UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICA

Asist. dr. V. PREDA • Asist. dr. M. BAD

CULEGERE DE PROBLEME DE CERCETĂRI OPERAȚIONALE

— PARTEA I —

BUCUREȘTI
— 1978 —

U N I V E R S I T A T E A   D I N   B U C U R E S T I
FACULTATEA DE MATEMATICA

Asist.Dr.V.PREDA   Asist.Dr.M.BAD

CULEGERE DE PROBLEME DE CERCETARI OPERATIONALE

- Partea I -

1 9 7 8

Bad Monica

INTRODUCERE

Culegerea se adresează studenţilor din anul IV Matematică şi anul III Informatică de la Facultatea de Matematică, ca şi specialiştilor din producţie ce urmează cursurile Post Universitare. Ea urmăreşte structura cursului de cercetări operaţionale predat în facultate, tratînd problema programării matematice.

Lucrarea este prezentată în două părţi prima cuprinzînd programare liniară şi proprietăţi ale mulţimilor şi funcţiilor convexe, iar a doua parte (care va apare în 1979) probleme de programare neliniară - algoritmi. Fiecare capitol cuprinde o prezentare teoretică a metodelor respective, după care urmează probleme rezolvate ce ilustrează toate cazurile prezentate teoretic. Se propun, de asemenea, probleme spre rezolvare.

Autorii vor fi îndatoraţi specialiştilor care vor face sugestii pentru o prezentare a materialului şi mai legată de problemele practice.

Autorii

CUPRINS

I. PROGRAMARE LINEARA

1. ALGORITMUL SIMPLEX PRIMAL

1.1. Cazul cînd dispunem de o bază primal admisibilă

Descrierea algoritmului

Fie problema de programare lineară în forma standard

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$\max(\min)\ c'x$$

cu A matrice (mxn) de rang m, $b \in R^m$, $c \in R^n$, $x \in R^n$.

Presupunem că există o bază B primal admisibilă, adică $B^{-1}b \geq 0$.

(1) Se formează tabelul simplex în care se trec:

(a) $\bar{x}^B$ soluția sistemului în care am făcut $x^S = 0$

(b) $\bar{z}^B = c_B'\bar{x}^B = \sum\limits_{i \in \mathcal{B}} c_i\, \bar{x}_i^B$

(c) $y_j^B = B^{-1}a^j$, $j \in \mathcal{B} \cup \mathcal{S}$. Cînd B = I , y_{ij}^B sînt chiar coeficienții din sistem.

(d) $$\begin{cases} z_j^B - c_j = \sum\limits_{i \in \mathcal{B}} c_i y_{ij}^B - c_j & , \quad j \in \mathcal{S} \\ z_j^B - c_j = 0 & , \quad j \in \mathcal{B} \end{cases}$$

(2) Se aplică testul de optimalitate:

Dacă $z_j^B - c_j \geq (\leq)\ 0$ $(\forall)$ j, atunci problema are un optim finit. Soluția este $(\bar{x}^B, 0)$, iar valoarea optimă a funcției obiectiv este $\bar{z}^B$.

In caz contrar se continuă algoritmul.

(3) Se aplică testul pentru infinitudinea soluției:

Dacă există j pentru care $z_j^B - c_j < (>) 0$ și $y_{ij} \leq 0$ oricare ar fi $i \in \mathcal{B}$, atunci problema are optim infinit.

In caz contrar se continuă algoritmul.

(4) Se aplică criteriul de îmbunătățire a soluției.

Dacă există (i,j) încît $z_j^B - c_j < (>) 0$, $y_{ij} > 0$, atunci soluția se îmbunătățește astfel:

Criteriul de intrare în bază

Intră în bază a^k, cu k stabilit încît:

$$z_k^B - c_k = \min_j (\max_j) (z_j^B - c_j)$$

Criteriul de ieșire din bază

Iese din bază a^ℓ, cu ℓ stabilit încît:

$$\frac{\bar{x}_\ell^B}{y_{\ell k}^B} = \min_{\substack{i \in \mathcal{B} \\ y_{ik} > 0}} \frac{\bar{x}_i^B}{y_{ik}^B}$$

Transformarea tabelului

linia k: $\bar{x}_k^{\tilde{B}} = \dfrac{\bar{x}_\ell^B}{y_{\ell k}^B}$, $y_{kj}^{\tilde{B}} = \dfrac{y_{\ell j}^B}{y_{\ell k}^B}$, $y_k^{\tilde{B}} = \dfrac{1}{y_{\ell k}^B}$

linia i, $i \neq k$ $\bar{x}_i^{\tilde{B}} = \bar{x}_i^B - \bar{x}_\ell^B \dfrac{y_{ik}^B}{y_{\ell k}^B}$

$$y_{ij}^{\tilde{B}} = y_{ij}^B - y_{\ell j}^B \frac{y_{ik}^B}{y_{\ell k}^B} \quad , \ j \neq \ell$$

$$y_{i\ell}^{\tilde{B}} = y_{i\ell}^B - y_{\ell\ell}^B \frac{y_{ik}^B}{y_{\ell k}^B}$$

$$\bar{z}^{\tilde{B}} = \bar{z}^B - (z_k^B - c_k) \frac{\bar{x}_\ell^B}{y_{\ell k}^B}$$

$$z_j^{\tilde{B}} - c_j = (z_j^B - c_j) - (z_k^B - c_k) \frac{y_{\ell j}^B}{y_{\ell k}^B}$$

Se reiau etapele algoritmului.

1) Să se rezolve:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 10$$
$$x_1 - x_2 \leqslant 5$$
$$x_1 + 2x_3 \leqslant 6$$
$$x_i \geqslant 0 \quad i=1,2,3$$
$$\max(3x_1 + 4x_2 + x_3)$$

Soluție:

Se aduce problema la forma standard prin introducerea variabilelor ecart

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 10$$
$$x_1 - x_2 + x_5 = 5$$
$$x_1 + 2x_3 + x_6 = 6$$
$$x_i \geqslant 0 \quad i = 1,6$$
$$\max(3x_1 + 4x_2 + x_3)$$

Dispunem de o bază unitară, $\mathcal{B} = \{4,5,6\}$, $\mathcal{Y} = \{1,2,3\}$, $B = (a^4, a^5, a^6)$, $B^{-1}b = (10,5,6)' > 0$. Baza este primal admisibilă, deci trecem la aplicarea algoritmului simplex.

			3	4	1	0	0	0
c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
← 0	x_4	10	1	2	3	1	0	0
0	x_5	5	1	-1	0	0	1	0
0	x_6	6	1	0	2	0	0	1
		0	-3	-4 ↑	-1	0	0	0

$z_j - c_j < 0 \quad j = 1,2,3$, deci soluția nu este optimă. Pentru orice $j = 1,2,3$ găsim $y_{ij} > 0$, deci trecem la îmbunătățirea soluției.

Intră în bază a^2 pentru că

$$\min_{j=1,2,3}(z_j^B - c_j) = \min(-3,-4,-1) = z_2^B - c_2$$

Iese din bază a^4 căci singurul $y_{i2} > 0$ este $y_{42} = 2$.

Transformăm tabelul simplex

c_B	x^B	$\bar{x}^B$	3 x_1	4 x_2	1 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6
4	x_2	5	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
0	x_5	1o	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
← 0	x_6	6	1	0	2	0	0	1
		20	-1 ↑	0	5	2	0	0

Soluţia nu este încă optimă, căci $z_1^B - c_1 < o$. Deasemenea, soluţia nu conduce la concluzia că problema ar avea optim infinit.

Facem o nouă iteraţie simplex.

Intră în bază a^1, căci $z_1^B - c_1$ este singurul mai mic ca zero.

Iese din bază a^6, căci

$$\min_{i \in \{2,5,6\}} \frac{\bar{x}_i^B}{y_{i1}} = \min\left(1o, \frac{2o}{3}, 6\right) = \frac{\bar{x}_6^B}{y_{61}}$$

Transformăm tabelul simplex

c_B	x^B	x^B	3 x_1	4 x_2	1 x_3	0 x_4	0 x_5	0 x_6
4	x_2	2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
0	x_5	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$
3	x_1	6	1	0	2	0	0	1
		26	0	0	7	2	0	1

Pentru noua soluţie $z_j^B - c_j \geq o$ oricare ar fi j, deci soluţia optimă este (6, 2, 0, 0, 1, 0), iar $z_{optim} = 26$.

2) Să se rezolve problema:

$$\begin{aligned}
x_1 \quad\quad + \tfrac{14}{3}x_4 + \tfrac{1}{3}x_5 - \tfrac{1}{3}x_6 &= \tfrac{7}{3} \\
x_2 \quad + 16\,x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 - 2\,x_6 &= 5 \\
x_3 + 3\,x_4 \quad\quad\quad\quad &= o
\end{aligned}$$

$x_i \geq o \quad i = \overline{1,6}$

$\min(-1o7\,x_4 - x_5 - 2x_6)$

Soluţie:

$B = (a^1, a^2, a^3)$ este o bază unitară primal admisibilă, căci $B^{-1}b = (\frac{7}{3}, 5, 0) \geq 0$. Trecem deci la aplicarea algoritmului simplex.

			0	0	0	-1o7	-1	-2
c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_1	7/3	1	0	0	14/3	1/3	-1/3
0	x_2	5	0	1	0	16	1/2	-2
0	x_3	0	0	0	1	3	0	0
		0	0	0	0	1o7	1	2

Soluţia nu este optimă, căci $z_j^B - c_j > 0 \quad j = 4,5,6.$

Problema are optim infinit, căci $z_6^B - c_6 < 0$ şi $y_{16} \leq 0$ oricare ar fi $i \in \mathcal{B}$.

3) Să se rezolve problema

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 16$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1o$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 6$$
$$x_i \geq 0 \quad i = 1,2,3$$
$$\min(|14x_1 - 3x_2| - 3x_1 + 2x_2 - 4x_3)$$

Soluţie:

Funcţia obiectiv nu este lineară, dar problema se aduce uşor la forma unei probleme de programare lineară:

$$3x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 16$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 1o$$
$$x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 6$$
$$4x_1 - 3x_2 - x_4 \leq 0$$
$$-4x_1 + 3x_2 - x_4 \leq 0$$
$$x_i \geq 0 \quad i = \overline{1,4}$$
$$\min(-3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4)$$

Forma standard a problemei este

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 4x_2 + x_3 \quad + x_5 \qquad\qquad\qquad &= 16\\
2x_1 + x_2 + x_3 \qquad\quad + x_6 \qquad\qquad &= 10\\
x_1 + x_2 - 2x_3 \qquad\qquad + x_7 \qquad &= 6\\
4x_1 - 3x_2 \quad - x_4 \qquad\qquad + x_8 \quad &= 0\\
-4x_1 + 3x_2 \quad - x_4 \qquad\qquad\qquad + x_9 &= 0
\end{aligned}
$$

$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,9}$

$\min(-3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4)$

$B = (a^5, a^6, a^7, a^8, a^9)$ este o bază unitară primal admisibilă,căci $B^{-1}b = (16,10,6,0,0) \geq 0$. Trecem la aplicarea algoritmului simplex.

			-3	2	-4	1	0	0	0	0	0
c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0	x_5	16	3	4	1	0	1	0	0	0	0
← 0	x_6	10	2	1	1	0	0	1	0	0	0
0	x_7	6	1	1	-2	0	0	0	1	0	0
0	x_8	0	4	-3	0	-1	0	0	0	1	0
0	x_9	0	-4	3	0	-1	0	0	0	0	1
		0	3	-2	4 ↑	-1	0	0	0	0	0

Soluţia nu este optimă, căci $z_1^B - c_1 > 0$, $z_3^B - c_3 > 0$.

Trecem la îmbunătăţirea soluţiei

a^3 intră în bază, căci $\max\limits_{j=1,3} (z_j^B - c_j) = z_3^B - c_3 = 4$

a^6 iese din bază, căci $\min\limits_{i=5,6} \dfrac{\bar{x}_i^B}{y_{i3}} = \dfrac{\bar{x}_6^B}{y_{63}}$

Transformăm tabelul simplex.

			-3	2	-4	1	0	0	0	0	0
c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
0	x_5	6	1	3	0	0	1	-1	0	0	0
-4	x_3	10	2	1	1	0	0	1	0	0	0
0	x_7	26	5	3	0	0	0	2	1	0	0
0	x_8	0	4	-3	0	-1	0	0	0	1	0
0	x_9	0	-4	3	0	-1	0	0	0	0	1
		-40	-5	-6	0	-1	0	-4	0	0	0

Deoarece toţi $z_j^B - c_j \leq 0$, acest program este optim. Deci $z_{min} = -40$ se realizează pentru $\bar{x} = (0,0,10,0,6,0,26,0,0)$

4) Să se rezolve următoarea problemă, în care valorile A,B,C, a,b,c sînt pozitive:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq a$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq a + b$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2a + c$$
$$x_i \geq 0 \ , \quad i = 1,2,3$$
$$\min \frac{1}{(A+B+C)x_1 + Bx_2 + Cx_3}$$

<u>Soluţie</u>:

A rezolva problema dată, revine la a rezolva următoarea problemă de programare lineară adusă la forma standard:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad &= a \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \quad + x_5 \qquad &= a + b \qquad a,b,c > 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \qquad\quad + x_6 &= 2a + c \qquad A,B,C > 0 \end{aligned}$$
$$x_i \geq 0 \ , \quad i = \overline{1,6}$$
$$\max \left[(A+B+C)x_1 + Bx_2 + Cx_3\right]$$

Baza unitară primal admisibilă este (a^4, a^5, a^6).

c^B	x^B	$\bar{x}^B$	A+B+C	B	C	0	0	0
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
←0	x_4	a	1	1	1	1	0	0
0	x_5	a+b	1	-1	2	0	1	0
0	x_6	2a+c	2	1	-1	0	0	1
	0	0	-A-B-C↑	-B	-C	0	0	0

$z_j^B - c_j < 0$ pt $j = 1,2,3$, deci soluţia nu este optimă. Sîntem în situaţia de a o îmbunătăţi.

Intră în bază a^1, căci $A+B+C > B,C$.
Iese din bază a^4, căci $a < a+b$, $a < \frac{2a+c}{2}$.

Transformăm tabelul simplex

			$A+B+C$	B	C	0	0	0
c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$A+B+C$	x_1	a	1	1	1	1	0	0
0	x_5	b	0	-2	1	-1	1	0
0	x_6	c	0	-3	-3	-2	0	1
		$a(A+B+C)$	0	$A+C$	$A+B$	$A+B+C$	0	0

Criteriul de optimalitate este satisfăcut.

Valoarea optimă a funcţiei obiectiv va fi

$$\min \frac{1}{(A+B+C)x_1+Bx_2+Cx_3} = \frac{1}{\max\left[(A+B+C)x_1+Bx_2+Cx_3\right]} = \frac{1}{a(A+B+C)}$$

şi se obţine pentru programul optim $(a,0,0,0,b,c)$.

5) Să se rezolve următoarea problemă:

$$\begin{aligned} 5x_1+2x_2-x_3 &\geq 0 \\ 2x_1-x_2+x_3 &\geq 3 \\ 2x_1+x_3 &\leq 4 \\ -x_1+x_2 &= 6 \end{aligned}$$

$x_1 \leq 0$, x_2 oarecare, $x_3 \geq 0$

$\max\ (3x_1+5x_2-2x_3)$

Soluţie:

Fie $u_1 = -x_1$, $u_2-u_3 = x_2$, $u_4 = x_4$, $u_i \geq 0$ $\quad i = \overline{1,4}$

Cu aceste variabile problema devine:

$$\begin{aligned} -5u_1+2u_2-2u_3-u_4 &\geq 0 \\ -2u_1-u_2+u_3+u_4 &\geq 3 \\ -2u_1+u_4 &\leq 4 \\ u_1+u_2-u_3 &= 6 \end{aligned}$$

$u_i \geq 0$, $i = \overline{1,4}$

$\max\ (-3u_1+5u_2-5u_3-2u_4)$

Forma standard a acestei probleme se obţine introducînd variabilele ecart u_5, u_6, u_7.

$$\begin{aligned}
5u_1 - 2u_2 + 2u_3 + u_4 + u_5 \qquad\qquad &= 0\\
2u_1 + u_2 - u_3 - u_4 \quad + u_6 \qquad &= 3\\
-2u_1 \qquad\qquad + u_4 \qquad\quad + u_7 &= 4\\
u_1 + u_2 - u_3 \qquad\qquad\qquad\qquad &= 6
\end{aligned}$$

$u_i \geqslant 0 \qquad i = \overline{1,7}$

$\max\,(-3u_1 + 5u_2 - 5u_3 - 2u_4)$

$B = (a^2, a^4, a^5, a^6)$ reprezintă o bază pentru sistemul dat.

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$B^{-1}b = (6,4,9,1)' \geqslant 0$. Deci B este o bază primal admisibilă. Trecem la întocmirea tabloului simplex.

			-3	5	-5	-2	0	0	0
c_B	u^B	$\bar{u}^B$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
5	u_2	6	1	1	-1	0	0	0	0
-2	u_4	4	-2	0	0	1	0	0	1
0	u_5	9	9	0	0	0	1	0	-1
←0	u_6	1	-1	0	0	0	0	1	1
		22	12	0	0	0	0	0	-2↑

Soluţia nu este optimă pentru că $z_7^B - c_7 < 0$.

Trecem la îmbunătăţirea ei.

Intră în bază a^7.

Iese din bază a^6 , căci $\min\limits_{i=4,6} \dfrac{\bar{x}_i^B}{y_{i7}} = \dfrac{\bar{x}_6^B}{y_{67}} = 1$

Refacem tabelul simplex.

u^B	$\bar{u}^B$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
u_2	6	1	1	-1	0	0	0	0
u_4	3	-1	0	0	1	0	1	0
u_5	1o	8	0	0	0	1	1	0
u_7	1	-1	0	0	0	0	1	1
	24	14	0	0	0	0	2	0

Acest program este optim pentru că toţi $z_j^B - c_j \geq 0$.

