
 15) \quad & 2x_2 - x_3 \geq 0 \\
 & 4x_1 - 3x_3 \geq 0 \\
 & 10x_1 - 3x_2 - x_3 - 20 \leq 0 \\
 & 14x_1 - 10x_2 - 13x_3 + 30 \geq 0 \\
 & x_1 \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \\
 & \max (10x_1 - 3x_2 + 9x_3)
 \end{aligned}$$

Solutie optimă: $\bar{x} = (3, 2, 4)$, $z_{\max} = 60$

$$16) \quad x_1 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 \leq 4$$

$$-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 \leq 10$$

$$x_1 - x_2 + 2x_4 + x_5 \leq 7$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}$$

$$\max (3x_1 - x_2 + x_5)$$

Solutie optimă: $\bar{x} = (5,0,0,1,0,0,14,0)$, $z_{\max} = 15$

$$17) \quad x_1 - x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 1$$

$$x_2 - x_3 - x_4 = 1$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,4}$$

$$\max (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4)$$

Solutie: optim infinit

$$18) \quad -14x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 \leq 10$$

$$-6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \leq 2$$

$$20x_1 + 7x_2 - 6x_3 - 8x_4 - 5x_5 \leq 7$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}$$

$$\min (10x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 3x_4 - 2x_5)$$

Solutie: optim infinit

$$19) \quad 5x_1 - x_2 + 5x_3 \geq -10$$

$$3x_2 + x_4 = 4$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,4}$$

$$\min (|x_1 - 2x_2 + 2x_3| + 4x_4)$$

Solutie optimă: $\bar{x} = (0, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0)$, $z_{\min} = 0$

20) Să se arate că dacă $a, b, c, 0 \geq 0$, următoarea problemă are soluție independentă de b și c .

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq a \\2x_1 - 3x_2 - x_3 &\leq b \\3x_1 - x_2 - 2x_3 &\leq c \\x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \\&\max(|Ax_1 + Bx_2| + Cx_3)\end{aligned}$$

Soluție optimă: $\bar{x} = (0, 0, a, 0, 0, 0, a+b, c+2b)$, $z_{\max} = ac$

$$\begin{aligned}21) \quad x_1 + x_2 + x_3 &\leq 10 \\x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 100 \\2x_1 + x_2 - x_3 &\leq 1000 \\x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3\end{aligned}$$

$$\min \left(\frac{1}{11x_1 + 5x_2 + 3x_3} \right)$$

Soluție optimă: $\bar{x} = (10, 0, 0, 0, 90, 980)$, $z_{\min} = \frac{1}{110}$.

$$\begin{aligned}22) \quad x_1 + x_2 - 3x_3 &\leq 1 \\-x_1 + x_2 - x_4 &\leq 0 \\-4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &\leq 2 \\3x_1 - x_3 - x_4 &\leq 3 \\x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4\end{aligned}$$

$$\min \left(\frac{1}{-x_1 + x_3 + 4x_4} \right)$$

Soluție: optim infinit.

23) Să se găsească o dietă optimă, de cost minim dacă se dau: conținuturile în 3 principii nutritive a 5 alimente, necesarul de principii nutritive și costurile unitare ale alimentelor, în următorul tabel:

ALIMENTE PRINCIPALI NUTR.	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	NECESAR
P_1	3	1	0	2	2	20
P_2	1	0	0	4	2	40
P_3	0	1	1	0	1	80
COST UNITAR	6	4	8	2	7	

Solutia optimă: $\bar{x} = (0,40,0,0,0,20,0,0)$, costul minim este egal cu 180.

1.2. Determinarea unei baze primal admisibile.

Metoda celor două faze

Descrierea metodei

Se aduce problema la forma standard:

$$(1) \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\max(\min)c'x$$

cu $b \geq 0$. Se introduc atîtea variabile artificiale încît să putem forma o bază unitate. Presupunem că introducem chiar m variabile artificiale $x^a = (x_1^a, \dots, x_m^a)'$. Se rezolvă problema

$$(2) \quad Ax + Ix^a = b$$

$$x, x^a \geq 0$$

$$\min(x_1^a + \dots + x_m^a)$$

folosind algoritmul simplex primal. Avem două cazuri:

i) $\min(x_1^a + \dots + x_m^a) > 0$, atunci problema (1) nu are programe

ii) $\min(x_1^a + \dots + x_m^a) = 0$. În acest caz avem o bază optimă pentru (2) care este bază inițială pentru (1). Putem avea următoarele situații:

iii) nu există variabile artificiale în bază optimă obținută. Atunci se trece la rezolvarea problemei (1) folosind baza obținută.

ii2) există variabile artificiale în bază; atunci avem:

a) variabilele artificiale din bază pot fi eliminate, lăsând pivot orice element nenul de pe linia corespunzătoare acelei variabile arti-

ficiale, din tabelul optim; și ajungem la cazul (ii 1).

β) nu pot fi eliminate din bază variabilele artificiale. Atunci se suprimă liniile din tabel corespunzătoare acestei variabile artificiale și se obține un tabel care conduce la (ii 1).

1) Să se rezolve problema:

$$-2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 6$$

$$5x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 20$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,5}$$

$$\max (2x_1 - 6x_3 + 2x_4 + 3x_5)$$

Soluție: Aducem problema la forma standard

$$-2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_6 = 6$$

$$5x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 20$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,6}$$

$$\max (2x_1 - 6x_3 + 2x_4 + 3x_5)$$

Pentru a obține o bază primală admisibilă aplicăm metoda celor două faze. x_5 poate fi luată ca variabilă de bază, deci mai introducem două variabile artificiale x_1^a, x_2^a .

Faza I : Rezolvăm problema

$$-2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_6 + x_1^a = 6$$

$$5x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 + x_2^a = 20$$

$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 4$$

$$x_1 \geq 0, i = \overline{1,6}, x_1^a, x_2^a \geq 0$$

$$\min (x_1^a + x_2^a)$$

Trecem la întocmirea primului tabel simplex

II			2	0	-6	2	3	0		
I			0	0	0	0	0	0	1 1	
C_B	x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_1^a	x_2^a
1	x_1^a	6	-2	2	-1	1	0	-1	1 0	
1	x_2^a	20	5	4	-3	-3	0	0	0 1	
$\leftarrow 0$	x_5	4	2	(5)	2	1	1	0	0 0	
		26	3	61	-4	-2	0	-1	0 0	

Soluția nu este optimă. Poate fi îmbunătățită. Intră în bază a^2 , căci $\max_{j=1,2} (z_j^B - C_j) = 6 = z_2^B - C_2$. Iese din bază a^5 , căci $\min \left(\frac{\bar{x}_1^a}{y_{12}}, \frac{\bar{x}_2^a}{y_{22}}, \frac{\bar{x}_5}{y_{52}} \right) = \min (3, 5, \frac{4}{5}) = \frac{\bar{x}_5}{y_{52}}$.

Transformăm tabelul simplex.

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_1^a	x_2^a
x_1^a	$22/5$	$-14/5$	0	$-9/5$	$3/5$	$-2/5$	-1	1	0
x_2^a	$84/5$	$17/5$	0	$-23/5$	$-19/5$	$-4/5$	0	0	1
$\leftarrow x_2$	$4/5$	(2/5)	1.	$2/5$	$1/5$	$1/5$	0	0	0
	$\frac{106}{5}$	$\frac{3}{5} \uparrow$	0	$-\frac{32}{5}$	$-\frac{16}{5}$	$-\frac{6}{5}$	-1	0	0

Din nou soluția nu este optimă, dar poate fi îmbunătățită. Intră în bază a^1 , iese din bază a^2 .

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_1^a	x_2^a
x_1^a	10	0	7	1	2	1	-1	1	0
x_2^a	10	0	$-17/2$	-8	$-11/2$	$-5/2$	0	0	1
x_1	2	1	$5/2$	1	$1/2$	$1/2$	0	0	0
	20	0	$-\frac{3}{2}$	-7	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	0

Soluția $\bar{x}_1^a = 10$, $\bar{x}_2^a = 10$, $\bar{x}_1 = 2$ este optimă pentru faza I, dar $\min(x_1^a + x_2^a) = 20 \neq 0$, deci problema inițială nu admite programe.

2) Să se rezolve problema:

$$6x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 4$$

$$2x_1 - \frac{1}{3}x_2 - x_3 + x_4 + \frac{1}{2}x_5 = 3$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + \frac{1}{2}x_5 + x_6 = 2$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,6}$$

$$\min(x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 - 5x_6)$$

Soluție:

Introducem variabilele artificiale $x_1^a, x_2^a, x_3^a \geq 0$

Faza I : Rezolvăm problema

$$6x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 + x_1^a = 4$$

$$2x_1 - \frac{1}{3}x_2 - x_3 + x_4 + \frac{1}{2}x_5 + x_2^a = 3$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + \frac{1}{2}x_5 + x_6 + x_3^a = 2$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,6}, x_1^a \geq 0, i = \overline{1,3}$$

$$\min(x_1^a + x_2^a + x_3^a)$$

C_B	x^B	\bar{x}^B							x_1^a	x_2^a	x_3^a
			0	0	0	0	0	0			
1	x_1^a	4	6	-2	1	-1	1	2	1	0	0
1	x_2^a	3	2	$-\frac{1}{3}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0
$\leftarrow 1$	x_3^a	2	(3)	-1	2	4	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1
		9	11	$-\frac{10}{3}$	2	4	2	3	0	0	0

Soluția nu este optimă, căci $z_j^B - c_j > 0$ $j = 1, 3, 4, 5, 6$, dar săte fi imbunătățită.

Întră în bază x_1 , căci $z_1^B - c_1 = \max \{(z_j^B - c_j), j \in \{1, 3, 4, 5, 6\}\}$

Ieșe din bază x_3^a , căci $\min(\frac{4}{6}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ se atinge pe

$I_1 = \{I, 3\}$, iar $\min(\frac{1}{6}, \frac{0}{3}) = 0$ se atinge pentru $\{3\}$ (căci $\bar{1}, \bar{3}$ reprezintă indicii variabilelor artificiale).

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_1^a	x_2^a
x_1^a	0	0	0	-3	-9	0	0	1	0
$\leftarrow x_2^a$	$\frac{5}{3}$	0	$1/3$	$-7/3$	$-5/3$	$1/6$	$-2/3$	0	1
x_1	$\frac{2}{3}$	1	$-1/3$	$2/3$	$4/3$	$1/6$	$1/3$	0	0
	$5/3$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{22}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	0	0

Soluția nu este optimă, dar poate fi îmbunătățită.

Intră în bază x_2 , ieșe din bază x_2^a .

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_1^a
x_1^a	0	0	0	(-3)	-9	0	0	1
x_2	5	0	1	-7	-5	$1/2$	-2	0
x_1	$\frac{7}{3}$	1	0	$-5/3$	$-1/3$	$1/3$	$-\frac{1}{3}$	0
	0	0	0	-3	-9	0	0	0

Am obținut o soluție optimă pentru faza I, iar $\min(x_1^a + x_2^a + x_3^a) = 0$, deci se poate trece la faza a II-a.

Intre variabilele de bază obținute a rămas și o variabilă artificială x_1^a , pe care o eliminăm făcind o iterată simplex în plus. Putem face acest lucru, căci pe linia lui x_1^a există $y \neq 0$, care poate fi luat ca pivot. Luăm de exemplu ca pivot pe (-3), adică facem o nouă iterată simplex în care x_1^a ieșe din bază și x_3 intră în bază.

In faza II vom rezolva problema de programare lineară inițială, pentru care funcția obiectiv era

$$\min(x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 - 5x_6)$$

C_B	x^B	\bar{x}^B	1	2	0	1	1	-5
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	0	0	0	1	3	0	0
2	x_2	5	0	1	0	16	$1/2$	-2
1	x_1	$\frac{7}{3}$	1	0	0	$\frac{14}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
		$\frac{37}{3}$	0	0	0	$\frac{107}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Soluția nu este optimă căci există $z_j^B - c_j > 0$.
 Se observă că $z_6^B - c_6 = \frac{2}{3} > 0$, iar $y_{ij} \leq 0$ pentru toți $i \in \mathcal{B}$. Deci problema are optim infinit.

3) Să se rezolve problema:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 1$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,5}$$

$$\max (-x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5)$$

Solutie:

Determinăm o bază primal admisibilă prin metoda celor două faze. Introducem variabilele auxiliare x_1^a , x_2^a , x_3^a .

Faza I : Rezolväm problema

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_1^a = 1$$

$$x_1 - x_2 + x_4 + x_2^a = 1$$

$$x_1 + 2x_2 + x_5 = 1$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_3^2 = 3$$

$$x_i \geq 0 \quad i = \overline{1,5} , \quad x_i^a \geq 0 \quad i = \overline{1,3}$$

$$\min (x_1^a + x_2^a + x_3^a)$$

$$\min (x_1^a + x_2^a + x_3^a)$$

c_B	x^B_1	\bar{x}^B	0	0	0	0	0	1	1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	x_3^a
1	x_1^a	1	1	1	1	0	0	1	0	0
1	x_2^a	1	1	-1	0	1	0	0	1	0
0	x_5	1	1	2	0	0	1	0	0	0
$\leftarrow 1$	x_3^a	3	③	1	2	1	0	0	0	1
		5	5↑	1	3	2	0	0	0	0

Soluția nu este optimă, căci $z_j^B - c_j > 0 \quad j = 1, 2, 3, 4$. Ea este însă pasibilă de îmbunătățire.

Intră în bază x_1 , căci $z_1^B - c_1 = \max_{\substack{j \in \\ \{1, 2, 3, 4\}}} (z_j^B - c_j)$

Ieșe din bază x_3^a , căci $\min_{i \in I_{11}} \frac{y_{il}}{\bar{x}_3^B}$ se atinge pentru

$I_1 = \{\bar{1}, \bar{2}, 5, \bar{3}\}$ (am notat cu \bar{i} indicii variabilelor auxiliare).

$\min_{i \in I_{11}} \frac{y_{il}}{y_{11}}$ se atinge pentru $I_2 = \{\bar{2}, 5, \bar{3}\}$

$\min_{i \in I_{21}} \frac{y_{i2}}{y_{11}}$ se atinge pentru $I_3 = \{5, \bar{3}\}$

$\min_{i \in I_{31}} \frac{y_{i5}}{y_{11}}$ se atinge pentru $i = \bar{3}$

Transformăm tabelul simplex

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a
x_1^a	0	0	$2/3$	$1/3$	$-1/3$	0	1	0
$\leftarrow x_2^a$	0	0	$-4/3$	$-2/3$	$(2/3)$	0	0	1
x_5	0	0	$5/3$	$-2/3$	$-1/3$	1	0	0
x_1	1	1	$1/3$	$2/3$	$1/3$	0	0	0
	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0

Soluția nu este optimă căci $z_4^B - c_4 > 0$. x_4 intră în bază, iar x_2^a ieșe din bază

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a
x_1^a	0	0	0	0	0	0	1
x_4	0	0	-2	-1	1	0	0
x_5	0	0	1	-1	0	1	0
x_1	1	1	1	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Soluția este optimă pentru faza I. Cum $\min(\sum_{i=1}^3 x_i^a) = 0$ putem trece la faza a doua. Observăm însă că x_1^a a rămas în bază ($\bar{x}_1^a = 0$) și nu poate fi eliminat printr-o altă iterație simplex, pentru că nu putem găsi un pivot diferit de zero pe linia lui.

Concluzia este că prima ecuație este o consecință a celorlalte trei (rangul sistemului < 4), deci poate fi eliminată din sistem.

Trecem la faza a doua, luând (x_4, x_5, x_1) ca variabile de bază, iar funcția obiectiv $\max(-x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5)$.

Faza II

C_B	x^B	\bar{x}^B					
			-1	3	2	-1	1
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
-1	x_4	0	0	-2	-1	1	0
1	x_5	0	0	1	-1	0	1
$\leftarrow -1$	x_1	1	1	1	(1)	0	0
		-1	0	-1	-3↑	0	0

Soluția nu este optimă, dar poate fi îmbunătățită. Intră în bază x_3 , ieșe din bază x_1 .

x_B	\bar{x}_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	1	1	-1	0	1	0	
x_5	1	1	2	0	0	1	
x_3	1	1	1	1	0	0	
	2	3	2	0	0	0	

Această soluție este optimă. $z_{\max} = 2$ se obține pentru $\bar{x} = (0, 0, 1, 1, 1)$.

Probleme propuse

$$\begin{aligned}
 4) \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 2 \\
 & -6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\
 & 3x_1 - x_2 - 4x_3 = 10 \\
 & x_1 \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \\
 & \max(x_1 - 2x_2 + x_3)
 \end{aligned}$$

Solutie: Problema inițială nu are programe.

$$\begin{aligned}
 5) \quad & 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\
 & x_1 + 2x_3 = 6 \\
 & 2x_2 + x_3 = 1 \\
 & x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\
 & x_1 \geq 0 \quad i = \overline{1,4} \\
 & \max (2x_1 + x_2 + 3x_3)
 \end{aligned}$$

Solutie: Problema nu are programe.

$$\begin{aligned}
 6) \quad & 5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 9 \\
 & x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 5 \\
 & 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\
 & x_1 \geq 0, \quad i = \overline{1,5} \\
 & \max (2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_5)
 \end{aligned}$$

Solutie: Problema are optim infinit.

$$\begin{aligned}
 7) \quad & 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\
 & x_1 + 2x_3 + x_4 = 12 \\
 & 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\
 & x_1 \geq 0 \quad i = \overline{1,4} \\
 & \max (10x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4)
 \end{aligned}$$

Solutia optimă $\bar{x} = (\frac{17}{3}, \frac{77}{12}, \frac{3}{2}, 0)$, $z_{\max} = \frac{59}{4}$

$$\begin{aligned}
 8) \quad & x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \\
 & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\
 & x_1 \geq 0 \quad i = 1,2,3 \\
 & \max (3x_1 - 2x_2 + 4x_3)
 \end{aligned}$$

Solutia optimă $\bar{x} = (2, 0, 1)$, $z_{\max} = 10$

9)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 + 2x_3 &\geq 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_i &\geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$\min (x_1 + x_2 + x_3)$$

Solutia optimă $\bar{x} = (0, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0)$, $z_{\min} = \frac{7}{4}$

10)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &\geq 10 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &\leq 8 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 &\geq -4 \\ x_1 - x_2 - 6x_3 &\leq -6 \\ x_i &\geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$\min (5x_1 - x_2 - 2x_3)$$

Solutia optimă $\bar{x} = (0, 12, 16, 0, 2, 8, 0)$, $z_{\min} = -44$

11)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_1 + 2x_3 + 4x_4 &= 6 \\ 3x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_i &\geq 0 \quad i = 1, 4 \end{aligned}$$

$$\min (x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 2x_4)$$

Solutia optimă $\bar{x} = (\frac{4}{7}, 0, \frac{9}{7}, \frac{5}{7})$, $z_{\min} = \frac{32}{7}$

12)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 + 2x_4 &\leq 4 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 &= 1 \\ 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_i &\geq 0 \quad i = 1, 4 \end{aligned}$$

$$\max (2x_1 + x_2 - x_4)$$

Solutia optimă $\bar{x} = (\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 0, 0, \frac{11}{4})$, $z_{\max} = 4$

$$13) \quad x_1 + x_2 - x_3 \leq 1$$

$$x_2 + x_4 \geq 1$$

$$x_1 \geq 0, \quad i = \overline{1,4}$$

$$\min (|2x_1 - x_2| + 2x_4)$$

Solutia optimă $\bar{x} = (\frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$, $z_{\min} = 0.$

$$14) \quad x_1 + x_2 + x_4 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 4$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

$$x_1 \geq 0 \quad i = \overline{1,4}$$

$$\min \frac{1}{6x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 10x_4}$$

Solutia optimă $\bar{x} = (\frac{3}{2}, 0, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$, $z_{\min} = \frac{1}{44}$

2. ALGORITMUL SIMPLEX DUAL

2.1. Dualitate

1. Să se scrie dualele următoarelor probleme de programare lineară:

$$(a) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2 \\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3 \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 5 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \\ \min (2x_1 + 2x_2 + 4x_3) \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} 3x_1 + 7x_2 + 8x_3 + 5x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 9x_5 = 6 \\ x_i \geq 0 \quad i = \overline{1, 5} \\ \max (6x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 + 5x_5) \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 21 \\ 3x_1 + 17x_2 + 8x_3 + 2x_4 \leq 48 \\ x_1, x_2, x_5 \geq 0, \quad x_3, x_4 \text{ oarecare} \\ \max (x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 - x_5) \end{cases}$$

2) Să se rezolve cu ajutorul problemei duale următoarea problema de programare lineară:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \geq 7 \\ -x_1 + x_2 \geq 10 \\ -x_2 + 4x_3 \geq -5 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + 2x_3 \geq -2 \\ -x_1 + x_3 \geq 4 \\ x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \\ \min (3x_1 + 6x_2 + x_3) \end{cases}$$

Soluție:

Duala problemei date este

$$u_1 - u_2 + u_4 - u_6 \leq 3$$

$$-2u_1 + u_2 - u_3 - u_4 + u_5 \leq 6$$

$$u_1 + 4u_3 + u_4 + 2u_5 + u_6 \leq 1$$

$$u_i \geq 0 \quad i = \overline{1,6}$$

$$\max (7u_1 + 10u_2 - 5u_3 + u_4 - 2u_5 + 4u_6)$$

Aducem problema la forma standard, introducind variabilele ecart $u_7, u_8, u_9 \geq 0$. $B = (a^7, a^8, a^9)$ formează o bază unitară primală. Aplicăm deci algoritmul simplex.

c_B	u^B	\bar{u}^B	C								
			7	10	-5	1	-2	4	0	0	0
	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9		
0	u_7	3	1	-1	0	1	0	-1	1	0	0
$\leftarrow 0$	u_8	6	-2	(1)	-1	-1	1	0	0	1	0
0	u_9	1	1	0	4	1	2	1	0	0	1
		0	-7	-10	5	-1	2	-4	0	0	0

Soluția nu este optimă căci există $z_j^B - c_j < 0$ $j = 1, 2, 4, 6$.

Intră în bază a^2 și ieșe din bază a^8 .

u^B	\bar{u}^B	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
u_7	9	-1	0	-1	0	1	-1	1	1	0
u_2	6	-2	1	-1	-1	1	0	0	1	0
$\leftarrow u_9$	1	(1)	0	4	1	2	1	0	0	1
	60	-27	0	-5	-11	22	-4	0	10	0

Din nou, soluția nu este optimă.

Intră în bază a^1 și ieșe din bază a^9 .

u^B	\bar{u}^B	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
u_7	10	0	0	3	1	3	-2	1	1	1
u_2	8	0	1	7	1	5	-2	0	1	2
u_1	1	1	0	4	1	2	1	0	0	1
	87	0	0	103	16	76	23	0	10	27

Am obținut soluția optimă a problemei duale $\bar{u} = (1, 8, 0, 0, 0, 0, 1_0)$ iar $u_{\max} = 87$.

Problema primală are soluția optimă $\bar{x} = (0, 1_0, 27)$ iar $\min(3x_1 + 6x_2 + x_3) = 6 \cdot 1_0 + 27 = 87$. Se verifică astfel că valorile funcțiilor obiectiv ale problemelor primale și duale coincid.

3) Să se rezolve cu ajutorul dualiei următoarea problemă:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &\leq 2 \\ x_1 - 3x_3 &\leq 0 \\ x_1 - 2x_2 &\leq 1 \\ x_1 &\geq 0 \\ \min(-3x_1 - 2x_2 - x_3) \end{aligned}$$

Solutie:

Problema duală este:

$$\begin{aligned} u_1^+ + u_2^+ + u_3 &\geq -3 \\ -2u_1^- - 2u_3 &\geq -2 \\ -u_1^- - 3u_2 &\geq -1 \\ u_i &\geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \\ \max(2u_1^- + u_3) \end{aligned}$$

Aducem problema la forma standard și introducem variabile artificiale. Vom folosi metoda celor două faze.

$$\begin{aligned} -u_1^- - u_2^- - u_3^- - u_4 &+ u_1^a = 3 \\ u_1^- + u_3^- - u_5 &+ u_2^a = 1 \\ u_1^- + 3u_2^- - u_6 &+ u_3^a = 1 \\ u_i &\geq 0 \quad i = 1, 6, \quad u_i^a \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

I $\min(u_1^a + u_2^a + u_3^a)$

II $\max(2u_1^- + u_3^-)$

In trei iteratii simplex se obtine soluția problemei:

c_B	u^B	\bar{u}^B	0 0 0 0 0 0 1 1 1
			$u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_1^a \ u_2^a \ u_3^a$
1	u_1^a	3	-1 -1 -1 -1 0 0 1 0 0
1	u_2^a	1	1 0 1 0 -1 0 0 1 0
$\leftarrow 1$	u_3^a	1	1 ③ 0 0 0 -1 0 0 1
		5	1 2 0 -1 -1 -1 0 0 0
	u_1^a	$10/3$	$-2/3 \ 0 \ -1 \ -1 \ 0 \ -1/3 \ 1 \ 0$
\leftarrow	u_2^a	1	① 0 1 0 -1 0 0 1
	u_2	$1/3$	$1/3 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1/3 \ 0 \ 0$
		$13/3$	$1/3 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1 \ -1/3 \ 0 \ 0$
	u_1^a	4	$0 \ 0 \ -1/3 \ -1 \ -\frac{2}{3} \ -1/3 \ 1$
	u_1	1	$1 \ 0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0$
	u_2	0	$0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1/3 \ -1/3 \ 0$
		4	$0 \ 0 \ -\frac{1}{3} \ -1 \ -\frac{2}{3} \ -1/3 \ 0$

Problema duală nu admite programe (căci $\min(u_1^a + u_2^a + u_3^a) = 4$).

Deci, conform teoremei fundamentale, problema primală are optim infinit sau nu are programe. Însă se observă ușor că $x = (0, 0, \dots, 0)$ este program pentru primală și prin urmare problema primală are optim infinit.

4) Fie $P = \{x \in R^n / Ax \geq b\}$, $D = \{u \in R_+^m / |A'u| \leq c\}$ unde $A_{m,n}$, $b \in R^m$, $c \in R_+^n$ iar prin $|x|$ am notat $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)'$.

Fie problemele:

$$(1) \min \{c' |x| / x \in P\}$$

$$(2) \max \{b' u / u \in D\}$$

Să se arate că:

a) $D \neq \emptyset$;

b) dacă $P \neq \emptyset$ atunci $b'u \leq c' |x|$, ($\forall x \in P, u \in D$).

c) dacă $P = \emptyset$ atunci problema (2) are optim infinit;

d) dacă $P \neq \emptyset$ atunci problemele (1) și (2) au optim finit, iar

valorile optime sunt egale.

Solutie:

a) Deoarece $c \in \mathbb{R}_+^n$ se observă că $u = (0, 0, \dots, 0)'$ este program pentru (2)

b) Fie $x \in P$, $u \in D$. Avem relațiile:

$$b'u \leq (Ax)'u = x'A'u \leq |x'| |A'u| \leq |x'| c = c' |x|$$

c) Dacă problema (1) nu are programe atunci sistemul:

$$Ax \geq b$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$

nu are soluție. Fie $x = x_1 - x_2$ cu $x_1, x_2 \geq 0$ și $y = Ax - b \geq 0$. Atunci nici sistemul:

$$\begin{cases} (A - A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = b \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \end{cases}$$

nu are soluție. Conform Lemiei Farkas-Minkowski, sistemul

$$\begin{cases} (A - A - I)' u \leq 0 \\ b'u > 0 \end{cases}$$

are soluție. Dacă \bar{u} este o soluție a acestui sistem atunci:

$$\begin{pmatrix} A' \\ -A' \\ -I \end{pmatrix} \bar{u} \leq 0, \quad b'\bar{u} > 0.$$

Se obține:

$$A'\bar{u} = 0$$

$$\bar{u} \geq 0$$

$$b'\bar{u} > 0$$

Evident că $\bar{u} \in D$. Fie $\bar{u}_n = n\bar{u}$ cu n natural. Este clar că $\bar{u}_n \in D$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dar atunci avem:

$$\max \{b'u / u \in D\} \geq b'\bar{u}_n = n \cdot b'\bar{u}$$

Deoarece $b'\bar{u} > 0$, lufind limita după $n \rightarrow \infty$ obținem că problema (2) are optim infinit.

c) Scriem $x = x_1 - x_2$, unde $x_1 = x^+$, $x_2 = x^-$ și $x_1^+ \cdot x_2^+ = 0$ (\forall). Atunci (1) devine:

$$\min \{(c', c', 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} / (A - A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = b, x_1, x_2, y \geq 0, x_1^+ \cdot x_2^+ = 0 (\forall)\}$$

$$\text{Fie } \tilde{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} \mid (A - A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} \geq 0 \right\}.$$

$$\text{și problema (1') } \min \left\{ (c', a', 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} \in \tilde{P} \right\}$$

Este clar că $\tilde{P} \neq \emptyset$. Duala problemei (1'), se arată că este tocmai problema (2). Deoarece și problema (2) are programe, rezultă, conform teoremei fundamentale a dualității, că problemele (1') și (2) au optim finit iar valorile optime corespunzătoare sunt egale. Rezultă imediat că (1) are optim finit. Este clar că orice soluție optimă pentru (1) este soluție optimă și pentru (1'). Arătăm că avem și invers. Deoarece avem optim finit, este suficient să arătăm că orice soluție optimă de bază pentru (1') este soluție optimă de bază pentru (1).

Dacă $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ y \end{pmatrix}$ este o soluție optimă de bază pentru (1')

astfel ca $\bar{x}_1^k \cdot \bar{x}_2^k > 0$ pentru un anumit k atunci $\bar{x}_1^k > 0, \bar{x}_2^k > 0$.

Atunci ar trebui că acele coloane din sistemul initial ce corespund la variabilele x_1^k, x_2^k să fie liniar independente. Însă coloanele respective sunt tocmai a^k respectiv $-a^k$ unde am considerat că $A = (a^1, \dots, a^k, \dots, a^n)$. Dar coloanele $a^k, -a^k$ nu sunt liniar independente și deci soluțiile optime pentru (1) și (1') coincid. Acum ultima parte din (c) este imediată.

5) Să se rezolve cu ajutorul dualei următoarea problemă de programare lineară:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\geq 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\geq 2 \\ 2x_1 + x_3 &\geq 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &\geq 0 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ \min (2x_1 + x_2 + x_3) & \end{aligned}$$

Soluția optimă $\bar{x} = (\frac{5}{4}, 0, \frac{3}{2})'$, $x_{\min} = 4$.

Cda. 45/978 Faso.3

6) Să se rezolve cu ajutorul dualei următoarea problema:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 &\geq 1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 4 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\geq 2 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ \min (4x_1 + 6x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Soluția optimă: $\bar{x} = \left(\frac{3}{14}, \frac{5}{14}, 0 \right)$, $z_{\min} = 3$.

7) Să se scrie duala problemei:

$\min \{ c'x / Ax \leq a, Bx = b, Dx \geq d, 0 \leq x \leq e \}$ unde A, B, D sunt matrici de tip $m \times n$, $a, b, d \in \mathbb{R}^m$ iar $e \in \mathbb{R}_+^n$.

8) Fie $P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b\}$, $D = \{u \in \mathbb{R}^m \cup \{0\} / |A'u| \leq c\}$ unde $A, b, c, |\cdot|$ au semnificația din problema ④ de mai sus. Dacă considerăm problemele:

$$\begin{aligned} (1) \quad \min \{ c'|x| / x \in P \} \\ (2) \quad \max \{ b'u / u \in D \} \end{aligned}$$

atunci se păstrează proprietățile a)- d) din problema ④.

9) Să se arate că are loc ⑧ dacă luăm:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b\}, \quad D = \{u \in \mathbb{R}^m / |A'u| \leq c\}.$$

2.2. Algoritmul simplex dual - cînd există o bază dual admisibilă

Descrierea algoritmului

Fie problema de programare lineară adusă la forma standard

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\max(\min) c'x$$

cu $A(m \times n)$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$

Fie B o bază a problemei, dual admisibilă, adică pentru care

$$z_j^B - c_j \geqslant (\leqslant) 0 \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

(1) Test de optimalitate:

Dacă $\bar{x}_i^B \geqslant 0 \quad \forall i \in \mathcal{B}$, atunci $\bar{x} = (\bar{x}^B, 0)$ este soluția optimă.

(2) Test de existență a soluției:

Dacă există $\bar{x}_i^B < 0$ și $y_{ij} \geqslant 0$ oricare ar fi j , atunci problema nu are soluție.

In caz contrar, soluția se poate îmbunătăți.

(3) Îmbunătățirea soluției \bar{x}^B pentru care $I = \{s \mid \bar{x}_s^B < 0\} \neq \emptyset$ iar pentru fiecare $s \in I$ există j încât $y_{sj} < 0$.

Iesă din bază a ℓ cu ℓ determinat aşa încât

$$\bar{x}_{\ell}^B = \min_{s \in I} \bar{x}_s^B$$

Intră în bază a k cu k determinat aşa încât

$$\left| \frac{z_k^B - c_k}{y_{\ell k}} \right| = \min_{\substack{j \\ y_{\ell j} < 0}} \left| \frac{z_j^B - c_j}{y_{\ell j}} \right|$$

(4) Se transformă tabelul simplex după regula dreptunghiului, cu pivotul $y_{\ell k}$.

$$1) \quad 6x_1 - x_2 - x_4 = 5$$

$$2x_1 - \frac{1}{3}x_2 - x_3 = 3$$

$$3x_1 + x_5 = 2$$

$$x_i \geqslant 0 \quad i = \overline{1,5}$$

$$\max (2x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$

Solutie: Aducem problema la o formă care ne furnizează o bază unitară

$$B = I$$

$$-6x_1 + x_2 + x_4 = -5$$

$$-2x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 = -3$$

$$3x_1 + x_5 = 2$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1,5}$$

$$\max (2x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$$

Facem tabelul simplex:

c_B	x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	y_j
-1	x_4	-5	(-6)	1	0	1	0
1	x_3	-3	-2	1/3	1	0	0
0	x_5	2	3	0	0	0	1
		2	2	1/3	0	0	0

B este bază dual admisibilă ($\bar{x}_j^B - c_j \geq 0 \ (\forall) j$), dar soluția

nu este optimă căci $\bar{x}_4 < 0$, $\bar{x}_3 < 0$. O putem îmbunătăți.

Ieșe din bază a^4 , căci $\min(\bar{x}_4, \bar{x}_3) = -5 = x_4$

Intră în bază a^1 , căci y_{41} este singura valoare negativă de pe linia lui x_4 .