Funcţia obiectiv ia valoarea maximă 24 pentru soluţia $\bar{u} = (0,6,0,3,10,0,1)$.

Convergenţa algoritmului. Ciclaj

In cazul în care indicele ℓ al vectorului a^ℓ care iese din bază nu se determină unic, pentru evitarea ciclajului se procedează astfel:

- Se aşează vectorii bazei pe primele m poziţii
- Fie $I_1 = \left\{ s \;\middle|\; \min\limits_{\substack{s \\ y_{sk}>0}} \dfrac{\bar{x}_s^B}{y_{sk}} \text{ este atins} \right\}$
- Se calculează

$$\min_{s \in I_1} \frac{y_{s1}}{y_{sk}}$$

Dacă acest minim se realizează pentru un singur indice s, atunci se elimină din bază a^s. In caz contrar, fie $I_2 = \left\{ s \;\middle|\; \min\limits_{s \in I_1} \dfrac{y_{s1}}{y_{sk}} \text{ este atins} \right\}$

- Se calculează $\min\limits_{s \in I_2} \dfrac{y_{s2}}{y_{sk}}$ etc.

Cel tîrziu la iteraţia (m+1) se obţine un minim unic, deci se stabileşte vectorul care iese din bază.

6) Să se rezolve următoarea problemă:

$$x_1 + \frac{1}{4} x_4 - 8x_5 - x_6 + 9x_7 = 0$$

$$x_2 + \frac{1}{2} x_4 - 12x_5 - \frac{1}{2} x_6 + 3x_7 = 0$$

$$x_3 \qquad + x_6 \qquad = 1$$

$$x_i \geq 0 , \quad i = \overline{1,7}$$

$$\min \left(- \frac{3}{4} x_4 + 20x_5 - \frac{1}{2} x_6 + 6x_7\right)$$

Soluție:

$B = (a^1, a^2, a^3)$ este o bază unitară, primal admisibilă a problemei. Formăm tabelul simplex:

			0	0	0	$-\frac{3}{4}$	20	$-\frac{1}{2}$	6
c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_1	0	1	0	0	$\frac{1}{4}$	-8	-1	9
$\leftarrow 0$	x_2	0	0	1	0	$\frac{1}{2}$	-12	$-\frac{1}{2}$	3
0	x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
		0	0	0	0	$\frac{3}{4}\uparrow$	-20	$\frac{1}{2}$	-6

Deoarece $z_4^B - c_4 > 0$, $z_6^B - c_6 > 0$, soluția nu este optimă. Ea poate fi îmbunătățită.

Aplicînd criteriul de intrare în bază, intră în bază a^4, căci $\max(3/4, 1/2) = 3/4 = z_4^B - c_4$.

Aplicînd criteriul de ieșire, a^ℓ nu se obține unic

$$I_1 = \left\{ s \;\middle|\; \min_{s=1,2} \frac{\bar{x}^s}{y_{s4}} \text{ e atins} \right\} = \{1,2\}$$

Dacă n-am aplica metoda lexicografică și am alege la întîmplare spre a-l scoate din bază pe a^1, după 6 iterații se revine la același tabel, adică se intră în ciclaj. Pentru evitarea ciclajului procedăm cum am descris mai înainte.

Vectorii din bază sînt deja pe primele 3 poziții:

Calculăm $\displaystyle \min_{s \in I_1} \frac{y_{s1}}{y_{s4}} = \min\left\{ \frac{1}{1/4}, \frac{0}{1/2} \right\} = \frac{y_{21}}{y_{24}}$

Deci iese din bază a^2. Refacem tabelul simplex:

			0	0	0	$-3/4$	20	$-1/2$	6
c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_1	0	1	$-1/2$	0	0	-2	$-3/4$	$15/2$
$-3/4$	x_4	0	0	2	0	1	-24	-1	6
$\leftarrow 0$	x_3	1	0	0	1	0	0	1	0
		0	0	$-3/2$	0	0	-2	$\frac{5}{4}\uparrow$	$-\frac{21}{2}$

Soluția nu este încă optimă, căci $z_6^B - c_6 > 0$.

Intră în bază a^6 și iese din bază a^3 .

	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_1	3/4	1	-1/2	3/4	0	-2	0	15/2
$-\frac{3}{4}$	x_4	1	0	2	1	1	-24	0	6
$-\frac{1}{2}$	x_6	1	0	0	1	0	0	1	0
		$-\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	-2	0	$-\frac{21}{2}$

Soluţia optimă a problemei este deci $\bar{x} = (\frac{3}{4}, 0, 0, 1, 0, 1, 0)$ iar $z_{min} = -\frac{5}{4}$.

7) Să se arate că vectorul scos din bază într-o iteraţie a algoritmului simplex nu poate intra în bază la iteraţia următoare.

<u>Soluţie</u>:

Fie $a^j \in B$. Atunci $z_j^B - c_j = 0$, $y_j^B = e^j$, $y_{jj} = 1$.

Presupunem că a^j iese din bază, iar a^k intră în baza imediat următoare $\tilde{B}$. Asta înseamnă că:

$$\min_{\{i \mid y_{ik} > 0\}} \frac{\bar{x}_i^B}{y_{ik}} = \frac{\bar{x}_j^B}{y_{jk}} \quad \text{şi că}$$

$$\min_{\{i \mid z_i^B - c_i < 0\}} (z_i^B - c_i) = z_k^B - c_k \text{ (pentru o problemă de maximizare),}$$

sau că

$$\max_{\{i \mid z_i^B - c_i > 0\}} (z_i^B - c_i) = z_k^B - c_k \text{ (pentru o problemă de minimizare).}$$

Formulele de trecere de la baza B la $\tilde{B}$ dau:

$$z_j^{\tilde{B}} - c_j = (z_j^B - c_j) - (z_k^B - c_k)\frac{y_{jj}}{y_{jk}}$$

Pentru o problemă de maximizare avem $z_j^B - c_j = 0$, $y_{jj} = 1$, $y_{jk} > 0$, $z_k^B - c_k < 0$, adică $z_j^{\tilde{B}} - c_j > 0$ şi deci vectorul a^j nu mai poate participa la calculul indicat de criteriul de intrare în bază la o iteraţie imediat următoare celei la care a ieşit din bază.

Pentru o problemă de minimizare avem $z_j^B - c_j = 0$, $y_{jj} = 1$, $y_{jk} > 0$, $z_k^B - c_k > 0$, adică $z_j^{\tilde{B}} - c_j < 0$ şi, din nou, a^j nu poate intra în bază la iteraţia imediat următoare celei în care a părăsit baza.

8) Un vector care a intrat în bază în cursul aplicării algoritmului simplex poate fi eliminat la iterația imediat următoare? In ce caz răspunsul este afirmativ?

Soluție:

Să presupunem că a^k intră în bază la o iterație oarecare. Pentru ca el să iasă din bază la iterația imediat următoare, în cazul în care la această iterație intră în bază a^ℓ, trebuie să fie verificată următoarea relație:

$$\min_{\{i \mid y_{i\ell} > 0\}} \frac{\bar{x}_i^B}{y_{i\ell}} = \frac{\bar{x}_k^B}{y_{k\ell}}$$, ceea ce se poate întîmpla cînd $y_{k\ell} > 0$.

Deci a^k poate ieși din bază dacă $y_{k\ell} > 0$, chiar dacă el a intrat la iterația anterioară.

Variația funcției obiectiv este dată de

$$\frac{\bar{x}_k^B}{y_{k\ell}} (z_\ell^B - c_\ell).$$

Deci, transformarea prin care a^k părăsește baza cînd a intrat la iterația anterioară nu asigură cea mai mare variație a funcției obiectiv.

9) Să se arate că orice program de bază poate fi un program optim pentru un vector c ales în mod convenabil. Cîte componente ale vectorului c pot fi alese în mod arbitrar?

Soluție:

Fie problema de programare lineară $Ax = b$, $x \geq 0$, $\min c'x$, cu rang $A = m < n$ și fie B o bază a sistemului. Fie $\bar{x}^B = B^{-1}b \geq 0$, $x^S = 0$ un program de bază.

Să considerăm $c = (c_1, \dots c_m, c_{m+1}, \dots c_n)$, cu $c_1, \dots c_m$ fixate arbitrar (corespunzător indicilor din bază).

Vom determina c_j, $m+1 \leq j \leq n$ astfel încît programul de bază să fie optim.

Trebuie ca $z_j^B - c_j \leq 0$ pentru orice $j \in \mathcal{S}$, adică

$$c_j \geq c_B' B^{-1} a^j \quad , \quad m+1 \leq j \leq n.$$

Pentru o problemă de maximizare se iau $c_j \leq c_B' B^{-1} a^j$ pentru $j = m+1, \dots n$.

1o) Să se arate că, dacă mulţimea programelor optime ale unei probleme de programare lineară este mărginită şi nevidă, atunci orice program optim este o combinaţie convexă a programelor optime de bază.

Soluţie:

Fie problema de programare lineară $Ax = b$, $x \geqslant 0$, $\min c'x$, fie $P = \{x \in R^n \mid Ax = b , x \geqslant 0\}$ şi fie $S = \{x \in P \mid c'x = \min\limits_{y \in P} c'y\}$.

Presupunem că rang $A = m \leqslant n$.

Numărul bazelor pentru problema dată este cel mult egal cu C_n^m. Fie B o bază.

Prin ipoteză $S \neq \emptyset$, deci există programe optime de bază, şi anume un număr finit, strict mai mic decît C_n^m programe optime de bază.

Fie T poliedrul convex generat de programele optime de bază, adică mulţimea combinaţiilor convexe ale programelor optime de bază.

Vom demonstra că $S = T$.

Să verificăm întîi că S este convexă:

Fie $x_1, x_2 \in S$, $\lambda \in (o,1)$.

$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda Ax_1 + (1-\lambda)Ax_2 = \lambda b + (1-\lambda)b = b$

$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geqslant 0.$

Deci $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in P.$

$$c'(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \lambda c'x_1 + (1-\lambda)c'x_2 =$$

$$\lambda \min_{y \in P} c'y + (1-\lambda) \min_{y \in P} c'y = \min_{y \in P} c'y .$$

Deci $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$, adică S este convexă.

Să demonstrăm că $T \subseteq S$:

Presupunem că problema dată are r programe optime de bază, $r \leqslant C_n^m$, şi anume:

$$\bar{x}^{B_i} = B_i^{-1}b \quad , \quad 1 \leqslant i \leqslant r .$$

Fie $x \in T$, deci $x = \lambda_1 \bar{x}^{B_1} + \ldots + \lambda_r \bar{x}^{B_r}$, cu $\lambda_i \geqslant 0$, $\sum\limits_1^r \lambda_i = 1$.

$$Ax = \lambda_1 A \bar{x}^{B_1} + \ldots + \lambda_r A \bar{x}^{B_r} = \sum_{i=1}^r \lambda_i A (\bar{x}^{B_i}, 0)' = \sum_{i=1}^r \lambda_i A\bar{x}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^r \lambda_i b = b$$

$x \geq 0$, deci $x \in P$,

$c'\bar{x}^{B_i} = \min\limits_{y \in P} c'y$, pentru $1 \leq i \leq r$. Deci

$$c'x = c'\left(\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \bar{x}^{B_i}\right) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \left(\min_{y \in P} c'y\right) = \min_{y \in P} c'y \text{ , ceea ce}$$

înseamnă că $x \in S$, deci că $T \subseteq S$.

Să demonstrăm acum că $S \subseteq T$.

Fie $\bar{x}^{B_k}$ un program optim de bază fixat dintre cele r programe optime de bază ale problemei. $\bar{x} = (\bar{x}^{B_k}, 0)$ este un program optim, deci un element din S. Să arătăm că $\bar{x} \in T$. Ar trebui să găsim $(\lambda_1, \ldots \lambda_r)$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum\limits_{1}^{r} \lambda_i = 1$ astfel încît

$$\bar{x}_1^{B_k} = \lambda_1 \bar{x}_1^{B_1} + \ldots + \lambda_r \bar{x}_1^{B_r}$$

$$\bar{x}_2^{B_k} = \lambda_1 \bar{x}_2^{B_1} + \ldots + \lambda_r \bar{x}_2^{B_r}$$

$$\vdots$$

$$\bar{x}_m^{B_k} = \lambda_1 \bar{x}_m^{B_1} + \ldots + \lambda_r \bar{x}_m^{B_r}$$

$$\lambda_1 + \ldots + \lambda_r = 1$$

Am obținut un sistem linear de m+1 ecuații cu r necunoscute. Rezolvînd sistemul găsim $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ căutați. Deci $S \subseteq T$.

<u>Probleme propuse</u>:

11)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - x_3 \quad + 2x_5 \quad &= 7 \\ -2x_2 + 4x_3 + x_4 \quad &= 12 \\ -4x_2 + 3x_3 \quad + 8x_5 + x_6 &= 10 \\ x_i \geq 0 , \quad i = \overline{1,6} & \\ \min (x_2 - 3x_3 + 2x_5) & \end{aligned}$$

<u>Soluție</u> optimă $\bar{x} = (0,4,3,0,0,11)$, $z_{min} = -11$

Cda. 46/978 Fasc. 2

12) $$\begin{aligned} 2x_1+ x_2+ x_3- x_4 \quad x_6 &= 2 \\ -x_1+ 2x_2- 2x_3- 2x_4 \quad + x_7 &= 3 \\ 3x_1- x_2+ x_3 \quad + x_5 &= 9 \\ x_i \geqslant 0 , \quad i = \overline{1,7} \end{aligned}$$

$$\max \left(-3x_1+7x_2- \tfrac{1}{2} x_3-5x_4-3x_5\right)$$

<u>Soluție</u> optimă: $\bar{x} = (0, \frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{21}{2}, 0, 0)$, $z_{max} = - \frac{155}{8}$

13) $$\begin{aligned} x_1- x_2+ 2x_3- x_4+ x_5 &= 2 \\ 2x_1+ x_2- 3x_3+ x_4 &\leq 6 \\ x_1+ x_2+ x_3+ x_4 &\leq 7 \\ x_i \geqslant 0 , \quad i = \overline{1,5} \end{aligned}$$

$$\min \left(-2x_1-x_2+x_3+x_4\right)$$

<u>Soluție</u> optimă: $\bar{x} = (3,3,1,0,0)$, $z_{min} = - 8$

14) $$\begin{aligned} x_1- x_2+ x_3+ x_4 &= 1 \\ x_2- x_3 &\leq 3 \\ - x_3+ x_4 &\leq 2 \\ x_i \geqslant 0 , \quad i = \overline{1,4} \end{aligned}$$

$$\min \left(x_1+2x_2+ 2x_3- 3x_4\right)$$

<u>Soluție</u> optimă: $\bar{x} = (0,1,0,2,2,0)$, $z_{min} = - 4$

15) $$\begin{aligned} 2x_2- x_3 &\geqslant 0 \\ 4x_1 \quad - 3x_3 &\geqslant 0 \\ 10x_1- 3x_2- x_3- 20 &\leq 0 \\ 14x_1-10x_2-13x_3+ 30 &\geqslant 0 \\ x_i \geqslant 0 , \quad i = \overline{1,3} \end{aligned}$$

$$\max \left(10x_1-3x_2+9x_3\right)$$

<u>Soluție</u> optimă: $\bar{x} = (3, 2, 4)$, $z_{max} = 60$

16) $\begin{aligned} x_1 \quad + 2x_3 - \ x_4 + 3x_5 &\leq 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + \ x_4 - \ x_5 &\leq 10 \\ x_1 - x_2 \quad + 2x_4 + \ x_5 &\leq 7 \end{aligned}$

$x_i \geq 0 \ , \ i = \overline{1,5}$

$\max \ (3x_1 - x_2 + x_5)$

<u>Soluţie</u> optimă: $\bar{x} = (5,0,0,1,0,0,14,0), \quad z_{max} = 15$

17) $\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + \tfrac{1}{2} x_4 &= 1 \\ x_2 - x_3 - x_4 &= 1 \end{aligned}$

$x_i \geq 0 \ , \ i = \overline{1,4}$

$\max \ (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4)$

<u>Soluţie</u>: optim infinit

18) $\begin{aligned} -14x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 &\leq 10 \\ -6x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \ x_4 + 2x_5 &\leq 2 \\ 20x_1 + 7x_2 - 6x_3 - 8x_4 - 5x_5 &\leq 7 \end{aligned}$

$x_i \geq 0 \ , \quad i = \overline{1,5}$

$\min \ (10x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 3x_4 - 2x_5)$

<u>Soluţie</u>: optim infinit

19) $\begin{aligned} 5x_1 - \ x_2 + 5x_3 \quad &\geq -10 \\ 3x_2 \quad + x_4 &= 4 \end{aligned}$

$x_i \geq 0 \quad , \quad i = \overline{1,4}$

$\min \ (|x_1 - 2x_2 + 2x_3| + 4x_4)$

<u>Soluţie</u> optimă: $\bar{x} = (\ 0, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, 0), \quad z_{min} = 0$

20) Să se arate că dacă a,b,c, $C \geq 0$, următoarea problemă are soluţie independentă de b şi c.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+x_3 &\le a \\ 2x_1-3x_2-x_3 &\le b \\ 3x_1-x_2-2x_3 &\le c \\ x_i \geq 0\ ,\ i &= \overline{1,3} \end{aligned}$$

$$\max\left(|Ax_1+Bx_2|+Cx_3\right)$$

<u>Soluție</u> optimă: $\bar{x} = (0,0,a,0,0,0,a+b,c+2b)$, $z_{max} = aC$

21)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+x_3 &\le 1o \\ x_1-x_2+2x_3 &\le 1oo \\ 2x_1+x_2-x_3 &\le 1ooo \\ x_i \geq 0\ ,\ i &= 1,2,3 \end{aligned}$$

$$\min\left(\frac{1}{11x_1+5x_2+3x_3}\right)$$

<u>Soluție</u> optimă: $\bar{x} = (1o,0,0,0,9o,98o)$, $z_{min} = \frac{1}{11o}$.