Transformăm tabelul după regula dreptunghiului.

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	5/6	1	-1/6	0	1/6	0
$\leftarrow x_3$	-4/3	0	0	1	(-1/3)	0
x_5	-1/2	0	1/2	0	1/2	1
	1/3	0	2/3	0	1/3	0

Soluția nu este încă optimă.

Ieșe din bază a^3 , intră în bază a^4 .

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1/6	1	-1/6	1/2	0	0
x_4	4	0	0	-3	1	0
x_5	-5/2	0	1/2	3/2	0	1
	-1	0	2/3	1	0	0

În continuare soluția nu este optimă.

Dar $\bar{x}_5 = -\frac{5}{2} < 0$, iar $y_{5j} \geq 0 (\forall) 1 \leq j \leq 5$.

Deci problema dată nu are soluție.

2) Să se rezolve problema:

$$x_1 - x_3 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 = -2$$

$$x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1 \geq 0, \quad i = 1,5$$

$$\min (x_3 + x_4 + x_5)$$

Soluție:

$B = (a^1, a^2)$ este o bază unitară. Făcînd primul tabel simplex vom vedea că ea este dual admisibilă.

C_B	x^B	\bar{x}^B	0	0	1	1	1
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-0	x_1	-2	1	0	(-1)	1	-1/2
0	x_2	1	0	1	-1	-1	1
			0	0	0	-1↑	-1 -1

Putem îmbunătăți soluția.

Ieșe din bază a^1 , căci $\bar{x}_1 = -2 < 0$.

Intră în bază a^3 , căci

$$\min_j \left| \frac{z_j^B - c_j}{y_{1j}} \right| = \min \left\{ \frac{-1}{-1}, \frac{-1}{-1/2} \right\} = 1 = \left| \frac{z_3^B - c_3}{y_{13}} \right|$$

Refacem tabelul simplex.

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	2	-1	0	1	-1	1/2
x_2	3	-1	1	0	-2	3/2
	2	-1	0	0	-2	-1/2

Soluția optimă este deci $\bar{x} = (0,3,2,0,0)$, iar $z_{\min} = 2$.

Probleme propuse:

$$3) \quad 9x_1 + 30x_2 \leq 210$$

$$4x_1 + 11x_2 \geq 44$$

$$6x_1 + 4x_2 \geq 24$$

$$3x_1 + 10x_2 \leq 30$$

$$x_1 \geq 0 \quad i = 1,2$$

$$\min (3x_1 + 4x_2)$$

Soluție: Problema nu admite soluții.

$$\begin{aligned}
 4) \quad & x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 \leq 6 \\
 & 3x_2 + 2x_3 - x_5 \geq 4 \\
 & 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \leq 5 \\
 & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5 \\
 & \min (3x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 + x_4)
 \end{aligned}$$

Solutia optimă este segmentul AB cu A(0, $\frac{6}{5}, 2, 0, 0, \frac{2}{5}, 0, 0$), B(0, 0, $\frac{22}{5}$, $0, \frac{6}{5}, \frac{56}{5}, 0, 0$), iar $z_{\min} = \frac{11}{5}$.

2.3. Determinarea unei baze dual admisibile

Observatie: Fie problema de programare lineară $Ax = b$, $x \geq 0$, $\max(\min)c'x$ și fie B o bază.

Dacă B e primal și dual admisibilă, ea e optimă.

Dacă B e primal admisibilă, aplicăm simplexul primal.

Dacă B este dual admisibilă, aplicăm simplexul dual.

Dacă B nu e nici primal, nici dual admisibilă, atunci fie aplicăm metoda celor două faze pentru a găsi o bază primal admisibilă, fie determinăm o bază dual admisibilă după următoarea metodă:

(1) Se adaugă problemei restricția artificială

$$x_0 + \sum_{j \in I} x_j = M$$

cu $M \geq 0$ oricăr de mare, $I = \{j \mid z_j^B - c_j \text{ nu verifică condiția de dual admisibilitate}\}$. Problema astfel obținută se numește problema mărită.

(2) Se face o iterație simplex pentru scoaterea lui x_0 din bază. Se obține astfel o bază dual-admisibilă.

(3) Se rezolvă problema mărită cu simplexul dual.

- Dacă problema mărită nu admite programe, atunci nici problema inițială nu are programe.

- Dacă problema mărită are soluție optimă și x_0 nu este variabilă de bază, atunci în general problema inițială are optim infinit. În particular, dacă valoarea optimă nu depinde de M, atunci problema dată are optim finit.

- Dacă problema mărită are soluție optimă \bar{x} și x_0 este variabilă de bază, atunci problema inițială are optim finit, care se obține pentru \bar{x} , mai puțin componenta \bar{x}_0 .

1) Să se rezolve problema:

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 - x_3 &\geq 1 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &\leq 3 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ \max(2x_1 - x_2 + 4x_3) & \end{aligned}$$

Soluție:

Aducem problema la forma standard introducind variabile scart, astfel încât să obținem o bază unitară.

$$\begin{array}{rcl} -5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 & = & 3 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_6 & = & 6 \\ -6x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_7 & = & -6 \\ x_i & \geq 0, \quad i = 1, 7 \\ \max(2x_1 - x_2 + 4x_3) & & \end{array}$$

Baza unitară este $B = (a^4, a^5, a^6, a^7)$.

$B^{-1}b = (-1, 3, 6, -6)$, deci B nu este primal admisibilă.

$z^B - c = (-2, 1, 4, 0, 0, 0, 0)$, deci B nu este nici dual admisibilă.

Vom determina o bază dual admisibilă.

Dual admisibilitatea nu este respectată de $z_1^B - c_1 = -2 < 0$ și $z_3^B - c_3 = -4 < 0$. Deci $I = \{1, 3\}$

Adăugăm atunci restricția $x_0 + x_1 + x_3 = M$.

Tabelul simplex corespunzător problemei mărite este:

c_B	x^B	\bar{x}^B	2	-1	4	0	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_0
0	x_4	-1	-5	1	1	1	0	0	0	0
0	x_5	3	3	-3	1	0	1	0	0	0
0	x_6	6	6	2	3	0	0	1	0	0
0	x_7	-6	-6	-2	-3	0	0	0	1	0
$\leftarrow 0$	x_0	M	1	0	(1)	0	0	0	0	1
			0	-2	1	-4↑	0	0	0	0

Facem o iterație simplex, pentru eliminarea lui x_0 .

Intră în bază x^3 , ieșe din bază x_0^0 .

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_0
x_4	-1 - M	-6	1	0	1	0	0	0	-1
x_5	3 - M	2	-3	0	0	1	0	0	-1
$\leftarrow x_6$	6 - 3M	3	2	0	0	0	1	0	(-3)
x_7	-6 + 3M	-3	-2	0	0	0	0	1	3
x_3	M	1	0	1	0	0	0	0	1
	4M	2	1	0	0	0	0	0	4↑

$\tilde{B} = (a^4, a^5, a^6, a^7, a^3)$ este dual admisibilă.

Soluția obținută nu este optimă, dar poate fi îmbunătățită prin aplicarea simplexului dual.

Ieșe din bază a^6 , căci $\min_i \bar{x}_i^B = 6 - 3M = \bar{x}_6^B$
 $\bar{x}_i^B < 0$

Intră în bază a^0 , y_{60} fiind singura valoare negativă ce poate fi luată ca pivot.

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_0
$\leftarrow x_4$	-3	(-7)	1/3	0	1	0	-1/3	0	0
x_5	1	1	-11/3	0	0	1	-1/3	0	0
x_0	-2+M	-1	-2/3	0	0	0	-1/3	0	1
x_7	0	0	0	0	0	0	1	1	0
x_3	2	2	2/3	1	0	0	1/3	0	0
	8	6↑	$\frac{11}{3}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$	0	0

Soluția nu este încă optimă, căci $\bar{x}_4 < 0$.

Ieșe din bază a^4 .

Intră în bază a^1 , căci

$$\min_{j=1,6} \left| \frac{z_j^B - c_j}{y_{4j}} \right| = \min \left(\frac{6}{7}, 4 \right) = \frac{6}{7} = \left| \frac{z_1^B - c_1}{y_{41}} \right|$$

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	x_0
x_1	$3/7$	1	$-1/21$	0	$-1/7$	0	0	0
x_5	$4/7$	0	$-76/21$	0	$1/7$	1	0	0
x_0	$-11/7+M$	0	$-5/7$	0	$-1/7$	0	0	1
x_7	0	0	0	0	0	1	0	
x_3	$8/7$	0	$16/21$	1	$2/7$	0	0	0
	$38/7$	0	$\frac{83}{21}$	0	$\frac{6}{7}$	0	0	0

Am obținut soluția optimă a problemei mărite.

Soluția optimă a problemei date va fi

$$\bar{x} = \left(\frac{3}{7}, 0, \frac{8}{7}, 0, \frac{4}{7}, 0, 0 \right), \text{ iar } z_{\max} = \frac{38}{7}.$$

Probleme propuse:

$$2) \quad 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \leq -6$$

$$x_2 + x_3 - \frac{1}{4}x_4 \leq 3$$

$$-x_3 + 2x_4 \leq -3$$

$$x_1 \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\min (5x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4)$$

$$\underline{\text{Soluția optimă}} \quad \bar{x} = \left(\frac{9}{2}, \frac{39}{8}, 0, \frac{15}{2} \right), \quad z_{\min} = -12$$

$$3) \quad |-2x_1 + x_3| \leq 4$$

$$1 \leq x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 2$$

$$x_1 \geq 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\max (2x_1 - x_2 - x_3)$$

$$\underline{\text{Soluția optimă}} \quad \bar{x} = \left(\frac{25}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4} \right), \quad z_{\max} = \frac{43}{4}.$$

3. ALGORITMUL SIMPLEX REVIZUIT

Construirea tabloului simplex revizuit

Ne situăm în cazul rezolvării unei probleme de programare liniară prin metoda celor două faze.

$$Ax + Ix^a = b$$

$$x \geq 0, x^a \geq 0$$

$$\text{I} \quad \min \bar{s} = \min \left(\sum_{i=1}^m x_i^a \right) = \min (\bar{y}' x^a)$$

$$\text{II} \quad \max (\min) z = \max (\min) c' x$$

Fie B o bază a problemei. (La prima iterație $B = I$).

Tabloul simplex revizuit este următorul:

x^B	\bar{x}^B	y^k
x^B	B^{-1}	
	0 .	
	\bar{s}	$\bar{s}_k - \gamma_k$
z	$B^{-1} B^{-1}$	\bar{z}
	-1	$z_k - c_k$

Completarea acestui tabel se face astfel:

(1) Se completează prima parte a tabelului ($B^{-1}, \bar{y}^B B^{-1}, c^B B^{-1}$)

(2) Se calculează $\bar{x}^B = B^{-1} b$, \bar{s} , \bar{z} și se trec în tabel.

(3) Se calculează $(\bar{s}_i - \gamma_i)_i$ pentru faza I (înmulțind linia lui \bar{s} cu matricea extinsă a sistemului $(\begin{smallmatrix} A \\ c \end{smallmatrix})$) și respectiv $(z_i - c_i)_i$ pentru faza II (înmulțind linia lui z cu matricea extinsă a sistemului).

(4) Se alege indicele k , încât x_k intră în bază și se trec în tabel $\bar{s}_k - \gamma_k$, $z_k - c_k$.

(5) Se calculează coloana $y^k = B^{-1} a^k$ și se completează în tabel.

(6) Se alege indicele ℓ , incit x_ℓ ieșe din bază.

(7) Se transformă tabelul conform regulei dreptunghiului, cu pivotul $y_{\ell k}$, cu excepția ultimei coloane.

$$1) \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 = 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$x_1 \geq 0, \quad i = \overline{1,4}$$

$$\max (x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4)$$

Soluție:

Introducem două variabile artificiale corespunzînd primelor două ecuații, notate x_5, x_6 .

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 15$$

$$2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 = 20$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

$$x_1 \geq 0, \quad i = \overline{1,6}$$

$$I \min (x_5 + x_6)$$

$$II \max (x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4)$$

Intocmim primul tabel simplex revizuit: $B = (a^5, a^6, a^4)$,
 $B^{-1} = I$, $\gamma^B B^{-1} = (1, 1, 0)$, $c^B B^{-1} = (0, 0, -1)$

$$\bar{x}^B = B^{-1} b = (15, 20, 10)', \quad \bar{s} = 15 + 20 = 35, \quad \bar{z} = -10$$

$$\bar{s} - \gamma^B = (1 \ 1 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = (3, 3, 8, 0)$$

$$\max (\bar{s}_1 - \gamma^B_1) = 8 = \bar{s}_3 - \gamma^B_3, \quad \text{deci } k = 3$$

$$y^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = (3, 5, 1)'$$

$$\min \left(\frac{\bar{x}_1^B}{y_{13}} \right) = \min \left(\frac{15}{3}, \frac{20}{5}, \frac{10}{1} \right) = \frac{20}{5} \quad \text{deci } \ell = 6$$

$$\bar{x}_3 - y_3 = 8$$

$$z_3 - c_3 = (0 \ 0 \ -1 \ -1) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -4$$

Facem tabelul simplex revizuit.

	x_5	x_6	x_4	\bar{x}^B	y^3
x_5	1	0	0	0	15
$\leftarrow x_6$	0	1	0	0	20
x_4	0	0	1	0	10
\bar{x}	1	1	0	0	35
z	0	0	-1	-1	-10
					-4

Am stabilit deja că pivotul este $y_{63} = 5$.

Transformăm tabelul și în continuare procedăm la fel ca în prima iteratie.

Iterația 2-a

	x_5	x_3	x_4	\bar{x}^B	y^2
$\leftarrow x_5$	1	-3/5	0	0	3 (7/15)
x_3	0	1/5	0	0	1/5
x_4	0	-1/5	1	0	9/5
\bar{x}	1	-3/5	0	0	7/5
z	0	4/5	-1	-1	6 - $\frac{16}{5}$

Iterația 3-a

	x_2	x_3	x_4	\bar{x}^B	y^1
x_2	5/7	-3/7	0	0	15/7 - $\frac{1}{7}$
x_3	-1/7	2/7	0	0	25/7 3/7
$\leftarrow x_4$	-9/7	4/7	1	0	15/7 6/7
\bar{x}	0	0	0	0	0
z	$\frac{16}{7}$	- $\frac{4}{7}$	-1	-1	$\frac{90}{7} - \frac{6}{7}$

Aici s-a încheiat faza I.

Iterația 4-a

	x_2	x_3	x_1	\bar{x}^B
x_2	1/2	-1/3	1/6	0
x_3	1/2	0	-1/2	0
x_1	-3/2	2/3	7/6	0
z	1	0	0	-1
				15

Deci soluția optimă este $\bar{x} = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0)$, $z_{\max} = 15$.

$$\begin{aligned}
 2) \quad & 3x_1 + x_2 \geq 3 \\
 & 4x_1 + 3x_2 \leq 6 \\
 & x_1 + 2x_2 \leq 2 \\
 & x_i \geq 0, \quad i = 1, 2 \\
 & \max(2x_1 + x_2)
 \end{aligned}$$

Solutie:

Aducem problema la forma standard introducind variabilele ecart x_3, x_4, x_5 și apoi introducem variabila auxiliară x_6 corespunzătoare primei ecuații.

$$\begin{aligned}
 3x_1 + x_2 - x_3 + x_6 &= 3 \\
 4x_1 + 3x_2 + x_4 &= 6 \\
 x_1 + 2x_2 + x_5 &= 2 \\
 x_i \geq 0, \quad i &= 1, 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I \quad & \min(x_6) \\
 II \quad & \max(2x_1 + x_2)
 \end{aligned}$$

Iterația 1

	x_6	x_4	x_5		\bar{x}^B	y^1
x_6	1	0	0	0	3	3
x_4	0	1	0	0	6	4
x_5	0	0	1	0	2	1
\bar{x}	1	0	0	0	3	3
z	0	0	0	-1	0	-2

Iterația 2-a

	x_1	x_4	x_5		\bar{x}^B	y^3
x_1	1/3	0	0	0	1	-1/3
x_4	-4/3	1	0	0	2	4/3
x_5	-1/3	0	1	0	1	1/3
\bar{x}	0	0	0	0	0	
z	2/3	0	0	-1	2	-2/3

Aici se încheie faza I

Iterația 3-a

	x_1	x_3	x_5	\bar{x}^B
x_1	0	$1/4$	0	$3/2$
x_3	-1	$3/4$	0	$3/2$
x_5	0	$-1/4$	1	$1/2$
z	0	$\frac{1}{2}$	0	3

Soluția optimă este $\bar{x} = (\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$, iar $z_{\max} = 3$

4. REOPTIMIZARI

Se consideră o problemă de programare lineară

$$\begin{aligned} A_0 x &= B_0 \\ x &\geq 0 \\ \max(\min) c'_0 x, \end{aligned}$$

pentru care am determinat o soluție optimă. Fie B baza optimă, \bar{x}^B optimă. $\mathcal{B} = \{i \mid a^i \in B\}$.

(a) Modificarea funcției obiectiv

Să reoptimizăm soluția pentru funcția obiectiv $\max(\min) c'x$, cu $c = c_0 + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}^n$.

Prin această modificare B rămîne primal admisibilă, dar poate să nu mai fie dual admisibilă.

Dacă B rămîne dual admisibilă ($\bar{z}_j^B - c_j \geq (\leq) 0$) atunci \bar{x}^B rămîne optimă.

In caz contrar, reoptimizăm soluția aplicînd algoritmul simplex primal.

(b) Modificarea vectorului b

Să reoptimizăm soluția pentru cazul $A_0 x = b$, cu $b = b_0 + b_1$, $b_1 \in \mathbb{R}^m$.

Prin această modificare B rămîne dual admisibilă.

In ultimul tabel simplex apare B^{-1} .

Dacă $\tilde{x}^B = B^{-1}b = B^{-1}(b_0 + b_1) = \bar{x}^B + B^{-1}b_1 \geq 0$, atunci \tilde{x}^B este soluția optimă.

In caz contrar, o putem reoptimiza aplicînd algoritmul simplex dual.

(c) Modificarea unui vector a^r , cu $r \notin \mathcal{B}$

Să reoptimizăm soluția pentru cazul $Ax = b_0$, cu $a^r = a_0^r + a_1^r$, $r \notin \mathcal{B}$.

Prin această modificare B rămîne primal admisibilă.

Evaluăm $\tilde{z}_r^B - c_r = c_B^r B^{-1}a^r - c_r = \bar{z}_r^B - c_r + c_B^r B^{-1}a_1^r$

Dacă $\tilde{z}_r^B - c_r \geq (\leq) 0$, \tilde{x}^B rămîne soluția optimă. In caz contrar o putem reoptimiza aplicînd algoritmul simplex primal.

(d) Modificarea unui vector a^r , cu $r \in \mathcal{B}$

Să reoptimizăm soluția pentru cazul $Ax = b_0$, cu

$$a^r = a_0^r + a_1^r$$

$r \in \mathcal{B}$

Prin această transformare pot fi afectate atât primal cât și dual admisibilitatea.

Fie B^* noua bază.

Fie β_i linia i din B^{-1} .

B^* este nesingulară dacă $y_{rr} - \beta_r a^r = \beta_r (a_0^r + a_1^r) = -1 + \beta_r a_1^r \neq 0$,

adică dacă $\beta_r a_1^r \neq -1$

Dacă B^* este singulară, atunci B nu poate fi folosită pentru reoptimizarea soluției și problema se rezolvă independent (se reiau calculele de la o iterație anterioară intrările în bază a lui a_0^r).

Dacă B^* este nesingulară, se calculează $(B^*)^{-1}$.

$(B^*)^{-1} = I_r(a^r) \cdot B^{-1}$ cu $I_r(a^r) = (e^1, \dots, e^{r-1}, \delta^r, e^{r+1}, \dots, e^m)$,

$$\delta^r = \left(-\frac{y_{1r}}{y_{rr}}, \dots, \frac{1}{y_{rr}}, \dots, \frac{y_{mr}}{y_{rr}} \right)'$$

Se calculează $\bar{x}^{B^*} = (B^*)^{-1} b_0$

$$\bar{z}_j^{B^*} - c_{0j} = c_B^r (B^*)^{-1} a_0^j - c_{0j}, \quad j \notin \mathcal{B}$$

Dacă $\bar{x}^{B^*} \geq 0$, $\bar{z}_j^{B^*} - c_{0j} \geq (\leq) 0$, B^* este optimă.

Dacă B^* e primal admisibilă, dar nu și dual, atunci \bar{x}^{B^*} se reoptimizează aplicând simplexul primal.

Dacă B^* e dual admisibilă, dar nu și primal, atunci \bar{x}^{B^*} se reoptimizează aplicând simplexul dual.

Dacă B^* nu e nici dual, nici primal admisibilă, fie se rezolvă problema reluind-o de la o iterăție anterioară intrării lui a_0^r în bază, fie se aduce problema la una în care modificarea este introducerea unei noi coloane în matricea A .

(e) Adăugarea unei noi coloane în A (a unei noi variabile).

Să reoptimizăm soluția pentru cazul $A_0 x + a^{n+1} x_{n+1} = b_0$.

Prin această modificare B rămâne primal admisibilă.

Se calculează $\bar{z}_{n+1}^{B^*} - c_{n+1}$.

Dacă B rămâne și dual admisibilă, \bar{x}^B e optimă. În caz contrar, soluția se reoptimizează folosind algoritmul simplex primal.

Observatie:

Modificarea unui vector linie din A revine la modificarea unui vector coloană în problema duală.

Adăugarea unei noi linii la A (a unei noi restricții) revine la adăugarea unei noi coloane în problema duală.

1) Să se rezolve problema de programare lineară

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$

$$x_i \geq 0 . i = 1, 2, 3$$

$$\min (-3x_1 + 2x_2 - 4x_3)$$

și să se reoptimizeze soluția pentru:

a) $c = (-1, -1, 1)'$

b) $b = (1, 4)'$

c) $a^2 = (-3, -3)'$

d) $a^1 = (-1, 1)'$

e) $a^4 = (-2, 1)', c_4 = 0 .$

Solutie:

Aplicând metoda celor două faze obținem soluția optimă a problemei inițiale. Ultimul tabel simplex este:

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
x_3	1	0	$6/5$	1	$3/5$	$-1/5$
x_1	1	1	$3/5$	0	$-1/5$	$2/5$
		-7	0	$-\frac{42}{5}$	0	—

Am obținut deci $B = \{3, 1\}$, $\mathcal{Y} = \{2\}$, $B = (a^3, a^1)$,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}, \bar{x}^B = (1, 0, 1), \bar{z}_{\min} = -7$$

(a) $c = (-1, -1, 1)' = (-3, 2, -4)' + (2, -3, 5)'$

B rămâne primal admisibilă.

$$z_1^B - c_1 = z_3^B - c_3 = 0$$

$$z_2^B - c_2 = (1, -1) \begin{pmatrix} 6/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} + 1 = \frac{8}{5} > 0$$

Deci B nu este optimă. Aplicăm algoritmul simplex primal.

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3
x_3	1	0	(6/5)	1
x_1	1	1	3/5	0
	0	0	8/5 ↑	0

Intră în bază a^2 , ieșe din bază a^3 .

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3
x_2	5/6	0	1	5/6
x_1	1/2	1	0	-1/2
	- $\frac{4}{3}$	0	0	- $\frac{4}{3}$

Soluția optimă a problemei modificate este $\tilde{x} = (\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 0)$, iar

$$\tilde{z}_{\min} = - \frac{4}{3}$$

$$(b) \quad b = (1, 4)' = (3, 4)' + (-2, 0)'$$

B rămâne dual admisibilă.

$$\tilde{x}^B = \bar{x}^B + B^{-1}b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 7/5 \end{pmatrix}$$

$\tilde{x}_3^B < 0$, deci vom aplica simplexul dual.

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3
x_3	-1/5	0	6/5	1
x_1	7/5	1	3/5	0
	- $\frac{17}{5}$	0	- $\frac{43}{5}$	0

Cum $\tilde{x}_3^B < 0$ și $y_{3j} \geq 0 \quad (\forall) j$, problema modificată nu are programă.

$$(c) \quad a^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad 2 \notin \mathcal{B}$$

B rămâne primal admisibilă

$$\tilde{z}_1^B - c_1 = z_3^B - c_3 = 0$$

$$\tilde{z}_2^B - c_2 = \bar{z}_2^B - c_2 + c_B' B^{-1} a_1^2 = - \frac{43}{5} + \frac{66}{5} = \frac{23}{5} > 0$$

Deci B nu e dual admisibilă.

Pentru a reface tabelul simplex, calculăm coloana

$$\tilde{y}^2 = B^{-1}a^2 = B^{-1}(a_0^2 + a_1^2) = y^2 + B^{-1}a_1^2 = \begin{pmatrix} 6/5 & -1/5 \\ 3/5 & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \left(-\frac{6}{5}, -\frac{3}{5} \right)'$$

Deci $\tilde{z}_2^B - c_2 > 0$, iar $\tilde{y}_{12} < 0$ ($\forall i \in \mathcal{B}$)

Atunci problema modificată are optim infinit.

$$(d) \quad a^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad 1 \in \mathcal{B}$$

$B^{\text{II}} = (a_0^3, a^1)$. Să stabilim întâi dacă B^{II} e nesingulară:

$$\beta_1 a_1^1 = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right) \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -\frac{2}{5} \neq -1$$

Deci B^{II} nesingulară.

$$\tilde{y}^1 = B^{-1}a^1 = \left(-1, \frac{2}{5} \right)'$$

$$\gamma = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right)'$$

$$I_1(a^1) = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}$$

$$(B^{\text{II}})^{-1} = I_1(a^1)B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/10 & 4/5 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}^{B^{\text{II}}} = I_1(a^1)\bar{x}^B = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} > 0$$

Deci B^{II} este primal admisibilă.

$$z_1^{B^{\text{II}}} - c_1 = z_3^{B^{\text{II}}} - c_3 = 0$$

$$z_2^{B^{\text{II}}} - c_2 = (-4, -3) \begin{pmatrix} 1/10 & 4/5 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 = -\frac{163}{10} < 0$$

Deci B^{II} e și dual admisibilă. Atunci soluția optimă a problemei

scrie este $\bar{x}^{B^{\text{II}}} = \left(\frac{5}{2}, 0, \frac{7}{2} \right)$ iar $\bar{z}_{\min} = -\frac{43}{2}$

(e) Să refacem ultimul tabel simplex

$$y^4 = B^{-1}a^4 = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$z_4^B - c_4 = (-3, -4) \begin{pmatrix} -7/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	1	0	$6/5$	1	$-7/5$
$\leftarrow x_1$	1	1	$3/5$	0	$(4/5)$
	-7	0	$-\frac{43}{5}$	0	1↑

Intră în bază a^4 și ieșe din bază a^1 .

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	$11/4$	$7/4$	$9/4$	1	0
x_4	$5/4$	$5/4$	$3/4$	0	1
	$= \frac{33}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{121}{140}$	0	0

Soluția optimă a problemei modificate este deci

$$\bar{x} = (0, 0, \frac{11}{4}, \frac{5}{4}), \quad \bar{z}_{\min} = -\frac{33}{4}$$

2) Să se rezolve problema de programare lineară

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 24$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max (4x_1 + 3x_2)$$

și să se reoptimizeze soluția pentru:

- (a) $c = (3, -1)'$
- (b) $b = (5, 10, 30)'$
- (c) $a^2 = (2, 3, 5)'$

Soluție:

Aplicînd algoritmul simplex primal obținem soluția optimă a problemei date. Ultimul tabel simplex este:

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$6/5$	1	0	$3/5$	0	$-\frac{1}{5}$
x_4	$46/5$	0	0	$-7/5$	1	$-1/5$
x_2	$28/5$	0	1	$-1/5$	0	$2/5$
	$\frac{108}{5}$	0	0	$\frac{9}{5}$	0	$2/5$

Deci $B = (a^1, a^4, a^2)$, $\mathcal{B} = \{1, 4, 2\}$, $\mathcal{S} = \{3, 5\}$,

$$\bar{x}^B = \left(\frac{6}{5}, \frac{28}{5}, 0, \frac{46}{5}, 0 \right), \bar{z}_{\max} = \frac{108}{5}$$

(a) $c = (3, -1)' = (4, 3)' + (-1, 4)'$
B rămâne primal admisibilă.

$$z_3^B - c_3 = (3, 0, -1) \begin{pmatrix} 3/5 \\ -7/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = 2 > 0$$

$$z_5^B - c_5 = (+3, 0, -1) \begin{pmatrix} -1/5 \\ -1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

Reoptimizăm soluția:

C_B	x^B	\bar{x}^B	3	-1	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	x_1	$6/5$	1	0	$3/5$	0	$-1/5$
0	x_4	$46/5$	0	0	$-7/5$	1	$-1/5$
$\leftarrow -1$	x_2	$28/5$	0	1	$-1/5$	0	$(2/5)$
		-2	0	0	2	0	-1↑

Întră în bază a^5 , ieșe din bază a^2 .

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	4	1	$1/2$	$1/2$	0	0
x_4	12	0	$1/2$	-3	1	0
x_5	14	0	$5/2$	$-1/2$	0	1
	12	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0

Soluția optimă a problemei modificate este $\bar{x} = (4, 0, 0, 12, 14)$,
iar $\bar{z}_{\max} = 12$.

$$(b) b = (5, 10, 30)' = (8, 24, 18)' + (-3, -14, -12)'$$

B rămâne dual admisibilă.

$$\tilde{x}^B = \bar{x}^B + B^{-1} b_1 = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 46/5 \\ 28/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -1/5 \\ -7/5 & 1 & -1/5 \\ -1/5 & 0 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ -14 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

B nu este primal admisibilă. Aplicăm simplexul dual.

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	-3	1	0	$3/5$	0	$-1/5$
$\leftarrow x_4$	-3	0	1	$(-7/5)$	1	$-1/5$
x_2	11	0	0	$-1/5$	0	$2/5$
	21	0	0	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{2}{5}$

Ieșe din bază a^4 , intră în bază a^3 , căci

$$\min_{j=3,5} \left| \frac{z_j^B - c_j}{y_{4j}} \right| = \left| \frac{z_3^B - c_3}{y_{43}} \right| = \frac{9}{7}$$

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\leftarrow x_1$	$-\frac{30}{7}$	1	0	0	$3/7$	$(-2/7)$
x_3	$\frac{15}{7}$	0	0	1	$-5/7$	$1/7$
x_2	$\frac{80}{7}$	0	1	0	$-1/7$	$3/7$
	$\frac{120}{7}$	0	0	0	$9/7$	$1/7$

Ieșe din bază a^1 , intră în bază a^5 .

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_5	15	$-7/2$	0	0	$-3/2$	1
x_3	0	$1/2$	0	1	$-1/2$	0
x_2	5	$3/2$	1	0	$1/2$	0
	15	$1/2$	0	0	$3/2$	0

Soluția optimă a problemei modificate este $\bar{x} = (0, 5, 0, 0, 15)$ iar

$$\bar{z}_{\max} = 15.$$

$$(c) \quad a^2 = (2, 3, 5)' = (1, 2, 3)' + (1, 1, 2)'$$

$$2 \in \mathcal{B}$$

$B^* = (a_0^1, a_0^4, a_0^2)$. Vom stabili dacă B^* este sau nu nesingulară.

$$y_{22} = \beta_2 a_1^2 = \left(-\frac{1}{5} \ 0 \ \frac{2}{5} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3}{5} \neq -1$$

Deci B^* nesingulară.

$$\bar{y}^2 = B^{-1}a^2 = \left(\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{8}{5} \right)'$$

$$I_2(a^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 5/8 \end{pmatrix}$$

$$(B^*)^{-1} = I_2(a^2)B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/8 & 0 & -1/4 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}^{B^*} = (B^*)^{-1} \cdot b = \left(\frac{1}{2}, 12, \frac{7}{2} \right)' > 0$$

Deci B^* este primal admisibilă.

$$z_3^{B^*} - c_3 = (4, 0, 3) \begin{pmatrix} 5/8 & 0 & -1/4 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = \frac{17}{8} > 0$$

$$z_5^{B^*} - c_5 = (4, 0, 3) (B^*)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

Deci B^* nu e dual admisibilă. Aplicăm algoritmul simplex primal:

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$1/2$	1	0	$5/8$	0	$-1/4$
x_4	12	0	0	$-3/2$	1	0
$\leftarrow x_2$	$7/2$	0	1	$-1/8$	0	$(1/4)$
	$\frac{25}{2}$	0	0	$\frac{17}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$

Intră în bază a^5 , ieșe a^2 .

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	4	1	1	$1/2$	0	0
x_4	12	0	0	$-3/2$	1	0
x_5	14	0	4	$-1/2$	0	1
	16	0	1	2	0	0

Deci soluția optimă a problemei modificate este $\bar{x} = (4, 0, 0, 12, 14)$
 $\bar{z}_{\max} = 16$.

Probleme propuse:

$$\begin{aligned}
 3) \quad & 5x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 13 \\
 & 3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq -4 \\
 & x_1 - x_2 + x_3 \leq 6 \\
 & x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \\
 & \max (3x_1 - 2x_2 - x_3)
 \end{aligned}$$

- a) Să se rezolve problema dată.
 b) Să se reoptimizeze soluția pentru $c = (1, -1, 3)'$
 c) Să se reoptimizeze soluția pentru $b = (1, 1, 0)'$
 d) Să se reoptimizeze soluția pentru $a^2 = (0, -1, 2)'$
 e) Să se reoptimizeze soluția pentru $a^1 = (6, 1, 1)'$
 f) Să se reoptimizeze soluția pentru cazul cînd se adaugă variabila x_7 , cu $a^7 = (-1, -1, -5)'$, $c_7 = 0$.

Soluție:

- a) Soluția optimă apare în ultimul tabel simplex.

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$13/5$	1	$-1/5$	$2/5$	$1/5$	0	0
x_5	$59/5$	0	$-13/5$	$11/5$	$3/5$	1	0
x_6	$17/5$	0	$-4/5$	$3/5$	$-1/5$	0	1
	$39/5$	0	$7/5$	$11/5$	$3/5$	0	0

b) Soluția optimă $(\frac{5}{11}, 0, \frac{59}{11}, 0, \frac{2}{11}, 0)$, $z_{\max} = \frac{182}{11}$

c) Soluția optimă $(1, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{9}{4}, 0)$, $z_{\max} = \frac{5}{2}$

d) Soluția problemei inițiale rămîne optimă.

e) Soluția optimă $(\frac{13}{6}, 0, 0, 0, \frac{11}{6}, \frac{23}{6})$, $z_{\max} = \frac{13}{2}$

f) Optim infinit.