22)
$$\begin{aligned} x_1+x_2-3x_3 &\le 1 \\ -x_1+x_2-x_4 &\le 0 \\ -4x_1-x_2-x_3+x_4 &\le 2 \\ 3x_1-x_3-x_4 &\le 3 \\ x_i \geq 0\ ,\ i &= \overline{1,4} \end{aligned}$$

$$\min\left(\frac{1}{-x_1+x_3+4x_4}\right)$$

<u>Soluție</u>: optim infinit.

23) Să se găsească o dietă optimă, de cost minim dacă se dau: conținuturile în 3 principii nutritive a 5 alimente, necesarul de principii nutritive și costurile unitare ale alimentelor, în următorul tabel:

ALIMENTE / PRINCIPII NUTR.	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	NECESAR
P_1	3	1	0	2	2	2o
P_2	1	0	0	4	2	4o
P_3	0	1	1	0	1	8o
COST UNITAR	6	4	8	2	7	

Soluţia optimă: $\bar{x} = (0,4o,0,0,0,2o,0,0)$, costul minim este egal cu 18o.

1.2. Determinarea unei baze primal admisibile. Metoda celor două faze

Descrierea metodei

Se aduce problema la forma standard:

(1) $$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$\max(\min)c'x$$

cu $b \geq 0$. Se introduc atîtea variabile artificiale încît să putem forma o bază unitate. Presupunem că introducem chiar m variabile artificiale $x^a = (x_1^a,\dots,x_m^a)'$. Se rezolvă problema

(2) $$Ax + Ix^a = b$$
$$x, x^a \geq 0$$
$$\min (x_1^a + \dots + x_m^a)$$

folosind algoritmul simplex primal. Avem două cazuri:

i) $\min (x_1^a + \dots + x_m^a) > 0$, atunci problema (1) nu are programe

ii) $\min (x_1^a + \dots + x_m^a) = 0$. In acest caz avem o bază optimă pentru (2) care este bază iniţială pentru (1). Putem avea următoarele situaţii:

ii1) nu există variabile artificiale în bază optimă obţinută. Atunci se trece la rezolvarea problemei (1) folosind baza obţinută.

ii2) există variabile artificiale în bază; atunci avem:

α) variabilele artificiale din bază pot fi eliminate, luînd pivot orice element nenul de pe linia corespunzătoare acelei variabile artificiale, din tabelul optim; şi ajungem la cazul (ii 1).

β) nu pot fi eliminate din bază variabilele artificiale. Atunci se suprimă liniile din tabel corespunzătoare acestor variabile artificiale şi se obţine un tabel care conduce la (ii 1).

1) Să se rezolve problema:

$$
\begin{aligned}
&-2x_1+2x_2-x_3+x_4 \geq 6\\
&5x_1+4x_2-3x_3-3x_4 = 20\\
&2x_1+5x_2+2x_2+x_4+x_5 = 4\\
&x_i \geq 0 ,\quad i=\overline{1,5}\\
&\max\,(2x_1-6x_3+2x_4+3x_5)
\end{aligned}
$$

<u>Soluţie</u>: Aducem problema la forma standard

$$
\begin{aligned}
&-2x_1+2x_2-x_3+x_4-x_6 = 6\\
&5x_1+4x_2-3x_3-3x_4 = 20\\
&2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5 = 4\\
&x_i \geq 0 ,\quad i=\overline{1,6}\\
&\max\,(2x_1-6x_3+2x_4+3x_5)
\end{aligned}
$$

Pentru a obţine o bază primal admisibilă aplicăm metoda celor două faze. x_5 poate fi luată ca variabilă de bază, deci mai introducem două variabile artificiale x_1^a, x_2^a.

<u>Faza I</u> : Rezolvăm problema

$$
\begin{aligned}
&-2x_1+2x_2-x_3+x_4-x_6+x_1^a = 6\\
&5x_1+4x_2-3x_3-3x_4+x_2^a = 20\\
&2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5 = 4\\
&x_i \geq 0 ,\quad i=\overline{1,6} ,\quad x_1^a , x_2^a \geq 0\\
&\min\,(x_1^a+x_2^a)
\end{aligned}
$$

Trecem la întocmirea primului tabel simplex

II			2	0	-6	2	3	0		
I			0	0	0	0	0	0	1	1
C_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_1^a	x_2^a
1	x_1^a	6	-2	2	-1	1	0	-1	1	0
1	x_2^a	2o	5	4	-3	-3	0	0	0	1
←0	x_5	4	2	5	2	1	1	0	0	0
		26	3	6↑	-4	-2	0	-1	0	0

Soluţia nu este optimă. Poate fi îmbunătăţită. Intră în bază a^2, căci $\max\limits_{j=1,2} (z_j^B - c_j) = 6 = z_2^B - c_2$

Iese din bază a^5, căci $\min\left(\frac{\bar{x}_1^a}{y_{12}}, \frac{\bar{x}_2^a}{y_{22}}, \frac{\bar{x}_5}{y_{52}}\right) =$ $= \min(3, 5, \frac{4}{5}) = \frac{\bar{x}_5}{y_{52}}$

Transformăm tabelul simplex.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_1^a	x_2^a
x_1^a	22/5	-14/5	0	-9/5	3/5	-2/5	-1	1	0
x_2^a	84/5	17/5	0	-23/5	-19/5	-4/5	0	0	1
←x_2	4/5	2/5	1.	2/5	1/5	1/5	0	0	0
	$\frac{1o6}{5}$	$\frac{3}{5}$↑	0	$-\frac{32}{5}$	$-\frac{16}{5}$	$-\frac{6}{5}$	-1	0	0

Din nou soluţia nu este optimă, dar poate fi îmbunătăţită. Intră în bază a^1, iese din bază a^2.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_1^a	x_2^a
x_1^a	1o	0	7	1	2	1	-1	1	0
x_2^a	1o	0	-17/2	-8	-11/2	-5/2	0	0	1
x_1	2	1	5/2	1	1/2	1/2	0	0	0
	2o	0	$-\frac{3}{2}$	-7	$-\frac{7}{2}$	$-\frac{3}{2}$	-1	0	0

Soluţia $\bar{x}_1^a = 10$, $\bar{x}_2^a = 10$, $\bar{x}_1 = 2$ este optimă pentru faza I, dar $\min (x_1^a + x_2^a) = 20 \neq 0$, deci problema ini;:ală nu admite programe.

2) Să se rezolve problema:

$$6x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 = 4$$
$$2x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 - x_3 + x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 = 3$$
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 + x_6 = 2$$
$$x_i \geqslant 0 \quad , \quad i = \overline{1,6}$$
$$\min (x_1 + 2x_2 + x_4 + x_5 - 5x_6)$$

<u>Soluţie</u>:

Introducem variabilele artificiale $x_1^a, x_2^a, x_3^a \geqslant 0$

<u>Faza I</u> : Rezolvăm problema

$$6x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 + 2x_6 + x_1^a = 4$$
$$2x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 - x_3 + x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 + x_2^a = 3$$
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + \tfrac{1}{2}x_5 + x_6 + x_3^a$$
$$x_i \geqslant 0 \quad i = \overline{1,6} \quad , \quad x_i^a \geqslant 0 \quad i = \overline{1,3}$$
$$\min (x_1^a + x_2^a + x_3^a)$$

			0	0	0	0	0	0	1	1	1
C_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_1^a	x_2^a	x_3^a
1	x_1^a	4	6	-2	1	-1	1	2	1	0	0
1	x_2^a	3	2	$-\frac{1}{3}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0
← 1	x_3^a	2	3	-1	2	4	$\frac{1}{2}$	1	0	0	1
		9	11 ↑	$-\frac{10}{3}$	2	4	2	3	0	0	0

Soluţia nu este optimă, căci $z_j^B - C_j > 0$ $j = 1,3,4,5,6$, dar oate fi îmbunătăţită.

Intră în bază x_1, căci $z_1^B - C_1 = \max \{ (z_j^B - C_j) \ , j \in \{1,3,4,5,$

Iese din bază x_3^a, căci $\min (\frac{4}{6} \ , \frac{3}{2} \ , \frac{2}{3}) = \frac{2}{3}$ se atinge pe

$I_1 = \{\bar{1}, \bar{3}\}$, iar min $(\frac{1}{6}, \frac{0}{3}) = 0$ se atinge pentru $\{\bar{3}\}$ (căci $\bar{1}$, $\bar{3}$ reprezintă indicii variabilelor artificiale).

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_1^a	x_2^a
x_1^a	0	0	0	-3	-9	0	0	1	0
← x_2^a	$\frac{5}{3}$	0	1/3	-7/3	-5/3	1/6	-2/3	0	1
x_1	$\frac{2}{3}$	1	-1/3	2/3	4/3	1/6	1/3	0	0
	5/3	0	$\frac{1}{3}$ ↑	$-\frac{16}{3}$	$-\frac{32}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{2}{3}$	0	0

Soluția nu este optimă, dar poate fi îmbunătățită.
Intră în bază x_2, iese din bază x_2^a.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_1^a
x_1^a	0	0	0	-3	-9	0	0	1
x_2	5	0	1	-7	-5	1/2	-2	0
x_1	$\frac{7}{3}$	1	0	-5/3	-1/3	1/3	$-\frac{1}{3}$	0
	0	0	0	-3	-9	0	0	0

Am obținut o soluție optimă pentru faza I, iar min $(x_1^a + x_2^a + x_3^a) = 0$, deci se poate trece la faza a II-a.

Intre variabilele de bază obținute a rămas și o variabilă artificială x_1^a, pe care o eliminăm făcînd o iterație simplex în plus. Putem face acest lucru, căci pe linia lui x_1^a există $y \neq 0$, care poate fi luat ca pivot. Luăm de exemplu ca pivot pe (-3), adică facem o nouă iterație simplex în care x_1^a iese din bază și x_3 intră în bază.

<u>In faza II</u> vom rezolva problema de programare lineară inițială, pentru care funcția obiectiv era

$$\min\ (x_1+2x_2+x_4+x_5-5x_6)$$

			1	2	0	1	1	-5
c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	0	0	0	1	3	0	0
2	x_2	5	0	1	0	16	1/2	-2
1	x_1	7/3	1	0	0	$\frac{14}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
		$+\frac{37}{3}$	0	0	0	$\frac{107}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Soluția nu este optimă căci există $z_j^B - c_j > 0$.

Se observă că $z_6^B - c_6 = \frac{2}{3} > 0$, iar $y_{ij} \leq 0$ pentru toți $i \in \mathcal{B}$. Deci problema are optim infinit.

3) Să se rezolve problema:

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad &= 1\\
x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 1\\
x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 1\\
3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad &= 3\\
x_i \geq 0 \quad , \quad i = \overline{1,5}&\\
\max\,(-x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5)&
\end{aligned}$$

<u>Soluție</u>:

Determinăm o bază primal admisibilă prin metoda celor două faze. Introducem variabilele auxiliare x_1^a, x_2^a, x_3^a.

<u>Faza I</u> : Rezolvăm problema

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_1^a \qquad\qquad &= 1\\
x_1 - x_2 \qquad + x_4 \qquad\qquad + x_2^a \qquad &= 1\\
x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 \qquad\qquad\qquad &= 1\\
3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad\qquad\qquad + x_3^a &= 3\\
x_i \geq 0 \quad i = \overline{1,5} \quad , \quad x_i^a \geq 0 \quad i = \overline{1,3}&\\
\min\,(x_1^a + x_2^a + x_3^a)&
\end{aligned}$$

			0	0	0	0	0	1	1	1
c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a	x_3^a
1	x_1^a	1	1	1	1	0	0	1	0	0
1	x_2^a	1	1	-1	0	1	0	0	1	0
0	x_5	1	1	2	0	0	1	0	0	0
←1	x_3^a	3	3	1	2	1	0	0	0	1
		5	5↑	1	3	2	0	0	0	0

Soluţia nu este optimă, căci $z_j^B - c_j > 0 \quad j = 1,2,3,4$. Ea este însă pasibilă de îmbunătăţire.

Intră în bază x_1, căci $z_1^B - c_1 = \max\limits_{j \in \{1,2,3,4\}} (z_j^B - c_j)$

Iese din bază x_3^a, căci $\min\limits_{i} \frac{\bar{x}_i^B}{y_{i1}}$ se atinge pentru $I_1 = \{\bar{1}, \bar{2}, 5, \bar{3}\}$ (am notat cu $\bar{i}$ indicii variabilelor auxiliare).

$\min\limits_{i \in I_1} \frac{y_{i\bar{1}}}{y_{i1}}$ se atinge pentru $I_2 = \{\bar{2}, 5, \bar{3}\}$

$\min\limits_{i \in I_2} \frac{y_{i\bar{2}}}{y_{i1}}$ se atinge pentru $I_3 = \{5, \bar{3}\}$

$\min\limits_{i \in I_3} \frac{y_{i5}}{y_{i1}}$ se atinge pentru $i = \bar{3}$

Transformăm tabelul simplex

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a	x_2^a
x_1^a	0	0	2/3	1/3	-1/3	0	1	0
← x_2^a	0	0	-4/3	-2/3	2/3	0	0	1
x_5	0	0	5/3	-2/3	-1/3	1	0	0
x_1	1	1	1/3	2/3	1/3	0	0	0
	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ ↑	0	0	0

Soluţia nu este optimă căci $z_4^B - c_4 > 0$. x_4 intră în bază, iar x_2^a iese din bază

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1^a
x_1^a	0	0	0	0	0	0	1
x_4	0	0	-2	-1	1	0	0
x_5	0	0	1	-1	0	1	0
x_1	1	1	1	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0

Soluţia este optimă pentru faza I. Cum $\min\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^a\right) = 0$ putem trece la faza a doua. Observăm însă că x_1^a a rămas în bază ($\bar{x}_1^a = 0$) şi nu poate fi eliminat printr-o altă iteraţie simplex, pentru că nu putem găsi un pivot diferit de zero pe linia lui.

Concluzia este că prima ecuaţie este o consecinţă a celorlalte trei (rangul sistemului < 4), deci poate fi eliminată din sistem.

Trecem la faza a doua, luînd (x_4, x_5, x_1) ca variabile de bază, iar funcţia obiectiv $\max(-x_1+3x_2+2x_3-x_4+x_5)$.

Faza II

			-1	3	2	-1	1
C_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1	x_4	0	0	-2	-1	1	0
1	x_5	0	0	1	-1	0	1
← -1	x_1	1	1	1	1	0	0
		-1	0	-1	-3 ↑	0	0

Soluţia nu este optimă, dar poate fi îmbunătăţită.
Intră în bază x_3, iese din bază x_1.

x_B	$\bar{x}_B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_4	1	1	-1	0	1	0
x_5	1	1	2	0	0	1
x_3	1	1	1	1	0	0
	2	3	2	0	0	0

Această soluţie este optimă. $z_{max} = 2$ se obţine pentru $\bar{x} = (0,0,1,1,1)$.

Probleme propuse

4) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &\le 2 \\ -6x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 - 4x_3 &= 10 \\ x_i \ge 0 \quad i &= 1,2,3 \\ \max\,(x_1 - 2x_2 + x_3) \end{aligned}$$

Soluţie: Problema iniţială nu are programe.

5)
$$\begin{aligned} 3x_1+x_2+x_3+x_4 &= 4\\ x_1+2x_3 &= 6\\ 2x_2+x_3 &= 1\\ x_1+x_2+2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \quad i=\overline{1,4}$$

$$\max\ (2x_1+x_2+3x_3)$$

Soluție: Problema nu are programe.

6)
$$\begin{aligned} 5x_1-x_2+x_3-x_4+x_5 &= 9\\ x_1-x_2+3x_3-x_4 &\leq 5\\ 2x_1+x_2-4x_3+3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \ , \quad i=\overline{1,5}$$

$$\max\ (2x_1+3x_2+x_3-x_4+x_5)$$

Soluție: Problema are optim infinit.

7)
$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2-x_3 &= 1\\ x_1+2x_3+x_4 &= 12\\ 2x_2+x_3+3x_4 &= 16 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \quad i=\overline{1,4}$$

$$\max\ (10x_1-7x_2+2x_3-x_4)$$

Soluția optimă $\bar{x} = \left(\frac{17}{3}, \frac{77}{12}, \frac{3}{2}, 0\right)$, $z_{max} = \frac{59}{4}$

8)
$$\begin{aligned} x_1+3x_2+2x_3 &= 3\\ 3x_1+3x_2+x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,3$$

$$\max\ (3x_1-2x_2+4x_3)$$

Soluția optimă $\bar{x} = (2, 0, 1)$, $z_{max} = 10$

9)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_3 &\le 4 \\ x_1+2x_3 &\ge 5 \\ x_1+2x_2+x_3 &= 3 \end{aligned}$$
$$x_i \ge 0 \quad i = 1,2,3$$
$$\min\,(x_1+x_2+x_3)$$

Soluția optimă $\bar{x} = (0, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 0)$, $z_{min} = \frac{7}{4}$

1o)
$$\begin{aligned} x_1+x_2+2x_3 &\ge 1o \\ 2x_1-x_2+x_3 &\le 8 \\ 2x_1+x_2-4x_3 &\ge -4 \\ x_1-x_2-6x_3 &\le -6 \end{aligned}$$
$$x_i \ge 0 \quad i = 1,2,3$$
$$\min\,(5x_1-x_2-2x_3)$$

Soluția optimă $\bar{x} = (0,12,16,0,2,8,0)$, $z_{min} = -44$

11)
$$\begin{aligned} 2x_1+x_2+3x_3 &= 5 \\ x_1+2x_3+4x_4 &= 6 \\ 3x_2+x_3+x_4 &= 2 \end{aligned}$$
$$x_i \ge 0 \quad i = \overline{1,4}$$
$$\min\,(x_1+8x_2+2x_3+2x_4)$$

Soluția optimă $\bar{x} = (\frac{4}{7}, 0, \frac{9}{7}, \frac{5}{7})$, $z_{min} = \frac{32}{7}$

12)
$$\begin{aligned} x_1+3x_3+2x_4 &\le 4 \\ 2x_1-x_2+x_4 &= 1 \\ 2x_2+x_3 &= 3 \end{aligned}$$
$$x_i \ge 0 \quad i = \overline{1,4}$$
$$\max\,(2x_1+x_2-x_4)$$

Soluția optimă $\bar{x} = (\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 0, 0, \frac{11}{4})$, $z_{max} = 4$

13)
$$x_1+x_2-x_3 \leq 1$$
$$x_2+x_4 \geq 1$$
$$x_i \geq 0\,, \quad i=\overline{1,4}$$
$$\min\left(|2x_1-x_2|+2x_4\right)$$

<u>Soluția</u> optimă $\bar{x}=\left(\frac{1}{2}\,,1,0,0,0,\frac{1}{2}\,,0,0,0\right)\,, \quad z_{min}=0.$

14)
$$x_1+x_2+x_4=2$$
$$x_1+2x_2+x_3=4$$
$$x_2+x_3+x_4=3$$
$$x_i \geq 0 \quad i=\overline{1,4}$$
$$\min \frac{1}{6x_1+8x_2+12x_3+10x_4}$$

<u>Soluția</u> optimă $\bar{x}=\left(\frac{3}{2}\,,0,\frac{5}{2}\,,\frac{1}{2}\right)\,, \quad z_{min}=\frac{1}{44}$

2. ALGORITMUL SIMPLEX DUAL

2.1. Dualitate

1. Să se scrie dualele următoarelor probleme de programare liniară:

(a)
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3 \geq 2 \\ 3x_1+x_2+7x_3 \leq 3 \\ x_1+4x_2+6x_3 \leq 5 \\ x_i \geq 0 \quad i=1,2,3 \\ \min\,(2x_1+2x_2+4x_3) \end{cases}$$

(b)
$$\begin{cases} 3x_1+7x_2+8x_3+5x_4+x_5=2 \\ 2x_1+x_2+3x_3+2x_4+9x_5=6 \\ x_i \geq 0 \quad i=\overline{1,5} \\ \max\,(6x_1+4x_2+x_3+7x_4+5x_5) \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+7x_4=21 \\ 3x_1+17x_2+8x_3+2x_4 \leq 48 \\ x_1,\ x_2,\ x_5 \geq 0\ ,\quad x_3,\ x_4 \text{ oarecare} \\ \max\,(x_1+2x_2+6x_3+x_4-x_5) \end{cases}$$

2) Să se rezolve cu ajutorul problemei duale următoarea problemă de programare lineară:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3 \geq 7 \\ -x_1+x_2 \geq 10 \\ -x_2+4x_3 \geq -5 \\ x_1-x_2+x_3 \geq 1 \\ x_2+2x_3 \geq -2 \\ -x_1+x_3 \geq 4 \end{cases}$$
$$x_i \geq 0 \quad i=1,2,3$$
$$\min\,(3x_1+6 \quad x_3)$$

<u>Soluție:</u>

Duala problemei date este

$$\begin{aligned}
u_1 - u_2 \quad + u_4 \quad - u_6 &\leq 3 \\
-2u_1 + u_2 - u_3 - u_4 + u_5 \quad &\leq 6 \\
u_1 \quad + 4u_3 + u_4 + 2u_5 + u_6 &\leq 1 \\
u_i \geq 0 \quad i = \overline{1,6}
\end{aligned}$$

$$\max\ (7u_1 + 10u_2 - 5u_3 + u_4 - 2u_5 + 4u_6)$$

Aducem problema la forma standard, introducînd variabilele ecart $u_7, u_8, u_9 \geq 0$. $B = (a^7, a^8, a^9)$ formează o bază unitară primal admisibilă. Aplicăm deci algoritmul simplex.

			7	10	-5	1	-2	4	0	0	0
c_B	u^B	$\bar{u}^B$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
0	u_7	3	1	-1	0	1	0	-1	1	0	0
← 0	u_8	6	-2	1	-1	-1	1	0	0	1	0
0	u_9	1	1	0	4	1	2	1	0	0	1
		0	-7	-10 ↑	5	-1	2	-4	0	0	0

Soluția nu este optimă căci există $z_j^B - c_j < 0 \quad j = 1,2,4,6$.
Intră în bază a^2 și iese din bază a^8.

u^B	$\bar{u}^B$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
u_7	9	-1	0	-1	0	1	-1	1	1	0
u_2	6	-2	1	-1	-1	1	0	0	1	0
← u_9	1	1	0	4	1	2	1	0	0	1
	60	-27 ↑	0	-5	-11	22	-4	0	10	0

Din nou, soluția nu este optimă.
Intră în bază a^1 și iese din bază a^9.

u^B	$\bar{u}^B$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
u_7	10	0	0	3	1	3	-2	1	1	1
u_2	8	0	1	7	1	5	-2	0	1	2
u_1	1	1	0	4	1	2	1	0	0	1
	87	0	0	103	16	76	23	0	10	27

Am obţinut soluţia optimă a problemei duale $\bar{u} = (1,8,0,0,0,0,10)$ iar $u_{max} = 87$.

Problema primală are soluţia optimă $\bar{x} = (0,\ 10,\ 27)$ iar $\min\ (3x_1 + 6x_2 + x_3) = 6.10 + 27 = 87$. Se verifică astfel că valorile funcţiilor obiectiv ale problemelor primale şi duale coincid.

3) Să se rezolve cu ajutorul dualei următoarea problemă:

$$
\begin{aligned}
&x_1 - 2x_2 - x_3 \leq 2\\
&x_1 - 3x_3 \leq 0\\
&x_1 - 2x_2 \leq 1\\
&x_1 \geq 0\\
&\min\ (-3x_1 - 2x_2 - x_3)
\end{aligned}
$$

<u>Soluţie</u>:

Problema duală este:

$$
\begin{aligned}
&u_1 + u_2 + u_3 \geq -3\\
&-2u_1 - 2u_3 \geq -2\\
&-u_1 - 3u_2 \geq -1\\
&u_i \geq 0 \quad i = 1,2,3\\
&\max\ (2u_1 + u_3)
\end{aligned}
$$

Aducem problema la forma standard şi introducem variabile artificiale. Vom folosi metoda celor două faze.

$$
\begin{aligned}
&-u_1 - u_2 - u_3 - u_4 + u_1^a = 3\\
&u_1 + u_3 - u_5 + u_2^a = 1\\
&u_1 + 3u_2 - u_6 + u_3^a = 1\\
&u_i \geq 0 \quad i = \overline{1,6}\,, \quad u_i^a \geq 0 \quad i = 1,2,3
\end{aligned}
$$

I $\quad \min\ (u_1^a + u_2^a + u_3^a)$

II $\quad \max\ (2u_1 + u_3)$

In trei iteraţii simplex se obţine soluţia problemei:

			0	0	0	0	0	0	1	1	1
c_B	u^B	$\bar{u}^B$	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_1^a	u_2^a	u_3^a
1	u_1^a	3	-1	-1	-1	-1	0	0	1	0	0
1	u_2^a	1	1	0	1	0	-1	0	0	1	0
← 1	u_3^a	1	1	3	0	0	0	-1	0	0	1
		5	1	2 ↑	0	-1	-1	-1	0	0	0
	u_1^a	10/3	-2/3	0	-1	-1	0	-1/3	1	0	
←	u_2^a	1	1	0	1	0	-1	0	0	1	
	u_2	1/3	1/3	1	0	0	0	-1/3	0	0	
		13/3	1/3 ↑	0	0	-1	-1	-1/3	0	0	
	u_1^a	4	0	0	-1/3	-1	$-\frac{2}{3}$	-1/3	1		
	u_1	1	1	0	1	0	-1	0	0		
	u_2	0	0	1	1	0	1/3	-1/3	0		
		4	0	0	$-\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{2}{3}$	-1/3	0		

Problema duală nu admite programe (căci min $(u_1^a + u_2^a + u_3^a) = 4$).

Deci, conform teoremei fundamentale, problema primală are optim infinit sau nu are programe. Însă se observă ușor că $x = (0,0,\dots,0)$ este program pentru primală și prin urmare problema primală are optim infinit.

4) Fie $P = \{x \in R^n / Ax \geq b\}$, $D = \{u \in R_+^m / |A'u| \leq c\}$ unde $A_{m,n}$, $b \in R^m$, $c \in R_+^n$ iar prin $|x|$ am notat $|x| = (|x_1|,\dots,|x_n|)'$.

Fie problemele:

(1) $\min \{c'|x| \,/\, x \in P\}$

(2) $\max \{b'u \,/\, u \in D\}$

Să se arate că:

a) $D \neq \emptyset$;

b) dacă $P \neq \emptyset$ atunci $b'u \leq c'|x|$, $(\forall)\, x \in P$, $u \in D$.

c) dacă $P = \emptyset$ atunci problema (2) are optim infinit;

d) dacă $P \neq \emptyset$ atunci problemele (1) și (2) au optim finit, iar valorile optime sînt egale.

Soluție:

a) Deoarece $c \in R^n_+$ se observă că $u = (0,0,\dots,0)'$ este program pentru (2)

b) Fie $x \in P$, $u \in D$. Avem relațiile:

$b'u \leqslant (Ax)'u = x'A'u \leqslant |x|' \, |A'u| \leqslant |x|' \, c = c'|x|$

c) Dacă problema (1) nu are programe atunci sistemul:

$Ax \geqslant b$

$x \in R^n$

nu are soluție. Fie $x = x_1 - x_2$ cu $x_1, x_2 \geqslant 0$ și $y = Ax - b \geqslant 0$. Atunci nici sistemul:

$$\begin{cases} (A \;\; -A \;\; -I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = b \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} \geqslant 0 \end{cases}$$

nu are soluție. Conform Lemei Farkaș-Minkowski, sistemul

$$\begin{cases} (A \;\; -A \;\; -I)' \, u \leqslant 0 \\ b'u > 0 \end{cases}$$

are soluție. Dacă $\bar{u}$ este o soluție a acestui sistem atunci:

$$\begin{pmatrix} A' \\ -A' \\ -I \end{pmatrix} \bar{u} \leqslant 0 \quad , \quad b'\bar{u} > 0 .$$

Se obține:

$$A'\bar{u} = 0$$
$$\bar{u} \geqslant 0$$
$$b'\bar{u} > 0$$

Evident că $\bar{u} \in D$. Fie $\bar{u}_n = n\,\bar{u}$ cu n natural. Este clar că $\bar{u}_n \in D$, $(\forall)\, n \in N$. Dar atunci avem:

$$\max\left\{ b'u \;/\; u \in D \right\} \geqslant b'\bar{u}_n = n \cdot b'\bar{u}$$

Deoarece $b'\bar{u} > 0$, luînd limita după $n \to \infty$ obținem că problema (2) are optim infinit.

c) Scriem $x = x_1 - x_2$, unde $x_1 = x^+$, $x_2 = x^-$ și $x_1^i \cdot x_2^i = 0 \; (\forall)\, i$.

Atunci (1) devine:

$$\min\left\{ (c', c', 0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} / (A \;\; -A \;\; -I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = b,\; x_1, x_2, y \geqslant 0 \;,\; x_1^i \cdot x_2^i = 0 \; (\forall)\, i \right\}$$

Fie $\tilde{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y^2 \end{pmatrix} \;/\; (A - A - I) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y^2 \end{pmatrix} = b \,,\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y^2 \end{pmatrix} \geqslant 0 \right\}.$

şi problema (1') $\min \left\{ (c',c',0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y^2 \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y^2 \end{pmatrix} \in \tilde{P} \right\}$

Este clar că $\tilde{P} \neq \emptyset$. Duala problemei (1'), se arată că este tocmai problema (2). Deoarece şi problema (2) are programe, rezultă, conform teoremei fundamentale a dualităţii, că problemele (1') şi (2) au optim finit iar valorile optime corespunzătoare sînt egale. Rezultă imediat că (1) are optim finit. Este clar că orice soluţie optimă pentru (1) este soluţie optimă şi pentru (1'). Arătăm că avem şi invers. Deoarece avem optim finit, este suficient să arătăm că orice soluţie optimă <u>de bază</u> pentru (1') este soluţie optimă de bază pentru (1).

Dacă $\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{y}^2 \end{pmatrix}$ este o soluţie optimă de bază pentru (1')

astfel ca $\bar{x}_1^k \cdot \bar{x}_2^k > 0$ pentru un anumit k atunci $\bar{x}_1^k > 0$, $\bar{x}_2^k > 0$. Atunci ar trebui ca acele coloane din sistemul iniţial ce corespund la variabilele x_1^k, x_2^k să fie liniar independente. Însă coloanele respective sînt tocmai a^k respectiv $-a^k$ unde am considerat că $A = (a^1,\dots,a^k,\dots,a^n)$. Dar coloanele a^k, $-a^k$ nu sînt liniar independente şi deci soluţiile optime pentru (1) şi (1') coincid. Acum ultima parte din (c) este imediată.

5) Să se rezolve cu ajutorul dualei următoarea problemă de programare lineară:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\geqslant 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &\geqslant 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\geqslant 2 \\ 2x_1 + x_3 &\geqslant 4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &\geqslant 0 \\ x_i \geqslant 0 \,,\; i &= 1,2,3 \\ \min\, (2x_1 + x_2 + x_3) \end{aligned}$$

<u>Soluţia</u> optimă $\bar{x} = \left(\frac{5}{4} \,,\, 0,\, \frac{3}{2} \right)'$, $z_{min} = 4$.

6) Să se rezolve cu ajutorul dualei următoarea problemă:

$$3x_1+x_2-x_3 \geq 1$$
$$-x_1+2x_2+x_3 \leq 4$$
$$x_1+5x_2+2x_3 \geq 2$$
$$x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1,2,3$$
$$\min (4x_1+6x_2+x_3)$$

<u>Soluția</u> optimă: $\bar{x} = (\frac{3}{14}, \frac{5}{14}, 0)$; $z_{min} = 3$.

7) Să se scrie duala problemei:

$\min \{c'x \ / \ Ax \leq a, \ Bx = b \ , \ Dx \geq d \ , \ 0 \leq x \leq e\}$ unde A,B,D sînt matrici de tip $m \times n$, $a,b,d \in R^m$ iar $e \in R^n_+$.

8) Fie $P = \{x \in R^n / \ Ax \leq b\}$, $D = \{u \in R^m_- \cup \{0\} \ / \ |A'u| \leq c\}$ unde $A,b,c, |\cdot|$ au semnificația din problema 4 de mai sus. Dacă considerăm problemele:

(1) $\min \{c'|x| \ / \ x \in P\}$

(2) $\max \{b'u \ / \ u \in D\}$

atunci se păstrează proprietățile a)- d) din problema 4 .

9) Să se arate că are loc 8 dacă luăm:

$P = \{x \in R^n / \ Ax = b\}$, $D = \{u \in R^m / \ |A'u| \leq c\}$.

2.2. <u>Algoritmul simplex dual - cînd există o bază dual admisibilă</u>

<u>Descrierea algoritmului</u>

Fie problema de programare lineară adusă la forma standard

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$\max(\min) \ c'x$$

cu $A(m \times n)$, $b \in R^m$, $c \in R^n$, $x \in R^n$

Fie B o bază a problemei, dual admisibilă, adică pentru care

$z_j^B - c_j \geqslant (\leqslant)\ 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$

(1) Test de optimalitate:

Dacă $\bar{x}_i^B \geqslant 0 \quad (\forall)\ i \in \mathcal{B}$, atunci $\bar{x} = (\bar{x}^B, 0)$ este soluția optimă.

(2) Test de existență a soluției:

Dacă există $\bar{x}_i^B < 0$ și $y_{ij} \geqslant 0$ oricare ar fi j, atunci problema nu are soluție.

In caz contrar, soluția se poate îmbunătăți.

(3) Imbunătățirea soluției $\bar{x}^B$ pentru care $I = \{ s \mid \bar{x}_s^B < 0 \} \neq \emptyset$ iar pentru fiecare $s \in I$ există j încît $y_{sj} < 0$.

Iese din bază a^ℓ cu ℓ determinat așa încît

$$\bar{x}_\ell^B = \min_{s \in I} \bar{x}_s$$

Intră în bază a^k cu k determinat așa încît

$$\left| \frac{z_k^B - c_k}{y_{\ell k}} \right| = \min_{\substack{j \\ y_{\ell j} < 0}} \left| \frac{z_j^B - c_j}{y_{\ell j}} \right|$$

(4) Se transformă tabelul simplex după regula dreptunghiului, cu pivotul $y_{\ell k}$.