4) $x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 4x_5 \geq 8$

$$-4x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 4x_5 \geq 2$$

$$x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 \geq 2$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 5$$

$$\min (x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 8x_4 + 23x_5)$$

- a) Să se rezolve problema dată
 b) Să se reoptimizeze soluția pentru $c = (-4, 1, 0, -4, 2)'$
 c) Să se reoptimizeze soluția pentru $b = (2, 4, 2)'$
 d) Să se reoptimizeze soluția pentru $a^3 = (3, -1, -1)'$
 e) Să se reoptimizeze soluția pentru $a^4 = (2, -1, 1)'$

Solutie:

- a) Soluția optimă apare în ultimul tabel simplex

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_1^a	x_2^a
x_1	$11/2$	1	$3/2$	$1/2$	0	0	-1	$-\frac{1}{4}$	$3/2$	$1/4$	$-3/2$
x_5	2	0	$-1/2$	$1/2$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-1/2$	$1/2$	$1/2$
x_4	$3/2$	0	$-1/2$	$-1/2$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	$-1/2$	$1/4$	$1/2$
	$\frac{127}{2}$	0	-18	0	0	0	-1	$-\frac{55}{4}$	-14	—	—

- b) Soluția modificată are optim infinit.
 c) Soluția optimă $\bar{x} = (0, 0, 0, 2, 3)$, $\bar{z}_{\min} = 85$
 d) Soluția problemei inițiale rămâne optimă.
 e) Soluția optimă $\bar{x} = (4, 0, 0, 6, 2)$, $\bar{z}_{\min} = 98$.

5) $x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 \leq 2$

$2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \leq 6$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 7$

$x_i \geq 0 \quad i = \overline{1, 4}$

$\min (-2x_1 - x_2 + x_3 + x_4)$

- a) Să se rezolve problema dată
 b) Să se reoptimizeze soluția pentru $c = (-1, 2, 0, -1)'$
 c) Să se reoptimizeze soluția pentru $b = (2, 2, 2)'$
 d) Să se reoptimizeze soluția pentru $a^4 = (1, 0, -1)'$
 e) Să se reoptimizeze soluția pentru $a^3 = (2, 2, -1)'$
 f) Să se reoptimizeze soluția pentru cazul cînd se adaugă variabila x^8 , cu $a^8 = (1, 2, 3)'$

Solutie:

- a) Soluția optimă se obține în ultimul tabel simplex.

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	11	1	0	0	0	$4/3$	1	$1/3$
x_2	15	0	1	0	1	1	1	1
x_3	3	0	0	1	0	$1/3$	0	$1/3$
	-34	0	0	0	-2	-2	-3	$-4/3$

mizare. Restul punctelor se rezolvă conform schemei generale de reoptimizare.

5. PARAMETRIZARI

(a) Parametrizarea funcției obiectiv (a vectorului c)

Se consideră problema

$$Ax = b$$

$$x \geq 0$$

$$\max(\min) [(c^0 + \lambda c^1) x] , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Presupunem că există o valoare λ_0 pentru care problema are un optim finit. Schimbând originea pentru λ , se poate considera $\lambda_0 = 0$. (Această observație e valabilă pentru toate problemele de parametrizare).

(i) Se rezolvă problema pentru $\lambda = 0$. Fie B o bază optimă pentru $Ax = b$, $x \geq 0$, $\max(\min)(c^0 x)$, \bar{x}^B optimă, $B = \{i, a^i \in B\}$
Cind λ variază, B rămâne primal admisibilă

(ii) Se stabilește intervalul de variație a lui λ , pentru care B rămâne și dual admisibilă, adică optimă, punând condiția $z_j - c_j =$

$$= z_j^0 - c_j^0 + \lambda [(c^{1B})' y^j - c_j^1] \geq (\leq) 0$$

(iii) În afara domeniului în care B rămâne optimă, soluția se reoptimizează aplicând algoritmul simplex primal.

(b) Parametrizarea vectorului b

Se consideră problema

$$Ax = b^0 + \lambda b^1 , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$x \geq 0$$

$$\max(\min) (c' x)$$

(i) Se rezolvă problema pentru $\lambda = 0$. Fie B baza optimă, \bar{x}^B , $B = \{i, a^i \in B\}$.

Cind λ variază, B rămâne dual admisibilă.

(ii) Se găsește intervalul de variație a lui λ pentru care B rămâne primal admisibilă (adică optimă), punând condiția $\bar{x}^B = B^{-1}b^0 + \lambda B^{-1}b^1 \geq 0$.

(iii) În afara acestui interval se reoptimizează soluția aplicând algoritmul simplex dual.

(c) Parametrizarea unui $a^i \notin B$

Se consideră problema

$$A(\lambda)x = b, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$x \geq 0$$

$$\max(\min)(c'x), \text{ unde } a^i = a^{oi} + \lambda a^{li}$$

(i) Se rezolvă problema pentru $\lambda = 0$. Fie B baza optimă, \bar{x}^B soluția optimă, $\mathcal{B} = \{j \mid a^{oj} \in B\}$. Presupunem că $i \notin \mathcal{B}$.

Cind λ variază, B rămîne primal admisibilă.

(ii) Determinăm intervalul de variație a lui λ pentru care B rămîne optimă, punând condiția

$$z_i - c_i = z_i^0 - c_i + \lambda c_B^{-1} a^{li} \geqslant (\leqslant) 0.$$

(iii) În afara acestui interval se reoptimizează soluția aplicînd algoritmul simplex primal.

(d) Parametrizarea unui $a^i \in \mathcal{B}$

Se consideră problema

$$A(\lambda)x = b, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$x \geq 0$$

$$\max(\min)(c'x), \text{ unde } a^i = a^{oi} + \lambda a^{li}$$

(i) Se rezolvă problema pentru $\lambda = 0$. Fie B baza optimă, \bar{x}^B soluția optimă, $\mathcal{B} = \{j \mid a^{oj} \in B\}$. Presupunem că $i \in \mathcal{B}$.

(ii) Fie $B(\lambda)$ obținută din B prin înlocuirea lui a^{oi} cu $a^{oi} + \lambda a^{li}$. Se stabilește valoarea critică a lui λ , pentru care $B(\lambda)$ este singulară -- punând condiția $y_{ii}(\lambda) = 0$.

Pentru λ egală cu această valoare critică $a^i(\lambda)$ nu poate să înlocuiască în bază pe a^{oi} . În acest caz problema se rezolvă de la o interație anterioară intrărîi lui i în \mathcal{B} .

(iii) Pentru λ diferit de valoarea critică se calculează $B^{-1}(\lambda)$, $\bar{x}^B(\lambda)$, $z_j^B(\lambda) - c_j$.

Se stabilește intervalul de optimalitate a lui $B(\lambda)$.

Pentru λ se obțin 4 tipuri de intervale:

- intervale în care $B(\lambda)$ este optimă. Atunci soluția este $\bar{x}^B(\lambda)$.

- intervale în care $B(\lambda)$ este primal admisibilă. Atunci soluția optimă se obține aplicînd simplexul primal.

- intervale în care $B(\lambda)$ este dual admisibilă. Atunci soluția optimă se obține aplicînd simplexul dual.

- intervale în care $B(\lambda)$ nu este nici primal, nici dual admisibilă. Atunci se reia rezolvarea problemei de la o iterare anterioară intrării lui i în \mathcal{B} .

1) Să se rezolve următoarele probleme:

$$(a) \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ \min [c^0 + \lambda c^1] x \end{cases} \quad \text{cu } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$c^0 = (-3, 2, -4)' \\ c^1 = (0, 1, 0)'$$

$$(b) \begin{cases} Ax = b^0 + \lambda b^1 \\ x \geq 0 \\ \min c'x \end{cases} \quad \text{cu } A \text{ aceeași de la (a)} \\ \text{cu } b^0 = (3, 4)', \quad b^1 = (1, -1)', \\ c = (-3, 2, -4)', \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(c) \begin{cases} A(\lambda)x = b \\ x \geq 0 \\ \min c'x \end{cases} \quad \text{cu } A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3+2\lambda & 1 \end{bmatrix}, \quad b = (3, 4)', \\ c = (-3, 2, -4)', \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(d) \begin{cases} A(\lambda)x = b \\ x \geq 0 \\ \min c'x \end{cases} \quad \text{cu } A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1+\lambda & 3 & 2 \\ 3-\lambda & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ b, c \text{ aceleași ca la punctul (c)}$$

Solutie:

Se observă că pentru $\lambda = 0$, în toate cele patru probleme de mai sus se obține problema (1), cap. 4,

	x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$	x_3	1	0	$6/5$	1	$3/5$	$-1/5$
$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$	x_1	1	1	$3/5$	0	$-1/5$	$2/5$
$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3$							
$\min (-3x_1 + 2x_2 - 4x_3)$		-7	0	$-43/5$	0		

• cărei soluție optimă e dată în tabloul simplex alăturat.

$$(a) c^0 + \lambda c^1 = (-3, 2, -4)' + \lambda(0, 1, 0)' = (-3, 2 + \lambda, -4)' \\ B rămâne primal admisibilă.$$

$$z_2^B = c_2(\lambda) = -\frac{43}{5} - \lambda$$

B este optimă pentru $-\frac{43}{5} - \lambda \leq 0$, adică pentru $\lambda \geq -\frac{43}{5}$

Deci pe $\left[-\frac{43}{5}, \infty\right)$, $\bar{x}^B = (1, 0, 1)$, $\bar{z} = -7$

Pentru $\lambda \in (-\infty, -\frac{43}{5})$, $z_2^B - c_2(\lambda) > 0$. Aplicăm algoritmul simplex primal.

Intră în bază a_2^2 , ieșe din bază a_3^3 .

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3
x_2	$\frac{5}{6}$	0	1	$\frac{5}{6}$
x_1	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{6} + \lambda$	0	0	0

Deci $(-\infty, -\frac{43}{5})$, $\bar{x}^B = (\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 0)$, $\bar{z} = \frac{1}{6} + \lambda$

$$(b) b^0 + \lambda b^1 = (3, 4)' + \lambda(1, -1)' = (3 + \lambda, 4 - \lambda)'$$

B rămâne dual admisibilă.

$$\bar{x}^B(\lambda) = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+\lambda \\ 4-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5+4\lambda}{5} \\ \frac{5-3\lambda}{5} \end{pmatrix}$$

B este optimă pentru $5 + 4\lambda \geq 0$, $5 - 3\lambda \geq 0$, adică pentru

$$\lambda \in \left[-\frac{5}{4}, \frac{5}{3}\right]$$

Daci pe $\lambda \in \left[-\frac{5}{4}, \frac{5}{3}\right]$, $\bar{x}^B = \left(\frac{5-3\lambda}{5}, 0, \frac{5+4\lambda}{5}\right)$, $\bar{z} = \frac{-35-7\lambda}{5}$

Dacă $\lambda < -\frac{5}{4}$, $\bar{x}_3(\lambda) < 0$, dar, cum nu găsim pe linia sa nici un pivot negativ, pentru $\lambda < -\frac{5}{4}$ problema nu are programe.

Dacă $\lambda > \frac{5}{3}$, $\bar{x}_1(\lambda) < 0$, dar, cum nu găsim pe linia sa nici un pivot negativ, pentru $\lambda > \frac{5}{3}$ problema nu are programe.

$$(c) a_2^2 = a_0^2 + \lambda a_1^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B} = \{3, 1\}$, deci $2 \notin \mathcal{B}$. Atunci B rămâne primal admisibilă.

$$z_2^B(\lambda) - c_2 = (-4, -3) \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-\lambda \\ 3+2\lambda \end{pmatrix} - 2 = -\frac{43}{5} + \lambda$$

B este optimă pentru $-\frac{43}{5} + \lambda \leq 0$, adică pentru $\lambda \leq \frac{43}{5}$

$$\text{Daci pe } (-\infty, \frac{43}{5}], \bar{x}^B = (1, 0, 1), \bar{z} = -7$$

Pentru $\lambda \in (\frac{43}{5}, \infty)$, $z_2^B(\lambda) - c_2 > 0$. Aplicăm algoritmul simplex primal.

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3
x_3	1	0	$\frac{6}{5} - \lambda$	1
$\leftarrow x_1$	1	1	$\frac{3}{5} + \lambda$	0
	-7	0	$-\frac{43}{5} + \lambda$	0

Pentru $\lambda > \frac{43}{5}$, $\frac{6-5\lambda}{5} < 0$ iar $\frac{3+5\lambda}{5} > 0$

Deci intră în bază a^2 și ieșe din bază a^1

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3
x_3	$\frac{10\lambda - 3}{5\lambda + 3}$	$\frac{5\lambda - 6}{5\lambda + 3}$	0	1
x_2	$\frac{5}{3+5\lambda}$	$\frac{5}{3+5\lambda}$	1	0
	$\frac{22-40\lambda}{5\lambda+3}$	$\frac{-5\lambda+43}{5\lambda+3}$	0	0

Pentru $\lambda > \frac{43}{5}$, $z_1^B(\lambda) - c_1 = \frac{-5\lambda+43}{5\lambda+3} < 0$, deci B este optimă.

Atunci, pentru $\lambda \in (\frac{43}{5}, \infty)$, soluția optimă este

$$\bar{x} = (0, \frac{5}{3+5\lambda}, \frac{10\lambda-3}{5\lambda+3}), \text{ iar } \bar{z} = \frac{22-40\lambda}{5\lambda+3}$$

$$(d) \quad a^1 = a^{01} + \lambda a^{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \{3, 1\}, \text{ deci } 2 \in \mathcal{B}$$

Să stabilim valoarea critică a lui λ pentru care $B(\lambda)$ este singulară.

$$y_{11}(\lambda) = \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5} \right) \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 3-\lambda \end{pmatrix} = \frac{5-3\lambda}{5}$$

Dacă $\lambda = \frac{5}{3}$, atunci $B(\lambda)$ este singulară. Deci valoarea critică este

$\boxed{\lambda_0 = \frac{5}{3}}$. Pentru această valoare, problema se rezolvă independent.

Presupunem că $\lambda \neq \frac{5}{3}$.

$$y^1(\lambda) = B^{-1}a^1(\lambda) = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\lambda}{5} \\ \frac{5-3\lambda}{5} \end{pmatrix}$$

$$g^1 = \left(\frac{4\lambda}{3\lambda-5}, \frac{5}{5-3\lambda} \right)'$$

$$I_1(a^1(\lambda)) = \begin{pmatrix} 1 & 4\lambda/(3\lambda-5) \\ 0 & 5/(5-3\lambda) \end{pmatrix}$$

$$[B^*(\lambda)]^{-1} = I_1(a^1(\lambda)) B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4\lambda}{3\lambda-5} \\ 0 & \frac{5}{5-3\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda-3}{3\lambda-5} & \frac{\lambda+1}{3\lambda-5} \\ \frac{1}{3\lambda-5} & \frac{-2}{3\lambda-5} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}^{B^*}(\lambda) = I_1(a^1(\lambda)) \bar{x}^B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4\lambda}{3\lambda-5} \\ 0 & \frac{5}{5-3\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7\lambda-5}{3\lambda-5} \\ \frac{5}{5-3\lambda} \end{pmatrix}$$

$$z_1^{B^*}(\lambda) - c_1 = z_3^{B^*}(\lambda) - c_3 = 0$$

$$z_2^{B^*}(\lambda) - c_2 = (-4, -3) \begin{bmatrix} \frac{\lambda-3}{3\lambda-5} & \frac{\lambda+1}{3\lambda-5} \\ \frac{1}{3\lambda-5} & \frac{-2}{3\lambda-5} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 = \frac{-30\lambda + 43}{3\lambda - 5}$$

λ	$-\infty$	$\frac{5}{7}$	$\frac{43}{30}$	$\frac{5}{3}$	∞
$\frac{7\lambda-5}{3\lambda-5}$	+	+	-	-	+
$\frac{5}{5-3\lambda}$	+	+	+	+	-
$\frac{-30\lambda+43}{3\lambda-5}$	-	-	-	0	-
$B^*(\lambda)$ este optimă		$B^*(\lambda)$ dual admisibilă Se aplică alg. simplex dual	$B^*(\lambda)$ nu este nici primal nici dual admisibilă	$B^*(\lambda)$ dual admisibilă Se aplică algoritmul simplex dual	

Pentru $\lambda \in (-\infty, \frac{5}{7}]$ soluția optimă este

$$\bar{x} = \left(\frac{5}{5-3\lambda}, 0, \frac{7\lambda-5}{3\lambda-5} \right), \text{ iar } \bar{z} = \frac{35-28\lambda}{3\lambda-5}.$$

Pentru $\lambda \in (\frac{5}{7}, \frac{43}{30}]$ vom aplica algoritmul simplex dual.

Refacem ultimul tabel simplex.

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3
x_3	$\frac{7\lambda-5}{3\lambda-5}$	0	$\frac{6(\lambda-1)}{3\lambda-5}$	1
x_1	$\frac{5}{5-3\lambda}$	1	$\frac{3}{5-3\lambda}$	0
	$\frac{35-28\lambda}{3\lambda-5}$	0	$\frac{43-30\lambda}{3\lambda-5}$	0

Ar trebui ca x_3 să iasă din bază. Pentru a putea aplica algoritmul simplex dual, ar trebui ca pe linia lui x_3 să găsim un pivot negativ.

Dacă $\lambda \in (\frac{5}{7}, 1]$ nu găsim astfel de pivot, deci pentru $\lambda \in (\frac{5}{7}, 1]$ problema nu are programe.

Dacă $\lambda \in (1, \frac{43}{30})$, $\frac{6(\lambda-1)}{3\lambda-5} < 0$. Deci pentru acest interval x_3 ieșe din bază, iar x_2 intră în bază.

Refacem tabelul simplex.

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3
x_2	$\frac{7\lambda-5}{6(\lambda-1)}$	0	1	$\frac{3\lambda-5}{6(\lambda-1)}$
x_1	$\frac{1}{2(1-\lambda)}$	1	0	$\frac{1}{2(\lambda-1)}$
	$\frac{14\lambda-1}{6(\lambda-1)}$	0	0	$\frac{43-30\lambda}{6(1-\lambda)}$

≤ 0

Acum $\bar{x}_2 > 0$, dar $\bar{x}_1 < 0$. Dar pe linia lui x_1 nu pot găsi un pivot negativ.

Deci și pentru $\lambda \in (1, \frac{43}{30})$ problema nu are programe.

Pentru $\lambda \in (\frac{5}{3}, \infty)$ $B^*(\lambda)$ este dual admisibil. Pentru a aplica algoritmul simplex dual - prin care x_1 va ieși din bază, trebuie să găsim un pivot negativ pe linia lui x_1 . Acest pivot este $\frac{3}{5-3\lambda}$.

Deci x_1 ieșe din bază, iar x_2 intră în bază.

Refacem tabelul simplex:

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3
x_3	-1	$2(\lambda - 1)$	0	1
x_2	$\frac{5}{3}$	$\frac{5-3\lambda}{3}$	1	0
	$\frac{40}{3}$	$\frac{43-30\lambda}{3}$	0	0

Soluția nu este optimă, căci $\bar{x}_3 = -1 < 0$

Cum pe linia lui x_3 nu putem găsi pivot negativ, concluzia este că pentru $\lambda \in (\frac{5}{3}, \infty)$ problema nu are programe.

Rămîne să analizăm cazul $\lambda \in (\frac{43}{30}, \frac{5}{3})$. Aici $B^*(\lambda)$ nu este nici primal, nici dual admisibilă.

In acest caz rezolvarea problemei se face de la o iterație anterioară intrării lui x_1 în bază. O vom relua chiar de la început.

Considerăm deci problema

$$(1+\lambda)x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_1^a = 3$$

$$(3-\lambda)x_1 + 3x_2 + x_3 + x_2^a = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_1^a, x_2^a \geq 0$$

$$\text{I } \min (x_1^a + x_2^a)$$

$$\text{II } \min (-3x_1 + 2x_2 - 4x_3)$$

$$\text{cu } \lambda \in (\frac{43}{30}, \frac{5}{3})$$

		0	0	0	1	1
x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
1	x_1^a	3	$1+\lambda$	(3)	2	1
1	x_2^a	4	$3-\lambda$	3	1	0
		7	4	6	3	0
					0	0

Intră în bază x_2^a , ieșe din bază x_1^a . Refacem tabelul simplex.

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
x_2	1	$\frac{1+\lambda}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
x_2^a	1	$2(1-\lambda)$	0	-1	-1	1
	1	$2(1-\lambda)$	0	-1	-1	0

Se observă că, pentru $\lambda \in (\frac{43}{30}, \frac{5}{3})$, $2(1-\lambda) < 0$.

Deci aceasta este soluția optimă pentru fază I și cum $\min(x_1^a + x_2^a) = 1 \neq 0$, rezultă că problema inițială nu admite soluție.
Concluzia finală este:

Dacă $\lambda \in (-\infty, \frac{5}{7}]$ soluția optimă este

$$\bar{x} = \left(\frac{5}{5-3\lambda}, 0, \frac{7\lambda-5}{3\lambda-5} \right), \quad \bar{z} = \frac{25-28\lambda}{3\lambda-5}$$

Dacă $\lambda \in (\frac{5}{7}, \frac{5}{3}) \cup (\frac{5}{3}, \infty)$ problema nu are programe.

Dacă $\lambda = \frac{5}{3}$ problema de asemenea nu are programe.

Probleme propuse:

2) Să se rezolve următoarele probleme:

(a) $\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ \min(c^0 + \lambda c^1)' x \end{cases}$ cu $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$
 $c^0 = (4, 3)', \quad c^1 = (0, 2)'$

(b) $\begin{cases} Ax \leq b^0 + \lambda b^1 \\ x \geq 0 \\ \min(c'x) \end{cases}$ cu A aceeași ca la (a)
 $b^0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$, $b^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
 $c = (4, 3)'$

(c) $\begin{cases} A(\lambda)x \leq b \\ x \geq 0 \\ \min(c'x) \end{cases}$ cu $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3-\lambda & 2 \\ 1+2\lambda & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$

$\lambda \in \mathbb{R}$, c același ca la (b)

Soluție:

Pentru $\lambda = 0$, fiecare din aceste probleme coincide cu problema ② de la cap.4. Soluția pentru $\lambda = 0$ este $\bar{x} = (\frac{6}{5}, \frac{28}{5}, 0, \frac{46}{5}, 0)$, $\bar{z} = \frac{108}{5}$.

3) Să se rezolve următoarele probleme:

$$(a) \begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ \max [(c^0 + \lambda c^1)' x] \end{cases} \quad \text{cu } A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$c^0 = (3, -2, -1)', \quad c^1 = (0, 1, 2)'$$

$$x \in \mathbb{R}^3$$

$$(b) \begin{cases} Ax \leq b^0 + \lambda b^1 \\ x \geq 0 \\ \max c'x \end{cases} \quad \text{cu } A \text{ aceeași ca la punctul (a)}$$

$$\text{cu } b^0 = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad b^1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$c = (3, -2, -1)'$$

$$(c) \begin{cases} A(\lambda)x \leq b \\ x \geq 0 \\ \max(c'x) \end{cases} \quad \text{cu } A(\lambda) = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2-\lambda \\ -3 & -2 & 1+2\lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$b = (13, 4, 6)', \quad c = (3, -2, -1)'$$

$$(d) \begin{cases} A(\lambda)x \leq b \\ x \geq 0 \\ \max(c'x) \end{cases} \quad \text{cu } A(\lambda) = \begin{bmatrix} 5+5\lambda & -1 & 2 \\ -3+\lambda & -2 & 1 \\ 1-\lambda & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$b \text{ și } c \text{ aceeași ca la punctul (c)}$$

Solutie:

Pentru $\lambda = 0$ fiecare din aceste probleme coincide cu problema 3 de la cap.4. Soluția pentru $\lambda = 0$ este $\bar{x} = (\frac{13}{5}, 0, 0, 0, \frac{59}{5}, \frac{17}{5})$, $\bar{z} = \frac{39}{5}$.

4) Să se rezolve următoarele probleme:

$$(a) \begin{cases} Ax \geq b \\ x \geq 0 \\ \min [(c^0 + \lambda c^1)' x] \end{cases} \quad \text{cu } A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^5, \quad c^0 = (1, 4, 8, 8, 23)',$$

$$c^1 = (2\lambda, 0, 0, 0, 0)'$$

(b) $\begin{cases} Ax \geq b^0 + \lambda b^1 \\ x \geq 0 \\ \min c'x \end{cases}$ cu A același ca la punctul (a)
 $b^0 = (8, 2, 2)', b^1 = (-3, 0, 0)',$
 $c = (1, 4, 8, 8, 23)', \lambda \in \mathbb{R}$

(c) $\begin{cases} A(\lambda)x \geq b \\ x \geq 0 \\ \min(c'x) \end{cases}$ cu $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 4+\lambda & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -3+\lambda & 4 & 2 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$
 $b = (8, 2, 2)', c = (1, 4, 8, 8, 23)'$.

(d) $\begin{cases} A(\lambda)x \geq b \\ x \geq 0 \\ \min(c'x) \end{cases}$ cu $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1+\lambda & 4 & -5 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

$\lambda \in \mathbb{R}$, b și c aceeași de la punctul (c)

Soluție:

Pentru $\lambda = 0$ se obține problema (4) de la cap.4, a cărei soluție este $\bar{x} = (\frac{11}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}, 2)$, $\bar{z} = \frac{127}{2}$.

5) Să se rezolve următoarele probleme:

(a) $\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ \min[(c^0 + \lambda c^1)'x] \end{cases}$ cu $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$
 $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^4, c^0 = (-2, -1, 1, 1), c^1 = (0, 1, -1, 0)'$

(b) $\begin{cases} Ax \leq b^0 + \lambda b^1 \\ x \geq 0 \\ \min c'x \end{cases}$ cu A același ca la punctul (a)
 $b^0 = (2, 6, 7)', b^1 = (1, -1, 0)'$
 $\lambda \in \mathbb{R}, c = (-2, -1, 1, 1)'$.

(c) $\begin{cases} A(\lambda)x \leq b \\ x \geq 0 \\ \min c'x \end{cases}$ cu $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1+\lambda & -1 & 2 & -1 \\ 2(1-\lambda) & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R},$
 $b = (2, 6, 7)', c = (-2, -1, 1, 1)'$

Soluție:

Pentru $\lambda = 0$ se obține problema 5 de la cap.4, a cărei soluție este $\bar{x} = (11, 15, 3, 0)$, $\bar{z} = -34$

6. PROBLEME DE TRANSPORT

Una din cele mai importante probleme care conduc la programe lineare, este problema de transport.

Se consideră m centre de aprovizionare (depozite) și n centre de consum (beneficiari). Dorim să stabilim un plan de transport pentru un produs aflat în cantitatea a_i la depozitul i ($1 \leq i \leq m$) și care este cerut în cantitatea b_j la beneficiarul j ($1 \leq j \leq n$), costul unitar de transport al produsului de la depozitul i la beneficiarul j , fiind c_{ij} . Planul de transport trebuie să fie întocmit astfel încât să se acopere necesarul tuturor beneficiarilor, iar costul total de transport să fie minim.

Această problemă se scrie sub forma următorului program linear:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = (\leq) a_i , \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = (\geq) b_j , \quad 1 \leq j \leq n$$

$$x_{ij} \geq 0 , \quad 1 \leq i \leq m , \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} ,$$

$$\text{unde } \sum_{i=1}^m a_i = (\geq) \sum_{j=1}^n b_j , \quad a_i \geq 0 , \quad b_j \geq 0$$

Matricial, problema se scrie sub forma

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax = b \quad \text{cu } A \text{ matrice } (m+n) \times (mn), \text{ rang } A = m+n-1 \\ x \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}^{mn}, \quad b = (a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n)' \in \mathbb{R}^{m+n} \\ \min(c'x) \quad c = (c_1, \dots, c_{mn})' \in \mathbb{R}^{mn}. \end{array} \right.$$

Această problemă de programare lineară se rezolvă cu ajutorul problemei duale.

Determinarea unei soluții initiale de bază prin metoda colțului de N-V

(1) Se întocmește tabelul corespunzător problemei de transport:

c_{11}	c_{12}	---	c_{1n}	a_1
c_{21}	c_{22}		c_{2n}	a_2
c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	a_m
b_1	b_2	---	b_n	

In acest tablou costurile unitare se trec în colțul din stînga sus al celulelor.

(2) Se alege ca prima variabilă de bază x_{11} (variabila din colțul de N-V), căreia i se atribuie valoarea

$$\bar{x}_{11} = \min \{a_1, b_1\}$$

Această valoare se trece în prima celulă, sub diagonală.

(3) Dacă $\bar{x}_{11} = a_1$, atunci $\bar{x}_{12} = \dots = \bar{x}_{1n} = 0$ (variabile secundare), și se înlocuieste a_1 cu $a_1 - \bar{x}_{11}$, iar b_1 cu $b_1 - \bar{x}_{11}$.

Dacă $\bar{x}_{11} = b_1$, atunci $\bar{x}_{21} = \dots = \bar{x}_{m1} = 0$ (variabile secundare) și, de asemenea, se înlocuieste a_1 cu $a_1 - \bar{x}_{11}$, b_1 cu $b_1 - \bar{x}_{11}$.

In continuare se consideră ca variabilă de bază următoarea variabilă din colțul de N-V al tabelului rămas și se procedează analog.

Observatie: Cum rang $A = m+n-1$, se vor obține $m+n-1$ variabile de bază, cu valori nenule.

Determinarea unei soluții initiale de bază prin metoda costului minim

- 1) Se întocmește același tabel, corespunzător problemei de transport.
- 2) Se alege ca prima variabilă de bază acel x_{ij} pentru care c_{ij} este minim.
- 3) Se atribuie lui \bar{x}_{ij} astfel ales valoarea

$$\bar{x}_{ij} = \min \{a_i, b_j\},$$

și această valoare se trece în tabel în celula (i,j) , sub diagonală.

4) Se înlocuiesc a_i cu $a_i - \bar{x}_{ij}$, iar b_j cu $b_j - \bar{x}_{ij}$.

Dacă $\bar{x}_{ij} = a_i$, atunci toți $\bar{x}_{ik} = 0$ $k = 1, \dots, m$, $k \neq j$ (variabile secundare), iar dacă $\bar{x}_{ij} = b_j$, atunci toți $\bar{x}_{kj} = 0$ $k = 1, \dots, n$, $k \neq i$ (variabile secundare).

In continuare se consideră ca variabilă de bază următoarea variabilă x_{js} , pentru care c_{js} este minimul costurilor rămase în discuție și se procedează analog.

Observație: Dacă la o fază oarecare cele două cantități din care se ia minimul sunt egale, se suprimă la alegere sau linia sau coloana corespunzătoare. Această observație este valabilă pentru ambele metode.

Si prin metoda costului minim se obțin $m+n-1$ variabile de bază, cu valori nenule.

Comentariu: Metoda costului minim dă adesea o soluție inițială de bază mai bună decât metoda colțului de nord-vest, în sensul că realizează o valoare a costului de transport mai mică. În consecință, numărul iterărilor necesare pentru stabilirea optimului poate fi mai mic.

Algoritmul de transport

1) Se întocmește tabelul corespunzător problemei de transport.

		\bar{v}_1	\bar{v}_2	\dots		\bar{v}_n
		c_{11}	c_{12}	\dots		c_{1n}
\bar{u}_1	\bar{x}_{11}		δ_{12}	\dots		a_1
	c_{21}	c_{22}		\dots		a_2
\vdots						
\bar{u}_m	c_{m1}	c_{m2}		\dots	c_{mn}	a_m
	b_1	b_2			b_n	

2) Se determină o soluție inițială de bază ale cărei valori se trec în tabel în celulele corespunzătoare, sub diagonale.

3) Fie $\mathcal{B} = \{(i,j) \mid x_{ij} \text{ variabile de bază}\}$

Se rezolvă sistemul $u_i + v_j = c_{ij}, (i,j) \in \mathcal{B}$, fixându-se arbitrar valoarea unei variabile (de exemplu $u_1 = 0$). Fie $\bar{u}_i, \bar{v}_j, (i,j) \in \mathcal{B}$ soluțiile acestui sistem. Se înscriu valorile \bar{u}_i, \bar{v}_j pe marginile tabelului.

4) Se calculează cantitățile $\delta_{ij} = \bar{u}_i + \bar{v}_j - c_{ij}$ pentru $(i,j) \notin \mathcal{B}$ și se înscriu în colțul din dreapta jos al celulelor respective.

5) Test de optimalitate

Dacă $\delta_{ij} \leq 0 \quad \forall (i,j) \notin \mathcal{B}$, soluția este optimă.

Dacă $\exists (i,j) \notin \mathcal{B}$ cu $\delta_{ij} > 0$ soluția se îmbunătățește.

6) Îmbunătățirea soluției:

a) Se calculează $\delta_{k\ell} = \max_{(i,j) \notin \mathcal{B}} \delta_{ij} \cdot x_{k\ell}$ va intra în bază.

b) Se determină ciclul format de celula (k, ℓ) cu celelalte celule corespunzătoare variabilelor de bază. Se calculează $\bar{x}_{ps} = \min_{(t,r)} \{\bar{x}_{tr} \mid (t,r) \text{ celulă de rang par în ciclul anterior determinat}\} \cdot x_{ps}$ va ieși din bază.

c) Se determină noile valori ale variabilelor de bază astfel: $\tilde{x}_{tr} = \bar{x}_{tr} + \bar{x}_{ps}$ dacă (t,r) este celulă de rang impar în ciclu și $\tilde{x}_{tr} = -\bar{x}_{tr} - \bar{x}_{ps}$ dacă (t,r) este celulă de rang par în ciclu.

Observăm că această operație poate da unor variabile de bază valoare nulă. Aceste variabile nule vor fi considerate ca făcind parte din noua soluție de bază, care este acum degenerată.

7) Se reia algoritmul pentru noua soluție de bază.

1) Să se rezolve problema de transport dată de tabelul următor:

8	3	5	2	10
4	1	6	7	15
1	9	4	3	25
5	10	20	15	

adică $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ \min c'x \end{cases}$ cu

$A(7 \times 12)$, rang $A = 6$
 $b = (10, 15, 25, 5, 10, 20, 15)' \in \mathbb{R}^7$
 $c = (8, 3, \dots, 3)' \in \mathbb{R}^{12}$

Solutie:

Determinarea unei soluții inițiale de bază prin metoda colțului de N-V.