1)
$$\begin{aligned} 6x_1 - x_2 - x_4 &= 5 \\ 2x_1 - \tfrac{1}{3}x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_5 &= 2 \end{aligned}$$

$x_i \geqslant 0 \quad i = \overline{1,5}$

$\max\,(2x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$

<u>Soluție</u>: Aducem problema la o formă care ne furnizează o bază unitară $B = I$

$$\begin{aligned} -6x_1 + x_2 + x_4 &= -5 \\ -2x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + x_3 &= -3 \\ 3x_1 + x_5 &= 2 \end{aligned}$$

$x_i \geqslant 0\ , \quad i = \overline{1,5}$

$\max\,(2x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$

Facem tabelul simplex:

			2	-1	1	-1	0
C_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-1	x_4	-5	-6	1	0	1	0
1	x_3	-3	-2	1/3	1	0	0
0	x_5	2	3	0	0	0	1
		2	2	$\frac{1}{3}$	0	0	0

B este bază dual admisibilă ($z_j^B - c_j \geq 0$ ($\forall$) j), dar soluţia nu este optimă căci $\bar{x}_4 < 0$, $\bar{x}_3 < 0$. O putem îmbunătăţi.

Iese din bază a^4, căci $\min(\bar{x}_4, \bar{x}_3) = -5 = x_4$

Intră în bază a^1, căci y_{41} este singura valoare negativă de pe linia lui x_4.

Transformăm tabelul după regula dreptunghiului.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	5/6	1	-1/6	0	1/6	0
x_3	-4/3	0	0	1	-1/3	0
x_5	-1/2	0	1/2	0	1/2	1
	1/3	0	$\frac{2}{3}$	0	1/3	0

Soluţia nu este încă optimă.

Iese din bază a^3, intră în bază a^4.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1/6	1	-1/6	1/2	0	0
x_4	4	0	0	-3	1	0
x_5	$-\frac{5}{2}$	0	1/2	3/2	0	1
	-1	0	$\frac{2}{3}$	1	0	0

In continuare soluţia nu este optimă.

Dar $\bar{x}_5 = -\frac{5}{2} < 0$, iar $y_{5j} \geq 0$ ($\forall$) $1 \leq j \leq 5$.

Deci problema dată nu are soluţie.

2) Să se rezolve problema:

$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_3 + x_4 - \tfrac{1}{2} x_5 &= -2 \\ x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ x_i \geq 0 ,\quad i &= \overline{1,5} \\ \min\,(x_3 + x_4 + x_5) \end{aligned}$$

<u>Soluție</u>:

$B = (a^1, a^2)$ este o bază unitară. Făcînd primul tabel simplex vom vedea că ea este dual admisibilă.

			0	0	1	1	1
C_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
← 0	x_1	-2	1	0	-1	1	-1/2
0	x_2	1	0	1	-1	-1	1
		0	0	0	-1 ↑	-1	-1

Putem îmbunătăți soluția.

Iese din bază a^1 căci $\bar{x}_1 = -2 < 0$.

Intră în bază a^3, căci

$$\min_{\substack{j \\ y_{1j} < 0}} \left| \frac{z_j^B - c_j}{y_{1j}} \right| = \min \left\{ \frac{-1}{-1} , \frac{-1}{-1/2} \right\} = 1 = \left| \frac{z_3^B - c_3}{y_{13}} \right|$$

Refacem tabelul simplex.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	2	-1	0	1	-1	1/2
x_2	3	-1	1	0	-2	3/2
	2	-1	0	0	-2	-1/2

Soluția optimă este deci $\bar{x} = (0,3,2,0,0)$, iar $z_{min} = 2$.

<u>Probleme propuse</u>:

3)
$$\begin{aligned} 9x_1 + 30x_2 &\leq 210 \\ 4x_1 + 11x_2 &\geq 44 \\ 6x_1 + 4x_2 &\geq 24 \\ 3x_1 + 10x_2 &\leq 30 \\ x_i \geq 0 \quad i &= 1,2 \\ \min\,(3x_1 + 4x_2) \end{aligned}$$

<u>Soluție</u>: Problema nu admite soluții.

4)
$$\begin{aligned} x_1+5x_2-2x_3+\ x_4 \qquad\qquad &\leq 6\\ 3x_2+2x_3 \qquad -\ x_5 &\geq 4\\ 4x_1-\ x_2+\ x_3+2x_4+3x_5 &\leq 5\\ x_i \geq 0\ ,\quad i = \overline{1,5} \qquad\qquad & \\ \min\ (3x_1+x_2+\tfrac{1}{2}x_3+x_4) \qquad & \end{aligned}$$

Soluția optimă este segmentul AB cu $A(0,\ \frac{6}{5},2,0,0,\ \frac{2}{5},0,0)$, $B(0,0,\ \frac{22}{5},\ 0,\ \frac{6}{5},\ \frac{56}{5}\ ,0,0)$, iar $z_{min} = \frac{11}{5}$.

2.3. Determinarea unei baze dual admisibile

Observație: Fie problema de programare lineară $Ax = b$, $x \geq 0$, $\max(\min)c'x$ și fie B o bază.

Dacă B e primal și dual admisibilă, ea e optimă.

Dacă B e primal admisibilă, aplicăm simplexul primal.

Dacă B este dual admisibilă, aplicăm simplexul dual.

Dacă B nu e nici primal, nici dual admisibilă, atunci fie aplicăm metoda celor două faze pentru a găsi o bază primal admisibilă, fie determinăm o bază dual admisibilă după următoarea metodă:

(1) Se adaugă problemei restricția artificială

$$x_0+\sum_{j\in I} x_j = M$$

cu $M > 0$ oricît de mare, $I = \left\{ j \mid z_j^B - c_j \right.$ nu verifică condiția de dual admisibilitate $\left.\right\}$. Problema astfel obținută se numește problema mărită.

(2) Se face o iterație simplex pentru scoaterea lui x_0 din bază. Se obține astfel o bază dual-admisibilă.

(3) Se rezolvă problema mărită cu simplexul dual.

- Dacă problema mărită nu admite programe, atunci nici problema inițială nu are programe.

- Dacă problema mărită are soluție optimă și x_0 nu este variabilă de bază, atunci în general problema inițială are optim infinit. In particular, dacă valoarea optimă nu depinde de M, atunci problema dată are optim finit.

- Dacă problema mărită are soluție optimă $\bar{x}$ și x_0 este variabilă de bază, atunci problema inițială are optim finit, care se obține pentru $\bar{x}$, mai puțin componenta $\bar{x}_0$.

1) Să se rezolve problema:

$$5x_1 - x_2 - x_3 \geq 1$$
$$3x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 3$$
$$6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6$$
$$x_i \geq 0 , \quad i = 1,2,3$$
$$\max (2x_1 - x_2 + 4x_3)$$

Soluţie:

Aducem problema la forma standard introducînd variabile ecart, astfel încît să obţinem o bază unitară.

$$\begin{aligned} -5x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \qquad\qquad &= -1 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 \quad + x_5 \qquad &= 3 \\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 \qquad + x_6 \quad &= 6 \\ -6x_1 - 2x_2 - 3x_3 \qquad\quad + x_7 &= -6 \end{aligned}$$
$$x_i \geq 0 , \quad i = \overline{1,7}$$
$$\max (2x_1 - x_2 + 4x_3)$$

Baza unitară este $B = (a^4, a^5, a^6, a^7)$.

$B^{-1}b = (-1,3,6,-6)$, deci B nu este primal admisibilă.

$z^B - c = (-2,1,4,0,0,0,0)$, deci B nu este nici dual admisibilă.

Vom determina o bază dual admisibilă.

Dual admisibilitatea nu este respectată de $z_1^B - c_1 = -2 < 0$ şi $z_3^B - c_3 = -4 < 0$. Deci $I = \{1,3\}$

Adăugăm atunci restricţia $x_0 + x_1 + x_3 = M$.

Tabelul simplex corespunzător problemei mărite este:

			2	-1	4	0	0	0	0	0
C_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_0
0	x_4	-1	-5	1	1	1	0	0	0	0
0	x_5	3	3	-3	1	0	1	0	0	0
0	x_6	6	6	2	3	0	0	1	0	0
0	x_7	-6	-6	-2	-3	0	0	0	1	0
← 0	x_0	M	1	0	1	0	0	0	0	1
		0	-2	1	-4 ↑	0	0	0	0	0

Facem o iteraţie simplex, pentru eliminarea lui x_0.

Intră în bază x^3, iese din bază x_o^o.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_o
x_4	-1- M	-6	1	0	1	0	0	0	-1
x_5	3- M	2	-3	0	0	1	0	0	-1
← x_6	6-3M	3	2	0	0	0	1	0	-3
x_7	-6+3M	-3	-2	0	0	0	0	1	3
x_3	M	1	0	1	0	0	0	0	1
	4M	2	1	0	0	0	0	0	4 ↑

$\tilde{B} = (a^4, a^5, a^6, a^7, a^3)$ este dual admisibilă.

Soluţia obţinută nu este optimă, dar poate fi îmbunătăţită prin aplicarea simplexului dual.

Iese din bază a^6, căci $\min\limits_{\substack{i \\ \bar{x}_i^B < 0}} \bar{x}_i^B = 6 - 3M = \bar{x}_6^B$

Intră în bază a^o, y_{6o} fiind singura valoare negativă ce poate fi luată ca pivot.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_o
← x_4	-3	-7	1/3	0	1	0	-1/3	0	0
x_5	1	1	-11/3	0	0	1	-1/3	0	0
x_o	-2+M	-1	-2/3	0	0	0	-1/3	0	1
x_7	0	0	0	0	0	0	1	1	0
x_3	2	2	2/3	1	0	0	1/3	0	0
	8	6 ↑	$\frac{11}{3}$	0	0	0	$\frac{4}{3}$	0	0

Soluţia nu este încă optimă, căci $\bar{x}_4 < 0$.

Iese din bază a^4.

Intră în bază a^1, căci

$$\min_{j=1,6} \left| \frac{z_j^B - c_j}{y_{4j}} \right| = \min\left(\frac{6}{7}, 4\right) = \frac{6}{7} = \left| \frac{z_1^B - c_1}{y_{41}} \right|$$

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_7	x_0
x_1	3/7	1	- 1/21	0	-1/7	0	0	0
x_5	4/7	0	-76/21	0	1/7	1	0	0
x_0	-11/7+M	0	- 5/7	0	-1/7	0	0	1
x_7	0	0	0	0	0	0	1	0
x_3	8/7	0	16/21	1	2/7	0	0	0
	38/7	0	$\frac{83}{21}$	0	$\frac{6}{7}$	0	0	0

Am obținut soluția optimă a problemei mărite.

Soluția optimă a problemei date va fi

$$\bar{x} = (\tfrac{3}{7},0,\tfrac{8}{7},0,\tfrac{4}{7},0,0) \text{ , iar } z_{max} = \frac{38}{7} .$$

<u>Probleme propuse</u>:

2)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \qquad &\leq -6 \\ x_2 + x_3 - \tfrac{1}{4}x_4 &\leq 3 \\ -x_3 + 2x_4 &\leq -3 \end{aligned}$$
$$x_i \geq 0 \text{ , } i = \overline{1,4}$$
$$\min (5x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4)$$

<u>Soluția</u> optimă $\bar{x} = (\frac{9}{2}, \frac{39}{8}, 0, \frac{15}{2})$, $z_{min} = -12$

3)
$$|-2x_1 + x_3| \leq 4$$
$$1 \leq x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 6$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 2$$
$$x_i \geq 0 \text{ , } i = 1,2,3$$
$$\max (2x_1 - x_2 - x_3)$$

<u>Soluția</u> optimă $\bar{x} = (\frac{25}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4})$, $z_{max} = \frac{43}{4}$.

3. ALGORITMUL SIMPLEX REVIZUIT

Construirea tabloului simplex revizuit

Ne situăm în cazul rezolvării unei probleme de programare liniară prin metoda celor două faze.

$$Ax + Ix^a = b$$

$$x \geqslant 0 \ , \ x^a \geqslant 0$$

I $\quad \min \xi = \min \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^a \right) = \min (\gamma' x^a)$

II $\quad \max (\min) z = \max(\min) c'x$

Fie B o bază a problemei. (La prima iterație $B = I$).

Tabloul simplex revizuit este următorul:

	x^B		$\bar{x}^B$	y^k
x^B	B^{-1}	0 ⋮ 0		
ξ	$\gamma^B B^{-1}$	0	$\bar{\xi}$	$\xi_k - \gamma_k$
z	$c^B B^{-1}$	-1	$\bar{z}$	$z_k - c_k$

Completarea acestui tabel se face astfel:

(1) Se completează prima parte a tabelului (B^{-1}, $\gamma^B B^{-1}$, $c^B B^{-1}$)

(2) Se calculează $\bar{x}^B = B^{-1}b$, $\bar{\xi}$, $\bar{z}$ și se trec în tabel.

(3) Se calculează $(\xi_i - \gamma_i)_i$ pentru faza I (înmulțind linia lui ξ cu matricea extinsă a sistemului $\left(\begin{smallmatrix} A \\ c \end{smallmatrix}\right)$) și respectiv $(z_i - c_i)_i$ pentru faza II (înmulțind linia lui z cu matricea extinsă a sistemului).

(4) Se alege indicele k, încît x_k intră în bază și se trec în tabel $\xi_k - \gamma_k$, $z_k - c_k$.

(5) Se calculează coloana $y^k = B^{-1}a^k$ și se completează în tabel.

(6) Se alege indicele ℓ, încît x_ℓ iese din bază.

(7) Se transformă tabelul conform regulei dreptunghiului, cu pivotul $y_{\ell k}$, cu excepţia ultimei coloane.

1)
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 \quad &= 15 \\ 2x_1+x_2+5x_3 \quad &= 2o \\ x_1+2x_2+x_3+x_4 &= 1o \\ x_i \geqslant 0 , \quad i &= \overline{1,4} \\ \max\ (x_1+2x_2+3x_3-x_4) \end{aligned}$$

Soluţie:

Introducem două variabile artificiale corespunzînd primelor două ecuaţii, notate x_5, x_6.

$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3 \quad + x_5 \quad &= 15 \\ 2x_1+x_2+5x_3 \quad + x_6 &= 2o \\ x_1+2x_2+x_3+x_4 \quad &= 1o \\ x_i \geqslant 0 , \quad i &= \overline{1,6} \end{aligned}$$

I $\min\ (x_5+x_6)$

II $\max\ (x_1+2x_2+3x_3-x_4)$

Intocmim primul tabel simplex revizuit: $B = (a^5,a^6,a^4)$,

$B^{-1} = I$, $\gamma^B B^{-1} = (1, 1, 0)$, $c^B B^{-1} = (0, 0-1)$

$\bar{x}^B = B^{-1}b = (15,2o,1o)'$, $\bar{w} = 15 + 2o = 35$, $\bar{z} = -1o$

$$w - \gamma = (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = (3,\ 3,\ 8,\ 0)$$

$\max\ (w_i - \gamma_i) = 8 = w_3 - \gamma_3$, deci $\underline{k = 3}$

$$y^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = (3,5,1)'$$

$$\min \left(\frac{\bar{x}_i^B}{y_{i3}} \right) = \min\ \left(\frac{15}{3} , \frac{2o}{5} , \frac{1o}{1} \right) = \frac{2o}{5} \quad \text{deci} \quad \ell = 6$$

$\xi_3 - \gamma_3 = 8$

$$z_3 - c_3 = (0 \quad 0 \quad -1 \quad -1) \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -4$$

Facem tabelul simplex revizuit.

	x_5	x_6	x_4		$\bar{x}^B$	y^3
x_5	1	0	0	0	15	3
$\leftarrow x_6$	0	1	0	0	20	5
x_4	0	0	1	0	10	1
ξ	1	1	0	0	35	8
z	0	0	-1	-1	-10	-4

Am stabilit deja că pivotul este $y_{63} = 5$.

Transformăm tabelul şi în continuare procedăm la fel ca în prima iteraţie.

<u>Iteraţia 2-a</u>

	x_5	x_3	x_4		$\bar{x}^B$	y^2
$\leftarrow x_5$	1	-3/5	0	0	3	7/15
x_3	0	1/5	0	0	4	1/5
x_4	0	-1/5	1	0	6	9/5
ξ	1	-3/5	0	0	3	7/5
z	0	4/5	-1	-1	6	$-\frac{16}{5}$

<u>Iteraţia 3-a</u>

	x_2	x_3	x_4		$\bar{x}^B$	y^1
x_2	5/7	-3/7	0	0	15/7	$-\frac{1}{7}$
x_3	-1/7	2/7	0	0	25/7	3/7
$\leftarrow x_4$	-9/7	4/7	1	0	15/7	6/7
ξ	0	0	0	0	0	
z	$\frac{16}{7}$	$-\frac{4}{7}$	-1	-1	$\frac{90}{7}$	$-\frac{6}{7}$

Aici s-a încheiat faza I.

<u>Iteraţia 4-a</u>

	x_2	x_3	x_1		$\bar{x}^B$
x_2	1/2	-1/3	1/6	0	5/2
x_3	1/2	0	-1/2	0	5/2
x_1	-3/2	2/3	7/6	0	5/2
z	1	0	0	-1	15

Deci soluţia optimă este $\bar{x} = (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0)$, $z_{max} = 15$.

2) $$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ x_i \geq 0 \;, \; i &= 1,2 \\ \max\,(2x_1 + x_2) & \end{aligned}$$

Soluție:

Aducem problema la forma standard introducînd variabilele ecart x_3, x_4, x_5 și apoi introducem variabila auxiliară x_6 corespunzătoare primei ecuații.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - x_3 \quad\quad + x_6 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \quad + x_4 \quad\quad &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_5 \quad &= 2 \\ x_i \geq 0 \;, \; i &= \overline{1,6} \end{aligned}$$

I $\min(x_6)$
II $\max(2x_1 + x_2)$

Iterația 1

	x_6	x_4	x_5		$\bar{x}^B$	y^1
x_6	1	0	0	0	3	3
x_4	0	1	0	0	6	4
x_5	0	0	1	0	2	1
ξ	1	0	0	0	3	3
z	0	0	0	-1	0	-2

Iterația 2-a

	x_1	x_4	x_5		$\bar{x}^B$	y^3
x_1	1/3	0	0	0	1	-1/3
x_4	-4/3	1	0	0	2	4/3
x_5	-1/3	0	1	0	1	1/3
	0	0	0	0	0	
z	2/3	0	0	-1	2	-2/3

Aici se încheie faza I

Iterația 3-a

	x_1	x_3	x_5		$\bar{x}^B$
x_1	0	1/4	0	0	3/2
x_3	-1	3/4	0	0	3/2
x_5	0	-1/4	1	0	1/2
z	0	$\frac{1}{2}$	0	-1	3

<u>Soluția</u> optimă este $\bar{x} = \left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2} \right)$, iar $z_{max} = 3$

4. REOPTIMIZARI

Se consideră o problemă de programare lineară

$$A_o x = B_o$$
$$x \geqslant 0$$
$$\max(\min) c_o' x \ ,$$

pentru care am determinat o soluţie optimă. Fie B baza optimă, $\bar{x}^B$ optimă. $\mathcal{B} = \{ i \mid a^i \in B \}$.

(a) Modificarea funcţiei obiectiv

Să reoptimizăm soluţia pentru funcţia obiectiv max(min)c'x, cu $\boxed{c = c_o + c_1}$, $c_1 \in R^n$

Prin această modificare B rămîne primal admisibilă, dar poate să nu mai fie dual admisibilă.

Dacă B rămîne dual admisibilă ($\bar{z}_j^B - c_j \geqslant (\leqslant)\ 0$) atunci $\bar{x}^B$ rămîne optimă.

In caz contrar, reoptimizăm soluţia aplicînd algoritmul simplex primal.

(b) Modificarea vectorului b

Să reoptimizăm soluţia pentru cazul $A_o x = b$, cu $\boxed{b = b_o + b_1}$ $b_1 \in R^m$.

Prin această modificare B rămîne dual admisibilă.

In ultimul tabel simplex apare B^{-1}.

Dacă $\tilde{x}^B = B^{-1}b = B^{-1}(b_o + b_1) = \bar{x}^B + B^{-1}b_1 \geqslant 0$, atunci $\tilde{x}^B$ este soluţia optimă.

In caz contrar, o putem reoptimiza aplicînd algoritmul simplex dual.

(c) Modificarea unui vector a^r, cu $r \notin \mathcal{B}$

Să reoptimizăm soluţia pentru cazul $Ax = b_o$, cu $\boxed{a^r = a_o^r + a_1^r}$ $r \notin \mathcal{B}$

Prin această modificare B rămîne primal admisibilă.

Evaluăm $\tilde{z}_r^B - c_r = c_B' B^{-1} a^r - c_r = \bar{z}_r^B - c_r + c_B' B^{-1} a_1^r$

Dacă $\tilde{z}_r^B - c_r \geqslant (\leqslant)\ 0$, $\bar{x}^B$ rămîne soluţia optimă. In caz contrar o putem reoptimiza aplicînd algoritmul simplex primal.

(d) Modificarea unui vector a^r, cu $r \in \mathcal{B}$

Să reoptimizăm soluția pentru cazul $Ax = b_o$, cu $\boxed{a^r = a_o^r + a_1^r}$ $r \in \mathcal{B}$

Prin această transformare pot fi afectate atît primal cît și dual admisibilitatea.

Fie B^M noua bază.

Fie β_i linia i din B^{-1}.

B^M este nesingulară dacă $\tilde{y}_{rr} = \beta_r a^r = \beta_r(a_o^r + a_1^r) =$
$= 1 + \beta_r a_1^r \neq 0$,

adică dacă $\beta_r a_1^r \neq -1$

Dacă B^M este singulară, atunci B nu poate fi folosită pentru reoptimizarea soluției și problema se rezolvă independent (se reiau calculele de la o iterație anterioară intrării în bază a lui a_o^r).

Dacă B^M este nesingulară, se calculează $(B^M)^{-1}$.

$$(B^M)^{-1} = I_r(a^r).\ B^{-1} \text{ cu } I_r(a^r) = (e^1, \dots e^{r-1}, \gamma^r, e^{r+1}, \dots e^m) ,$$

$$\gamma^r = \left(-\frac{y_{1r}}{y_{rr}}, \dots \frac{1}{y_{rr}}, \dots -\frac{y_{mr}}{y_{rr}} \right)'$$

Se calculează $\bar{x}^{B^M} = (B^M)^{-1} b_o$

$$\bar{z}_j^{B^M} - c_{oj} = c_B'(B^M)^{-1} a_o^j - c_{oj} ,\ j \notin \mathcal{B}$$

Dacă $\bar{x}^{B^M} \geq 0$, $\bar{z}_j^{B^M} - c_{oj} \geq (\leq) 0$, B^M este optimă.

Dacă B^M e primal admisibilă, dar nu și dual, atunci $\bar{x}^{B^M}$ se reoptimizează aplicînd simplexul primal.

Dacă B^M e dual admisibilă, dar nu și primal, atunci $\bar{x}^{B^M}$ se reoptimizează aplicînd simplexul dual.

Dacă B^M nu e nici dual, nici primal admisibilă, fie se rezolvă problema reluînd-o de la o iterație anterioară intrării lui a_o^r în bază, fie se aduce problema la una în care modificarea este introducerea unei noi coloane în matricea A.

(e) Adăugarea unei noi coloane în A (a unei noi variabile).

Să reoptimizăm soluția pentru cazul $A_o x + a^{n+1} x_{n+1} = b_o$.

Prin această modificare B rămîne primal admisibilă.

Se calculează $\bar{z}_{n+1}^B - c_{n+1}$.

Dacă B rămîne și dual admisibilă, $\bar{x}^B$ e optimă. In caz contrar, soluția se reoptimizează folosind algoritmul simplex primal.

Observaţie:

Modificarea unui vector linie din A revine la modificarea unui vector coloană în problema duală.

Adăugarea unei noi linii la A (a unei noi restricţii) revine la adăugarea unei noi coloane în problema duală.

1) Să se rezolve problema de programare lineară

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$
$$3x_1 + 3x_2 + x_3 = 4$$
$$x_i \geq 0 \ . \ i = 1,2,3$$
$$\min\ (-3x_1 + 2x_2 - 4x_3)$$

şi să se reoptimizeze soluţia pentru:

a) $c = (-1,\ -1,\ 1)'$

b) $b = (1,\ 4)'$

c) $a^2 = (-3,\ -3)'$

d) $a^1 = (-1,\ 1)'$

e) $a^4 = (-2,1)'$, $c_4 = 0$.

Soluţie:

Aplicînd metoda celor două faze obţinem soluţia optimă a problemei iniţiale. Ultimul tabel simplex este:

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
x_3	1	0	6/5	1	3/5	-1/5
x_1	1	1	3/5	0	-1/5	2/5
	-7	0	$-\frac{43}{5}$	0	—	—

Am obţinut deci $\mathcal{B} = \{3,1\}$, $\mathcal{S} = \{2\}$, $B = (a^3, a^1)$,

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \ , \ \bar{x}^B = (1,\ 0,\ 1),\ \ \bar{z}_{min} = -7$$

(a) $c = (-1,-1,1)' = (-3,2,-4)' + (2,-3,5)'$

B rămîne primal admisibilă.

$$z_1^B - c_1 = z_3^B - c_3 = 0$$

$$z_2^B - c_2 = (1,-1)\begin{pmatrix} 6/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} + 1 = \frac{8}{5} > 0$$

Deci B nu este optimă. Aplicăm algoritmul simplex primal.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3
$\leftarrow x_3$	1	0	6/5	1
x_1	1	1	3/5	0
	0	0	$\frac{8}{5}\uparrow$	0

Intră în bază a^2, iese din bază a^3.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3
x_2	5/6	0	1	5/6
x_1	1/2	1	0	-1/2
	$-\frac{4}{3}$	0	0	$-\frac{4}{3}$

Soluția optimă a problemei modificate este $\tilde{x} = (\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 0)$, iar $\tilde{z}_{min} = -\frac{4}{3}$

(b) $b = (1,4)' = (3,4)' + (-2,0)'$

B rămîne dual admisibilă.

$$\tilde{x}^B = \bar{x}^B + B^{-1}b_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3/5 & -1/5\\-1/5 & 2/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1/5\\7/5\end{pmatrix}$$

$\tilde{x}_3^B < 0$, deci vom aplica simplexul dual.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3
x_3	-1/5	0	6/5	1
x_1	7/5	1	3/5	0
	$-\frac{17}{5}$	0	$-\frac{43}{5}$	0

Cum $\tilde{x}_3^B < 0$ și $y_{3j} \geq 0$ $(\forall)j$, problema modificată nu are programe

(c) $a^2 = \begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-3\end{pmatrix}$, $2 \notin \mathcal{B}$

B rămîne primal admisibilă

$\tilde{z}_1^B - c_1 = z_3^B - c_3 = 0$

$\tilde{z}_2^B - c_2 = \bar{z}_2^B - c_2 + c_B' B^{-1} a_1^2 = -\frac{43}{5} + \frac{66}{5} = \frac{23}{5} > 0$

Deci B nu e dual admisibilă.

Pentru a reface tabelul simplex, calculăm coloana

$$\tilde{y}^2 = B^{-1}a^2 = B^{-1}(a_o^2 + a_1^2) = y^2 + B^{-1}a_1^2 = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} =$$

$$= (-\tfrac{6}{5}, -\tfrac{3}{5})'$$

Deci $\tilde{z}_2^B - c_2 > 0$, iar $\tilde{y}_{i2} < 0$ $(\forall)$ $i \in \mathcal{B}$

Atunci problema modificată are optim infinit.

(d) $a^1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $1 \in \mathcal{B}$

$B^* = (a_o^3, a^1)$. Să stabilim întîi dacă B^* e nesingulară:

$\beta_1 a_1^1 = (-\tfrac{1}{5}, \tfrac{2}{5})\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -\tfrac{2}{5} \neq -1$

Deci B^* nesingulară.

$\tilde{y}^1 = B^{-1}a^1 = (-1, \tfrac{2}{5})'$

$\gamma = (\tfrac{5}{2}, \tfrac{5}{2})'$

$I_1(a^1) = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}$

$$(B^*)^{-1} = I_1(a^1)B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/10 & 4/5 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}^{B^*} = I_1(a^1)\bar{x}^B = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ 0 & 5/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/2 \\ 5/2 \end{pmatrix} > 0$$

Deci B^* este primal admisibilă.

$z_1^{B^*} - c_1 = z_3^{B^*} - c_3 = 0$

$$z_2^{B^*} - c_2 = (-4,-3)\begin{pmatrix} 1/10 & 4/5 \\ -1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 = -\frac{163}{10} < 0$$

Deci B^* e și dual admisibilă. Atunci soluția optimă a problemei mărite este $\bar{x}^{B^*} = (\tfrac{5}{2}, 0, \tfrac{7}{2})$ iar $\bar{z}_{min} = -\tfrac{43}{2}$

(e) Să refacem ultimul tabel simplex

$y^4 = B^{-1}a^4 = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$

$z_4^B - c_4 = (-3,-4)\begin{pmatrix} -7/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} = 1 > 0$

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	1	0	6/5	1	-7/5
$\leftarrow x_1$	1	1	3/5	0	4/5
	-7	0	$-\frac{43}{5}$	0	1 $\uparrow$

Intră în bază a^4 şi iese din bază a^1.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_3	11/4	7/4	9/4	1	0
x_4	5/4	5/4	3/4	0	1
	$-\frac{33}{4}$	$-\frac{5}{4}$	$-\frac{121}{140}$	0	0

Soluţia optimă a problemei modificate este deci

$$\bar{x} = (0,0,\frac{11}{4},\frac{5}{4}), \quad \bar{z}_{min} = -\frac{33}{4}$$

2) Să se rezolve problema de programare lineară

$$2x_1 + x_2 \leq 8$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 24$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 18$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$\max (4x_1 + 3x_2)$$

şi să se reoptimizeze soluţia pentru:

(a) $c = (3,-1)'$

(b) $b = (5,10,30)'$

(c) $a^2 = (2,3,5)'$

<u>Soluţie</u>:

Aplicînd algoritmul simplex primal obţinem soluţia optimă a problemei date. Ultimul tabel simplex este:

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	6/5	1	0	3/5	0	$-\frac{1}{5}$
x_4	46/5	0	0	-7/5	1	-1/5
x_2	28/5	0	1	-1/5	0	2/5
	$\frac{108}{5}$	0	0	$\frac{9}{5}$	0	2/5

Deci $B = (a^1, a^4, a^2)$, $\mathcal{B} = \{1,4,2\}$, $\mathcal{S} = \{3,5\}$,

$\bar{x}^B = (\frac{6}{5}, \frac{28}{5}, 0, \frac{46}{5}, 0)$, $\bar{z}_{max} = \frac{108}{5}$

(a) $c = (3,-1)' = (4,3)' + (-1,4)'$

B rămîne primal admisibilă.

$$z_3^B - c_3 = (3,0,-1)\begin{pmatrix} 3/5 \\ -7/5 \\ -1/5 \end{pmatrix} = 2 > 0$$

$$z_5^B - c_5 = (+3,0,-1)\begin{pmatrix} -1/5 \\ -1/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} = -1 < 0$$

Reoptimizăm soluţia:

			3	-1	0	0	0
C_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	x_1	6/5	1	0	3/5	0	-1/5
0	x_4	46/5	0	0	-7/5	1	-1/5
← -1	x_2	28/5	0	1	-1/5	0	2/5
		-2	0	0	2	0	-1 ↑

Intră în bază a^5, iese din bază a^2.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	4	1	1/2	1/2	0	0
x_4	12	0	1/2	-3	1	0
x_5	14	0	5/2	-1/2	0	1
	12	0	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0

Soluţia optimă a problemei modificate este $\bar{x} = (4,0,0,12,14)$, iar $\bar{z}_{max} = 12$.

(b) $b = (5,10,30)' = (8,24,18)' + (-3,-14,-12)'$

B rămîne dual admisibilă.

$$\tilde{x}^B = \bar{x}^B + B^{-1}b_1 = \begin{pmatrix} 6/5 \\ 46/5 \\ 28/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -1/5 \\ -7/5 & 1 & -1/5 \\ -1/5 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ -14 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Cda 45/978 Fasc. 4

B nu este primal admisibilă. Aplicăm simplexul dual.

x^B	$\tilde{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	-3	1	0	3/5	0	$-1/5$
x_4	-3	0	1	$-7/5$	1	$-1/5$
x_2	11	0	0	$-1/5$	0	2/5
	21	0	0	$\frac{9}{5}$	0	$\frac{2}{5}$

Iese din bază a^4, intră în bază a^3, căci

$$\min_{j=3,5}\left|\frac{z_j^B-c_j}{y_{4j}}\right| = \frac{z_3^B-c_3}{y_{43}} = \frac{9}{7}$$

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	$-\frac{30}{7}$	1	0	0	3/7	$-2/7$
x_3	$\frac{15}{7}$	0	0	1	$-5/7$	1/7
x_2	$\frac{80}{7}$	0	1	0	$-1/7$	3/7
	$\frac{120}{7}$	0	0	0	9/7	1/7

Iese din bază a^1, intră în bază a^5.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_5	15	$-7/2$	0	0	$-3/2$	1
x_3	0	1/2	0	1	$-1/2$	0
x_2	5	3/2	1	0	1/2	0
	15	1/2	0	0	3/2	0

Soluţia optimă a problemei modificate este $\bar{x} = (0,5,0,0,15)$ iar $\bar{z}_{max} = 15$.

(c) $a^2 = (2,3,5)' = (1,2,3)' + (1,1,2)'$

$2 \in \mathcal{B}$

$B^* = (a_o^1, a_o^4, a^2)$. Vom stabili dacă B^* este sau nu nesingulară.

$$y_{22} = \beta_2 a_1^2 = \left(-\frac{1}{5} \quad 0 \quad \frac{2}{5}\right)\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} = \frac{3}{5} \neq -1$$

Deci B^* nesingulară.

$\tilde{y}^2 = B^{-1}a^2 = \left(\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{8}{5} \right)'$.

$$I_2(a^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 5/8 \end{pmatrix}$$

$$(B^*)^{-1} = I_2(a^2)B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/8 & 0 & -1/4 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

$\bar{x}^{B^*} = (B^*)^{-1} \cdot b = \left(\frac{1}{2}, 12, \frac{7}{2} \right)' > 0$

Deci B^* este primal admisibilă.

$$z_3^{B^*} - c_3 = (4,0,3) \begin{pmatrix} 5/8 & 0 & -1/4 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ -1/8 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = \frac{17}{8} > 0$$

$$z_5^{B^*} - c_5 = (4,0,3)\ (B^*)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$$

Deci B^* nu e dual admisibilă. Aplicăm algoritmul simplex primal:

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1/2	1	0	5/8	0	-1/4
x_4	12	0	0	-3/2	1	0
← x_2	7/2	0	1	-1/8	0	1/4
	$\frac{25}{2}$	0	0	$\frac{17}{8}$	0	$-\frac{1}{4}$ ↑

Intră în bază a^5, iese a^2.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	4	1	1	1/2	0	0
x_4	12	0	0	-3/2	1	0
x_5	14	0	4	-1/2	0	1
	16	0	1	2	0	0

Deci soluţia optimă a problemei modificate este $\bar{x} = (4,0,0,12,14)$ $\bar{z}_{max} = 16$.

Probleme propuse:

3) $$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 13 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq -4 \\ x_1 - x_2 + x_3 &\leq 6 \\ x_i \geq 0 \quad i &= 1,2,3 \end{aligned}$$
$$\max (3x_1 - 2x_2 - x_3)$$

a) Să se rezolve problema dată.
b) Să se reoptimizeze soluția pentru $c = (1,-1,3)'$
c) Să se reoptimizeze soluția pentru $b = (1,1,0)'$
d) Să se reoptimizeze soluția pentru $a^2 = (0,-1,2)'$
e) Să se reoptimizeze soluția pentru $a^1 = (6,1,1)'$
f) Să se reoptimizeze soluția pentru cazul cînd se adaugă variabila x_7, cu $a^7 = (-1,-1,-5)'$, $c_7 = 0$.