8	3	5	2	0	10, 5, 0
5	5	0	0		
4	1	6	7	0	15, 10, 0
0	5	10	0		
1	9	4	3	15	25, 15, 0
0	0	10	15		
5	10	20	15		
0	5	10	0		
	0	0			

$$\bar{x}_{11} = 5$$

$$\bar{x}_{12} = 5$$

$$\bar{x}_{22} = 5$$

$$\bar{x}_{23} = 10$$

$$\bar{x}_{33} = 10$$

$$\bar{x}_{34} = 15$$

Prima iteratie

	8	3	8	7	
0	8	3	5	2	5
-2	5	5	3	7	-2
-4	2	5	10	3	15
	3	9	4	10	

$$\mathcal{B} = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4)\}$$

Rezolvând sistemul $u_i + v_j = c_{ij}$, $(i,j) \in \mathcal{B}$ obținem

$$\bar{u}_1 = 0, \bar{u}_2 = -2, \bar{u}_3 = -4, \bar{v}_1 = 8, \bar{v}_2 = 3, \bar{v}_3 = 8, \bar{v}_4 = 7.$$

Calculăm δ_{ij} pentru $(i,j) \notin \mathcal{B}$

$$\delta_{13} = 0 + 8 - 5 = 3, \quad \delta_{14} = 5, \quad \delta_{21} = 2, \quad \delta_{24} = -2.$$

$$\delta_{31} = 3, \quad \delta_{32} = -10$$

Soluția nu este optimă, pentru că $\exists \delta_{ij} > 0$.

$\max \delta_{ij} = \delta_{14} = 5$. Deci x_{14} intră în bază.

Considerăm ciclul pornit de la celula $(1,4)$

$$\mathcal{C} = \{(1,4), (3,4), (3,3), (2,3), (2,2), (1,2), (1,4)\}$$

$$\min \{\bar{x}_{t,r} \mid (t,r) \in \{(3,4), (2,3), (1,2)\}\} = \bar{x}_{12} = 5$$

Deci ieșe din bază x_{12} .

Noile variabile de bază vor avea deci următoarele valori:
 $\bar{x}_{11} = 5$ (neschimbată), $\bar{x}_{14} = 5$, $\bar{x}_{34} = 15 - 5 = 10$, $\bar{x}_{33} = 10 + 5 = 15$,
 $\bar{x}_{23} = 10 - 5 = 5$, $\bar{x}_{22} = 5 + 5 = 10$.

Iterația a doua:

	8	-2	3	2	
0	8	3	5	-2	2
3	4	1	6	7	-2
1	7	10	5	-2	
	1	9	4	3	10
	8	-10	15		

$$\mathcal{B} = \{(1,1), (1,4), (2,2), (2,3), (3,3), (3,4)\}$$

Sistemul $u_i + v_j = c_{ij}$, $(i,j) \in \mathcal{B}$ conduce la:

$$\bar{u}_1 = 0, \bar{u}_2 = 3, \bar{u}_3 = 1, \bar{v}_1 = 8, \bar{v}_2 = -2, \bar{v}_3 = 3, \bar{v}_4 = 2$$

$$\text{Se calculează } \delta_{ij} = \bar{u}_i + \bar{v}_j - c_{ij}, \quad (i,j) \notin \mathcal{B}$$

Soluția nu este optimă, pentru că există $\delta_{1j} > 0$.

$$\max \{\delta_{ij} \mid (i,j) \in \{(2,1), (3,1)\}\} = \delta_{31} = 8.$$

Deci x_{31} intră în bază.

$$\mathcal{C} = \{(3,1), (1,1), (1,4), (3,4), (3,1)\}.$$

$$\min \{\bar{x}_{tr} \mid (t,r) \in \{(1,1), (3,4)\}\} = \bar{x}_{11} = 5$$

Deci x_{11} ieșe din bază. Transformăm tabelul:

Iterația a treia

	0	-2	3	2	
0	8	3	5	-2	10
3	4	1	6	7	-2
1	-8	-5	-2	10	
	-1	10	5	-2	
	5	-10	15	5	

$$\mathcal{B} = \{(1,4), (2,2), (2,3), (3,1), (3,3), (3,4)\}$$

Sistemul $u_i + v_j = c_{ij}$ $(i, j) \in \mathcal{B}$ conduce la:

$$\bar{u}_1 = 0, \bar{u}_2 = 3, \bar{u}_3 = 1, \bar{v}_1 = 0, \bar{v}_2 = -2, \bar{v}_3 = 3, \bar{v}_4 = 2.$$

Se calculează δ_{ij} , $(i, j) \notin \mathcal{B}$

Cum $\delta_{ij} \leq 0$ (\forall) $(i, j) \notin \mathcal{B}$, rezultă că soluția optimă este: $\bar{x}_{13} = 10$, $\bar{x}_{22} = 10$, $\bar{x}_{23} = 5$, $\bar{x}_{31} = 5$, $\bar{x}_{33} = 15$, $\bar{x}_{34} = 5$.

Valoarea minimă a costului de transport este 125.

2) Să se rezolve problema de transport dată de următorul tabel:

1	3	2	7	9	15
7	6	5	4	3	10
4	9	11	1	10	13
2	10	8	6	1	12
20	5	7	8	10	50

adică $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ \min c'x \end{cases}$

cu $A(9 \times 20)$, rang $A = 8$,
 $b \in \mathbb{R}^9$, $c \in \mathbb{R}^{20}$

Soluție:

Determinarea unei soluții initiale de bază prin metoda costului minim

1	3	2	7	9	15,0
7	6	5	4	3	10,3,0
4	9	11	1	10	13,5,2,0
2	10	8	6	1	12,2,0
20	5	7	8	10	
5	2	0	0	0	
3	0				
0					

$$\min c_{ij} = 1 = c_{11} = c_{34} = c_{45}$$

Luăm $\bar{x}_{11} = \min(15, 20) = 15$, $\bar{x}_{12} = \bar{x}_{13} = \bar{x}_{14} = \bar{x}_{15} = 0$
 $\bar{x}_{34} = \min(8, 13) = 8$, $\bar{x}_{23} = \bar{x}_{43} = 0$
 $\bar{x}_{45} = \min(10, 12) = 10$, $\bar{x}_{24} = \bar{x}_{34} = 0$

In continuare $\min c_{ij} = 2 = c_{41}$

Luăm $\bar{x}_{41} = \min[(20-15), (12-10)] = 2$, $\bar{x}_{42} = \bar{x}_{44} = 0$

etc.

Iterația întâi:

	1	6	5	-2	0
1	15	3	2	3	7
0		3		3	-9
0	7	6	5	4	3
0	-6	3	7	-6	-3
3	4	9	11	1	10
3	3	2	-3	8	-7
1	2	10	8	6	1
1	2	-3	-2	-7	10

$$\mathcal{B} = \{(1,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,5)\}$$

Sistemul $u_i + v_j = c_{ij}$, $(i,j) \in \mathcal{B}$ conduce la

$$\bar{u}_1 = 0, \bar{u}_2 = 0, \bar{u}_3 = 3, \bar{u}_4 = 1, \bar{v}_1 = 1, \bar{v}_2 = 6, \bar{v}_3 = 5, \bar{v}_4 = -2, \bar{v}_5 = 0$$

Calculăm $\delta_{ij} = \bar{u}_i + \bar{v}_j - c_{ij}$ pentru $(i,j) \notin \mathcal{B}$ și le trecem în tabel.

Soluția nu este optimă, căci există $\delta_{ij} > 0$.

$$\max_{\delta_{ij} > 0} \delta_{ij} = 3 = \delta_{12} = \delta_{13}.$$

Vom introduce în bază pe x_{12} .

$$\mathcal{C} = \{(1,2), (3,2), (3,1), (1,1), (1,2)\}$$

$$\min \left\{ \bar{x}_{tr} \mid (t,r) \in \{(3,2), (1,1)\} \right\} = 2 = \bar{x}_{32}$$

Deci x_{32} ieșe din bază.

Transformăm tabelul.

Iteratia a doua:

	1	3	2	-2	0	
0	1	3	2	0	7	9
3	7	6	5	4	-3	3
3	4	9	11	1	10	
1	2	10	8	6	1	10
	2	2	-6	-5	-7	

$$\mathcal{B} = \{(1,1), (1,2), (2,2), (2,3), (3,1), (3,4), (4,1), (4,5)\}$$

Sistemul $u_i + v_j = c_{ij}$, $(i,j) \in \mathcal{B}$ are următoarea soluție:

$$\bar{u}_1 = 0, \bar{u}_2 = 3, \bar{u}_3 = 3, \bar{u}_4 = 1, \bar{v}_1 = 1, \bar{v}_2 = 3, \bar{v}_3 = 2, \bar{v}_4 = -2, \bar{v}_5 = 0$$

$$\text{Calculăm } \delta_{ij} = \bar{u}_i + \bar{v}_j - c_{ij}, \quad (i,j) \notin \mathcal{B}$$

Cum $\delta_{ij} \leq 0$, soluția este optimă. Deci

$$\bar{x}_{11} = 13, \bar{x}_{12} = 2, \bar{x}_{22} = 3, \bar{x}_{23} = 7, \bar{x}_{31} = 5, \bar{x}_{34} = 8, \bar{x}_{41} = 2, \bar{x}_{45} = 10,$$

iar costul minim de transport este 114.

Probleme propuse:

3) Să se rezolve problema de transport dată de următorul tabel:

3	5	9	2	18
8	4	5	4	22
1	6	2	7	20
15	12	8	25	60

Soluția optimă este $\bar{x}_{14} = 18$, $\bar{x}_{22} = 12$, $\bar{x}_{23} = 3$, $\bar{x}_{24} = 10$, $\bar{x}_{31} = 15$, $\bar{x}_{33} = 5$, iar costul minim de transport este 154.

4) Să se rezolve următoarea problemă de transport:

4	2	5	1	3	11
6	5	4	4	2	27
6	8	1	5	4	32
5	15	15	19	16	70

Soluția optimă este $\bar{x}_{12} = 11$, $\bar{x}_{22} = 4$, $\bar{x}_{24} = 7$, $\bar{x}_{25} = 16$, $\bar{x}_{31} = 5$, $\bar{x}_{33} = 15$, $\bar{x}_{34} = 12$, iar costul minim de transport este 207.

5) Să se rezolve următoarea problemă de transport:

3	2	2	4	70
1	2	3	4	10
3	5	2	1	20
50	25	15	10	100

Soluția optimă este $\bar{x}_{11} = 40$, $\bar{x}_{12} = 25$, $\bar{x}_{13} = 5$, $\bar{x}_{21} = 10$, $\bar{x}_{33} = 10$, $\bar{x}_{34} = 10$, iar costul minim de transport este 220.

6) Să se rezolve următoarea problemă de transport:

2	4	6	8	13
3	6	9	1	6
3	5	7	9	7
8	15	2	1	26

Soluția optimă este $\bar{x}_{11} = 2$, $\bar{x}_{12} = 9$, $\bar{x}_{13} = 2$, $\bar{x}_{21} = 6$, $\bar{x}_{24} = 1$, $\bar{x}_{32} = 6$, iar valoarea optimă a costului de transport este 109.

7) Să se determine soluția problemei de transport dată prin tabelul:

4	5	6	12
18	20	31	16
26	15	24	17
14	9	2	8
3	17	13	5
30	19	9	58

Solutia optimă este $\bar{x}_{11} = 9$, $\bar{x}_{12} = 2$, $\bar{x}_{13} = 1$, $\bar{x}_{21} = 16$, $\bar{x}_{32} = 17$, $\bar{x}_{43} = 8$, $\bar{x}_{51} = 5$, iar costul minim de transport este 626.

8) Să se rezolve următoarea problema de transport:

6	5	4	11	6	9	20
1	3	2	5	1	4	18
2	4	1	6	9	7	5
11	7	8	10	4	3	43

Solutia optimă este $\bar{x}_{11} = 5$, $\bar{x}_{12} = 7$, $\bar{x}_{13} = 8$, $\bar{x}_{21} = 1$, $\bar{x}_{24} = 10$, $\bar{x}_{25} = 4$, $\bar{x}_{26} = 3$, $\bar{x}_{31} = 5$, iar costul minim de transport este 174.

9) Să se rezolve problema de transport dată în tabelul:

3	2	6	5	10
1	7	4	6	11
2	5	3	4	8
5	8	9	7	29

Solutia optimă este $\bar{x}_{12} = 8$, $\bar{x}_{14} = 2$, $\bar{x}_{21} = 5$, $\bar{x}_{23} = 6$, $\bar{x}_{33} = 3$, $\bar{x}_{34} = 5$, iar costul minim este 84.

10) Să se rezolve următoarea problema de transport:

5	3	8	1	2	4	18
2	6	3	7	2	5	12
3	1	2	8	5	3	18
5	6	2	10	11	14	48

Solutia optimă este $\bar{x}_{14} = 10$, $\bar{x}_{15} = 4$, $\bar{x}_{16} = 4$, $\bar{x}_{21} = 5$, $\bar{x}_{25} = 7$,
 $\bar{x}_{32} = 6$, $\bar{x}_{33} = 2$, $\bar{x}_{36} = 10$, iar costul minim de transport este 98.

11) Să se rezolve următoarea problemă de transport:

1	7	6	5	2	8	3	10
3	6	1	4	9	2	8	25
2	7	3	1	5	4	8	30
1	10	4	2	11	20	3	15
12	10	15	13	7	9	14	80

Solutia optimă este $\bar{x}_{11} = 3$, $\bar{x}_{15} = 7$, $\bar{x}_{22} = 1$, $\bar{x}_{23} = 15$, $\bar{x}_{26} = 9$,
 $\bar{x}_{31} = 8$, $\bar{x}_{32} = 9$, $\bar{x}_{34} = 13$, $\bar{x}_{41} = 1$, $\bar{x}_{47} = 14$, iar costul minim de transport este 192.

7. PROGRAMARE LINEARA IN NUMERE INTREGI

7.1. Programare totală în numere întregi.

Fie problema de programare lineară în numere întregi

$$(1) \max c'x$$

$$(2) Ax = b$$

$$(3) x \geq 0$$

$$(4) x \in \mathbb{Z}^n$$

unde A este o matrice $(m \times n)$ de rang m , ale cărei elemente sunt numere întregi, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$. Metoda propusă de Gomory pentru rezolvarea unei astfel de probleme, constă în rezolvarea succesivă a unui sir de probleme de programare lineară obisnuite obținute din (1) - (3), prin adăugarea unor relații suplimentare. Aceste relații suplimentare se construiesc având în vedere (4).

Gomory a elaborat doi algoritmi pentru rezolvarea problemelor de programare în numere întregi, bazati pe principiul introducerii unor restricții suplimentare numite tăieturi sau secțiuni. Vom prezenta mai jos acești algoritmi.

7.1.1. Algoritmul ciclic

Algoritmul ciclic constă în următoarele:

Pasul 1. Se rezolvă, mai întâi, problema de programare lineară (1) - (3). Dacă soluția optimă obținută $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ (dacă există) verifică condiția (4) atunci algoritmul s-a terminat. Altfel se trece la pasul 2.

Pasul 2. Fie indicele i astfel ca:

$i = \min \{ 1 \leq j \leq n / x_j$ variabilă de bază, \bar{x}_j neîntreagă. $\}$

In tabloul simplex corespunzător soluției de bază \bar{x} , punem în evidență părțile fractionare ale componentelor liniei variabilei de bază x_i . Fie $f_i = \{\bar{x}_i\}$, $f_i \in (0,1)$ partea fractionară a componentei \bar{x}_i iar $f_{ij} = \{y_{ij}\}$, $f_{ij} \in [0,1]$ partea fractionară a elementului y_{ij} care se găsește în tabloul simplex corespunzător soluției de bază x . Se scrie ecuația de tăietură:

(5)

$$\sum_{j=1}^n (-f_{ij}) \cdot x_j + x_{n+1} = -f_i$$

(6)

$$x_{n+1} \geq 0, \quad x_{n+1} \in \mathbb{Z}$$

Restrictia (5) avind conditia de nonnegativitate (6) se poate adauga tabloului simplex corespunzator solutiei de bază \bar{x} . Valoarea variabilei de bază în această nouă linie este negativă. Se trece la pasul 3.

Pasul 3. Baza asociată tabelului simplex obținut prin adăugarea unei coloane pentru x_{n+1} , este dual admisibilă. Astfel se va elimina din bază variabila x_1 . Aplicând algoritmul simplex dual pe acest tabel completat putem avea două cazuri:

Cazul 1: nu pot fi eliminate toate componente negative din soluție, care apar în cursul aplicării algoritmului simplex dual;

Cazul 2: se pot eliminate toate componente negative din soluție.

In primul caz problema (1) - (4) nu are programe. Cazul 2 ne furnizează o soluție \bar{x}^1 cu $(n+1)$ componente. Dacă \bar{x}^1 are toate componente întregi, va fi soluția căutată. În caz contrar se trece la pasul 2.

Observații: 1) Pentru ca algoritmul să conveargă într-un număr finit de pași se cere în plus ca domeniul soluțiilor posibile definit de (2) - (4) să fie mărginit. 2) La pasul 2, uneori, se alege indicele i pentru care \bar{x}_i^B are parte fractioanară cea mai mare, sau se alege $i = \min \{ 1 \leq j \leq n / x_j \text{ variabilă de bază, } \bar{x}_j^B \text{ nefintreagă} \}$. Asemenea alegeri se fac pentru a demonstra convergența algoritmului.

Probleme rezolvate

1) Să se rezolve

$$\max (9x_1 + 5x_2)$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 7x_1 + 3x_2 \leq 68 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Soluție:

Deoarece coeficienții sistemului de inecuații sunt numere întregi iar variabilele x_1 și x_2 sunt supuse la condiția $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, rezultă că și variabilele ecărte x_3, x_4 care se introduc pentru egalizare trebuie să fie supuse la condiția $x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$. Astfel problema inițială se transformă într-o problemă de forma (1) - (4):

$$\max (9x_1 + 5x_2)$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 75 \\ 7x_1 + 3x_2 + x_4 = 68 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Pentru a rezolva această problemă trebuie, mai întâi, să rezolvăm problema de programare lineară:

$$\max (9x_1 + 5x_2)$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 75 \\ 7x_1 + 3x_2 + x_4 = 68 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Se observă că sistemul conține o bază unitate formată din vectorii (a^3, a^4) . Primul tabel simplex este:

C_B	x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	75	6	4	1	0
$\leftarrow 0$	x_4	68	7	3	0	1
		0	-9	-5	0	0

Deoarece există $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ cu $z_j - c_j < 0$ soluția asociată acestei baze poate fi îmbunătățită. Intră în bază a^1 și ieșe a^4 . Luând ca pivot pe $y_{41} = 7$ și transformând acest tabel obținem:

C_B	x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4
$\leftarrow 0$	x_3	117/7	0	10/7	1	-6/7
9	x_1	68/7	1	3/7	0	1/7
		612/7	0	-8/7	0	9/7

În acest tabel înlocuind a^3 cu a^2 obținem următorul tabel optim:

C_B	x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4
5	x_2	117/10	0	1	7/10	-3/5
9	x_1	47/10	1	0	-3/10	2/5

(Tabelul 1)

Se observă că soluția obținută nu verifică condiția de tip (4). Prin urmare putem trece la pasul 2. Fie:

$i = \min \{1 \leq j \leq 4 / x_j \text{ variabilă de bază, } \bar{x}_j \text{ nef întreagă}\}$
Obținem $i = 1$. Părțile fractionare corespunzătoare liniei variabilei de bază x_1 sunt:

$$f_1 = \{\bar{x}_1\} = \{47/10\} = \frac{7}{10}$$

$$f_{13} = \{y_{13}\} = \{-3/10\} = \frac{7}{10}$$

$$f_{14} = \{y_{14}\} = \{2/5\} = \frac{2}{5}$$

Ecuatia de tăietură (5) devine:

$$-\frac{7}{10}x_3 - \frac{2}{5}x_4 + x_5 = -\frac{7}{10}$$

deoarece $f_{11} = f_{12} = 0$.

Introducind această restricție suplimentară, completăm ultima parte a tabelului simplex 1 cu elementele corespunzătoare acestei relații și aplicăm algoritmul simplex dual pentru eliminarea componentei negative.

C_B	x^B	\bar{x}^B	9	5	0	\downarrow	0	0
			x_1	x_2	x_3		x_4	x_5
5	x_2	$117/10$	0	1	$7/10$	$-3/5$	0	
9	x_1	$47/10$	1	0	$-3/10$	$2/5$	0	
$\leftarrow 0$	x_5	$-7/10$	0	0	$(-7/10)$	$-2/5$	1	
			0	0	$4/5$	$3/5$	0	

Ieșe din bază a⁵ și intră a³. Obținem următorul tabel:

C_B	x^B	\bar{x}^B	9	5	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	11	0	1	0	-1	1
9	x_1	5	1	0	0	$4/7$	$-3/7$
0	x_3	1	0	0	1	$4/7$	$-10/7$
		100	0	0	0	$1/7$	$8/7$

Obținem o nouă soluție posibilă, care fiind întreagă, reprezintă soluția problemei de programare lineară în numere întregi. Prin urmare soluția optimă este $\bar{x}_1 = 5$, $\bar{x}_2 = 11$, iar $z_{\text{optimal}} = 100$.

2) Să se rezolve:

$$\max (-x_1 + 3x_2)$$

$$-2x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$2x_1 + \frac{5}{2}x_2 \geq 5$$

$$(7) \quad x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Solutie:

Pentru a putea rezolva această problemă cu algoritmul ciclic trebuie, mai întâi, să facem astfel ca sistemul de inegalități să conțină numai coeficienți întregi. Este necesar acest lucru deoarece variabila ecart care se va introduce după aceea va fi supusă la condiția de a fi întreagă. Dacă am introduce înainte în a două inegalitate o variabilă ecart atunci am obținut o problemă de programare lineară mixtă în care variabila ecart introdusă nu va fi supusă condiției de a fi întreagă. Aducând la același numitor în a două inegalitate obținem problema:

$$\max (-x_1 + 3x_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Introducând trei variabile ecart (și ele supuse la condiția de a fi întregi, condiție ce rezultă din forma relațiilor sistemului de inegalități) obținem problema de programare în numere întregi de forma (1) - (4):

$$\max (-x_1 + 3x_2)$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_4 = 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_5 = 5 \\ x_1, \dots, x_5 \geq 0 \\ x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Rezolvând problema de programare lineară obținută din (8) prin neglijarea condiției de integritate de tip (4), obținem următorul tabel simplex optim:

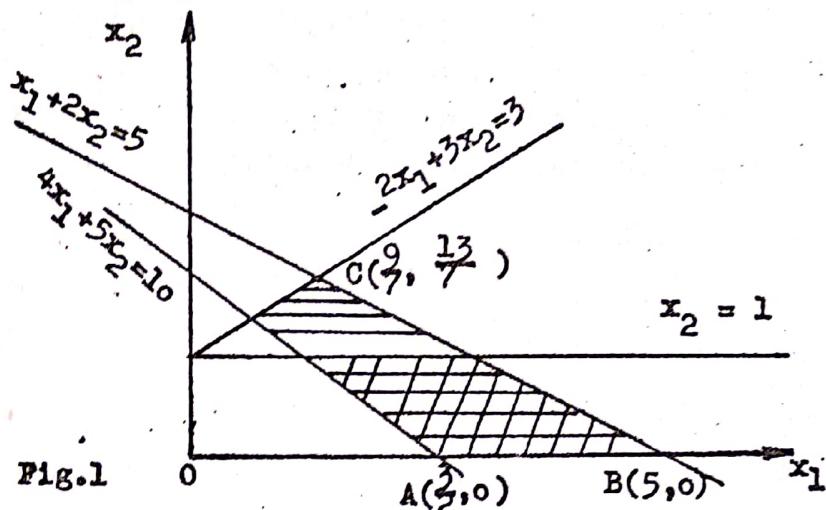
a_B	x^B	\bar{x}^B	-1	3	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	x_2	$13/7$	0	1	$1/7$	0	$2/7$
0	x_4	$31/7$	0	0	$-3/7$	1	$22/7$
-1	x_1	$9/7$	1	0	$-2/7$	0	$3/7$
		$30/7$	0	0	$5/7$	0	$3/7$

După cum se vede, punctul optim:

$$\bar{x}_1 = \frac{9}{7}, \quad x_2 = \frac{13}{7}, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{31}{7}, \quad x_5 = 0$$

$$\text{iar } \max(-x_1 + 3x_2) = \frac{30}{7}$$

In figura 1. este trecut punctul $(x_1, x_2) = (\frac{9}{7}, \frac{13}{7})$ in sistemul de axe x_1, x_2 .



Punctul C nu corespunde unei soluții întregi. De aceea vom genera o tăietură Gomory alegind în tabloul de mai sus prima linie care exprimă pe x_2 funcție de variabilele secundare x_3 și x_4 . Deci $i = 2$. Deoarece:

$$t_2 = \left\{ \frac{13}{7} \right\} = \frac{6}{7}$$

$$t_{21} = t_{22} = t_{24} = 0$$

$$t_{23} = \left\{ \frac{1}{7} \right\} = \frac{1}{7}$$

$$t_{25} = \left\{ \frac{2}{7} \right\} = \frac{2}{7}$$

ecuația de tăietură va fi:

$$(9) \quad -\frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_5 + x_6 = -\frac{6}{7}$$

ou: $x_6 \geq 0$, și $x_6 \in \mathbb{Z}$.

Pentru a reprezenta grafic ecuația de tăietură (9) vom scrie relația în forma:

$$-\frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_5 \leq -\frac{6}{7}$$

Care se reduce la:

$$(10) \quad x_3 + 2x_5 \geq 6$$

Inlocuind în (10) pe x_3 și x_5 obținuți din (8) funcție de x_1

și x_2 :

$$x_3 = 3 + 2x_1 - 3x_2$$

$$x_5 = 5 - x_1 - 2x_2$$

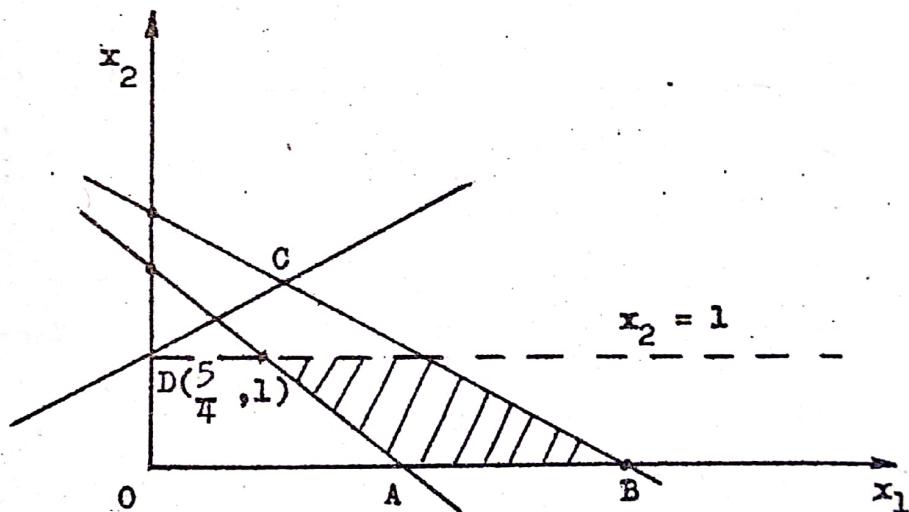
rezultă ecuația de tăietură exprimată în variabilele x_1, x_2 :

$$(11) \quad x_2 \leq 1$$

Sub forma (11), tăietura Gomory poate fi reprezentată în planul x_1, x_2 :

x_1, x_2

Fig.2



Se vede că restricția (11) restrînge domeniul soluțiilor admisibile (portiunea hașurată din Fig.1) la domeniul din Fig.2 (portiunea hașurată), "tăind" o parte din soluții, printre care și pe $(x_1, x_2) = (\frac{9}{7}, \frac{13}{7})$.

Am folosit Fig.1 și Fig.2 numai pentru a da o interpretare geometrică metodei Gomory. Acum vom completa tabelul simplex de mai sus cu noua restricție (9). Obținem următorul tabel:

C_B	x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3	x_2	$13/7$	0	1	$1/7$	0	$2/7$	0
0	x_4	$31/7$	0	0	$-3/7$	1	$22/7$	0
-1	x_1	$9/7$	1	0	$-2/7$	0	$3/7$	0
-0	x_6	$-6/7$	0	0	$-1/7$	0	$-2/7$	1
		$30/7$	0	0	$5/7$	0	$3/7$	0

Folosind algoritmul simplex dual pentru a reoptimiza acest tabel obținem:

c_B	x^B	\bar{x}^B	-1	3	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3	x_2	1	0	1	0	0	0	1
0	x_4	-5	0	0	(-2)	1	0	11
-1	x_1	0	1	0	-1/2	0	0	1/2
0	x_5	3	0	0	1/2	0	1	-7/2
		3	0	0	1/2	0	0	3/2
3	x_2	1	0	1	0	0	0	1
0	x_3	5/2	0	0	1	-2/4	0	-11/2
-1	x_1	5/4	1	0	0	-1/4	0	-5/4
0	x_5	7/4	0	0	0	1/4	1	-3/4
		7/4	0		0	1/4	0	17/4

(Tabel 2)

Soluția obținută este:

$$\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = \frac{5}{4}, \bar{x}_3 = \frac{5}{2}, \bar{x}_4 = 0, \bar{x}_5 = \frac{7}{4}, \bar{x}_6 = 0$$

și este redată în Fig.2. Soluția obținută nu este întreagă și de aceea trebuie să construim o nouă tăietură Gomory. Ca și mai sus luăm i astfel ca partea fracționară f_i să fie cea mai mare. Ea corespunde lui $f_5 = \{\bar{x}_5\} = \frac{3}{4}$.

Deoarece:

$$f_{51} = f_{52} = f_{53} = f_{55} = 0$$

$$f_{54} = f_{56} = \frac{1}{4}$$

ecuația de tăietură corespunzătoare este:

$$(12) \quad -\frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 + x_7 = -\frac{3}{4}$$

unde $x_7 \geq 0, x_7 \in \mathbb{Z}$.

Pentru a reprezenta grafic porțiunea înălțaturată din domeniul admisibil (Fig.2), vom scrie (12) în forma:

$$-\frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 \leq -\frac{3}{4}$$

care se reduce la:

$$(13) \quad x_4 + x_6 \geq 3$$

Din (8) avem pe x_4 funcție de x_1 și x_2 :

$$x_4 = -10 + 4x_1 + 5x_2$$

Folosind (9) și cele două relații ce urmează lui (10) obținem:

$$x_6 = 1 - x_2$$

Prin urmare (13) devine:

$$(14) \quad x_1 + x_2 \geq 3$$

In figura 3 este reprezentată dreapta $x_1 + x_2 = 3$:

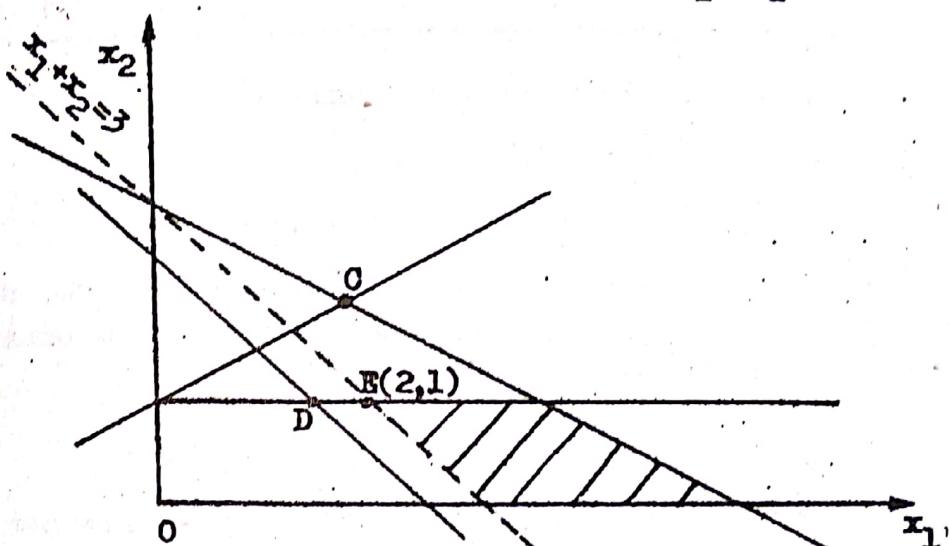


Fig.3

Adăugăm restricția (12) ultimului tabel simplex, care devine:

\bar{c}_B	x^B	\bar{x}^B	-1	3	0	0	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
3	x_2	1	0	1	0	0	0	1	0
0	x_3	$5/2$	0	0	1	$-1/2$	0	$-11/2$	0
-1	x_1	$5/4$	1	0	0	$-1/4$	0	$-5/4$	0
0	x_5	$7/4$	0	0	0	$1/4$	1	$-3/4$	0
-0	x_7	$-3/4$	0	0	0	$(-1/4)$	0	$-1/4$	1
			$7/4$	0	0	$1/4$	0	$17/4$	0

Pentru a reoptimiza această problemă folosim algoritmul simplex dual. Se obține tabelul:

C_B	x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_2	1	0	1	0	0	0	0	0	1
x_3	4	0	0	1	0	0	0	2	-5
x_1	2	1	0	0	0	0	0	1	-1
x_5	1	0	0	0	0	1	-1	-1	
x_4	3	0	0	0	1	0	-4	1	
		1	0	0	0	0	0	1	4

care dă soluția optimă în numere întregi:

$$\bar{x}_1 = 2, \bar{x}_2 = 1, \bar{x}_3 = 4, \bar{x}_4 = 3, \bar{x}_5 = 1$$

$$\bar{x}_6 = \bar{x}_7 = 0 \text{ iar } \max(-x_1 + 3x_2) = 1.$$

Prin urmare soluția optimă, în numere întregi, a problemei inițiale (7) este $\bar{x}_1 = 2, \bar{x}_2 = 1$. În figura 3 este reprezentată această soluție optimă prin punctul E.