Soluție:

a) Soluția optimă apare în ultimul tabel simplex.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	13/5	1	- 1/5	2/5	1/5	0	0
x_5	59/5	0	-13/5	11/5	3/5	1	0
x_6	17/5	0	- 4/5	3/5	-1/5	0	1
	39/5	0	7/5	11/5	3/5	0	0

b) Soluția optimă $(\frac{5}{11}, 0, \frac{59}{11}, 0, \frac{2}{11}, 0)$, $z_{max} = \frac{182}{11}$

c) Soluția optimă $(1, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{9}{4}, 0)$, $z_{max} = \frac{5}{2}$

d) Soluția problemei inițiale rămîne optimă.

e) Soluția optimă $(\frac{13}{6}, 0, 0, 0, \frac{11}{6}, \frac{23}{6})$, $z_{max} = \frac{13}{2}$

f) Optim infinit.

4) $$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 - 4x_5 &\geq 8 \\ -4x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 4x_5 &\geq 2 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 2x_5 &\geq 2 \\ x_i \geq 0 , \quad i &= \overline{1,5} \end{aligned}$$
$$\min (x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 8x_4 + 23x_5)$$

a) Să se rezolve problema dată

b) Să se reoptimizeze soluția pentru $c = (-4,1,0,-4,2)'$

c) Să se reoptimizeze soluția pentru $b = (2,4,2)'$

d) Să se reoptimizeze soluția pentru $a^3 = (3,-1,-1)'$

e) Să se reoptimizeze soluția pentru $a^4 = (2,-1,1)'$

Soluție:

a) Soluția optimă apare în ultimul tabel simplex

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_1^a	a_2^a
x_1	11/2	1	3/2	1/2	0	0	-1	$-\frac{1}{4}$	3/2	1/4	-3/2
x_5	2	0	-1/2	1/2	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	-1/2	1/2	1/2
x_4	3/2	0	-1/2	-1/2	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	-1/2	1/4	1/2
	$\frac{127}{2}$	0	-18	0	0	0	-1	$-\frac{55}{4}$	-14	——	

b) Soluția modificată are optim infinit.

c) Soluția optimă $\bar{x} = (0,0,0,2,3)$, $\bar{z}_{min} = 85$

d) Soluția problemei inițiale rămîne optimă.

e) Soluția optimă $\bar{x} = (4,0,0,6,2)$, $\bar{z}_{min} = 98$.

5)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &\leq 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &\leq 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &\leq 7 \\ x_i \geqslant 0 \quad i &= \overline{1,4} \\ \min\,(-2x_1 - x_2 + x_3 + x_4) \end{aligned}$$

a) Să se rezolve problema dată

b) Să se reoptimizeze soluția pentru $c = (-1,2,0,-1)'$

c) Să se reoptimizeze soluția pentru $b = (2,2,2)'$

d) Să se reoptimizeze soluția pentru $a^4 = (1,0,-1)'$

e) Să se reoptimizeze soluția pentru $a^3 = (2,2,-1)'$

f) Să se reoptimizeze soluția pentru cazul cînd se adaugă variabila x^8, cu $a^8 = (1,2,3)'$

Soluție:

a) Soluția optimă se obține în ultimul tabel simplex.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	11	1	0	0	0	4/3	1	1/3
x_2	15	0	1	0	1	1	1	1
x_3	3	0	0	1	0	1/3	0	1/3
	-34	0	0	0	-2	-2	-3	-4/3

Restul punctelor se rezolvă conform schemei generale de reoptimizare.

5. PARAMETRIZARI

(a) Parametrizarea funcției obiectiv (a vectorului c)

Se consideră problema

$$Ax = b$$
$$x \geqslant 0$$
$$\max(\min)\left[(c^0 + \lambda c^1)\, x \right] \quad , \qquad \lambda \in R$$

Presupunem că există o valoare λ_0 pentru care problema are un optim finit. Schimbînd originea pentru λ , se poate considera $\lambda_0 = 0$. (Această observație e valabilă pentru toate problemele de parametrizare).

(i) Se rezolvă problema pentru $\lambda = 0$. Fie B o bază optimală pentru $Ax = b$, $x \geqslant 0$, $\max(\min)(c^{0\prime}x)$, $\bar{x}^B$ optimă, $\mathcal{B} = \{i,\ a^i \in \mathcal{B}\}$

Cînd λ variază, B rămîne primal admisibilă

(ii) Se stabilește intervalul de variație a lui λ , pentru care B rămîne și dual admisibilă, adică optimă, punînd condiția $z_j - c_j =$

$$= z_j^0 - c_j^0 + \lambda\left[(c^{1B})' y^j - c_j^1 \right] \geqslant (\leqslant)\ 0$$

(iii) In afara domeniului în care B rămîne optimă, soluția se reoptimizează aplicînd algoritmul simplex primal.

(b) Parametrizarea vectorului b

Se consideră problema

$$Ax = b^0 + \lambda b^1 \quad , \qquad \lambda \in R$$
$$x \geqslant 0$$
$$\max(\min)\ (c'x)$$

(i) Se rezolvă problema pentru $\lambda = 0$. Fie B baza optimă, $\bar{x}^B$, $\mathcal{B} = \{i\ ,\ a^i \in B\}$.

Cînd λ variază, B rămîne dual admisibilă.

(ii) Se găsește intervalul de variație a lui λ pentru care B rămîne primal admisibilă (adică optimă), punînd condiția $\bar{x}^B = B^{-1}b^0 + \lambda B^{-1}b^1 \geqslant 0$.

(iii) In afara acestui interval se reoptimizează soluția aplicînd algoritmul simplex dual.

(c) Parametrizarea unui $a^i \notin B$

Se consideră problema

$$\begin{aligned} A(\lambda)\, x &= b \quad , \quad \lambda \in R \\ x &\geqslant 0 \\ \max(\min)\, (c'x) & \quad , \text{ unde } \; a^i = a^{oi} + \lambda a^{li} \end{aligned}$$

(i) Se rezolvă problema pentru $\lambda = 0$. Fie B baza optimă, $\bar{x}^B$ soluţia optimă, $\mathcal{B} = \{ j \mid a^{oj} \in B \}$. Presupunem că $\boxed{i \notin \mathcal{B}}$

Cînd λ variază, B rămîne primal admisibilă.

(ii) Determinăm intervalul de variaţie a lui λ pentru care B rămîne optimă, punînd condiţia

$$z_i - c_i = z_i^o - c_i + \lambda c_B' B^{-1} a^{li} \geqslant (\leqslant)\ 0.$$

(iii) In afara acestui interval se reoptimizează soluţia aplicînd algoritmul simplex primal.

(d) Parametrizarea unui $a^i \in \mathcal{B}$

Se consideră problema

$$\begin{aligned} A(\lambda)\, x &= b \quad , \quad \lambda \in R \\ x &\geqslant 0 \\ \max(\min)(c'x) & \quad , \text{ unde } \; a^i = a^{oi} + \lambda a^{li} \end{aligned}$$

(i) Se rezolvă problema pentru $\lambda = 0$. Fie B baza optimă, $\bar{x}^B$ soluţia optimă, $\mathcal{B} = \{ j \mid a^{oj} \in B \}$. Presupunem că $\boxed{i \in \mathcal{B}}$

(ii) Fie $B(\lambda)$ obţinută din B prin înlocuirea lui a^{oi} cu $a^{oi} + \lambda a^{li}$.

Se stabileşte valoarea critică a lui λ , pentru care $B(\lambda)$ este singulară -- punînd condiţia $y_{ii}(\lambda) = 0$.

Pentru λ egală cu această valoare critică $a^i(\lambda)$ nu poate să înlocuiască în bază pe a^{oi}. In acest caz problema se rezolvă de la o iteraţie anterioară intrării lui i în $\mathcal{B}$.

(iii) Pentru λ diferit de valoarea critică se calculează $B^{-1}(\lambda)$, $\bar{x}^{B(\lambda)}$, $z_j^{B(\lambda)} - c_j$.

Se stabileşte intervalul de optimalitate a lui $B(\lambda)$.

Pentru λ se obţin 4 tipuri de intervale:

- intervale în care $B(\lambda)$ este optimă. Atunci soluţia este $\bar{x}^{B(\lambda)}$.
- intervale în care $B(\lambda)$ este primal admisibilă. Atunci soluţia optimă se obţine aplicînd simplexul primal.
- intervale în care $B(\lambda)$ este dual admisibilă. Atunci soluţia optimă se obţine aplicînd simplexul dual.

- intervale în care $B(\lambda)$ nu este nici primal, nici dual admisibilă. Atunci se reia rezolvarea problemei de la o iterație anterioară intrării lui i în $\mathcal{B}$.

1) Să se rezolve următoarele probleme:

(a) $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ \min\left[(c^0+\lambda c^1)\, x\right] \end{cases}$ cu $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\lambda \in R$

$c^0 = (-3,2,-4)'$
$c^1 = (0,1,0)'$

(b) $\begin{cases} Ax = b^0+\lambda b^1 \\ x \geq 0 \\ \min c'x \end{cases}$ cu A aceeași de la (a)
$b^0 = (3,4)'$, $b^1 = (1,-1)'$
$c = (-3,2,-4)'$, $\lambda \in R$

(c) $\begin{cases} A(\lambda)\, x = b \\ x \geq 0 \\ \min c'x \end{cases}$ cu $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3+2\lambda & 1 \end{bmatrix}$ $b = (3,4)'$
$c = (-3,2,-4)'$, $\lambda \in R$

(d) $\begin{cases} A(\lambda)\, x = b \\ x \geq 0 \\ \min c'x \end{cases}$ cu $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1+\lambda & 3 & 2 \\ 3-\lambda & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda \in R$
b,c aceleași ca la punctul (c)

<u>Soluție</u>:

Se observă că pentru <u>$\lambda = 0$</u>, în toate cele patru probleme de mai sus se obține problema ① , cap.4,

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3 = 3 \\ 3x_1+3x_2+x_3 = 4 \\ x_i \geq 0 \text{ , } i = 1,2,3 \\ \min(-3x_1+2x_2-4x_3) \end{cases}$$

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
x_3	1	0	6/5	1	3/5	-1/5
x_1	1	1	3/5	0	-1/5	2/5
	-7	0	-43/5	0	———	

a cărei soluție optimă e dată în tabloul simplex alăturat.

(a) $c^0 + \lambda c^1 = (-3,2,-4)' + \lambda(0,1,0)' = (-3,2+\lambda,-4)'$

B rămîne primal admisibilă.

$z_2^B - c_2(\lambda) = -\frac{43}{5} - \lambda$

B este optimă pentru $-\frac{43}{5} - \lambda \leq 0$, adică pentru $\lambda \geq -\frac{43}{5}$

Deci pe $\left[-\frac{43}{5}, \infty\right)$, $\bar{x}^B = (1,0,1)$, $\bar{z} = -7$

Pentru $\lambda \in (-\infty, -\frac{43}{5})$, $z_2^B - c_2(\lambda) > 0$. Aplicăm algoritmul simplex primal.

Intră în bază a^2, iese din bază a^3.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3
x_2	5/6	0	1	5/6
x_1	1/2	1	0	-1/2
	$\frac{1}{6}+\lambda$	0	0	0

Deci $(-\infty, -\frac{43}{5})$, $\bar{x}^B = (\frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 0)$, $\bar{z} = \frac{1}{6} + \lambda$

(b) $b^0 + \lambda b' = (3,4)' + \lambda(1,-1)' = (3+\lambda, 4-\lambda)'$

B rămîne dual admisibilă.

$$\bar{x}^B(\lambda) = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3+\lambda \\ 4-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5+4\lambda}{5} \\ \frac{5-3\lambda}{5} \end{pmatrix}$$

B este optimă pentru $5 + 4\lambda \geq 0$, $5 - 3\lambda \geq 0$, adică pentru $\lambda \in \left[-\frac{5}{4}, \frac{5}{3}\right]$

Deci pe $\lambda \in \left[-\frac{5}{4}, \frac{5}{3}\right]$, $\bar{x}^B = \left(\frac{(5-3\lambda)}{5}, 0, \frac{(5+4\lambda)}{5}\right)$, $\bar{z} = \frac{-35-7\lambda}{5}$

Dacă $\lambda < -\frac{5}{4}$, $\bar{x}_3(\lambda) < 0$, dar, cum nu găsim pe linia sa nici un pivot negativ, pentru $\lambda < -\frac{5}{4}$ problema nu are programe.

Dacă $\lambda > \frac{5}{3}$, $\bar{x}_1(\lambda) < 0$, dar, cum nu găsim pe linia sa nici un pivot negativ, pentru $\lambda > \frac{5}{3}$ problema nu are programe.

(c) $a^2 = a^{02} + \lambda a^{12} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \{3,1\}$, deci $2 \notin \mathcal{B}$. Atunci B rămîne primal admisibilă.

$$z_2^B(\lambda) - c_2 = (-4,-3) \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-\lambda \\ 3+2\lambda \end{pmatrix} - 2 = -\frac{43}{5} + \lambda$$

B este optimă pentru $-\frac{43}{5} + \lambda \leq 0$, adică pentru $\lambda \leq \frac{43}{5}$

Deci pe $\left(-\infty, \frac{43}{5}\right]$, $\bar{x}^B = (1,0,1)$, $\bar{z} = -7$

Pentru $\lambda \in (\frac{43}{5}, \infty)$, $z_2^B(\lambda) - c_2 > 0$. Aplicăm algoritmul simplex primal.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3
x_3	1	0	$\frac{6}{5} - \lambda$	1
$\leftarrow x_1$	1	1	$\frac{3}{5} + \lambda$	0
	-7	0	$-\frac{43}{5} + \lambda$	0

Pentru $\lambda > \frac{43}{5}$, $\frac{6-5\lambda}{5} < 0$ iar $\frac{3+5\lambda}{5} > 0$

Deci intră în bază a^2 și iese din bază a^1

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3
x_3	$\frac{10\lambda - 3}{5\lambda + 3}$	$\frac{5\lambda - 6}{5\lambda + 3}$	0	1
x_2	$\frac{5}{3+5\lambda}$	$\frac{5}{3+5\lambda}$	1	0
	$\frac{22-40\lambda}{5\lambda+3}$	$\frac{-5\lambda+43}{5\lambda+3}$	0	0

Pentru $\lambda > \frac{43}{5}$, $z_1^B(\lambda) - c_1 = \frac{-5\lambda + 43}{5\lambda + 3} < 0$, deci B este optimă.

Atunci, pentru $\lambda \in (\frac{43}{5}, \infty)$, soluția optimă este

$$\bar{x} = (0, \frac{5}{3+5\lambda}, \frac{10\lambda - 3}{5\lambda + 3}), \text{ iar } \bar{z} = \frac{22-40\lambda}{5\lambda + 3}$$

(d) $a^1 = a^{01} + \lambda a^{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\mathcal{B} = \{3,1\}$, deci $2 \in \mathcal{B}$

Să stabilim valoarea critică a lui λ pentru care $B(\lambda)$ este singulară.

$$y_{11}(\lambda) = (-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}) \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 3-\lambda \end{pmatrix} = \frac{5-3\lambda}{5}$$

Dacă $\lambda = \frac{5}{3}$, atunci $B(\lambda)$ este singulară. Deci valoarea critică este $\boxed{\lambda_0 = \frac{5}{3}}$. Pentru această valoare, problema se rezolvă independent.

Presupunem că $\lambda \neq \frac{5}{3}$.

$$y^1(\lambda) = B^{-1}a^1(\lambda) = \begin{pmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ 3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\lambda}{5} \\ \frac{5-3\lambda}{5} \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{1} = \left(\frac{4\lambda}{3\lambda-5} , \frac{5}{5-3\lambda} \right)'$$

$$I_1\,(a^1(\lambda)) = \begin{pmatrix} 1 & 4\lambda/(3\lambda-5) \\ 0 & 5\,/\,(5-3\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\left[B^{*}(\lambda)\right]^{-1} = I_1(a^1(\lambda))\; B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{4\lambda}{3\lambda-5} \\ 0 & \frac{5}{5-3\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & -1/5 \\ -1/5 & 2/5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\lambda-3}{3\lambda-5} & \frac{\lambda+1}{3\lambda-5} \\ \frac{1}{3\lambda-5} & \frac{-2}{3\lambda-5} \end{bmatrix}$$

$$\bar{x}^{B^{*}(\lambda)} = I_1(a^1(\lambda))\; \bar{x}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4\lambda}{3\lambda-5} \\ 0 & \frac{5}{5-3\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7\lambda-5}{3\lambda-5} \\ \frac{5}{5-3\lambda} \end{pmatrix}$$

$$z_1^{B^{*}(\lambda)} - c_1 = z_3^{B^{*}(\lambda)} - c_3 = 0$$

$$z_2^{B^{*}(\lambda)} - c_2 = (-4,-3) \begin{bmatrix} \frac{\lambda-3}{3\lambda-5} & \frac{\lambda+1}{3\lambda-5} \\ \frac{1}{3\lambda-5} & \frac{-2}{3\lambda-5} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 = \frac{-30\lambda+43}{3\lambda-5}$$

λ	$-\infty$ … $\frac{5}{7}$	$\frac{5}{7}$ … $\frac{43}{30}$	$\frac{43}{30}$ … $\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$ … ∞
$\frac{7\lambda-5}{3\lambda-5}$	+ + + +	0 - - - -	- - - -	0 + + + + +
$\frac{5}{5-3\lambda}$	+ + + + + +	+ + + + + +	+ +	0 - - - - -
$\frac{-30\lambda+43}{3\lambda-5}$	- - - - -	- - - - 0	+ +	0 - - - - -
	$B^{*}(\lambda)$ este optimă	$B^{*}(\lambda)$ dual admisibilă. Se aplică alg. simplex dual	$B^{*}(\lambda)$ nu este nici primal nici dual admisibilă	$B^{*}(\lambda)$ dual admisibilă. Se aplică algoritmul simplex dual

Pentru $\lambda \in (-\infty, \frac{5}{7}]$ soluția optimă este

$$\bar{x} = \left(\frac{5}{5-3\lambda} , 0, \frac{7\lambda-5}{3\lambda-5} \right), \text{ iar } \bar{z} = \frac{35-28\lambda}{3\lambda-5} .$$

Pentru $\lambda \in (\frac{5}{7}, \frac{43}{30}]$ vom aplica algoritmul simplex dual.