3) Să se găsească multimea soluțiilor optime pentru problema:

$$(15) \quad \begin{cases} \min (4x_1 + 3x_2 + 6x_3) \\ 43x_1 + 40x_2 + 48x_3 \geq 500 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Soluție:

Introducem două variabile ecart x_4 și x_5 și transformăm problema de minim într-o problemă de maxim. Obținem:

$$(16) \quad \begin{cases} \max (-4x_1 - 3x_2 - 6x_3) \\ 43x_1 + 40x_2 + 48x_3 - x_4 = 500 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Rezolvând problema de programare lineară (16) fără condiția de integritate obținem următorul tabel simplex optim:

C_B	x^B	\bar{x}^B	-4	-3	-6	x_4	x_5
	x_1	$20/3$	1	0	$8/3$	$-1/3$	$-40/3$
	x_2	$16/3$	0	1	$-5/3$	$1/3$	$43/3$
		$-128/3$	0	0	$1/3$	$1/3$	$31/3$

Să observăm că soluția obținută nu are componente întregi. Fie:

$$f_1 = \{ \bar{x}_1 \} = \left\{ \frac{20}{3} \right\} = \frac{2}{3}$$

$$f_2 = \{ \bar{x}_2 \} = \left\{ \frac{16}{3} \right\} = \frac{1}{3}$$

Alegem i astfel ca $f_1 = \max \{ f_1, f_2 \}$. Deci variabilei de bază $x_1 = x_1$ atașăm o ecuație de tăietură. Părțile fractionare corespunzătoare componentelor liniei variabilei de bază x_1 sint:

$$f_{11} = f_{12} = 0, f_{13} = \frac{2}{3}, f_{14} = \frac{2}{3}, f_{15} = \frac{2}{3}.$$

Prin urmare ecuația de tăietură are forma:

$$(17) \quad -\frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 + x_6 = -\frac{2}{3}$$

Completăm tabelul simplex de mai sus cu o nouă linie ce corespunde relației (17) și o nouă coloană ce corespunde variabilei care este variabilă de bază, x_6 . Valoarea acestei variabile de bază este $-\frac{2}{3}$. Tabelul completat este următorul:

C_B	x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	$x_4 \downarrow$	x_5	x_6
	x_1	$20/3$	1	0	$8/3$	$-1/3$	$-40/3$	0
	x_2	$16/3$	0	1	$-5/3$	$1/3$	$43/3$	0
	x_6	$-2/3$	0	0	$-2/3$	$(-2/3)$	$-2/3$	1
		$-128/3$	0	0	$1/3$	$1/3$	$31/3$	0

Aplicând algoritmul simplex dual acestui tabel observăm că ieșe variabila x_6 din bază și intră x_4 . Transformând acest tabel obținem:

	x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	$x_3 \downarrow$	x_4	x_5	x_6
	x_1	7	1	0	3	0	-13	$1/3$
	x_2	5	0	1	-2	0	14	$1/3$
	x_4	1	0	0	(1)	1	1	-1
		-43	0	0	0	0	10	$1/3$

Acest tabel ne furnizează o soluție ale cărei componente sunt întregi. Deci o soluție optimă pentru problema inițială este:

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6)' = (7, 5, 0, 1, 0, 0)'$$

Pe de altă parte, deoarece $z_3 - c_3 = 0$, iar x_3 este variabilă secundară, putem introduce pe x_3 în bază și eliminăm o variabilă de bază aplicând criteriul de ieșire din bază de la algoritmul simplex primal. Deoarece $\min\left\{\frac{7}{3}, \frac{1}{1}\right\} = 1$ este atins pe linia lui x_4 , va ieși din bază variabila x_4 . Pivotind tabelul de mai sus în jurul lui $y_{43} = 1$ obținem următorul tabel simplex optim:

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	4	1	0	0	-3	$8/3$	$8/3$
x_2	7	0	1	0	2	$-5/3$	$-5/3$
x_3	1	0	0	1	1	-1	-1
	-43	0	0	0	0	10	$1/3$

Acest tabel ne furnizează o altă soluție optimă întreagă:

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6)' = (4, 7, 1, 0, 0, 0)'$$

Se poate arăta ușor că pe segmentul $[\bar{x}, \bar{x}]$,

$$[\bar{x}, \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R}^6 / x = \lambda \bar{x} + (1 - \lambda) \bar{x}, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

nu avem alte soluții întregi decât cele găsite mai sus. Deci mulțimea soluțiilor optime pentru problema dată are numai două elemente.

4) Dacă problema (1) - (3) are optim infinit iar sistemul (2) - (4) are cel puțin o soluție atunci problema (1) - (4) are optim infinit.
Soluție:

Deoarece problema (1) - (3) are optim infinit rezultă că fixind o anumită bază B din matricea A există $k \in \mathcal{R}$ astfel ca $z_k^B - c_k < 0$ și $y_{ik} \leq 0$ pentru orice $i \in \mathcal{B}$, unde \mathcal{B} este mulțimea indicilor variabilelor de bază iar \mathcal{R} este mulțimea indicilor variabilelor secundare. Definim vectorul α astfel ca:

$$d_i = -y_{ik}, i \in \mathcal{B}$$

$$d_k = 1$$

$$d_j = 0, j \in \mathcal{R} \setminus \{k\}$$

lol

Deoarece A și b sunt matrici cu elemente numere întregi rezultă că vectorul α are componente rationale. Fie M numitorul lor comun, iar β vectorul cu componente întregi:

$$\beta = M\alpha$$

Evident că $\beta \geq 0$ și $A\beta = 0$.

Deoarece sistemul (2) - (4) are cel puțin o soluție, există $x_0 \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{Z}^n$ astfel ca $Ax_0 = b$. Fie vectorul:

$$\tilde{x}_n = x_0 + n\beta, \text{ unde } n \text{ este natural.}$$

Este clar că $\tilde{x} \geq 0$, $\tilde{x} \in \mathbb{Z}^n$ și $A\tilde{x} = b$. Pentru această soluție avem:

$$\begin{aligned} c' \tilde{x}_n &= c'(x_0 + n\beta) = c'x_0 + nM c' \alpha \\ &= c'x_0 + nM(c_k - z_k^B) \end{aligned}$$

Deoarece $M \cdot (c_k - z_k^B) > 0$, luând mai sus n tînzînd la infinit rezultă:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c' \tilde{x}_n = +\infty$$

adică problema (1) - (4) are optim infinit.

Probleme propuse

5) Să se rezolve:

$$\begin{aligned} \max & (3x_1 + x_2 + 5x_3) \\ \left\{ \begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leq 15 \\ x_1, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z}, x_3 \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Soluția optimă: $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$; $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

$$\max z = 14.$$

6) Să se rezolve problema:

$$\min (5x_1 + 4x_2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + x_2 \geq 9 \\ x_1 + 2x_2 \geq 7 \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 21 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

Soluție: $x_1 = 3$, $x_2 = 2$; $\max z = 23$.

7) Să se găsească:

$$\min (-x_1 - x_2 + x_3)$$

cu condițiile:

$$\frac{1}{3}x_1 + x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$

$$x_i \geq 0, i = \overline{1,3}$$

$$x_i \in \mathbb{Z}, i = \overline{1,3}$$

Soluție: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $\min z = 0$

8) Să se rezolve:

$$\max (7x_1 + 5x_2 + 4x_3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 9$$

$$2x_1 \leq \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3)$$

$$x_1 \geq 0, i = \overline{1,3}$$

$$x_1 \in \mathbb{Z}, i = \overline{1,3}$$

Soluție: $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $\max z = 20$.

9) Să se găsească:

$$\min (-2x_1 - x_2)$$

în condițiile:

$$10x_1 - 3x_2 \leq 20$$

$$6x_1 + 7x_2 \leq 56$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Soluție: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $\min z = -11$

7.1.2. Algoritmul discret

Fie problema de programare lineară în numere întregi (1) - (4) definită la începutul capitolului. Algoritmul discret constă în următoarele:

Pasul 1. Se găsește o bază B dual admisibilă pentru problema de programare lineară (1) - (3). (vezi § 2.3.). Se scrie tabelul simplex corespunzător acestei baze.

Dacă baza B este și primal admisibilă, adică dacă $\bar{x}^B = B^{-1}b \geq 0$ atunci soluția obținută este și soluție pentru problema (1) - (4), deoarece toate elementele tabelului simplex sunt numere întregi.

Dacă \bar{x}^B are cel puțin o componentă negativă, atunci trecem la pasul 2.

Pasul 2. Fie indicele ℓ astfel ca:

$$(18) \quad \bar{x}_\ell^B = \min \left\{ \bar{x}_i^B / i \in \mathcal{B} \right\}$$

Definim mulțimea:

$$(19) \quad \mathcal{J}(\ell) = \left\{ j \in \mathcal{R} / y_{\ell j} < 0 \right\}$$

Dacă $\mathcal{J}(\ell) = \emptyset$ atunci problema (1)-(4) nu are soluție.

Dacă $\mathcal{J}(\ell) \neq \emptyset$ trecem la pasul 3.

Pasul 3. Fie indicele k astfel ca:

$$(20) \quad z_k^B - c_k = \min \left\{ z_j^B - c_j / j \in \mathcal{J}(\ell) \right\}$$

Pentru $j \in \mathcal{J}(\ell)$ notăm:

$$(21) \quad g_j = \begin{bmatrix} \frac{z_j^B - c_j}{z_k^B - c_k} \end{bmatrix}$$

$$h_j = \begin{bmatrix} -\frac{y_{\ell j}}{g_j} \end{bmatrix}$$

unde cu $[a]$ am notat partea întreagă a numărului a .

Acum punem:

$$(22) \quad \lambda = \max_{j \in J \setminus \{l\}} \left\{ -y_{lk}, h_j \right\}$$

și trecem la pasul 4.

Pasul 4. Scriem ecuația de tăietură:

$$(23) \quad \left[\frac{\bar{x}_l^B}{\lambda} \right] - \sum_{j \in \mathcal{R}} \left[\frac{y_{lj}}{\lambda} \right] \cdot x_j \geq 0$$

pe care o atașăm tabloului simplex corespunzător bazei dual admisibile B. Pentru aceasta se introduce o nouă variabilă ecart în (2.3), variabilă care este supusă la condițiile, de a fi nenegativă și întreagă. Astfel se atașează tabelului simplex o nouă linie și o nouă coloană. Variabilă ecart va fi o variabilă de bază. Se va elimina din bază această variabilă și va intra în bază variabila x_k . Astfel vom avea de fiecare dată pivotul egal cu -1, și elementele oricărui tabel simplex numere întregi.

Dacă după înlocuirea variabilei ecart cu variabila x_k , noua bază este primal admisibilă atunci tabelul obținut furnizează soluția problemei (1) - (4). În caz contrar se trece la pasul 1.

Probleme rezolvate

1) Să se găsească soluția următoarei probleme de programare în numere întregi:

$$(24) \quad \begin{aligned} & \max (-8x_1 - 3x_2) \\ & \left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + 4x_2 \geq 2 \\ 7x_1 + 3x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Soluție:

Introducem două variabile ecart x_3, x_4 și punem în evidență o bază unitate. Obținem problema:

$$\begin{aligned} & \max (-8x_1 - 3x_2) \\ & \left\{ \begin{array}{l} -5x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \\ -7x_1 - 3x_2 + x_4 = -2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Tabelul simplex inițial corespunzător acestei probleme fără condiția de integritate este:

c_B	x^B	\bar{x}^B	-8	-3	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	-2	-5	-4	1	0
0	x_4	-2	-7	-3	0	1
		0	8	3	0	0

Se observă că baza asociată acestui tabel este o bază dual admisibilă, deoarece $z_1^B - c_1 > 0$, $z_2^B - c_2 > 0$

Pentru pasul 2 alegem $\ell = 3$. Deci:

$$\mathcal{I}(3) = \{j \in \mathcal{R} / y_{3j} < 0\}.$$

Deoarece $\mathcal{R} = \{1, 2\}$ avem $\mathcal{I}(3) = \{1, 2\}$

Trecem la pasul 3. Din (20) obținem:

$$z_2^B - c_2 = \min \{z_j^B - c_j \mid j \in \mathcal{I}(3)\} = 3.$$

Deci $k = 2$. Folosind (21) avem:

$$g_1 = \left[\frac{z_1^B - c_1}{z_2^B - c_2} \right] = \left[\frac{8}{3} \right] = 2$$

$$g_2 = 1$$

$$h_1 = \left[-\frac{y_{31}}{g_1} \right] = \left[-\frac{-5}{2} \right] = \left[\frac{5}{2} \right] = 2$$

$$h_2 = \left[-\frac{y_{32}}{g_2} \right] = \left[4 \right] = 4$$

Prin urmare:

$$\lambda = \max \{-y_{32}, h_1, h_2\} = \max \{4, 2, 4\} = 4$$

Conform (23), restricția suplimentară este:

$$\left[\frac{-2}{4} \right] - \left[-\frac{5}{4} \right] x_1 - \left[-\frac{4}{4} \right] x_2 \geq 0$$

$$-1 + 2x_1 + x_2 \geq 0.$$

Introducind variabila ecart $x_5 \geq 0$, $x_5 \in \mathbb{Z}$ obținem:

$$-2x_1 - x_2 + x_5 = -1$$

Adăugăm tabelului de mai sus această restricție și o nouă coloană. Obținem:

c_B	x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	x_3	-2	-5	-4	1	0	0
	x_4	-2	-7	-3	0	1	0
←	x_5	-1	-2	(-1)	0	0	1
		0	8	3	0	0	0

Efectuind un pivotaj în jurul elementului $y_{52} = 1$ obținem:

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	2	3	0	1	0	-4
x_4	1	-1	0	0	1	-3
x_2	1	2	1	0	0	-1
	-3	2	0	0	0	3

Acum tabelul este optim. Deci soluția optimă a problemei (24) este:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 1 \quad \text{și } \max z = -3.$$

2) Să se rezolve cu algoritm discret următoarea problemă:

$$(25) \quad \begin{aligned} & \max (x_1 - 5x_2) \\ & \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 \leq 6 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Soluție:

Introducem variabilele ecarte $x_3, x_4 \geq 0$, $x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ și obținem problema:

$$\begin{aligned} & \max (x_1 - 5x_2) \\ & \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_1 \geq 0, \quad i = \overline{1,4} \\ x_i \in \mathbb{Z}, \quad i = \overline{1,4} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Considerind problema de programare lineară fără condiția de integritate, se constată că avem o bază unitate $B = (a^3, a^4)$. Calculând

$z_j^B - c_j$ pentru $j = 1, 2$ se constată că baza B nu este dual admisibilă.
deoarece $z_1^B - c_1 = -1 < 0$ și $z_2^B - c_2 = 5 > 0$ adăugăm restricția:

$$x_1 \leq M,$$

(26)

unde M este un întreg ce trebuie ales. Este recomandat să se aleagă M cît mai mic pentru ca numărul iterărilor la aplicarea algoritmului discret să fie cît mai mic.

Inmulțind prima restricție din (25) cu 3 și adunând relația obținută cu a doua relație obținem:

$$8x_1 \leq 27$$

adică $x_1 \leq \frac{27}{8}$. Vom lua $M = 4$. Înlocuind valoarea lui M în (26) și introducind o variabilă ecart $x_0 \geq 0$, $x_0 \in \mathbb{Z}$ obținem restricția:

$$x_1 + x_0 = 4$$

Audem următorul tabel simplex:

c_B	x^B	\bar{x}^B			1				-5	
					x_1	x_2	x_3	x_4	x_0	
0	x_3	6			3	-1	1	0	0	
0	x_4	9			-1	3	0	1	0	
-5	x_0	4			(1)	0	0	0	1	
			0		-1	5	0	0	0	

În acest tabel eliminăm din bază pe x_0 și introducem pe x_1 . Obținem o bază $\tilde{B} = (a_3, a_4, a_1)$ dual admisibilă:

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0
x_3	-6	0	-1	1	0	-3
x_4	13	0	3	0	1	1
x_1	4	1	0	0	0	1
	4	0	5	0	0	1

Conform algoritmului discret, deoarece baza \tilde{B} nu este și primal admisibilă, trecem la pasul 2. Avem $\ell = 3$ și $\gamma(2) = \{2, 0\}$.

Trecind la pasul 3, avem $k = 0$. Este clar că:

$$g_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 5, \quad g_0 = 1$$

Prin urmare $\lambda = 3$.
 $h_2 = 0, \quad h_0 = 3$.

Conform (23), restricția suplimentară este:

$$\left[-\frac{6}{3} \right] - \left[-\frac{1}{3} \right] x_2 - \left[-\frac{3}{3} \right] x_0 \geq 0$$

adică

$$-2 + x_2 + x_0 \geq 0.$$

Introducem variabila ecart $x_5 \geq 0$, $x_5 \in \mathbb{Z}$ și obținem:

$$-x_2 - x_0 + x_5 = -2.$$

Adăugind această restricție la ultimul tabel simplex rezultă:

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0	x_5
x_3	-6	0	-1	1	0	-3	0
x_4	13	0	3	0	1	1	0
x_1	4	1	0	0	0	1	0
$-x_5$	-2	0	-1	0	0	(-1)	1
	4	0	5	0	0	1	0

Conform pasului 4, va ieși din bază variabila x_5 și va intra variabila $x_k = x_0$. După transformări obținem:

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0	x_5
x_3	0	0	2	1	0	0	-3
x_4	11	0	2	0	1	0	1
x_1	2	1	-1	0	0	0	1
x_0	2	0	1	0	0	1	-1
	2	0	4	0	0	0	1

Acest tabel este optim. Prin urmare soluția problemei definite prin (25) are soluția:

$$\bar{x}_1 = 2, \bar{x}_2 = 0, \max z = 2.$$

Probleme propuse

3) Problema 5 din § 7.1.1.

4) Problema 6 din § 7.1.1.

5) Să se găsească:

$$\max (18x_1 + 7x_2)$$

în condițiile:

$$-2x_1 + x_2 \leq 1$$

$$3x_1 + x_2 \leq 4$$

$$12x_1 + 9x_2 \leq 29$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Solutie: $x_1 = 1, x_2 = 1$.

6) Să se rezolve problema:

$$\min (16x_1 - 4x_2 - 2x_3)$$

$$x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 4$$

$$\frac{1}{4}x_1 - x_2 + x_3 \leq 7$$

$$x_1 + 6x_2 - 2x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

Solutie: $x_1 = 5, x_2 = 1, x_3 = 3$

$$\min z = 70.$$

7.2. Programare mixtă. Algoritmul mixt.

Fie problema de programare matematică:

$$(1) \quad \max c'x$$

$$(2) \quad Ax = b$$

$$(3) \quad x \geq 0$$

$$(4) \quad x_j \in \mathbb{Z}, j \in J$$

unde A, b, c sunt matrici cu elemente numere rationale, iar $J \neq \emptyset$,
 $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$.

Pentru rezolvarea acestei probleme, Gomory a propus un algoritm, algoritm mixt, care constă în rezolvarea succesivă a unui sir de probleme de programare liniară obișnuite, care se obțin din (1)-(3), prin adăugarea a căte unei relații suplimentare care au în vedere (4). Prin-

cipiu acestui algoritm va fi asemănător cu acela al algoritmului ciclic, deosebindu-se de acesta prin faptul că numai o parte din variabile sunt supuse condiției de integritate. Din această cauză, construcția restricției suplimentare va fi mai complicată.

Algoritmul mixt constă în următoarele:

Pasul 1. Mai întâi, se rezolvă problema de programare lineară (1) - (3). Dacă soluția optimă obținută (dacă există) verifică (4) atunci algoritmul se încheie. În caz contrar trecem la pasul 2.

Pasul 2. Fie x_ℓ variabila de bază în tabelul simplex de la pasul 1, cu $\ell \in J$ și a cărei valoare nu este întreagă. Notăm cu \mathcal{R} multimea indicilor variabilelor secundare care apar în tabelul simplex de la pasul 1. Determinăm multimile:

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R} - \mathcal{R} \cap J$$

$$\mathcal{R}_+^* = \{j \in \mathcal{R}^* / y_{\ell j} > 0\}$$

$$\mathcal{R}_-^* = \{j \in \mathcal{R}^* / y_{\ell j} < 0\}$$

Pentru $j \in \mathcal{R} \cap J$ calculăm părțiile fractionare $f_{\ell j} = \{y_{\ell j}\}$.

De asemenea se calculează $f_\ell = \{\frac{-B}{x_\ell}\}$. Mai determinăm multimile:

$$\mathcal{R}_1 = \{j \in \mathcal{R} \cap J / f_{\ell j} < f_\ell\}$$

$$\mathcal{R}_2 = \{j \in \mathcal{R} \cap J / f_{\ell j} > f_\ell\}$$

Apoi se trece la pasul 3.

Pasul 3. Se adaugă, la ultimul tabel simplex de la pasul 1, următoarea restricție suplimentară:

$$(5) \quad \sum_{j \in \mathcal{R}} (-g_{\ell j}) \cdot x_j + x_{n+1} = -f_\ell$$

unde $x_{n+1} \geq 0$ iar $g_{\ell j}$ definit prin relațiile:

$$(6) \quad g_{\ell j} = \begin{cases} y_{\ell j} & , j \in \mathcal{R}_+^* \\ \frac{f_\ell}{1-f_\ell} |y_{\ell j}| & , j \in \mathcal{R}_-^* \\ f_{\ell j} & , j \in \mathcal{R}_1 \\ \frac{f_\ell}{1-f_\ell} (1-f_{\ell j}) & , j \in \mathcal{R}_2 \end{cases}$$

Tabelul simplex obținut prin adăugarea unei linii și a unei coloane, conține o bază dual admisibilă și se trece la pasul 1 aplicând algoritmul simplex dual.

Observație. Finitudinea acestui algoritm a fost demonstrată folo-

sind argumente asemănătoare celor din paragraful 7.1.1. în ipoteza restricțivă că valoarea optimă a funcției obiectiv este un număr întreg.

Probleme rezolvate

1) Să se rezolve:

$$\begin{aligned} & \max (4x_1 + x_2) \\ \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 + 10x_2 + 10x_4 = 15 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, 4 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{array} \right. \end{aligned}$$

Solutie:

Rezolvând, mai întâi, problema de programare lineară care se obține prin neglijarea restricțiilor de integritate, obținem următorul tabel simplex optim:

x^B	x^B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$7/4$	1	$1/2$	1	0
x_4	$39/40$	0	$17/20$	$-3/10$	1
	7	0	1	4	0

Deoarece $\bar{x}_1 = \frac{7}{4}$ nu este întreagă, trecem la pasul 2. Avem $\ell = 1$.

Variabilele x_1 și x_4 fiind variabile de bază avem $\mathcal{R} = \{2, 3\}$. Din enunțul problemei rezultă $J = \{1, 2\}$. Deci:

$$\mathcal{R} \cap J = \{2\}, \quad \mathcal{R}^* = \{3\}, \quad \mathcal{R}_+^* = \{3\}, \quad \mathcal{R}_-^* = \emptyset$$

Aveam $f_1 = \left\{ \frac{7}{4} \right\} = \frac{3}{4}$, $f_{12} = \frac{1}{2}$. Deci:

$$\mathcal{R}_1 = \{2\}, \quad \mathcal{R}_2 = \emptyset$$

Trecem la pasul 3. Conform (6) avem:

$$g_{12} = f_{12} = \frac{1}{2} \Leftarrow g_{13} = y_{13} = 1.$$

Restricția (5) are forma:

$$-\frac{1}{2}x_2 - x_3 + x_5 = -\frac{3}{4}$$

unde $x_5 \geq 0$. Adăugând această restricție la tabelul simplex de mai sus obținem următorul tabel:

x^B	\bar{x}^B	x_1	$x_2 \downarrow$	x_3	x_4	x_5
x_1	$7/4$	1	$1/2$	1	0	0
x_4	$39/40$	0	$17/20$	$-3/10$	1	0
x_5	$-3/4$	0	$(-1/2)$	-1	0	1
	7	0	1	4	0	0

Aplicind, acestui tabel, algoritmul simplex dual obținem:

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	$x_3 \downarrow$	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	0	1
x_4	$-3/10$	0	0	(-2)	1	$17/10$
x_2	$3/2$	0	1	2	0	-2
	$11/2$	0	0	2	0	2

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	0	1
x_3	$3/20$	0	0	1	$-1/2$	$-17/20$
x_2	$6/5$	0	1	0	1	$-3/10$
	$26/5$	0	0	0	1	$74/5$

Se observă că nici acest tabel nu furnizează soluția optimă pentru problema dată, deoarece $\bar{x}_2 = 6/5$. Trecând la pasul 2, avem $\ell = 2$. Deoarece $J = \{1, 2\}$, $R = \{4, 5\}$ avem:

$$R \cap J = \emptyset, R^* = \{4, 5\}, R_+^* = \{4\}, R_-^* = \{5\}.$$

Audem: $f_2 = \left\{ \frac{6}{5} \right\} = \frac{1}{5}$, $R_1 = R_2 = \emptyset$ și putem trece la pasul 3.

Folosind (6) obținem:

$$g_{24} = y_{24} = 1; g_{25} = \frac{f_2}{1-f_2} |y_{25}| = \frac{3}{40}$$

Din (5) rezultă restricția suplimentară:

$$-x_4 - \frac{3}{40} x_5 + x_6 = -\frac{1}{5}$$

unde $x_6 \geq 0$. Adăugind această restricție la ultimul tabel simplex obținem tabelul:

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	1	0	0	0	1	0
x_3	$3/20$	0	0	1	$-1/2$	$-17/20$	0
x_2	$6/5$	0	1	0	1	$-3/10$	0
$\rightarrow x_6$	$-1/5$	0	0	0	(-1)	$-3/40$	1
	$26/5$	0	0	0	1	$74/5$	0

Aplicînd algoritmul simplex dual acestui tabel, va ieși din bază variabila x_6 și va intra în bază variabila x_4 . Luînd drept pivot $y_{64} = -1$ obținem:

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	1	0	0	0	1	0
x_3	$1/4$	0	0	1	0	$13/16$	$-1/2$
x_2	1	0	1	0	0	$3/8$	1
x_4	$1/5$	0	0	0	1	$3/40$	-1
	5	0	0	0	0	$35/8$	1

Deoarece toate componentele x_j pentru $j \in J = \{1, 2\}$ sunt întregi, programul actual este programul optim căutat. Deci, soluția optimă va fi:

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = \frac{1}{4}, x_4 = \frac{1}{5}$$

iar valoarea funcției de optimizat este 5.

2) Să se rezolve:

$$\max (\frac{11}{6}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq \frac{3}{2}$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq \frac{13}{6}$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq \frac{15}{4}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Soluție:

Pentru a rezolva problema de programare lineară fără condiția de

integritate se introduc variabilele ecărte x_4, x_5, x_6 . Se obține problema în care se optimizează aceeași funcție, însă cu restricțiile:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = \frac{13}{6}$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = \frac{15}{4}$$

$$x_1 \geq 0, \quad i = \overline{1,6}$$

Rezolvând această problemă obținem următorul tabel simplex optim:

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	$3/2$	1	1	1	1	0	0
x_5	$2/3$	0	-2	1	-1	1	0
x_6	$3/4$	0	-3	-3	-2	0	1
	$11/4$	0	$4/3$	$3/2$	$11/6$	0	0

In cazul nostru $J = \{1, 2\}$. Deoarece $\bar{x}_1 = \frac{3}{2}$ nu este întreg, trecem la pasul 2. Avem $\ell = 1$, $\mathcal{R} = \{2, 3, 4\}$, $\mathcal{R} \cap J = \{2\}$, $\mathcal{R}^* = \{3, 4\}$, $\mathcal{R}_{\ell}^* = \{3, 4\}$, $\mathcal{R}_{\ell} = \emptyset$.

$$f_1 = \left\{ \frac{3}{2} \right\} = \frac{1}{2}, \quad f_{12} = 0$$

$$\mathcal{R}_1 = \{2\}, \quad \mathcal{R}_2 = \emptyset$$

Folosind (6) și relațiile de mai sus obținem:

$$g_{12} = f_{12} = 0; \quad g_{13} = y_{13} = 1; \quad g_{14} = y_{14} = 1$$

Obținem de aici și din (5) următoarea restricție suplimentară:

$$-x_4 + x_7 = -\frac{1}{2}$$

unde $x_7 \geq 0$. Adăugăm această restricție la ultimul tabel simplex și obținem:

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	$3/2$	1	1	1	1	0	0	0
x_5	$2/3$	0	-2	1	-1	1	0	0
x_6	$3/4$	0	-3	-3	-2	0	1	0
$\rightarrow x_7$	$-1/2$	0	0	0	(-1)	0	0	1
	$11/4$	0	$4/3$	$3/2$	$11/6$	0	0	0

Aplicind acestui tabel algoritmul simplex dual, se observă că ieșe din bază x_7 și intră x_4 . Obținem:

x^B	\bar{x}^B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	1	1	1	1	0	0	0	1
x_5	$7/6$	0	-2	1	0	1	0	-1
x_6	$7/4$	0	-3	-3	0	0	1	-2
x_4	$1/2$	0	0	0	1	0	0	-1
	$11/6$	0	$4/3$	$3/2$	0	0	0	$11/6$

tabel care este optim. Soluția acestui tabel furnizează și soluția problemei inițiale:

$$\bar{x}_1 = 1, \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0.$$

Probleme propuse

3) Să se rezolve problema:

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{6} = 4$$

$$x_1 - x_2 \geq -3$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 29$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\max \left(\frac{3x_1}{7} + \frac{x_2}{3} \right)$$

$$\underline{\text{Solutie:}} \quad x_1 = 6, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 0$$

4) Să se rezolve:

$$\max (2x_1 + x_2)$$

$$x_1 - x_2 \leq 4$$

$$3x_1 - x_2 \leq 18$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 \in \mathbb{Z}.$$

Solutie: $x_1 = 8$, $x_2 = 6$.

5) Să se rezolve:

$$\max (10x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4)$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_3 + x_4 = 12$$

$$2x_2 + x_3 + 3x_4 = 16$$

$$x_1 \geq 0, i = \overline{1,4}$$

$$x_2 \in \mathbb{Z}$$

Solutie:

Se obține: $x_1 = \frac{97}{18}$, $x_2 = 6$, $x_3 = \frac{19}{6}$, $x_4 = 0$.

II. CONVEXITATE

1. PRELIMINARII

1.1. Preliminarii topologice

Un element $x \in \mathbb{R}^n$ va fi considerat vector coloană; accentul va indica transpunerea pentru vectori sau matrici. De exemplu dacă:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ atunci } x' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Pentru $x, y \in \mathbb{R}^n$ cu $x' = (x_1, \dots, x_n)$, $y' = (y_1, \dots, y_n)$ notăm produsul scalar dintre x și y prin: $x'y = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. De asemenea notăm $\|x\| = (x'x)^{1/2}$.

D₁. Sfera de centru $x_0 \in \mathbb{R}^n$ și rază $r > 0$ este:

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x - x_0\| < r\}$$

D₂. Multimea $A \subset \mathbb{R}^n$ este o vecinătate pentru $x_0 \in \mathbb{R}^n$ dacă există

$r > 0$ astfel ca: $S(x_0; r) \subseteq A$.

D₃. Multimea $A \subset \mathbb{R}^n$ este o multime deschisă dacă este vecinătate pentru fiecare punct al ei.

D₄. Multimea $A \subset \mathbb{R}^n$ este închisă dacă $\mathbb{R}^n \setminus A$ este deschisă.

D₅. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Punctul $x_0 \in \mathbb{R}^n$ este:

- i) punct interior pentru A dacă există $r > 0$ cu $S(x_0; r) \subseteq A$
- ii) punct aderent pentru A dacă $A \cap S(x_0; r) \neq \emptyset$ pentru orice $r > 0$.

Notăm cu A° multimea punctelor interioare ale lui A iar cu \bar{A} multimea punctelor aderente ale lui A .

D₆. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$. Punctul $x_0 \in \mathbb{R}^n$ este punct:

- i) exterior pentru A dacă $x_0 \notin \mathbb{R}^n \setminus A$.
- ii) frontieră pentru A dacă $x_0 \in \bar{A} \setminus A^\circ$.

D₇. Multimea $A \subset \mathbb{R}^n$ este mărginită dacă există $r > 0$ astfel că, $\|x\| \leq r$ pentru orice $x \in A$.

D₈. Multimea $A \subset \mathbb{R}^n$ este compactă dacă este mărginită și închisă.

1.2. Preliminarii asupra calculului diferențial matricial.

Fie multimea $A \subset R^n$, $A^o \neq \emptyset$, $x^o \in A^o$ și funcția $f: A \rightarrow R$.

D₁. Fie $h \in R^n$. Funcția f este derivabilă în x^o după direcția h dacă există și este finită:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(x^o + th) - f(x^o)]$$

și notăm această valoare cu $\delta f(x^o, h)$.

D₂. Dacă f este derivabilă în x^o după direcția h atunci numărul

$$f'(x^o; h) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } h = 0 \\ \frac{1}{\|h\|} \delta f(x^o, h), & h \neq 0 \end{cases}$$

este derivata lui f în x^o după direcția h .

D₃. Fie $1 \leq i \leq n$. f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_i în punctul x^o dacă f este derivabilă în x^o după direcția $\ell_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)'$. Notăm această derivată parțială cu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^o)$.

D₄. Dacă f este derivabilă parțial în raport cu toate variabilele x_1, \dots, x_n în punctul x^o , vectorul:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^o), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^o) \right)'$$

se numește gradientul lui f în x^o și se notează cu $\nabla f(x^o)$.

D₅. f este diferențabilă Gâteaux în x^o dacă este derivabilă în x^o după orice direcție $h \in R^n$.

D₆. f este diferențabilă Fréchet în x^o dacă există $y \in R^n$ și o funcție $\omega: A \rightarrow R$ astfel ca: $\lim_{x \rightarrow x^o} \omega(x) = \omega(x^o) = 0$,

$$f(x) - f(x^o) = y'(x - x^o) + \omega(x) \cdot \|x - x^o\|$$

pentru orice $x \in A$.

D₇. f este de clasă $C^1(A)$ dacă are derivate parțiale și acestea sunt continue pe o mulțime deschisă $B \supseteq A$.

D₈. Fie $g: R^n \rightarrow R^m$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))'$ unde $g_i(x)$ pentru $1 \leq i \leq m$ are derivate parțiale în $x^o \in R^n$. Atunci gradientul funcției vectoriale g în x^o este:

$$\nabla g(x^o) = ((\nabla g_1(x^o))', \dots, (\nabla g_m(x^o))')$$

D₉. Dacă f admite derivate parțiale de ordinul doi în x^o atunci matricea hessiană (a lui f în x^o) este definită de:

$$Hf(x^o) = \nabla(\nabla f)(x^o)$$

Se arată ușor:

P₁. Dacă f este derivabilă în x^0 după direcția h iar $a \in \mathbb{R}$ atunci:

$$\delta f(x^0, ah) = a \delta f(x^0, h)$$

P₂. Fie $h \in \mathbb{R}^n$ iar $T = \{t \in \mathbb{R} / x^0 + th \in A\}$. Atunci f este derivabilă în x^0 după direcția h dacă și numai dacă funcția $\varphi(t) = f(x^0 + th)$ definită pe T este derivabilă în punctul zero. În acest caz avem:

$$\delta f(x^0, h) = \varphi'(0).$$

P₃. Pentru $f(x) = \sum_{i=1}^n (x_i)^2$, $x^0 = (1, 2, \dots, n)'$ și $h = (1, 1, \dots, 1)'$

să se arate că $f'(x^0, h) = (n+1) \cdot \sqrt{n}$

P₄. f diferențiabilă Fréchet în x^0 atunci f este diferențiabilă Gâteaux în x^0 și $\delta f(x^0, h) = y^T h$ pentru orice $h \in \mathbb{R}^n$.

Indicație: Fie $h \in \mathbb{R}^n$. Deoarece x^0 este punct interior pentru A există $r > 0$ cu $S(x^0, r) \subseteq A$. Putem alege $t \in [-a, a]$ unde $a = r \cdot (2\|h\|)^{-1}$ astfel ca $x^0 + th \in A$.

P₅. Dacă există o vecinătate V a lui x^0 pe care f este derivabilă parțial în raport cu toate variabilele x_1, \dots, x_n și dacă $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sunt continue în x^0 atunci f este diferențiabilă Fréchet.

P₆. Dacă f este diferențiabilă Fréchet pe A atunci pentru orice $x^1, x^2 \in A$ există $0 < \theta < 1$ cu:

$$f(x^2) - f(x^1) = (x^2 - x^1)' \cdot \nabla f(x^1 + \theta(x^2 - x^1))$$

P₇. Dacă $f \in C^2(A)$ atunci:

i) pentru orice $x^0 \in A$, $Hf(x^0)$ este simetrică

ii) pentru orice $x^1, x^2 \in A$ există $0 < \theta < 1$ astfel ca:

$$f(x^2) - f(x^1) = (x^2 - x^1)' \cdot \nabla f(x^1) + \frac{1}{2} (x^2 - x^1)' Hf[x^1 + \theta(x^2 - x^1)] (x^2 - x^1)$$

P₈. Fie $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ iar $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definită prin $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$. Atunci:

$$\nabla h = f \cdot \nabla g + g \cdot (\nabla f)'$$

P₉. Fie $g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Atunci:

$$\nabla(g + h) = \nabla g + \nabla h$$

$$\nabla(g \cdot h) = (\nabla g)' \cdot h + g \cdot (\nabla h)'$$

P₁₀. Să se calculeze gradientul funcțiilor: $a'x$, Ax , $xa'x$, $xx'a$, $Cxx'a$, $xx'x$ unde $a \in \mathbb{R}^n$, A matrice (m,n) iar C matrice simetrică (n,n) . Sunt constante.

P₁₁. Fie $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ iar $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci pentru $x \in \mathbb{R}^n$ pentru care $\frac{f}{g}$ are sens avem: $\nabla(\frac{f}{g}) = \frac{1}{g} \left[\nabla f - \frac{f}{g} \nabla g \right]$, iar pentru x pentru care f^α are sens avem:

$$\nabla(f^\alpha) = \alpha \cdot f^{\alpha-1} \cdot \nabla f$$

P₁₂. Să se calculeze $H(\|x\|)$

2. MULTIMI CONVEXE IN R^n . SEPARARE

2.1. Definiții

D₁. Multimea $A \subset R^n$ este convexă dacă pentru orice $x^1, x^2 \in A$ și pentru orice $0 < \lambda < 1$ avem $\lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2 \in A$.

D₂. Fie $a \in R^n$, vector nenul iar $\alpha \in R$. Multimea $H = \{x \in R^n / a'x = \alpha\}$ se numește hiperplan.

D₃. Fie a și α ca în D₂. Se numește semispătu închis (deschis) multimea de forma $\{x \in R^n / a'x \leq \alpha\}$, respectiv $\{x \in R^n / a'x < \alpha\}$

D₄. Fie $A \subset R^n$ convexă iar $x^0 \in A$. Punctul x^0 este un punct extremal (sau vîrf) al lui A dacă din relația: $x^0 = \lambda x^1 + (1 - \lambda) x^2$ unde $x^1, x^2 \in A$ și $0 < \lambda < 1$ rezultă că $x^1 = x^2$.

D₅. Se numește tronson o intersecție finită de semispătii închise.

D₆. Se numește poliedru un tronson mărginit.

D₇. Fie $A \subset R^n$. Acoperirea convexă a lui A, notată cu $[A]$, este intersecția tuturor mulțimilor convexe din R^n care conțin pe A.

D₈. Fie $A, B \subset R^n$. Suma lor $A + B$ este definită prin:

$$A + B = \{z \in R^n / z = x + y, x \in A, y \in B\}$$

D₉. Fie $A \subset R^n$ iar $\lambda \in R$. Multimea λA este definită prin:

$$\lambda A = \{z \in R^n / z = \lambda x, x \in A\}$$

D₁₀. Fie $A, B \subset R^n$ nevide. Spunem că hiperplanul H definit în D₂ separă strict mulțimile A și B dacă:

$$\sup \{a'x / x \in A\} < \alpha < \inf \{a'x / x \in B\}$$

D₁₁. Fie $A, B \subset R^n$ nevide. Spunem că hiperplanul H definit în D₂ separă mulțimile A și B dacă:

$$\sup \{a'x / x \in A\} \leq \alpha \leq \inf \{a'x / x \in B\}$$

D₁₂. Fie $A \subset R^n$ nevidă. Spunem că hiperplanul H definit în D₂, este un hiperplan de sprijin al mulțimii A, dacă:

$$\inf \{a'x / x \in A\} = \alpha$$

2.2. Proprietăți ale mulțimilor convexe

P₁. Orice intersecție de mulțimi convexe din R^n este o mulțime convexă.

P₂. Fie $A, B \subset R^n$ convexe iar $\lambda, \mu \in R$. Atunci mulțimea $\lambda A + \mu B$ este convexă.

P₃. Mulțimea $A \subset R^n$ este convexă dacă și numai dacă pentru orice $x, y \in A$, mulțimea $T(x, y) = \{t \in R / y + t(x-y) \in X\}$ este convexă.

P₄. Fie $A \subset R^n$. Să se arate că mulțimea:

$$B = \left\{ y / y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i, x^i \in A, \lambda_i \in R, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \geq 1 \right\}$$

este convexă.

P₅. Fie $A \subset R^n$. Mulțimea A este convexă dacă și numai dacă pentru orice întreg $m \geq 1$, orice combinație convexă a oricărora m puncte din A se află în A .

P₆. Fie $A \subset R^n$, $m > n+1$ iar $y \in A$ cu $y = \sum_{i=1}^m \lambda_i x^i$, unde $\lambda_i > 0$ pentru $i = \overline{1, m}$ și $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Atunci există $\mu_1 > 0$, $i \geq 1$ cu $\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$ și cel puțin un μ_i egal cu zero, astfel ca $y = \sum_{i=1}^m \mu_i x^i$.

Indicație. Deoarece $m > n+1$, vectorii $x^1 - x^m, \dots, x^{m-1} - x^m$ sunt liniar dependenți și există $c_1, \dots, c_{m-1} \in R$ nu toți nuli cu $\sum_{i=1}^{m-1} c_i (x^i - x^m) = 0$. Definim $c_m = - \sum_{i=1}^{m-1} c_i$ și $\mu_i = \lambda_i - \frac{c_i}{\delta}$ unde $\delta = \max \left\{ \frac{c_i}{\lambda_i} \mid i = 1, 2, \dots, m \right\}$. Se arată ușor că $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m$ definiți astfel verifică proprietățile cerute.

P₇. Fie $A \subset R^n$ convexă iar $x \in \overset{\circ}{A}$, $y \in \bar{A}$. Atunci pentru orice $\lambda \in (0, 1]$ avem $\lambda x + (1 - \lambda) \cdot y \in \overset{\circ}{A}$.

Indicație. Fie $\lambda \in (0, 1]$ fixat. Există $r > 0$ astfel ca $S(x, r) \subseteq A$ și există un sir $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ cu $y_n \rightarrow y$. Fie $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$ și $z_n = \lambda x + (1 - \lambda)y_n$. Deoarece și $z_n \rightarrow z$, există un rang $N(r)$ încât pentru $n \geq N(r)$ să avem: $z_n \in S(z, \lambda r)$. Fie $\bar{n} \geq N(r)$. Atunci este clar că $z \in S(z_{\bar{n}}, \lambda r)$. Se poate arăta că $S(z_{\bar{n}}, \lambda r) = \lambda \cdot S(x, r) + (1 - \lambda) \{y_{\bar{n}}\}$.

Se arată ușor că $\lambda \cdot S(x, r) + (1-\lambda) \{y_{\bar{n}}\} \subseteq A$ și deci $S(z_{\bar{n}}, \lambda r) \subseteq A$. Deoarece $z \in S(z_{\bar{n}}, \lambda r)$ putem alege $0 < \rho < \min \{\|z - z_{\bar{n}}\|, |\lambda r - \|z - z_{\bar{n}}\|\}$ astfel ca $S(z, \rho) \subseteq S(z_{\bar{n}}, \lambda r) \subseteq A$. Prin urmare $z \in \bar{A}$.

P₈. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă. Atunci mulțimile \bar{A} , $\bar{\bar{A}}$ sunt convexe.

Indicatie. Pentru convexitatea mulțimii \bar{A} se folosește P₇ și faptul că $\bar{A} \subseteq A \subseteq \bar{\bar{A}}$. Pentru convexitatea mulțimii $\bar{\bar{A}}$ se folosește faptul că $x \in \bar{\bar{A}}$ dacă și numai dacă există un sir de elemente din A care converge la x .

P₉. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă cu $\bar{A} \neq \emptyset$. Atunci $\bar{A} = (\bar{A})^\circ$.

Indicatie. Fie $\bar{A} \neq \emptyset$. În general are loc $\bar{A} \subseteq (\bar{A})^\circ$. Presupunem că există $x \in (\bar{A})^\circ$ cu $x \notin \bar{A}$. Fie $y \in \bar{A}$, $y \neq x$. Există $r > 0$ cu $S(x, r) \subseteq \bar{A}$. Fie λ astfel ca: $1 < \lambda < 1 + r \cdot \|x-y\|^{-1}$. Se arată ușor că $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in S(x, r)$ și deci $z \in \bar{A}$. Din expresia lui z rezultă $x = \lambda z + (1-\lambda)y$, unde $\lambda = \frac{1}{\|x-z\|}$. Deoarece $y \in \bar{A}$ iar $z \in \bar{A}$ putem folosi P₇ și rezultă $x \in \bar{A}$, contradicție.

P₁₀. Să se arate că în general nu are loc P₉. dacă A nu este convexă.

P₁₁. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ nevidă deschisă. Atunci acoperirea convexă a lui A , $[A]$ este deschisă.

Indicatie. A fiind deschisă avem $A^\circ = A \subseteq [A]$. Deci $A \subseteq ([A])^\circ$. Dar $[A]$ este convexă deci $([A])^\circ$ este convexă din P₈. Deci $([A])^\circ$ este convexă și conține pe A prin urmare $([A])^\circ \supseteq [A]$. Deoarece și $([A])^\circ \subseteq [A]$ rezultă $[A] = ([A])^\circ$ adică $[A]$ este deschisă.

P₁₂. Dacă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este mulțime compactă nevidă atunci $[A]$ este de asemenea compactă.

Indicatie. Deoarece A este compactă există $M > 0$ cu $\|x\| \leq M$ pentru orice $x \in A$. Fie $y \in [A]$. Există (folosind și P₆) $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in A$

și $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ cu $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ astfel că $y = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$. Rezultă $\|y\| \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \|x_i\| \leq M$ și deci $[A]$ este mărginită. Pentru a arăta că $[A]$ este închisă, fie x un punct limită. Atunci există un sir $\{x_j\} \subseteq [A]$ care converge la x . Deoarece $x_j \in [A]$, avem: $x_j = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{ij} x_{ij}$

cum $x_{ij} \in A$, $\lambda_{ij} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{ij} = 1$. Pentru că avem un număr finit de indicii $i (=1, 2, \dots, n+1)$ putem extrage $\{\lambda_{ijk}\}$ convergent la λ_i pentru orice i , și $\{x_{ijk}\}$ convergent la x_i pentru orice i . Deci:

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{j_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{ijk} x_{ijk} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i z_i$$

Însă $\lambda_{ijk} > 0$ și $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{ijk} = 1$. Trecind la limită după $k \rightarrow \infty$ rezultă $\lambda_i > 0$ și $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Multimea A este închisă și deci $z_i \in A$ și prin urmare $x \in [A]$.

P_{13} . Fie $A \subset R^n$ mărginită și nevidă. Atunci $[\bar{A}] = [\bar{A}]$.

Indicație. Aplicind P_{12} la \bar{A} rezultă $[\bar{A}]$ închisă, deci $[\bar{A}] = [\bar{A}]$. Însă $[A] \subseteq [\bar{A}]$. Rezultă $[A] \subseteq [\bar{A}]$. Pentru incluziunea cealaltă avem $\bar{A} \subseteq [A]$. Aplicăm P_8 la $[A]$ și definiția acoperirii convexe și rezultă $[\bar{A}] \supseteq [\bar{A}]$.

P_{14} . Fie $A \subset R^n$ convexă iar $x \notin A$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1º. Nu există două puncte $y, z \in A$, $y \neq z$ cu: $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$.

2º. x este un punct extremal al lui A.

3º. Multimea $A - \{x\}$ este convexă.

Indicație. Se presupune că are loc 1º și că există $\lambda \in (0,1)$ $x = \lambda y + (1-\lambda)z$. Se pune $b = \min \{\lambda, 1-\lambda\}$, $c = \lambda + b$, $d = \lambda - b$ și se folosește faptul că $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v = x$ unde $u = cy + (1-c)z$, $v = dy + (1-d)z$. Se obține că $1^\circ \Rightarrow 2^\circ$. Rezultă ușor că $2^\circ \Rightarrow 3^\circ$. Pentru $3^\circ \Rightarrow 1^\circ$ se presupune că există $y, z \in A$, $y \neq z$ cu $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$. Folosind 3° ajungem la o contradicție.

2.3. Separarea mulțimilor convexe. Hiperplane de sprijin.

P_1 . Fie $A, B \subset R^n$ nevide. A și B se pot separa strict printr-un hiperplan dacă și numai dacă mulțimile $\{0\}$ și $B - A$ se pot separa strict printr-un hiperplan.

Indicație. Dacă A, B pot fi separate strict prin hiperplanul $H = \{x \in R^n / a'x = \alpha\}$ atunci din relațiile:

$$0 < \alpha - \sup \{a'x / x \in A\} < \inf \{a'x / x \in B\} -$$

$$- \sup \{a'x / x \in A\} < \inf \{a'x / x \in B - A\}$$

se poate alege $\alpha_1 = \alpha - \sup \{a'x / x \in A\}$ astfel ca hiperplanul $H_1 = \{x \in R^n / a'x = \alpha_1\}$ să separe strict $\{0\}$ și $B - A$.

Invers, dacă $H = \{x \in \mathbb{R}^n / a'x = d\}$ separă strict $\{0\}$ și $B - A$
atunci: $0 < d < \inf \{a'x / x \in B - A\}$

de unde se obține relația:

$$a'y + d \leq a'z \text{ pentru orice } y \in A, z \in B.$$

Rezultă:

$$\sup \{a'x / x \in A\} + d \leq \inf \{a'x / x \in B\}.$$

Luăm $d_1 = \sup \{a'x / x \in A\} + \frac{d}{2}$ și avem în vedere că $d > 0$ și obținem că $H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n / a'x = d_1\}$ separă strict A și B .

P₂. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ convexă și nevidă. Multimile $\{0\}$ și A se pot separa strict printr-un hiperplan dacă și numai dacă $0 \notin \bar{A}$.

Indicație. Dacă H separă strict $\{0\}$ și A , rezultă $0 < d \leq a'x$ pentru orice $x \in \bar{A}$, de unde se obține că $0 \notin \bar{A}$. Invers. Fie $r > 0$ astfel ca $B = S(a, r) \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Funcția $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(y) = \|y\|$ este continuă pe compactul B și deci există $\bar{y} \in B$ cu: $\|\bar{y}\| = \min \{\|y\| / y \in B\}$. Se arată ușor că $\|\bar{y}\| \leq \|y\|$ pentru orice $y \in \bar{A}$. De aici se poate deduce că $\bar{y}'(\bar{y} - y) \leq 0$ pentru orice $y \in \bar{A}$, deoarece \bar{A} este convexă. Pentru a arăta această relație este suficient să presupunem că există $\tilde{y} \in \bar{A}$ pentru care $\bar{y}'(\bar{y} - \tilde{y}) > 0$ și să alegem λ astfel că: $0 < \lambda < \min \{1, 2\|\bar{y} - \tilde{y}\|^{-2}, \bar{y}'(\bar{y} - \tilde{y})\}$ și atunci să punem $z = \lambda \tilde{y} + (1-\lambda) \bar{y} \in \bar{A}$. Se obține $\|z\| < \|\bar{y}\|$ care contrazice alegerea lui \bar{y} . Prin urmare $\bar{y}'(\bar{y} - y) \leq 0$ pentru orice $y \in \bar{A}$. Deoarece $\bar{y} \in \bar{A}$ iar $0 \notin \bar{A}$ rezultă $\bar{y} \neq 0$. Deci $0 < \|\bar{y}\|^2 \leq \inf \{\bar{y}'y / y \in A\}$. Luând $d_1 = \frac{1}{2}\|\bar{y}\|^2$, hiperplanul $H_1 = \{x \in \mathbb{R}^n / \bar{y}'x = d_1\}$ separă strict multimele $\{0\}$ și A .

P₃. Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ nevide și convexe. Ele se pot separa strict printr-un hiperplan dacă și numai dacă $0 \notin \bar{B} - \bar{A}$.

Indicație. Rezultă din P₂ (§ 2.2) și P₁, P₂ de mai sus.

P₄. Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ nevide, convexe, închise cu A mărginită. Atunci A și B se pot separa strict printr-un hiperplan dacă și numai dacă $A \cap B = \emptyset$.

Indicație. Se folosește P₃. Pentru suficiență se folosește faptul că dacă $A \cap B = \emptyset$ atunci $0 \notin \bar{B} - \bar{A} = \bar{B} - A$.

P₅. A, B din \mathbb{R}^n , nevide se pot separa printr-un hiperplan dacă și numai dacă multimele $\{0\}$ și $B - A$ se pot separa printr-un hiperplan.

P₆. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ convexă. Atunci multimele $\{0\}$ și A se pot separa printr-un hiperplan dacă și numai dacă $0 \notin \bar{A}$.

Indicatie. Dacă $H = \{x \in \mathbb{R}^n / a'x = \lambda\}$ unde $a \neq 0$ separă $\{0\}$ și A atunci $a'x \geq 0$ pentru orice $x \in A$. Presupunând că $0 \in \bar{A}$, există $r > 0$ cu $S(0,r) \subseteq A$. Însă există k natural astfel ca $y = -\frac{1}{k} \cdot a$ să fie în $S(0,r)$ și deci în A . Se obține o contradicție pentru că $a'y < 0$. Învers, presupunem că $0 \notin \bar{A}$. Din P_9 (\S 2.2) avem $A = (\bar{A})^\circ$ și deci $0 \notin (\bar{A})^\circ$. Rezultă $0 \in \overline{\mathbb{R}^n \setminus \bar{A}}$ adică există un sir $\{x^k\}_k \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$ cu limită 0. Fie k număr natural fixat. Multimea $A - x^k$ este convexă și $A - x^k = \bar{A} - x^k$ și deci $0 \notin A - x^k$. Deci putem aplica P_2 de mai sus; există $a^k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ astfel ca: $0 < \inf \{(a^k)'x / x \in A - x^k\}$. Fie $b^k = \frac{a^k}{\|a^k\|}$.

Deci $0 < (b^k)'(x - x^k)$ pentru orice $x \in A$. Pentru fiecare k natural, procedind în acest mod obținem un sir $\{b^k\}_k \subset \partial S(0,1)$, din frontiera sferrei $S(0,1)$, care verifică relația de mai sus. Multimea $\partial S(0,1)$ este compactă și deci $\{b^k\}_k$ conține un subșir $\{b^{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ care are limită $a \in \partial S(0,1)$.

In relația: $0 < (b^{k_j})'(x - x^{k_j})$ pentru orice $x \in A$, lufind j să tindă spre $+\infty$ obținem $a'x \geq 0$ pentru orice $x \in A$. Atunci hiperplanul $\{x \in \mathbb{R}^n / a'x = 0\}$ separă mulțimile $\{0\}$ și A .

P_7 . Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ nevide și convexe. Ele se pot separa printr-un hiperplan dacă și numai dacă $0 \notin \overline{B - A}$.

P_8 . Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ nevide și convexe. Dacă $A \cap B = \emptyset$ atunci ele se pot separa printr-un hiperplan.

P_9 . Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ nevide și convexe. Dacă $\bar{A} \neq \emptyset$ și $\bar{A} \cap B = \emptyset$ atunci există un hiperplan H care separă A și B cu proprietatea că $H \cap \bar{A} = \emptyset$.

Indicatie. Pentru prima parte se folosește P_8 . Pentru partea a doua fie $H = \{x \in \mathbb{R}^n / a'x = \lambda\}$ cu $a \neq 0$ hiperplanul care separă A și B . Presupunem că $H \cap \bar{A} \neq \emptyset$, deci există $x \in H \cap \bar{A}$. Cum $a \neq 0$, există k natural cu: $k \|a\|^2 > \lambda$. Fie $y = ka$. Avem $a' [x + \beta(y - x)] > \lambda$ pentru orice $\beta > 0$. Însă, pe de altă parte $x \in \bar{A}$, deci există $r > 0$ cu $S(x,r) \subseteq A$. Alegem $\bar{\beta}$ astfel ca $0 < \bar{\beta} < \frac{r}{\|y-x\|}$. Atunci $x + \bar{\beta}(y - x) \in S(x,r) \subseteq A$ și deci $x + \bar{\beta}(y - x) \in A$ și prin urmare $a' [x + \bar{\beta}(y - x)] < \lambda$ care contrazice o relație de mai sus valabilă pentru orice $\beta > 0$.

P_{10} . Hiperplanul $H = \{x \in \mathbb{R}^n / a'x = \lambda\}$ este un hiperplan de sprijin pentru $A \subset \mathbb{R}^n$ dacă și numai dacă $\inf \{a'x / x \in A\} \geq \lambda$ și $d(A,H) = 0$, unde $d(A,H) = \inf \{\|x - y\| / x \in A, y \in H\}$.

Indicatie. Pentru necesitate este suficient de arătat că $d(A,H) = 0$. Din definiția hiperplanului de sprijin, există un sir

$\{x^k\}_k \subset A$ cu: $\lim_{k \rightarrow \infty} a'x^k = \alpha$. Fie $y^k = x^k + \frac{b - a'x^k}{a'a}$ a. Atunci $a'y^k = \alpha$ și deci $y^k \in H$ pentru orice k natural. Se arată ușor că $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^k - y^k\| = 0$ și de aici rezultă că $d(A, H) = 0$.

Pentru suficientă presupunem că $\delta = \inf \{a'x/x \in A\} - \alpha > 0$.

Deci $0 < \delta \leq a'x - a'y = a'(x - y) \leq \|a\| \cdot \|x - y\|$ pentru orice $x \in A, y \in H$. Obținem: $0 < \frac{\delta}{\|a\|} \leq \|x - y\|$ pentru orice $x \in A, y \in H$.

Deci: $d(A, H) \geq \frac{\delta}{\|a\|} > 0$ care contrazice faptul că $d(A, H) = 0$.

P₁₁. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ convexă iar $x^0 \in \bar{A}$. Există un hiperplan de sprijin H al lui A , cu $H \ni x^0$, dacă și numai dacă $x^0 \in \partial A$.

Indicatie. Pentru necesitate se are în vedere că $H \cap \bar{A} = \emptyset$ și atunci dacă $x^0 \in H$ avem $x^0 \in \bar{A}$. Pentru suficientă avem în vedere că dacă $x^0 \in \partial A$ atunci $0 \notin (x^0 - A)$ și există, conform P₇, un hiperplan $H = \{x \in \mathbb{R}^n / a'x = \alpha\}$ care separă A și $\{x^0\}$. Deci $a'x \leq \alpha \leq a'x^0$ pentru orice $x \in A$. Dar există $\{x^k\}_k \subset A$ cu $x^k \rightarrow x^0$. Deci $a'x^k \leq \alpha \leq a'x^0$. Luând limita după k tînzînd la infinit rezultă $\alpha = a'x^0$ adică H este hiperplan de sprijin pentru A cu $H \ni x^0$.

P₁₂. Fie hiperplanul $H = \{x \in \mathbb{R}^n / a'x = \alpha\}$. Dacă avem x^0 și y^0 în \mathbb{R}^n cu $a'x^0 < \alpha < a'y^0$ atunci există $\lambda^0 \in (0,1)$ astfel ca $\lambda^0 x^0 + (1 - \lambda^0) y^0 \in H$.

Indicatie. Funcția continuă $f(\lambda) = a'[\lambda x^0 + (1 - \lambda) y^0] - \alpha$ definită pe $[0,1]$ cu valori reale are proprietatea $f(1) < 0 < f(0)$.

P₁₃. Fie $k \geq 2$ multimi convexe și compacte $A_1, \dots, A_k \subset \mathbb{R}^n$, a căror reuniune este o mulțime convexă. Dacă intersecția a oricare $k-1$ multimi dintre ele nu este vidă, atunci și: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \neq \emptyset$.

Indicatie. Demonstrația se face prin inducție matematică. Se folosește P₄ și P₁₂ de mai sus.

P₁₄. Fie X_1, X_2, \dots, X_m , $m > n+1$, mulțimi din \mathbb{R}^n convexe, compacte. Fie $p \geq n+1$. Dacă orice intersecție de p mulțimi X_i este nevidă, atunci și orice intersecție de $(p+1)$ mulțimi X_i este nevidă.

Indicatie. Fie X_1, \dots, X_{p+1} . Se notează:

$A_i = \bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p+1} X_j$; $i = 1, 2, \dots, p+1$. Fie $a_i \in A_i$ și $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{p+1}\}$.

Se arată că $[A] \subset \bigcup_{j=1}^{p+1} X'_j$. Apoi se definesc mulțimile $X'_j = X_j \cap [A]$, $j = 1, 2, \dots, p+1$, care sunt convexe și compacte. Deoarece:

$\bigcup_{j=1}^{p+1} x'_j = (\bigcup_{j=1}^{p+1} x_j) \cap [A] = [A]$ este multimea convexă iar intersecția a oricărui p multimi x'_j , este nevidă, deoarece de exemplu: $\bigcap_{j=1}^p x'_j =$

- $(\bigcap_{j=1}^p x_j) \cap [A] = A_{p+1} \cap [A] \ni a_{p+1}$, putem aplica P₁₃ și obținem că

$\bigcap_{j=1}^{p+1} x'_j \neq \emptyset \Leftrightarrow (\bigcap_{j=1}^{p+1} x_j) \cap [A] \neq \emptyset$. De aici rezultă că și $\bigcap_{j=1}^{p+1} x_j \neq \emptyset$.

P₁₅. Fie X multimea convexă iar x_1, \dots, x_m ($m \geq 1$) multimi convexe închise în R^n . Dacă $A_i = X \cap (\bigcap_{j \neq i} x_j) \neq \emptyset$ ($1 \leq i \leq m$) dar $X \cap (\bigcap_{i=1}^m x_i)$

= \emptyset atunci $X \notin \bigcup_{i=1}^m x_i$; anume, dacă $a_i \in A_i$ ($1 \leq i \leq m$) și $A = \{a_1, \dots, a_m\}$

atunci există $x_0 \in [A]$ astfel ca $x_0 \in X$ și $x_0 \notin x_i$ ($1 \leq i \leq m$).

Indicație. Pentru $m = 1$ P₁₅ este imediată. Dacă $m \geq 2$ atunci

$[A] \subseteq X$. Fie $x'_i = x_i \cap [A]$, $1 \leq i \leq m$. Aceste multimi sunt convexe și închise. Este clar că $a_i \in \bigcap_{j \neq i} x'_j = [A] \cap (\bigcap_{j \neq i} x_j)$ și deci orice

intersecție de $m - 1$ din multimile x'_i , este nevidă. Pe de altă parte

$\bigcap_{j=1}^m x'_j = \emptyset$, deoarece în caz contrar am obține că X și $\bigcap_{i=1}^m x_i$ au puncte

comune ceea ce nu se poate. Folosind acum P₁₃ rezultă că multimea $\bigcup_{i=1}^m x'_i =$

$\bigcup_{i=1}^m x'_i = [A] \cap (\bigcup_{i=1}^m x_i)$ nu poate fi convexă. De aici rezultă ușor că

$[A] \notin \bigcup_{i=1}^m x_i$, adică există $x_0 \in [A] \subseteq X$ astfel ca $x_0 \notin x_i$,

$(1 \leq i \leq m)$.

3. SISTEME DE INECUATII DEFINITE IN R^n

3.1. Cazul liniar

Fie x un vector finit dimensional. Dacă x este nenegativ notăm $x \geq 0$; dacă este semipozitiv ($x \geq 0$, $x \neq 0$) notăm $x \geq 0$; dacă este pozitiv (adică pentru orice componentă a sa x_i avem $x_i > 0$) notăm $x > 0$.

P_1 . Fie A matrice (m,n) iar $b \in R^m$. Atunci unul și numai unul dintre sistemele liniare:

$$(1) \quad \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{și} \quad (2) \quad \begin{cases} A'u \geq 0 \\ b'u < 0 \end{cases}$$

este compatibil, unde evident $x \in R^n$, $u \in R^m$.

Indicatie. Se obține ușor din P_7 sau P_8 din § 3.2.

P_2 . Fie A matrice (m,n) iar $b \in R^m$. Atunci o condiție necesară și suficientă pentru ca sistemul (1) să fie compatibil este ca $A'u \geq 0 \Rightarrow b'u \geq 0$.

Indicatie. Rezultă din P_1 .

P_3 . Unul și numai unul din următoarele sisteme liniare este compatibil:

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq b_1 \quad u_1 \geq 0$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2 \quad \text{și} \quad u_2 \text{ oarecare}$$

$$A_{31}x_1 + A_{32}x_2 \geq b_3 \quad u_3 \leq 0$$

$$x_1 \geq 0 \quad A'_{11}u_1 + A'_{21}u_2 + A'_{31}u_3 \geq 0$$

$$x_2 \text{ oarecare} \quad A'_{12}u_1 + A'_{22}u_2 + A'_{32}u_2 = 0$$

$$b'_1u_1 + b'_2u_2 + b'_3u_3 < 0$$

unde $x_j \in R^{n_j}$, $u_i, b_i \in R^{m_i}$, iar A_{ij} este o matrice (m_i, n_j) ($i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2$).

Indicatie. Inlocuim $x_2 = v_1 - v_2$ cu $v_1, v_2 \geq 0$ și transformăm inegalităile în egalități cu ajutorul variabilelor ecărte $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ introduse în primul sistem în prima respectiv a treia inegalitate. Atunci primul sistem, sub formă matricială, devine:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} A_{11} & A_{12} & -A_{12} & I_1 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & -A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & -A_{32} & 0 & -I_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} x_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{c} x_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{array} \right) \geq 0$$

Astfel se poate aplica P₁ acestui sistem.

P₄. Unul și numai unul din următoarele perechi de sisteme liniare, este compatibil:

- (i) $Ax = b$; $A'u = 0$, $b'u \neq 0$
- (ii) $Ax \leq b$, $x \geq 0$; $A'u \geq 0$, $u \geq 0$, $b'u < 0$
- (iii) $Ax \geq b$, $b'u < 0$; $A'u = b'$, $u > 0$

P₅. Dacă următoarele sisteme liniare sunt compatibile să se scrie sistemele corespunzătoare incompatibile:

- (i) $Ax + By = b$, $x \geq 0$
- (ii) $Ax \geq a$, $Bx = b$, $x \geq 0$
- (iii) $Ax \leq a$, $Bx = b$

P₆. Unul și numai unul din următoarele sisteme liniare este compatibil:

$$Ax + By + Cz = 0; \quad A'u = 0, B'u \geq 0, C'u \geq 0$$

$$y \geq 0, z > 0$$

Indicatie. Al doilea sistem este incompatibil dacă și numai dacă sistemul $A'u = 0$, $B'u \geq 0$, $C'u \geq 0$, $e'C'u > 0$ (unde $e' = (1, \dots, 1)$) este incompatibil adică dacă și numai dacă (conform P₅(i) și P₃) există x arbitrar, $y \geq 0$, $\bar{z} \geq 0$ astfel ca $Ax + By + C\bar{z} = -Ce$, adică $Ax + By + Cz = 0$, $y \geq 0$ unde $z = \bar{z} + e > 0$.

P₇. Dintre sistemele:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + \sum_{j=4}^q A_jx_j = 0$$

$$x_2 \geq 0, x_3 > 0, x_j \geq 0 (j = 4 \div q)$$

$$A_ju = 0, A_j'u \geq 0 \quad (j = 2 \div q) \text{ cu } A_3'u \neq 0 \text{ sau}$$

$$A_j'u > 0 \text{ pentru cel puțin un } j \quad (4 \leq j \leq q)$$

Indicatie. Deoarece $x_j \geq 0 \iff (x_j \geq 0 \text{ și } e_j^T x_j - y_j = 0 \text{ sau } y_j > 0)$
 unde $y_j \in \mathbb{R}$ și $e_j = (1, \dots, 1)$ are aceeași dimensiune cu x_j ($4 \leq j \leq q$),
 primul sistem se scrie echivalent:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} A_2 & A_4 & A_5 & \dots & A_q \\ 0 & e_4^T & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & e_5^T & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e_q^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \geq 0, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y \end{pmatrix} > 0$$

Presupunem că acest sistem este compatibil. Atunci există (folosind P₆) u și $v = (v_4, v_5, \dots, v_q)$ astfel ca $A_1^T u = 0$, $A_2^T u \geq 0$, $A_j^T u + e_j^T v_j \geq 0$ ($j = 4 \div q$) și $\begin{pmatrix} A_3^T u \\ -v \end{pmatrix} \geq 0$. De aici obținem $A_3^T u \geq 0$ și $v \leq 0$,

$A_j^T u \geq -e_j^T v_j \geq 0$. Dacă $v = 0$ atunci $A_3^T u \geq 0$. Dacă există k ($4 \leq k \leq q$) astfel ca $v_k < 0$ atunci $A_k^T u \geq -e_k^T v_k > 0$.

P₈. Dintre sistemele:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \sum_{j=4}^q A_j x_j = b; \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 > 0, \quad x_j \geq 0 \quad (4 \leq j \leq q);$$

$A_1^T u = 0$, $A_j^T u \geq 0$ ($j = 2 \div q$), $b^T u \leq 0$ și: $b^T u < 0$ sau $A_3^T u \neq 0$ sau $A_3^T u > 0$ pentru cel puțin un j ($4 \leq j \leq q$).

Indicatie. Sistemul în x este compatibil dacă și numai dacă urmatorul sistem:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + (A_3, -b) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_0 \end{pmatrix} + \sum_{j=4}^q A_j x_j = 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ x_0 \end{pmatrix} > 0,$$

$x_j \geq 0$ ($4 \leq j \leq q$), este compatibil. Acum se poate aplica P₇.

P₉. Pentru ca sistemul:

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + \sum_{j=4}^q A_{1j}x_j = b_1$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + \sum_{j=4}^q A_{2j}x_j \leq b_2$$

$$A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + \sum_{j=4}^q A_{3j}x_j < b_3$$

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + \sum_{j=4}^q A_{1j}x_j \leq b_1 \quad (4 \leq j \leq p)$$

x_1 arbitrar, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_j \geq 0$, $(4 \leq j \leq q)$

să fie compatibil este necesar și suficient ca sistemul:

$$A'_{11}u_1 + \sum_{i=2}^p A'_{ij}u_i = 0$$

$$E_j \equiv A'_{1j}u_1 + \sum_{i=2}^p A'_{ij}u_i \geq 0 \quad (2 \leq j \leq q)$$

$$b'u \equiv b'_1u_1 + \sum_{i=2}^p b'_iu_i \leq 0$$

u_1 arbitrar, $u_i \geq 0 \quad (2 \leq i \leq p)$

să nu aibă soluții cu $b'u < 0$ sau $u_3 \geq 0$ sau $u_4 \geq 0$ sau ... sau $u_p \geq 0$ sau $E_3 \geq 0$ sau $E_4 \geq 0$ sau ... sau $E_q \geq 0$.

Indicație. Introducem în inegalitățile primului sistem vectorii ecart $y_2 \geq 0$, $y_3 \geq 0$, $y_4 \geq 0 \quad (4 \leq i \leq p)$. Obținem sistemul:

$$\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \\ \vdots \\ A_{p1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} A_{12} & 0 \\ A_{22} & I_2 \\ A_{32} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ A_{p2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{13} & 0 \\ A_{23} & 0 \\ A_{33} & I_3 \\ \vdots & \vdots \\ A_{p3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + \sum_{j=4}^q \begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{pj} \end{pmatrix} x_j +$$

$$+ \sum_{i=4}^p \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I_1 \\ 0 \end{pmatrix} y_i = b$$

x_1 arbitrar, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \geq 0$, $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} > 0$, $x_j \geq 0$ ($4 \leq j \leq q$), $y_1 \geq 0$

($4 \leq i \leq p$),
la care putem aplica P₈.

P₁₀. Pentru orice matrice A de tip (m,n) sistemele $Ax \geq 0$ și $A'y = 0$, $y \geq 0$ ($x \in R^n$, $y \in R^m$) au soluțiile x^0 respectiv y^0 astfel ca $Ax^0 + y^0 \geq 0$.

Indicatie. Sistemele date se mai pot scrie sub forma:

$$A'y = 0$$

$$-Ax \leq 0$$

$$-Ax - Iy < 0$$

$$y \geq 0$$

Acum sistemul are soluții dacă (folosind P₉) sistemul:

$$A'u_2 + A'u_3 = 0$$

$$Au_1 - u_3 \geq 0$$

$$u_1 \text{ arbitrar}, u_2 \geq 0, u_3 \geq 0$$

este incompatibil. Se arată ușor, prin reducere la absurd, că sistemul acesta este incompatibil.

P₁₁. Unul și numai unul din următoarele sisteme liniare este compatibil:

$$Ax \geq 0, Bx > 0, x \geq 0 ; A'u + B'v \leq 0, u \geq 0, v \geq 0 .$$

P₁₂. Pentru orice matrice L de tip (n,n) antisimetrică ($L' = -L$) sistemul $Lx \geq 0$, $x \geq 0$ are o soluție x^0 astfel ca $Lx^0 + x^0 > 0$.

Indicatie. Conform P₁₁, pentru ca sistemul $Lx \geq 0$, $Lx + x > 0$, $x > 0$ să aibă soluții este suficient ca sistemul dual $u \geq 0$, $v \geq 0$, $L'u + L'v + v \leq 0$ să fie incompatibil. Dacă am presupune că sistemul dual ar avea o soluție (\bar{u}, \bar{v}) atunci: $0 < \bar{v}' \bar{v} \leq (\bar{u} + \bar{v})' \bar{v} \leq (\bar{u} + \bar{v})' \cdot L \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = 0$ (deoarece pentru orice $y \in R^n$ avem $y'L y = 0$, L fiind antisimetrică), contradicție.

3.2. Cazul neliniar

P₁. Fie $A \subseteq R^n$ mulțime nevidă convexă. Fie f o funcție vectorială convexă m-dimensională definită pe A iar h o funcție vectorială liniară k-dimensională definită pe R^n . Dacă sistemul: $f(x) < 0$, $h(x) = 0$, $x \in A$ este incompatibil atunci există $u \in R^m_+$ și $v \in R^k$, $(u, v)' \neq 0$, astfel ca:

$u'f(x) + v'h(x) \geq 0$, pentru orice $x \in A$.

Indicatie. Pentru orice $x \in A$ fie:

$$B(x) = \{(y, z)' / y \in R^m, z \in R^k, y > f(x), z = h(x)\}$$

iar $B = \bigcup \{B(x) / x \in A\} \subset R^{m+k}$. Se arată ușor că $0 \notin B$ și că B este o mulțime nevidă convexă. Folosind P_6 din (2.3), există $u \in R^m$, $v \in R^k$, $(u, v) \neq 0$ astfel ca: $u'y + v'z \geq 0$ pentru orice $(y, z)' \in B$. Dacă există o componentă $u_1 < 0$ atunci, deoarece y_1 se poate alege oricăr de mare se obține o contradicție. Deci $u \geq 0$. Fie $\lambda \in R$, $\lambda > 0$ iar $y_\lambda = f(x) + e\lambda$, $z_\lambda = h(x)$ pentru $x \in A$, unde $e \in R^m$ are toate componente egale cu unu. Se arată că $u'f(x) + v'h(x) \geq -\lambda u'e$ pentru orice $x \in A$. Dacă se presupune că $\inf \{u'f(x) + v'h(x) / x \in A\} = -\varepsilon < 0$, atunci se poate alege λ astfel că $\lambda u'e < \varepsilon$ și se ajunge la o contradicție și deci $\inf \{u'f(x) + v'h(x) / x \in A\} \geq 0$.

P_2 . Fie $A \subseteq R^n$ nevidă și convexă. Fie f_1, f_2, f_3 funcții vectoriale convexe, m_1 , m_2 , respectiv m_3 -dimensională iar h o funcție vectorială lineară k -dimensională definită pe R^n . Dacă sistemul: $f_1(x) \leq 0$, $f_2(x) \leq 0$, $f_3(x) \leq 0$, $h(x) = 0$, $x \in A$ este incompatibil, atunci există $u^1 \in R_+^{m_1}$, $u^2 \in R_+^{m_2}$, $u^3 \in R_+^{m_3}$, $v \in R^k$, $(u^1, u^2, u^3, v) \neq 0$, astfel ca: $(u^1)' f_1(x) + (u^2)' f_2(x) + (u^3)' f_3(x) + v'h(x) \geq 0$, pentru orice $x \in A$.

Indicatie. Se folosește P_1 și faptul că dacă f este o funcție vectorială m -dimensională definită pe $A \subset R^n$ atunci: dacă sistemul $f(x) \leq 0$, $x \in A$ este incompatibil atunci sistemul $f(x) \leq 0$, $x \in A$ este incompatibil; iar dacă acest ultim sistem este incompatibil, atunci sistemul $f(x) < 0$, $x \in A$ este incompatibil.

P_3 . Fie f o funcție vectorială convexă m -dimensională, definită pe mulțimea convexă $A \subset R^n$. Atunci sau sistemul: $f(x) < 0$, $x \in A$ are soluție, sau există $u \in R_+^m$, $u \neq 0$ astfel ca $u'f(x) > 0$ pentru orice $x \in A$.

Indicatie. Dacă $\bar{x} \in A$ și $f(\bar{x}) < 0$ atunci este evident că pentru orice $u \in R_+^m$ avem $u'f(\bar{x}) < 0$. Invers, dacă presupunem că sistemul $x \in A$, $f(x) < 0$ nu are soluție atunci se poate explica P_1 , neglijind egalitățiile $h(x) = 0$, și se obține că există $u \in R_+^m \setminus \{0\}$ cu $u'f(x) > 0$ pentru orice x real.

P_4 . Fie f , funcție convexă m -dimensională definită pe R^n iar B o matrice $k \times n$ cu liniile liniar independente. În plus fie d un vector

k -dimensional. Atunci, sau sistemul

$$(S_1) \quad f(x) < 0, \quad Bx = d, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

are soluție, sau

(S₂) există $u \in \mathbb{R}_+^m$, $u \neq 0$, $v \in \mathbb{R}^k$ cu: $u'f(x) + v'(Bx - d) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

Indicatie. Se arată ușor că dacă (S₁) are soluție atunci nu are loc (S₂). Dacă (S₁) nu are soluție atunci se aplică P₁ cu $h(x) = Bx - d$.

Există $u \in \mathbb{R}_+^m$, $v \in \mathbb{R}^k$, $(u, v) \neq 0$ pentru care are loc relația din (S₂). Se arată prin reducere la absurd că $u \neq 0$. Se are în vedere că dacă $u = 0$ atunci $B'v = 0$ (adică B are liniile liniar independente) ceea ce nu se poate. Dacă s-ar presupune că $B'v \neq 0$ atunci luând $x = -v'B$, dacă $v'd \geq 0$ și $x = 2(v'd)v'B/v'B$ dacă $v'd < 0$ se obține că $v'(Bx - d) < 0$ ceea ce nu se poate.

P₅. Fie $X \subseteq \mathbb{R}^n$ multime convexă iar A matrice $m \times n$. Dacă sistemul $Ax \leq b$, $x \in X$ este incompatibil dar devine compatibil dacă se înlătură oricare dintre restricțiile $a_i'x \leq b_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$), atunci există $x^0 \in X$ astfel ca $Ax^0 \geq b$.

Indicatie. Se aplică P₁₅ din (2.3) cu $X_1 = \{x / a_i'x \leq b_i\}$.

P₆. Fie f, f_1, f_2, \dots, f_p , funcții convexe pe \mathbb{R}^n iar $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$. Dacă sistemul:

(S) $f(x) < 0, f_k(x) \leq 0$ ($1 \leq k \leq p$), $a_i'x \leq b_i$ ($1 \leq i \leq m$) este incompatibil, dar există $x_0 \in \mathbb{R}^n$ astfel ca $f_k(x_0) < 0$, ($1 \leq k \leq p$) și $a_i'x_0 \leq b_i$, ($1 \leq i \leq m$), atunci există $y_1, \dots, y_p \geq 0$, $u_1, \dots, u_m \geq 0$ astfel ca:

$$f(x) + \sum_{k=1}^p y_k \cdot f_k(x) + \sum_{i=1}^m u_i(a_i'x - b_i) \geq 0,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$.

Indicatie. Prin inducție după m. Pentru $m = 1$ avem două cazuri: a) Sistemul obținut din (S) prin neglijarea restricției $a_1'x \leq b_1$, este incompatibil. Atunci conform P₂ există $\lambda, y_1, \dots, y_p \geq 0$ nu toți nuli

astfel ca: $\lambda f(x) + \sum_{k=1}^p y_k f_k(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$. Dacă $\lambda = 0$,

atunci rezultă că $y_1 = \dots = y_p = 0$, deoarece există $x^0 \in \mathbb{R}^n$ cu $f_k(x^0) < 0$ pentru orice $1 \leq k \leq p$. Deoarece $(\lambda, y_1, \dots, y_p) \neq 0$ rezultă $\lambda > 0$ și

atunci proprietatea rezultă imediat luând $u_1 = 0$. b) Sistemul obținut

din (S) prin neglijarea restricției $a_1'x \leq b_1$, este compatibil. Atunci, conform P_5 , există $\bar{x} \in X = \{x \in R^n / f(x) < 0, f_k(x) \leq 0, 1 \leq k \leq p\}$ cu $a_1'\bar{x} - b_1 > 0$. Însă sistemul (S) pentru $m = 1$ nu este compatibil, deci conform P_2 , există λ, y_1, \dots, y_p , u_1 nu toți nuli cu: $\lambda f(x) + \sum_{k=1}^p y_k$.

$f_k(x) + u_1(a_1'x - b) \geq 0$ pentru orice $x \in R^n$. Dacă $\lambda = 0$, rezultă imediat că $y_1 = \dots = y_p = 0$. Deci $u_1 > 0$. Însă funcția liniară $g(x) = -u_1(a_1'x - b_1) \geq 0$ este nenegativă pe R^n deci este constantă pe R^n . Deoarece $g(x_0) \geq 0$ și $g(x_0) \leq 0$ (din enunț) rezultă că $g(x) = 0$ pe R^n . Însă $g(\bar{x}) > 0$ și deci trebuie să avem $\lambda > 0$ și proprietatea este demonstrată pentru $m = 1$.

Presupunind proprietatea adevărată pentru $m-1$, să demonstreăm pentru m . Sunt posibile două cazuri: a) Există un indice $1 \leq \ell \leq m$ astfel ca înălțurind restricția $a_\ell'x \leq b_\ell$ sistemul să rămână incompatibil. Atunci, punind $u_\ell = 0$, proprietatea rezultă din ipoteza de inducție. b) Înălțurind oricare din restricțiile $a_i'x \leq b_i$ sistemul devine compatibil. Atunci, folosind P_5 cu $X = \{x \in R^n / f(x) < 0, f_k(x) \leq 0, 1 \leq k \leq p\}$ există $\bar{x} \in X$ astfel ca $A\bar{x} > b$, unde $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$. Pe de altă parte deoarece sistemul (S) nu are soluții, din P_2 rezultă că există $\lambda, \tilde{y}_k, \tilde{u}_i \geq 0$ ($1 \leq k \leq p, 1 \leq i \leq m$) nu toate nule, astfel ca $g(x) = -\lambda f(x) + \sum_{k=1}^p \tilde{y}_k f_k(x) + \sum_{i=1}^m \tilde{u}_i (a_i'x - b_i) \geq 0$ pentru orice $x \in R^n$. Arătăm că $\lambda > 0$ și atunci proprietatea rezultă luând $y_k = \tilde{y}_k/\lambda, u_i = \tilde{u}_i/\lambda$.

Presupunem $\lambda = 0$. Rezultă imediat că $\tilde{y}_1 = \dots = \tilde{y}_p = 0$. Însă $g(x) = -\tilde{u}'(Ax - b)$ este liniară și nenegativă pe R^n , deci constantă. Deci $g(x_0) \geq 0$. Din enunț rezultă $g(x_0) \leq 0$ deoarece $\tilde{u} \neq 0$. Rezultă $g(x) = 0$ pe R^n . Pe de altă parte $g(\bar{x}) > 0$, ceea ce nu se poate. Prin urmare $\lambda > 0$.

P₇. Să se deducă P_1 din § 3.1 folosind P_6 de mai sus.

Indicație. Se arată ușor că sistemele $Ax = b, x > 0$ și $A'u > 0, b'u < 0$ nu pot fi simultan compatibile. Este suficient să arătăm că dacă al doilea sistem este incompatibil atunci primul sistem este compatibil. Al doilea sistem se scrie: $f(u) = b'u < 0, -A'u \leq 0$. Dacă este incompatibil, conform P_6 , există $x \in R_+^n$ astfel ca: $b'u - x'A'u \geq 0$ pentru orice $u \in R^n$. Ultima relație se mai scrie: $u'(b-Ax) \geq 0$ pentru orice $u \in R^n$. De aici rezultă că trebuie să avem $b - Ax = 0$ și deci primul sistem este compatibil.

P₈. Sa se deducă P₁ din § 3.1. folosind P₄ din § 2.3.

Indicatie. Luăm $X = \{b\}$, $Y = \{y \in R^n / y = Ax, x \geq 0\}$.
 Sistemul $Ax = b$, $x \geq 0$ nu are soluție dacă și numai dacă $X \cap Y = \emptyset$.
 Conform P₄ din § 2.3 există un hiperplan $\{y \in R^n / u'y = \alpha\}$, $u \neq 0$ care
 separă strict X și Y. Rezultă $u'b < \alpha < u'Ax$, pentru orice $x \geq 0$.
 Luind $x = 0$ rezultă $u'b < 0$. Luind apoi $x = (n, 0, \dots, 0)'$ obținem:
 $\frac{\alpha}{n} < u'a_1$, unde a_1 este prima coloană din A. Trecând la limită după
 $n \rightarrow \infty$ obținem $u'a_1 \geq 0$. Considerând în general $x = (0, \dots, 0, n, 0, \dots, 0)'$ cu componenta $x_1 = n$ obținem în același mod $u'a_1 \geq 0$. Rezultă
 $u'A \geq 0$.

4. FUNCTII CONVEXE SI GENERALIZAT CONVEXE

4.1. Definithii

Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ iar $x_0 \in A$. Spunem că f în x_0 este (relativ la A):

i) quasi-convexă (q-convexă), dacă:

$$f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)x_0) \leq f(x_0)$$

pentru orice $x \in X$ și orice $0 < \lambda < 1$ astfel ca:

$$\lambda x + (1-\lambda)x_0 \in A;$$

ii) strict-quasi-convexă (sq-convexă), dacă:

$$f(x) < f(x_0) \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)x_0) < f(x_0)$$

pentru orice $x \in X$ și orice $0 < \lambda < 1$ astfel ca:

$$\lambda x + (1-\lambda)x_0 \in A;$$

iii) pseudo-convexă (p-convexă) dacă f este diferențialabilă în x_0 și pentru orice $x \in A$ avem:

$$f(x) \leq f(x_0) \Rightarrow (x - x_0)' \nabla f(x_0) \leq 0;$$

iv) convexă, dacă

$$f(\lambda x + (1-\lambda)x_0) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(x_0)$$

pentru orice $x \in A$ și orice $0 < \lambda < 1$ astfel ca $\lambda x + (1-\lambda)x_0 \in A$;

v) strict-convexă (s-convexă) dacă în iv) avem inegalitate strictă.

vi) respectiv q-concavă, sq-concavă, p-concavă, concavă, s-concavă, dacă $(-f)$ este, respectiv, q-convexă, sq-convexă, p-convexă, convexă, s-convexă în x_0 .

4.2. Condiții necesare și/sau suficiente pentru convexitate

P1. Fie $\varphi: (a,b) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Următoarele condiții sunt echivalente:

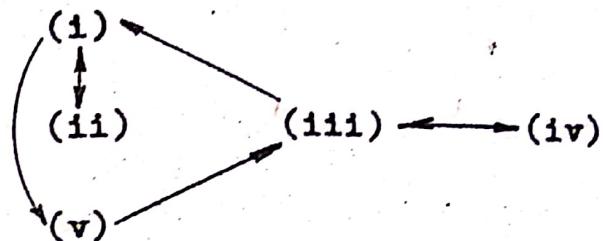
(i) φ este convexă pe (a,b)

(ii) pentru orice $t_1 < t_2 < t_3$, $t_1, t_2, t_3 \in (a,b)$ avem:

$$\frac{\varphi(t_3) - \varphi(t_1)}{t_3 - t_1} \leq \frac{\varphi(t_3) - \varphi(t_2)}{t_3 - t_2}$$

- (iii) Dacă $\varphi \in C^1([a,b])$ atunci φ' este crescătoare
 (iv) Dacă $\varphi \in C^2([a,b])$ atunci φ'' este nenegativă
 (v) Dacă $\varphi \in C^1([a,b])$ pentru orice $t_1, t_2 \in (a,b)$
 avem: $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) \geq (t_1 - t_2) \cdot \varphi'(t_2)$

Indicație. Se arată că:



(i) \rightarrow (v). Pentru $t_1, t_2 \in (a,b)$, $0 < \lambda < 1$ avem $\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda\varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2)$ de unde: $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) \geq \frac{1}{\lambda} [\varphi(t_2 + \lambda(t_1 - t_2)) - \varphi(t_2)] = (t_1 - t_2) \cdot \varphi'[t_2 + \theta\lambda(t_1 - t_2)]$ cu $0 < \theta < 1$.

Se ia $\lambda \rightarrow 0$ și se ține seama de continuitatea derivatei $\varphi'(t)$.

(v) \rightarrow (iii). Se scriu relațiile care se obțin din (v) luând t_1 și t_2 și apoi t_2 și t_1 , și se adună aceste relații.

(iii) \rightarrow (i). Fie $t_1 < t_2$ și $t = \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$ cu $0 < \lambda < 1$. Avem:

$$\varphi(t) - \varphi(t_1) = (t - t_1) \cdot \varphi'(\bar{t}_1) , \quad t_1 < \bar{t}_1 < t$$

$$\varphi(t_2) - \varphi(t) = (t_2 - t) \cdot \varphi'(\bar{t}_2) , \quad t < \bar{t}_2 < t_2$$

Poloșim aceste relații și faptul că $\varphi'(\bar{t}_1) \leq \varphi'(\bar{t}_2)$ deoarece $\bar{t}_1 < \bar{t}_2$.

P₂. Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă.

(i) Următoarele condiții sunt echivalente:

(ii) f este convexă pe A

pentru orice $x \in A$, $y \in \mathbb{R}^n$ funcția $\varphi_{x,y}(t) = f(x+ty)$ definită

pe $T(x,y) = \{t \in \mathbb{R} / x+ty \in A\}$ este convexă.

(iii) (\forall) $x_1, x_2 \in A$, funcția $\psi_{x_1, x_2}(\lambda) = f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2]$ defi-

nită pe $[0,1]$ este convexă.

(iv) multimea $(A, f) = \{(x, z) \in A \times \mathbb{R} / f(x) \leq z\}$ este convexă.

(v) Fie A deschisă. Pentru orice $x_0 \in A$, există $u_0 \in \mathbb{R}^n$ cu:

$$f(x) - f(x_0) \geq u_0^T (x - x_0) , \quad (\forall) x \in A.$$

Indicatie. Se arată că (i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iii) \rightarrow (i), și (i) \rightarrow (iv) \rightarrow (v) \rightarrow (i). La (i) \rightarrow (ii) se arată mai întâi că $T(x,y)$ este convexă. La (ii) \rightarrow (iii) se observă că $\psi_{x_1,x_2}(\lambda) = f(x_2 + \lambda(x_1 - x_2)) = \varphi_{x_2,x_1-x_2}(\lambda)$.

Pentru (iii) \rightarrow (i) se are în vedere

$$\text{că: } \lambda = \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 0 \text{ și } \psi_{x_1,x_2}(\lambda) \leq \lambda \psi_{x_1,x_2}(1) + (1-\lambda)$$

$\psi_{x_1,x_2}(0)$. Se arată ușor că (i) \rightarrow (iv).

(iv) \rightarrow (v). Fie A deschisă $x_0 \in A$. Punctul $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$ este un punct frontieră al mulțimii convexe (A,f) . Putem folosi P_{11} din § 2.3. Deci există $\begin{pmatrix} v \\ v_0 \end{pmatrix} \neq 0$ astfel că: $v'x + v_0 z \geq v'x_0 + v_0 f(x)$ pentru orice $\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in (A,f)$.

Se arată că $v_0 \neq 0$. Dacă $v_0 = 0$ atunci $v'(x-x_0) \geq 0$ pentru orice $x \in A$ și în particular într-o vecinătate a lui x_0 . Se obține $v = 0$ ceea ce nu se poate. Apoi se arată că $v_0 > 0$ căci dacă $v_0 < 0$ atunci se poate lua z suficient de mare pentru care inegalitatea $v'x + v_0 z \geq v'x_0 + v_0 f(x_0)$ nu este satisfăcută. Punem $\tilde{v} = \frac{1}{v_0} \cdot v$ și obținem $\tilde{v}'x + z \geq \tilde{v}'x_0 + f(x_0)$ pentru orice $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \in (A,f)$. În particular relația este verificată de $(x', f(x'))'$. Deci: $\tilde{v}'x + f(x) \geq \tilde{v}'x_0 + f(x_0)$, care se mai scrie sub forma: $f(x) - f(x_0) \geq \tilde{v}'(x_0 - x)$. Luând $u_0 = -\tilde{v}$ obținem: $f(x) - f(x_0) \geq u_0'(x - x_0)$ pentru orice $x \in A$.

(v) \rightarrow (i). Fie $x_1, x_2 \in A$. Conform (v) există, pentru $x_0 \in A$, un vector $u_0 \in \mathbb{R}^n$ cu:

$$f(x) - f(x_0) \geq u_0'(x - x_0)$$

pentru orice $x \in A$. Pentru x_1, x_2 relația devine:

$$f(x_1) - f(x_0) \geq u_0'(x_1 - x_0)$$

$$f(x_2) - f(x_0) \geq u_0'(x_2 - x_0)$$

Inmulțind prima relație cu $0 < \lambda < 1$ iar a doua cu $1 - \lambda$ și apoi adunând relațiile obținute, rezultă:

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - f(x_0) \geq u_0' [\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 - x_0]$$

Luăm $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in A$ în această relație și obținem (i).

P3. Fie $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă, deschisă. Următoarele condiții sunt echivalente:

(i) f este convexă pe A ;

(ii) $(\forall) x \in A, y \in \mathbb{R}^n$ funcția $h_{x,y}(t) = y' \cdot \nabla f(x+ty)$ definită pe

$f(x_j)$ [din P_2] este crescătoare;

(iii) $\forall x_1, x_2 \in A$ funcția $g_{x_1, x_2}(\lambda) = (x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ definită pe $[0,1]$ este crescătoare în λ .

(iv) $\forall x_1, x_2 \in A$ avem: $f(x_1) - f(x_2) \geq (x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_2)$

(v) $\forall x_1, x_2 \in A$ avem: $f(x_1) - f(x_2) \leq (x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_1)$

(vi) $\forall x_1, x_2 \in A$ avem: $(x_1 - x_2)' \cdot [\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2)] \geq 0$

(vii) Fie $f \in C^2(A)$. Atunci matricea $Hf(x)$, pentru orice $x \in A$ este pozitiv semidefinită.

Indicatie. Se arată că:

$$(i) \iff (ii) \iff (iii) \implies (iv) \implies (v) \implies (vi) \implies (vii)$$

$$(ii) \implies (vii) \implies (iv)$$

(i) \iff (ii). Se folosește P_2 (ii) și P_1 (iii) și faptul că $\varphi'_{x,y} = h_{x,y}$.

(ii) \iff (iii). Se folosește P_2 (iii) și P_1 (iii).

(iii) \implies (iv). Deoarece $g_{x_1, x_2}(\lambda)$ este crescătoare, pentru orice

$\lambda > 0$ obținem: $(x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq (x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_2)$. Folosind formula Taylor de primul ordin avem:

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)' \cdot \nabla f[x_2 + \theta(x_1 - x_2)]$$

pentru $0 < \theta < 1$. Lăsând $\lambda = \theta$ obținem (iv).

(v) \implies (vi). Se scrie relația din (v) pentru x_1 și x_2 , iar apoi relația pentru x_2, x_1 . Adunând relațiile obținute, suntem conduși la (vi).

(vi) \implies (vii). Fie $x_1, x_2 \in A$ și $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, $\lambda_1 < \lambda_2$. Avem:

$$\begin{aligned} g_{x_1, x_2}(\lambda_1) - g_{x_1, x_2}(\lambda_2) &= (x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2) - \\ &\quad - (x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(\lambda_2 x_1 + (1-\lambda_2)x_2) = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot (x_1 - x_2)' [\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)] \leq 0,$$

unde: $y_1 = \lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)x_2 \in A$, $i = 1, 2$.

(vii) \implies (iv). Fie $x_1, x_2 \in A$. Deoarece $f \in C^2(A)$, există $0 < \theta < 1$ astfel ca:

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_2) + \frac{1}{2} (x_1 - x_2)' \cdot Hf(\theta x_1 + (1-\theta)x_2) \cdot (x_1 - x_2)$$

Însă $\theta x_1 + (1-\theta) x_2 \in A$ și prin urmare conform (vii) avem:

$$(x_1 - x_2)' Hf(\theta x_1 + (1-\theta) x_2) (x_1 - x_2) \geq 0.$$

Prin urmare, $f(x_1) - f(x_2) \geq (x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_2)$.

(ii) \Rightarrow (vii). Avem $0 \in T(x, y)$, pentru orice $x \in A$, $y \in \mathbb{R}^n$. Conform P₁(iii) și (iv), $h'_{x,y}(t)$ este crescătoare dacă și numai dacă $h'_{x,y}(t) \geq 0$ pentru orice $t \in T(x, y)$. Pentru $t = 0$ obținem:

$$h'_{x,y}(0) = y' Hf(x) \geq 0, \text{ pentru orice } y \in \mathbb{R}^n$$

și prin urmare are loc (vii).

P₄. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă iar $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

Următoarele condiții sunt echivalente:

- (i) f este q-convexă pe A ;
- (ii) $(\forall) \alpha \in \mathbb{R}$, mulțimea $A_\alpha = \{x \in A / f(x) \leq \alpha\}$ este convexă sau vidă.
- (iii) $(\forall) x_1, x_2 \in A$ avem $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \max \{f(x_1), f(x_2)\}$ pentru orice $\lambda \in [0, 1]$.
- (iv) $(\forall) x \in A$, $y \in \mathbb{R}^n$, funcția $\varphi_{x,y}(t) = f(x+ty)$ este q-convexă pe mulțimea $T(x, y)$ definită în P₂.
- (v) $(\forall) x_1, x_2 \in A$, funcția $\psi_{x_1, x_2}(\lambda) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$ este q-convexă pe $[0, 1]$.
- (vi) Fie A deschisă, $f \in C^1(A)$. $(\forall) x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow (x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_2) \leq 0$.
- (vii) Fie A deschisă, $f \in C^1(A)$. $(\forall) x_1, x_2 \in A$ cu $(x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Indicație. Se arată că:

$$(iii) \Leftrightarrow (i) \Leftrightarrow (ii) ; (vi) \Leftrightarrow (vii)$$

$$(i) \Rightarrow (iv) \Rightarrow (v) \Rightarrow (vi) \Rightarrow (i)$$

(ii) \Rightarrow (i). Fie $x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) \leq f(x_2)$. Se consideră A_α cu $\alpha = f(x_2)$, care este convexă și deci $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in A_\alpha$ pentru orice $\lambda \in [0, 1]$. Rezultă $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \leq f(x_2)$.

(iv) \Rightarrow (v). Pentru $x_1, x_2 \in A$ avem $\psi_{x_1, x_2}(\lambda) = \varphi_{x_1, x_1 - x_2}(\lambda)$.

(v) \Rightarrow (vi). Fie $x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) \leq f(x_2)$. Deoarece:

$$\psi_{x_1, x_2}(0) = f(x_2), \quad \psi_{x_1, x_2}(1) = f(x_1) \text{ rezultă că:}$$

$$\psi_{x_1, x_2}(1) \leq \psi_{x_1, x_2}(0).$$

Dar ψ este q -convexă, deci pentru orice $\lambda \in [0,1]$, $\lambda = \lambda_1 + (1-\lambda)$. O avem: $\psi_{x_1, x_2}(\lambda) \leq \psi_{x_1, x_2}(0)$, adică $\lambda = 0$ este punct de maxim pentru ψ . Însă $f \in C^1(A)$. Deci $\psi \in C^1([0,1])$. Prin urmare:

$$\psi'_{x_1, x_2}(\lambda) = (x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq 0$$

pentru orice $\lambda \in [0,1]$. Pentru $\lambda = 0$ obținem (vi).

(vi) \Rightarrow (i). Fie $x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) \leq f(x_2)$. Este suficient să se arate că $\psi_{x_1, x_2}(\lambda) \leq \psi_{x_1, x_2}(0)$, $\forall \lambda \in [0,1]$. Pentru $\lambda = 0$ și

$\lambda = 1$ relația este evidentă. Fie multimea:

$$L = \{ \lambda \in (0,1) / \psi_{x_1, x_2}(\lambda) > \psi_{x_1, x_2}(0) \}$$

Douărecese $f \in C^1(A)$, $\psi_{x_1, x_2}(\lambda)$ este continuă pe $[0,1]$ și deci multimea L este deschisă. Presupunem $L \neq \emptyset$.

Fie $\lambda_0 = \sup \{ \lambda / \lambda \in L \}$. L deschisă, avem $\lambda_0 \notin L$ și prin urmare $\psi_{x_1, x_2}(\lambda_0) \leq \psi_{x_1, x_2}(0)$. (x)

Arătăm că ψ_{x_1, x_2} este constantă pe L . Fie $\lambda \in L$ iar $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$. Cum $\psi_{x_1, x_2}(\lambda) > \psi_{x_1, x_2}(0)$ avem:

$f(x_2) \leq f(x_\lambda) \leq f(x_1)$, deci conform (vi) avem:

$$(x_2 - x_\lambda)' \cdot \nabla f(x_\lambda) = -\lambda(x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_\lambda) \leq 0$$

Dar $f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_\lambda)$, deci și:

$$(x_1 - x_\lambda)' \cdot \nabla f(x_\lambda) = (1-\lambda)(x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_\lambda) \leq 0.$$

Se obține: $(x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_\lambda) = 0$, adică $\psi'_{x_1, x_2}(\lambda) = 0$ și prin urmare ψ_{x_1, x_2}

este constantă pe L . Deci: $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow \lambda_0 \\ \lambda \in L}} \psi_{x_1, x_2}(\lambda) > \psi_{x_1, x_2}(0)$ care împreună cu (x) contrazice continuitatea funcției ψ în λ_0 .

P5. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, convexă, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci următoarele condiții sunt echivalente:

(i) f este strict convexă pe A ;

(ii) $\forall x \in A, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, funcția $\varphi_{x,y}(t) = f(x+ty)$ este

strict convexă pe $T(x,y)$ definită în P_2 ;

(iii) $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$, funcția $\psi_{x_1, x_2}(\lambda) = f(\lambda x_1 +$

$(1-\lambda)x_2)$ este strict convexă pe $[0,1]$;

P₆. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, convexă și deschisă iar $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ cu $f \in C^1(A)$. Atunci următoarele condiții sunt echivalente:

(i) f este strict convexă pe A ;

(ii) $(\forall) x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$:

$$f(x_1) - f(x_2) > (x_1 - x_2)' \nabla f(x_2);$$

(iii) $(\forall) x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$:

$$f(x_1) - f(x_2) < (x_1 - x_2)' \nabla f(x_1);$$

(iv) $(\forall) x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2$:

$$(x_1 - x_2)' [\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2)] > 0$$

P₇. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă iar $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Atunci următoarele condiții sunt echivalente:

(i) $(\forall) x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) \leq f(x_2)$, avem:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq f(x_2)$$

pentru orice $0 < \lambda < 1$;

(ii) f este sq-convexă pe A ;

(iii) $(\forall) x_1, x_2 \in A$ avem:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \max \{f(x_1), f(x_2)\}$$

pentru orice $0 < \lambda < 1$.

P₈. Fie $B \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $A \subseteq B$, iar $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ cu f diferențiabilă pe B . Atunci următoarele condiții sunt echivalente:

(i) f este p-convexă pe A ;

(ii) $(\forall) x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) \leq f(x_2)$, avem:

$$(x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_2) \leq 0;$$

(iii) $(\forall) x_1, x_2 \in A$ cu: $(x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_2) \geq 0$, avem:

$$f(x_1) \geq f(x_2).$$

P₉. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă, $f: A \rightarrow (0, \infty)$. Dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$ și orice $0 < \lambda < 1$ avem:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq [f(x_1)]^\lambda \cdot [f(x_2)]^{1-\lambda}$$

atunci f este convexă pe A .

P₁₀. Dacă $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă pe mulțimea convexă $A \subseteq \mathbb{R}^n$ atunci f este p-convexă pe A .

P₁₁. Fie $f: B \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă iar $A \subseteq B$. Fie $\bar{x} \in A$.

(i) Fie A convexă iar f diferențiabilă în \bar{x} . Atunci:

$$f(\bar{x}) = \min \{ f(x) / x \in A \} \implies (\bar{x} - \bar{x})' \cdot \nabla f(\bar{x}) \geq 0, \quad (\forall) x \in A.$$

(ii) Fie f , p-convexă în \bar{x} . Atunci:

$$(\bar{x} - \bar{x})' \cdot \nabla f(\bar{x}) \geq 0, \quad (\forall) x \in A \implies f(\bar{x}) = \min \{ f(x) / x \in A \}.$$

Indicatie. (i) Fie $x \in A$ iar $x_\lambda = \lambda x + (1-\lambda) \bar{x}$. Evident $x_\lambda \in A$, $(\forall) 0 \leq \lambda \leq 1$. Avem $f(\bar{x}) \leq f(x_\lambda)$, $(\forall) 0 \leq \lambda \leq 1$. Deci:

$$0 \leq f(x_\lambda) - f(\bar{x}) = \lambda \cdot (\bar{x} - \bar{x})' \cdot \nabla f(\bar{x}) + \lambda \cdot \|x - \bar{x}\| \cdot \omega [\bar{x}, \lambda(x - \bar{x})]$$

unde $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \omega [\bar{x}, \lambda(x - \bar{x})] = 0$. Prin urmare pentru orice $0 < \lambda \leq 1$ avem:

$$(\bar{x} - \bar{x})' \cdot \nabla f(\bar{x}) + \omega [\bar{x}, \lambda(x - \bar{x})] \cdot \|x - \bar{x}\| \geq 0.$$

Lăsând λ tinsind la zero obținem:

$$(\bar{x} - \bar{x})' \cdot \nabla f(\bar{x}) \geq 0$$

(ii) Se folosește ipoteza împreună cu P₈(iii).

P₁₂. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, convexă, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ iar $\bar{x} \in A$. Presupunem f diferențiabilă în \bar{x} . Atunci:

$$(i) \quad f(\bar{x}) = \min \{ f(x) / x \in A \} \implies \nabla f(\bar{x}) = 0;$$

(ii) Fie f , p-convexă în \bar{x} . Atunci :

$$\nabla f(\bar{x}) = 0 \implies f(\bar{x}) = \min \{ f(x) / x \in A \}.$$

Indicatie. Se folosește P₁₁ și faptul că A este deschisă; există $\delta > 0$ astfel ca $x = \bar{x} - \delta \nabla f(\bar{x}) \in A$. Apoi se are în vedere relația din P₁₁(i).

P₁₃. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$, convexă, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $A \subseteq B$ iar $f: B \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este p-convexă pe A atunci f este sq-convexă pe A și prin urmare și q-convexă pe A . În general inversa nu este adevărată.

Indicatie. Se presupune că f nu este sq-convexă. Atunci există $x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_2) < f(x_1)$ și există $0 < \lambda_0 < 1$ astfel ca pentru: $x_0 = \lambda_0 x_1 + (1-\lambda_0) x_2$ să avem $f(x_0) = \max \{ f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) / 0 \leq \lambda \leq 1 \}$. Folosind P₁₁(i) avem: $(x_1 - x_0)' \nabla f(x_0) \leq 0$ și $(x_2 - x_0)' \nabla f(x_0) \leq 0$.

Inlocuind pe x_0 în aceste relații cu expresia sa obținem:

$(x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_0) = 0$ și $(x_2 - x_0)' \cdot \nabla f(x_0) = 0$. Acum din p-convexitatea lui f rezultă că $f(x_2) \geq f(x_0)$ și deci $f(x_2) > f(x_1)$, deoarece

$f(x_1) > f(x_2)$. Rezulta o contradicție cu faptul că x_0 este un punct de maxim pentru f pe segmentul $[x_1, x_2] = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 / 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Pentru a arăta că inversa nu este în general adevărată se poate considera $f(x) = x^3$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

P₁₄. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă iar $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ inferior semicontinuă și strict quasiconvexă pe A . Atunci f este q-convexă pe A dar nu și invers.

Indicatie. Fie f , sq-convexă pe A iar $x_1, x_2 \in A$. Dacă $f(x_1) < f(x_2)$ afirmația este imediată. Dacă $f(x_1) = f(x_2)$, fie:

$$\Omega = \{y \in (x_1, x_2) / f(y) > f(x_2)\}$$

Presupunem că $\Omega \neq \emptyset$. Atunci din sq-convexitatea lui f rezultă că pentru orice $y \in \Omega$ avem $(*) f(y) > f(x)$ pentru orice $x \in [x_1, x_2] = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 / 0 \leq \lambda \leq 1\}$, $x \neq y$. Decoarece f este inferior semicontinuă, multimea Ω este deschisă relativ la segmentul $(x_1, x_2) = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 / 0 < \lambda < 1\}$. Deci există cel puțin două puncte $y_1, y_2 \in \Omega$ cu $y_1 \neq y_2$. Conform $(*)$ avem $f(y_1) > f(y_2)$, și $f(y_2) > f(y_1)$ ceea ce nu se poate.

Pentru a arăta că relația inversă nu are loc în general, se

poate considera $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 0, & 0 < x < 1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$ cu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care

este q-convexă fără ca să fie sq-convexă. De exemplu se poate considera

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -\frac{1}{2}, \quad \lambda = \frac{1}{10}$$

P₁₅. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă cu: $-A \subseteq A$. Dacă $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă și $f(0) = 0$ atunci $f(x) \geq -f(-x)$, pentru orice $x \in A$.

Indicatie. Se scrie $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x) \in A$ și deci:

$$f(0) \leq \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \text{ și de aici afirmația cerută.}$$

P₁₆. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă, x^0 punct interior lui A , iar $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ convexă. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) f este diferențiabilă Gâteaux în punctul x^0 ;
- (ii) f admite derivate parțiale în raport cu orice variabilă x_j , $j = \overline{1, n}$, în punctul x^0 ;
- (iii) f este diferențiabilă Fréchet în punctul x^0 .

Indicatie. Se arată că:

$$(i) \rightarrow (ii) \rightarrow (iii) \rightarrow (i).$$

Implicatia (i) \rightarrow (ii) este evidentă, iar implicatia
 $(iii) \rightarrow (i)$ rezultă din P_4 din § 1.2.
 $(ii) \rightarrow (iii)$. Fie $r > 0$ cu $S(x^0, r) \subseteq A$ iar $g: S(0, r) \rightarrow \mathbb{R}$ definită
prin: $g(h) = f(x^0 + h) - f(x^0) - h^T \nabla f(x^0)$, (\forall) $h \in S(0, r)$. Se ară-
tă că g este convexă. Fie $\{e^j\}_{j=1, n}$ baza unitate din \mathbb{R}^n . Atunci

$$g(h) = g\left(\sum_{j=1}^n h_j e^j\right) = g\left(\sum \frac{1}{n} (nh_j e^j)\right) \leq \frac{1}{n} \sum g(nh_j e^j) =$$

$$= \sum_{j=1}^n \left[\frac{f(x^0 + nh_j e^j) - f(x^0)}{n} - h_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) \right]$$

pentru orice $h \in S(0, \frac{r}{n})$. Definim pentru fiecare $j = \overline{1, n}$ funcția
 $\varphi_j: S(0, \frac{r}{n}) \rightarrow \mathbb{R}$ prin:

$$\varphi_j(h) = \begin{cases} \frac{f(x^0 + nh_j e^j) - f(x^0)}{nh_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0), & h_j \neq 0 \\ 0 & h_j = 0 \end{cases}$$

Atunci $g(h) \leq \sum_{j=1}^n h_j \varphi_j(h)$, (\forall) $h \in S(0, \frac{r}{n})$.

Punem $\varphi(h) = (\varphi_1(h), \dots, \varphi_n(h))'$ și obținem:

$$g(h) \leq h^T \varphi(h) \leq \|h\| \cdot \|\varphi(h)\|, \quad (\forall) \quad h \in S(0, \frac{r}{n}).$$

Este clar că și:

$$g(-h) \leq \|h\| \cdot \|\varphi(-h)\|, \quad (\forall) \quad h \in S(0, \frac{r}{n}).$$

Folosind P_{14} avem: $-g(-h) \leq g(h)$, (\forall) $h \in S(0, \frac{r}{n})$, de unde obținem:

$$-\|\varphi(-h)\| \leq \frac{1}{\|h\|} g(h) \leq \|\varphi(h)\|, \quad (\forall) \quad h \in S(0, \frac{r}{n}) \setminus \{0\}$$

Deoarece $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi_j(h) = 0$, (\forall) $j = \overline{1, n}$, avem $\lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0$.

Se obține: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} g(h) = 0$, adică f este diferențiabilă Fréchet
în punctul x^0 .

4.3. Proprietăți

P_1 . Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă iar $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă $\bar{x} \in A$ este un minim local pentru f iar f este sq-convexă în \bar{x} atunci \bar{x} este un minim global pentru f .

Indicație. Dacă \bar{x} este minim local pentru f atunci există $r > 0$ astfel ca $f(\bar{x}) \leq f(x)$, $(\forall) x \in A \cap S(\bar{x}, r)$. Presupunem că există $x^* \in A \setminus S(\bar{x}, r)$ cu $f(x^*) < f(\bar{x})$. Din sq-convexitatea lui f în \bar{x} și din convexitatea mulțimii A avem:

$$f(\lambda x^* + (1-\lambda) \bar{x}) < f(\bar{x}), (\forall) 0 < \lambda < 1.$$

Fie $0 < \tilde{\lambda} < \frac{r}{\|\bar{x}-x^*\|}$. Atunci $\tilde{\lambda} \bar{x} + (1-\tilde{\lambda}) x^* \in A \cap S(\bar{x}, r)$ contrazice proprietatea de minim local a lui \bar{x} .

P_2 . Să se arate că nu are loc P_1 dacă se înlocuiește sq-convexitatea lui f cu q-convexitate.

Indicație. Se poate considera:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \leq 0 \\ 0 & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ x-1 & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases}$$

cu $\bar{x} = \frac{1}{2}$ minim local.

P_3 . Fie $B \subseteq \mathbb{R}^n$ deschisă, $A \subseteq B$, $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ p-convexă, iar $\bar{x} \in A$.

Atunci dacă: $(x-\bar{x})' \nabla f(\bar{x}) \geq 0$, $(\forall) x \in A$, avem $f(\bar{x}) = \min \{f(x)/x \in A\}$.

P_4 . Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă. Atunci $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă dacă și numai dacă:

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)$$

pentru orice p natural, orice $x_1, \dots, x_p \in A$, $(\forall) \lambda_1, \dots, \lambda_p \geq 0$ cu

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$$

P_5 . Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ continuă. Atunci f este convexă pe A dacă și numai dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$ avem: $f\left(\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2\right) \leq \frac{1}{2} f(x_1) + \frac{1}{2} f(x_2)$.

P_6 . Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă. Atunci $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este convexă și concavă pe A dacă și numai dacă pentru orice $\mu \in \mathbb{R}$ și $x_1, x_2 \in A$ cu $x = \mu x_1 + (1-\mu) x_2 \in A$ avem: $f(\mu x_1 + (1-\mu) x_2) = \mu f(x_1) + (1-\mu) f(x_2)$.

Indicatie. Presupunem f convexă și concavă. Punem $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} \in A$. Atunci pentru orice $0 < \lambda < 1$ avem: $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x_0) = -f\left[\left(\lambda \mu + \frac{1-\lambda}{2}\right) x_1 + \left(\lambda(1-\mu) + \frac{1-\lambda}{2}\right) x_2\right]$.

Atunci pentru λ suficient de mic, avem ultima expresie egală cu:
 $(\lambda \mu + \frac{1-\lambda}{2}) f(x_1) + (\lambda(1-\mu) + \frac{1-\lambda}{2}) f(x_2) = -\lambda \left[\mu f(x_1) + (1-\mu) f(x_2)\right] + (1-\lambda) f(x_0)$.

De aici rezultă ușor relația cerută.

P₇. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă iar $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ convexă care își atinge maximul global în \bar{x} punct interior pentru A . Atunci f este constantă pe A .

Indicatie. Presupunem că există $y \in A$ cu $f(y) < f(\bar{x})$. Atunci fie $d > 1$ astfel ca $z = y + d(\bar{x} - y)$ să aparțină lui A . Atunci:

$$\bar{x} = \frac{1}{d} z + \frac{d-1}{d} y \in A \text{ și avem:}$$

$$f(\bar{x}) \leq \frac{1}{d} f(z) + \frac{d-1}{d} f(y) < \frac{1}{d} f(\bar{x}) + \frac{d-1}{d} f(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

care conduce la contradicție.

P₈. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă, deschisă. Dacă $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție convexă pe A atunci f este continuă pe A .

Indicatie. Fie $x^0 \in A$. Există $r > 0$ astfel ca:

$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n / |x_j - x_j^0| < r, j = \overline{1, n} \right\} \subset A$$

Fie C mulțimea celor 2^n vîrfuri ale cubului B , iar $\alpha = \max \{f(x) / x \in C\}$. Arătăm că dacă $\|x - x^0\| < r$ atunci:

$$(*) \quad |f(x) - f(x^0)| \leq \frac{\alpha - f(x^0)}{r} \|x - x^0\|.$$

Deoarece mulțimea $A_\alpha = \{x \in A / f(x) \leq \alpha\}$ este convexă iar $C \subset A_\alpha$ avem $B = [C] \subset A_\alpha$ și deci și $f(x^0) \leq \alpha$. Fie x astfel că $\|x - x^0\| < r$. Notăm $\lambda = \frac{\|x - x^0\|}{r} \in (0, 1)$.

¶1.

$$x_1 = x^0 + \frac{1}{\lambda} (x - x^0)$$

$$\text{Avem } \|x_1 - x^0\| = \|x^2 - x^0\| = r \text{ și deci } f(x^1) \leq \alpha, f(x^2) \leq \alpha$$

Însă:

$$f(x) = f(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^0) \leq \lambda d + (1-\lambda) f(x^0);$$

$$f(x^0) = f\left(\frac{1}{1+\lambda} x + \frac{\lambda}{1+\lambda} x^2\right) \leq \frac{1}{1+\lambda} [f(x) + \lambda d]$$

De aici rezultă imediat (n) și prin urmare rezultă și continuitatea lui f .

P₉. Să se arate că dacă în P₈ nu se presupune A deschisă atunci în general f nu este continuă.

Indicație. Se poate lua $A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$ iar $f(x) = 2$ dacă $x = -1$ și $f(x) = (x)^2$ dacă $x > -1$.

P₁₀. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă, deschisă, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ convexă. Definim:

$$B = \left\{ y \in \mathbb{R}^n / \sup_{x \in A} (y^T x - f(x)) < +\infty \right\}$$

și

$$g(y) = \sup_{x \in A} \{y^T x - f(x)\}.$$

Atunci:

a) $(\forall) x \in A, (\exists) y \in B$ astfel ca:

$$x^T y = f(x) + g(y)$$

$$b) f(x) = \sup_{y \in B} (x^T y - g(y))$$

c) dacă f este diferențiabilă pe A atunci: $\nabla f(x) \subseteq Y$.

Indicație. Pentru (a) se folosește P₂(v) din § 4.2. La (c) fie $x_0 \in A$. Conform (a) există $y_0 \in B$ astfel ca: $x_0^T y_0 = f(x_0) + g(y_0)$. Deoarece $g(y_0) \geq x_0^T y_0 - f(x)$, $(\forall) x \in A$ (din (b)) rezultă că x_0 este un punct de extremum pentru funcția $\varphi(x) = x^T y_0 - f(x)$. Deci $\nabla \varphi(x_0) = 0$. Însă $\nabla \varphi = y_0 - \nabla f$, deci $\nabla f(x_0) = y_0 \in B$.

P₁₁. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă, $g: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ convexă iar $\varphi: [g(A)] \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, unde $[g(A)]$ este acoperirea convexă a multimii $g(A)$. Dacă φ este crescătoare în raport cu fiecare componentă y_1 pentru care $g_1(x)$ nu este liniară și este:

- (i) q -convexă;
- (ii) sq -convexă;
- (iii) convexă;

pe $B = [g(A)]$, atunci funcția compusă $\Psi(x) = \varphi(g(x))$ are proprietatea (i), (ii) respectiv (iii) pe A .

Indicatie. (i) Fie $x_1, x_2 \in A$, $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, $\lambda \in (0,1)$. Avem $g(x_0) \in B$ și deci: $g(x_0) \leq \lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2)$, unde avem egalitate pentru componentele liniare ale lui g . Obținem:

$$\varphi(g(x_0)) \leq \varphi(\lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2))$$

deoarece φ este crescătoare în raport cu componentele neliniare ale lui g . Insă:

$$\varphi(\lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2)) \leq \max \{ \varphi(g(x_1)), \varphi(g(x_2)) \}$$

adică: $\psi(x_0) \leq \max \{ \psi(x_1), \psi(x_2) \}$.

(ii), (iii) se obțin în același mod.

P₁₂. Orice transformare (strict) crescătoare.

P₁₂. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă, $\delta^t : A \rightarrow \mathbb{R}$ q-convexă iar φ o funcție definită pe $B = [\delta^t(A)]$, $\psi : B \rightarrow \mathbb{R}$ crescătoare. Atunci funcția $\psi = \varphi \circ \delta^t$ este q-convexă.

P₁₃. Dacă în P₁₂ se consideră δ^t ca fiind sq-convexă iar φ strict crescătoare atunci ψ este sq-convexă.

P₁₄. Să se arate că P₁₂ și P₁₃ nu au loc dacă se consideră δ^t , funcție convexă.

Indicatie. Se poate lua $\delta^t(x) = x$, $\delta^t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ iar $\varphi(y) = y^3$. Atunci $\psi(x) = (x)^3$ nu este convexă.

P₁₅. Fie f_i , $i \in M$ (finită sau infinită) funcții convexe. Atunci funcțiile:

$$f(x) = \sup \{ f_i(x) / i \in M \}$$

$$g(x) = \sup \{ |f_i(x)| / i \in M \}$$

sunt convexe.

P₁₆. O funcție f strict convexă are cel mult un minim pe mulțimea convexă $A \subseteq \mathbb{R}^n$, unde $f : A \rightarrow \mathbb{R}$.

P₁₇. Fie f_i , $i \in M$ (finită sau infinită) funcții q-convexe. Atunci

funcția $f(x) = \sup \{ f_i(x) / i \in M \}$ este q-convexă.

P₁₈. Fie $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ cu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă. Notăm $h = f \cdot g$. Atunci:

(i) Dacă f este convexă și $f \leq 0$ pe A iar g este concavă și $g > 0$ pe A , atunci funcția h este q-convexă pe A .

(ii) Dacă în plus f , g sunt diferențiabile pe A deschisă atunci funcția h este p-convexă pe A .

P₁₉. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă iar $f: A \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) dacă f are semn constant pe A atunci f este p-convexă pe A dacă și numai dacă funcția $h = \frac{1}{f}$ este p-concavă pe A .
- (ii) dacă f este convexă negativă pe A atunci $h = \frac{1}{f}$ este concavă pe A .
- (iii) dacă f este concavă pozitivă pe A atunci $h = \frac{1}{f}$ este convexă pe A .

P₂₀. Să se arate că dacă în P₁₉(ii) f este convexă pozitivă atunci proprietatea nu mai este adevărată.

Indicație. Se poate lua $f(x) = x$, $A = (0, \infty)$.

P₂₁. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ convexă, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ convexă nenegativă. Atunci:

- (i) dacă $\alpha \geq 1$ atunci f^α este convexă pe A ;
- (ii) dacă $\alpha < 1$ atunci în general f^α nu este convexă.

4.4. Convexitatea unor funcții elementare

P₁. Fie funcția:

$$\psi(x) = (x_1)^{\alpha_1} (x_2)^{\alpha_2} \dots (x_n)^{\alpha_n}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \geq 0$ este sq-concavă pe \mathbb{R}_+^n .

Indicație. Pentru $x \in \mathbb{R}_+$, unde $A = \mathbb{R}_+^n$ fie funcția:

$$g(x) = \alpha_1 \log x_1 + \alpha_2 \log x_2 + \dots + \alpha_n \log x_n$$

Se arată ușor că g este concavă pe \mathbb{R}_+ . Fie $\varphi(y) = e^y$ care este strict crescătoare pe \mathbb{R} . Folosind o variantă (pentru concavitate) a problemei P₁₁ din § 4.3, rezultă că funcția $\psi(x) = \varphi(g(x))$ este sq-concavă pe \mathbb{R}_+ . Însă $\psi(x) \geq 0$ pe A și $\psi(x) > 0$ pe \mathbb{R}_+ . Deci pentru $x_1, x_2 \in A$ și $x_0 \in (x_1, x_2) = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 / 0 < \lambda < 1\}$ avem:

$\psi(x_0) \geq \min\{\psi(x_1), \psi(x_2)\} = 0$, dacă x_1 , sau $x_2 \in A \setminus \mathbb{R}_+$. În plus, dacă $\psi(x_1) > \psi(x_2) = 0$ atunci $x_1 > 0$ și deci $x_0 > 0$ și avem $\psi(x_0) > 0 = \psi(x_2)$. Deci ψ este sq-concavă și în A .

P₂. Funcția $f(x, y) = xy$ este sq-concavă pe \mathbb{R}_+^2 .

P₃. Fie $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))'$ concavă și nenegativă în multimea convexă $A \subset \mathbb{R}^n$ iar $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \geq 0$. Atunci funcția:

$$\psi(x) = \prod_{i=1}^m (g_i(x))^{\alpha_i}$$

este sq-concavă pe A .

Indicatie. Conform P₁, funcția $\varphi(y) = (y_1)^{\alpha_1} (y_2)^{\alpha_2} \dots (y_m)^{\alpha_m}$ este sq-concavă pe R_+^m , unde $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Însă φ este crescătoare în raport cu fiecare componentă și deci conform unei variante a problemei P₁₁ (§ 4.3), funcția $\psi(x) = \varphi(g(x))$ este sq-concavă pe A.

P₄. Fie $f, g: A \rightarrow R_+$ concave, unde $A \subseteq R^n$ este convexă atunci funcția $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ este sq-concavă pe A.

Indicatie. Rezultă din P₃ luând n=2, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $g_1 = f$ și $g_2 = g$.

P₅. Fie $f: A \rightarrow R_+$ convexă, $g: A \rightarrow (0, \infty)$ concavă unde $A \subseteq R^n$ este convexă. Atunci funcția: $h = \frac{f}{g}$ este sq-convexă pe A.

Indicatie. Fie $x_1, x_2 \in A$ și $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ cu $0 < \lambda < 1$.

Evident că:

$$0 \leq f(x_0) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$g(x_0) \geq \lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2) > 0$$

Atunci:

$$h(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \leq \frac{\lambda g(x_1) \cdot h(x_1)}{\lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2)} + \frac{(1-\lambda) g(x_2) \cdot h(x_2)}{\lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2)} \leq$$

$\leq \max \{ h(x_1), h(x_2) \}$. Ultima inegalitate trebuie să fie strictă deoarece coeficienții lui $h(x_1)$, $h(x_2)$ sunt din $(0, 1)$ iar $h(x_1) \neq h(x_2)$.

P₆. Fie $A \subseteq R^n$ convexă, $f: A \rightarrow R$ convexă iar $g(x) = a'x + \alpha$ pozitivă în A unde $a \in R^n$, $\alpha \in R$. Atunci funcția $h = \frac{f}{g}$ este sq-convexă pe A.

P₇. Fie $f(x) = a'x + \beta$, $g(x) = a'x + \alpha$ cu $f, g: A \rightarrow R$, $A \subseteq R^n$ convexă iar $g(x) \neq 0$ pe A. Atunci funcția $h = \frac{f}{g}$ este sq-convexă pe A.

P₈. Fie $A \subseteq R^n$ o mulțime convexă iar $g: A \rightarrow R^m$ unde $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ este:

- (i) q-convexă;
- (ii) sq-convexă;
- (iii) convexă

de mulțimea A. Atunci funcția:

$$h(x) = \max \{ g_i(x) / i \in \{1, 2, \dots, m\} \}$$

are proprietatea (i), (ii) respectiv (iii) pe A. $\lambda \in (0, 1)$.

Indicatie. Fie $x_1, x_2 \in A$, $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$.

$$(1) \quad h(x_0) = \max_{\mathbb{I}} \{g_1(x_0)\} \leq \max_{\mathbb{I}} \max_{\mathbb{I}} \{g_1(x_1), g_1(x_2)\} = \\ = \max \left\{ \max_{\mathbb{I}} \{g_1(x_1)\}, \max_{\mathbb{I}} \{g_1(x_2)\} \right\} = \max \{h(x_1), h(x_2)\}.$$

(ii) Fie λ_k astfel ca: $g_{1_k}(x_k) = \max_{\mathbb{I}} \{g_1(x_k)\}$, $k = 0, 1, 2$. Pentru p avem $h(x_1) < h(x_2)$, adică $g_{1_1}(x_1) < g_{1_2}(x_2)$. Dacă h nu este proprietatea (ii) atunci $h(x_0) = \max \{h(x_1), h(x_2)\} = h(x_2)$ adică $g_{1_0}(x_0) = g_{1_2}(x_2)$ care contrazice (ii) pentru g . Dacă $g_{1_0}(x_1) \neq g_{1_0}(x_2)$ atunci: $g_{1_0}(x_0) < \max \{g_{1_0}(x_1), g_{1_0}(x_2)\} \leq \max \{g_{1_1}(x_1), g_{1_2}(x_2)\} =$
 $= g_{1_2}(x_2) = g_{1_0}(x_0)$ ceea ce nu se poate.

Dacă $g_{1_0}(x_1) = g_{1_0}(x_2)$ atunci:

$$g_{1_0}(x_0) \leq g_{1_0}(x_1) \leq g_{1_1}(x_1) \leq g_{1_2}(x_2) = g_{1_0}(x_0)$$

Deci în general $h(x_1) < h(x_2)$ implica $h(x_0) < h(x_2)$.

Pg. Fie $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))'$, $g: \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferențialabilă și convexă în $\bar{x} \in \mathbb{A}$. Fie $\varphi(y)$, $\varphi: \mathbb{B}(\lambda) \rightarrow \mathbb{R}$ și p -convexă în $\bar{y} = g(\bar{x})$ și $\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(\bar{y}) \geq 0$ pentru orice i pentru care $g_i(x)$ nu este convexă în \bar{x} . Atunci funcția compusă $\psi(x) = \varphi(g(x))$ este p -convexă în \bar{x} relativ la λ .

Indicație. Fie $x \in \mathbb{A}$, $y = g(x) \in \mathbb{B}(\lambda)$. Se arată mai întâi că:

$$(1) \quad (x - \bar{x})' \nabla \psi(\bar{x}) \leq (y - \bar{y})' \nabla \varphi(\bar{y}).$$

Se consideră: $\mathbb{M}_1 = \{1 \leq i \leq n / g_i(x)$ nu este concavă în $\bar{x}\}$

$\mathbb{M}_2 = \{1 \leq i \leq n / g_i(x)$ este concavă în $\bar{x}\}$

$$\text{Atunci: } (x - \bar{x})' \nabla \psi(\bar{x}) = \sum_{i=1}^n (x - \bar{x})' \nabla g_i(\bar{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(\bar{y}). \text{ Înse }$$

$$(x - \bar{x})' \nabla g_i(\bar{x}) \leq g_i(x) - g_i(\bar{x}) = y_i - \bar{y}_i$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(\bar{y}) \geq 0, (\forall) i \in \mathbb{M}_1. \text{ Rezulta:}$$

$$(x - \bar{x})' \nabla g_i(\bar{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(\bar{y}) \leq (y_i - \bar{y}_i) \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}(\bar{y}), (\forall) i \in \mathbb{M}_1$$

pe de altă parte:

$$(x-\bar{x})' \nabla g_1(\bar{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} (\bar{y}) = [g_1(x) - g_1(\bar{x})] \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} (\bar{y}) = \\ - (y_1 - \bar{y}_1) \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} (\bar{y})$$

pentru orice $i \in M_2$. Rezultă acum ușor (1).

Deci din (1) și q -convexitatea lui φ în y avem:

$$\psi(x) \leq \psi(\bar{x}) \Rightarrow \varphi(y) \leq \varphi(\bar{y}) \Rightarrow (y-\bar{y})' \nabla \varphi(\bar{y}) \leq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x-\bar{x})' \nabla \psi(\bar{x}) \leq 0$, deci ψ este q -convexă în x .

Analog, $\psi(x) < \psi(\bar{x}) \Rightarrow \varphi(y) < \varphi(\bar{y}) \Rightarrow (y-\bar{y})' \nabla \varphi(\bar{y}) < 0$

$\Rightarrow (x-\bar{x})' \nabla \psi(\bar{x}) < 0$, adică ψ e p -convexă în x .

P₁₀. Fie $f(x)$, p -convexă în $\bar{x} \in A$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ iar $g(y)$ diferențiabilă în $\bar{y} = f(\bar{x})$ și $\nabla g(\bar{y}) > 0$, atunci funcția $h = \varphi \circ g$ este p -convexă în \bar{x} .

P₁₁. Fie $f(x) = \sum_{k=1}^n e^{x_k}$, $g(x) = \log f(x)$, unde $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Funcția g este convexă:

Indicatie.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} \frac{1}{\{f(x)\}^2} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n e^{x_k+x_i}, & i = j \\ -\frac{e^{x_i+x_j}}{\{f(x)\}^2}, & i \neq j \end{cases}$$

și se arată că matricea hessiană este pozitiv semidefinită. Apoi se aplică P₃ din § 4.2.

P₁₂. Funcția

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i \log x_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \log \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)$$

este convexă pentru $x_i > 0$, (\forall) $i = 1, 2, \dots, n$.

Indicatie. Se are în vedere că:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \log x_k - \log (\sum x_i) \text{ si}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_\ell} = \frac{\delta_{k\ell}}{x_k} - \frac{1}{\sum_1^n x_i}$$

unde $\delta_{k\ell} = \begin{cases} 1 & , k = \ell \\ 0 & , k \neq \ell \end{cases}$

și se arată că matricea hessiană este pozitiv semidefinită. Apoi se aplică P₃ din § 4.2.

BIBLIOGRAFIE

1. Abadie, J.(ed), "Nonlinear programming" North-Holland, Amsterdam, 1967.
2. Berge, C. Ghouila-Houri,A., "Programmes, jeux et réseaux de transport", Dunod, Paris 1962.
3. Breckner,W. "Introducere în teoria problemelor de optimizare convexă cu restricții. I, Ed.Dacia 1974.
4. Dantzig G., "Applications et prolongements de la programmation linéaire", Dunod, Paris, 1966.
5. Dragomirescu,M., Malită,M., "Programarea pătratică", Ed.științifică, București, 1968.
6. Dragomirescu,M., Malită,M., "Programare neliniară", Ed.științifică, București 1972.
7. Gass,S., "Linear programming", McGraw-Hill-Book Co. 1969.
8. Hadley,G.; "Linear programming", Adison-Wesley Publishing Co.
9. Kaufmann,A., "Metode și modele ale cercetării operaționale", I,II.
10. Kaufmann,A., Henry-Labordère,A., "Metode și modele ale cercetării operaționale", III.
11. Malită,M., Zidăroiu,C., "Matematica organizării", Ed.Tehnică, București, 1975.
12. Mangasarian,Olvi L., "Nonlinear programming", McGraw-Hill - New York, 1969.
13. Martos,B., "Nonlinear programming", Akadémiai KIADO Budapest 1975.
14. Mihoc,Gh., Nădejde,I., "Programarea matematică" I,II., Ed.științifică, București 1966-1967.
15. Mihoc,Gh., Ștefănescu,A., "Programarea matematică", Ed.didactică și pedagogică, București 1973.
16. Nădejde,I., Bergthaller,C., Zidăroiu,C., Sburlan,S., "Probleme de cercetare operațională". Ed.Academiei, București 1971.
17. Roberts,W., Varberg,D., "Convex functions", Academic Press, New York & London 1973.

18. Rockafellar,R.T., "Convex analysis", Princeton, Princeton University Press 1970.
19. Simonnard,M., "Programation linéaire", Dunod, Paris, 1972.
20. Valentine,F.A., "Convex sets", McGraw-Hill, New York, 1964.

C-dă nr.	45	Anul	1978
Tiraj:	553	Reeditare
Numele și Prenumele dactilograful:			
..... RUXANDA IONESCU			
Desenul: Gheorghe Doina			
Corectat și bun de tipar: Dr. V. PREDA			
Executat în cadrul Tipografiei Universității din București			