Refacem ultimul tabel simplex.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3
x_3	$\frac{7\lambda-5}{3\lambda-5}$	0	$\frac{6(\lambda-1)}{3\lambda-5}$	1
x_1	$\frac{5}{5-3\lambda}$	1	$\frac{3}{5-3\lambda}$	0
	$\frac{35-28\lambda}{3\lambda-5}$	0	$\frac{43-30\lambda}{3\lambda-5}$	0

Ar trebui ca x_3 să iasă din bază. Pentru a putea aplica algoritmul simplex dual, ar trebui ca pe linia lui x_3 să găsim un pivot negativ.

Dacă $\lambda \in (\frac{5}{7}, 1]$ nu găsim astfel de pivot, deci pentru $\lambda \in (\frac{5}{7}, 1]$ problema nu are programe.

Dacă $\lambda \in (1, \frac{43}{30})$, $\frac{6(\lambda-1)}{3\lambda-5} < 0$. Deci pentru acest interval x_3 iese din bază, iar x_2 intră în bază.

Refacem tabelul simplex.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3
x_2	$\frac{7\lambda-5}{6(\lambda-1)}$	0	1	$\frac{3\lambda-5}{6(\lambda-1)}$
x_1	$\frac{1}{2(1-\lambda)}$	1	0	$\frac{1}{2(\lambda-1)}$
	$\frac{14\lambda-1}{6(\lambda-1)}$	0	0	$\underbrace{\frac{43-30}{6(1-\lambda)}}_{<0}$

Acum $\bar{x}_2 > 0$, dar $\bar{x}_1 < 0$. Dar pe linia lui x_1 nu pot găsi un pivot negativ.

Deci și pentru $\lambda \in (1, \frac{43}{30})$ problema nu are programe.

Pentru $\lambda \in (\frac{5}{3}, \infty)$ $B^*(\lambda)$ este dual admisibilă. Pentru a aplica algoritmul simplex dual - prin care x_1 va ieși din bază, trebuie să găsim un pivot negativ pe linia lui x_1. Acest pivot este $\frac{3}{5-3\lambda}$.

Deci x_1 iese din bază, iar x_2 intră în bază.

Refacem tabelul simplex:

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3
x_3	-1	$2(\lambda-1)$	0	1
x_2	$\frac{5}{3}$	$\frac{5-3\lambda}{3}$	1	0
	$\frac{40}{3}$	$\frac{43-30\lambda}{3}$	0	0

Soluţia nu este optimă, căci $\bar{x}_3 = -1 < 0$

Cum pe linia lui x_3 nu putem găsi pivot negativ, concluzia este că pentru $\lambda \in (\frac{5}{3}, \infty)$ problema nu are programe.

Rămîne să analizăm cazul $\lambda \in (\frac{43}{30}, \frac{5}{3})$. Aici $B^*(\lambda)$ nu este nici primal, nici dual admisibilă.

In acest caz rezolvarea problemei se face de la o iteraţie anterioară intrării lui x_1 în bază. O vom relua chiar de la început.

Considerăm deci problema

$$(1+\lambda)x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_1^a = 3$$
$$(3-\lambda)x_1 + 3x_2 + x_3 + x_2^a = 4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_1^a, x_2^a \geq 0$$

I $\min (x_1^a + x_2^a)$

II $\min (-3x_1 + 2x_2 - 4x_3)$

cu $\lambda \in (\frac{43}{30}, \frac{5}{3})$

			0	0	0	1	1
	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
1	x_1^a	3	$1+\lambda$	3	2	1	0
1	x_2^a	4	$3-\lambda$	3	1	0	1
		7	4	6	3	0	0

Intră în bază x_2, iese din bază x_1^a. Refacem tabelul simplex.

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a
x_2	1	$\frac{1+\lambda}{3}$	1	2/3	1/3	0
x_2^a	1	$2(1-\lambda)$	0	-1	-1	1
	1	$2(1-\lambda)$	0	-1	-1	0

Se observă că, pentru $\lambda \in \left(\frac{43}{30}, \frac{5}{3}\right)$, $2(1-\lambda) < 0$.

Deci aceasta este soluţia optimă pentru faza I şi cum $\min(x_1^a + x_2^a) = 1 \neq 0$, rezultă că problema iniţială nu admite soluţie.

Concluzia finală este:

Dacă $\lambda \in \left(-\infty, \frac{5}{7}\right]$ soluţia optimă este

$$\bar{x} = \left(\frac{5}{5-3\lambda}, 0, \frac{7\lambda-5}{3\lambda-5}\right), \quad \bar{z} = \frac{35-28\lambda}{3\lambda-5}$$

Dacă $\lambda \in \left(\frac{5}{7}, \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{5}{3}, \infty\right)$ problema nu are programe.

Dacă $\lambda = \frac{5}{3}$ problema de asemenea nu are programe.

Probleme propuse:

2) Să se rezolve următoarele probleme:

(a) $\begin{cases} Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ \min\ (c^0+\lambda c^1)' x \end{cases}$ cu $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$, $\lambda \in R$, $x \in R^2$

$c^0 = (4,3)'$, $c^1 = (0,2)'$

(b) $\begin{cases} Ax \leq b^0+\lambda b^1 \\ x \geq 0 \\ \min(c'x) \end{cases}$ cu A aceeaşi ca la (a)

$b^0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$ $b^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\lambda \in R$

$c = (4,3)'$

(c) $\begin{cases} A(\lambda)x \leq b \\ x \geq 0 \\ \min(c'x) \end{cases}$ cu $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3-\lambda & 2 \\ 1+2\lambda & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \\ 18 \end{bmatrix}$

$\lambda \in R$, c acelaşi ca la (b)

Soluţie:

Pentru $\lambda = 0$, fiecare din aceste probleme coincide cu problema ② de la cap.4. Soluţia pentru $\lambda = 0$ este $\bar{x} = \left(\frac{6}{5}, \frac{28}{5}, 0, \frac{46}{5}, 0\right)$, $\bar{z} = \frac{108}{5}$.

3) Să se rezolve următoarele probleme:

(a) $\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \\ \max\left[(c^0+\lambda c^1)' x\right] \end{cases}$ cu $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\lambda \in R$

$c^0 = (3,-2,-1)'$, $c^1 = (0,1,2)'$

$x \in R^3$

(b) $\begin{cases} Ax \le b^0 + \lambda b^1 \\ x \ge 0 \\ \max c'x \end{cases}$ cu A aceeaşi ca la punctul (a)

$b^0 = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ $b^1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\lambda \in R$

$c = (3,-2,-1)'$

(c) $\begin{cases} A(\lambda)x \le b \\ x \ge 0 \\ \max(c'x) \end{cases}$ cu $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2-\lambda \\ -3 & -2 & 1+2\lambda \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\lambda \in R$

$b = (13,4,6)'$, $c = (3,-2,-1)'$

(d) $\begin{cases} A(\lambda)x \le b \\ x \ge 0 \\ \max(c'x) \end{cases}$ cu $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 5+5\lambda & -1 & 2 \\ -3+\lambda & -2 & 1 \\ 1-\lambda & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $\lambda \in R$

b şi c aceeaşi ca la punctul (c)

<u>Soluţie</u>:

Pentru $\lambda = 0$ fiecare din aceste probleme coincide cu problema 3 de la cap.4. Soluţia pentru $\lambda = 0$ este $\bar{x} = (\frac{13}{5}, 0,0,0, \frac{59}{5}, \frac{17}{5}$

$\bar{z} = \frac{39}{5}$.

4) Să se rezolve următoarele probleme:

(a) $\begin{cases} Ax \ge b \\ x \ge 0 \\ \min\left[(c^0+\lambda c^1)' x\right] \end{cases}$ cu $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda \in R$, $x \in R^5$, $c^0 = (1,4,8,8,23)'$

$c^1 = (2\lambda, 0,0,0,0)'$.

(b) $\begin{cases} Ax \geqslant b^0 + \lambda b^1 \\ x \geqslant 0 \\ \min c'x \end{cases}$ cu A acelaşi ca la punctul (a)

$b^0 = (8,2,2)'$, $b^1 = (-3,0,0)'$,

$c = (1,4,8,8,23)'$, $\lambda \in R$

(c) $\begin{cases} A(\lambda)x \geqslant b \\ x \geqslant 0 \\ \min(c'x) \end{cases}$ cu $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 4+\lambda & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -3+\lambda & 4 & 2 \end{bmatrix}$ $\lambda \in R$

$b = (8,2,2)'$, $c = (1,4,8,8,23)'$.

(d) $\begin{cases} A(\lambda)x \geqslant b \\ x \geqslant 0 \\ \min(c'x) \end{cases}$ cu $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1+\lambda & 4 & -5 & 7 & -4 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

$\lambda \in R$, b şi c aceeaşi de la punctul (c)

<u>Soluţie</u>:

Pentru $\lambda = 0$ se obţine problema (4) de la cap.4, a cărei soluţie este $\bar{x} = (\frac{11}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}, 2)$, $\bar{z} = \frac{127}{2}$.

5) Să se rezolve următoarele probleme:

(a) $\begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \\ \min\left[(c^0 + \lambda c^1)'x\right] \end{cases}$ cu $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$

$\lambda \in R$, $x \in R^4$, $c^0 = (-2,-1,1,1)'$

$c^1 = (0,1,-1,0)'$.

(b) $\begin{cases} Ax \leqslant b^0 + \lambda b^1 \\ x \geqslant 0 \\ \min c'x \end{cases}$ cu A aceeaşi ca la punctul (a)

$b^0 = (2,6,7)'$, $b^1 = (1,-1,0)'$

$\lambda \in R$, $c = (-2,-1,1,1)'$.

(c) $\begin{cases} A(\lambda)x \leqslant b \\ x \geqslant 0 \\ \min c'x \end{cases}$ cu $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1+\lambda & -1 & 2 & -1 \\ 2(1-\lambda) & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\lambda \in R$,

$b = (2,6,7)'$, $c = (-2,-1,1,1)'$

<u>Soluţie</u>:

Pentru $\lambda = 0$ se obţine problema 5 de la cap.4. a cărei soluţie este $\bar{x} = (11, 15, 3, 0)$, $\bar{z} = -34$

6. PROBLEME DE TRANSPORT

Una din cele mai importante probleme care conduc la programe lineare, este problema de transport.

Se consideră m centre de aprovizionare (depozite) și n centre de consum (beneficiari). Dorim să stabilim un plan de transport pentru un produs aflat în cantitatea a_i la depozitul i ($1 \leq i \leq m$) și care este cerut în cantitatea b_j la beneficiarul j ($1 \leq j \leq n$), costul unitar de transport al produsului de la depozitul i la beneficiarul j, fiind c_{ij}. Planul de transport trebuie să fie întocmit astfel încît să se acopere necesarul tuturor beneficiarilor, iar costul total de transport să fie minim.

Această problemă se scrie sub forma următorului program linear:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = (\leq) a_i \ , \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = (\geq) b_j \ , \quad 1 \leq j \leq n$$

$$x_{ij} \geq 0 \ , \quad 1 \leq i \leq m \ , \quad 1 \leq j \leq n$$

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad ,$$

$$\text{unde} \quad \sum_{i=1}^{m} a_i = (\geq) \sum_{j=1}^{n} b_j \ , \quad a_i \geq 0 \ , \ b_j \geq 0$$

Matricial, problema se scrie sub forma

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ \min(c'x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{cu } A \text{ matrice } (m+n) \times (mn), \text{ rang } A = m+n-1 \\ x \in R^{mn} \ , \ b = (a_1, \ldots a_m, b_1, \ldots b_n)' \in R^{m+n} \\ c = (c \quad , \ldots c_{mn})' \in R^{mn} \ . \end{array}$$

Această problemă de programare lineară se rezolvă cu ajutorul problemei duale.

<u>Determinarea unei soluții inițiale de bază prin metoda colțului de N-V</u>

(1) Se întocmește tabelul corespunzător problemei de transport:

c_{11} $\bar{x}_{11}$	c_{12}	- - - - - - - - -	c_{1n}	a_1
c_{21}	c_{22}		c_{2n}	a_2
c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	a_m
b_1	b_2	- - - - - - - -	b_n	

In acest tablou costurile unitare se trec în colţul din stînga sus al celulelor.

(2) Se alege ca primă variabilă de bază x_{11} (variabila din colţul de N-V), căreia i se atribuie valoarea

$$\bar{x}_{11} = \min \{a_1, b_1\}$$

Această valoare se trece în prima celula, sub diagonală.

(3) Dacă $\bar{x}_{11} = a_1$, atunci $\bar{x}_{12} = \dots = \bar{x}_{1n} = 0$ (variabile secundare), şi se înlocuieşte a_1 cu $a_1 - \bar{x}_{11}$, iar b_1 cu $b_1 - \bar{x}_{11}$.

Dacă $\bar{x}_{11} = b_1$, atunci $\bar{x}_{21} = \dots = \bar{x}_{m1} = 0$ (variabile secundare) şi, de asemenea, se înlocuieşte a_1 cu $a_1 - \bar{x}_{11}$, b_1 cu $b_1 - x_{11}$.

In continuare se consideră ca variabilă de bază următoarea variabilă din colţul de N-V al tabelului rămas şi se procedează analog.

<u>Observaţie</u>: Cum rang A = m+n-1, se vor obţine m+n-1 variabile de bază, cu valori nenule.

<u>Determinarea unei soluţii iniţiale de bază prin metoda costului minim</u>

1) Se întocmeşte acelaşi tabel, corespunzător problemei de transport.

2) Se alege ca primă variabilă de bază acel x_{ij} pentru care c_{ij} este minim.

3) Se atribuie lui $\bar{x}_{ij}$ astfel ales valoarea

$$\bar{x}_{ij} = \min \{a_i, b_j\},$$

şi această valoare se trece în tabel în celula (i,j), sub diagonală.

4) Se înlocuiesc a_i cu $a_i - \bar{x}_{ij}$, iar b_j cu $b_j - \bar{x}_{ij}$.

Dacă $\bar{x}_{ij} = a_i$, atunci toţi $\bar{x}_{ik} = 0$ $k = 1,\dots,m$, $k \neq j$ (variabile secundare), iar dacă $\bar{x}_{ij} = b_j$, atunci toţi $\bar{x}_{kj} = 0$ $k = 1,\dots n$, $k \neq i$ (variabile secundare).

In continuare se consideră ca variabilă de bază următoarea variabilă $x_{\ell s}$, pentru care $c_{\ell s}$ este minimul costurilor rămase în discuţie şi se procedează analog.

<u>Observaţie</u>: Dacă la o fază oarecare cele două cantităţi din care se ia minimul sînt egale, se suprimă la alegere sau linia sau coloana corespunzătoare. Această observaţie este valabilă pentru ambele metode.

Si prin metoda costului minim se obţin m+n-1 variabile de bază, cu valori nenule.

<u>Comentariu</u>: Metoda costului minim dă adesea o soluţie iniţială de bază mai bună decît metoda colţului de nord-vest, în sensul că realizează o valoare a costului de transport mai mică. In consecinţă, numărul iteraţiilor necesare pentru stabilirea optimului poate fi mai mic.

<u>Algoritmul de transport</u>

1) Se întocmeşte tabelul corespunzător problemei de transport.

	$\bar{v}_1$	$\bar{v}_2$	- - - - - - - - -	$\bar{v}_n$	
$\bar{u}_1$	c_{11} / $\bar{x}_{11}$	c_{12} δ_{12}	- - - - - -	c_{1n}	a_1
$\bar{u}_2$	c_{21}	c_{22}		c_{2n}	a_2
	$\vdots$				
$\bar{u}_m$	c_{m1}	c_{m2}		c_{mn}	a_m
	b_1	b_2		b_n	

2) Se determină o soluție inițială de bază ale cărei valori se trec în tabel în celulele corespunzătoare, sub diagonale.

3) Fie $\mathcal{B} = \{(i,j) \mid x_{ij}$ variabile de bază $\}$

Se rezolvă sistemul $u_i + v_j = c_{ij}$, $(i,j) \in \mathcal{B}$, fixîndu-se arbitrar valoarea unei variabile (de exemplu $\bar{u}_1 = 0$). Fie $\bar{u}_i$, $\bar{v}_j$, $(i,j) \in \mathcal{B}$ soluțiile acestui sistem. Se înscriu valorile $\bar{u}_i$, $\bar{v}_j$ pe marginile tabelului.

4) Se calculează cantitățile $\delta_{ij} = \bar{u}_i + \bar{v}_j - c_{ij}$ pentru $(i,j) \notin \mathcal{B}$ și se înscriu în colțul din dreapta jos al celulelor respective.

5) <u>Test de optimalitate</u>

Dacă $\delta_{ij} \leq 0$ $(\forall)$ $(i,j) \notin \mathcal{B}$, soluția este optimă.

Dacă $(\exists)$ $(i,j) \notin \mathcal{B}$ cu $\delta_{ij} > 0$ soluția se îmbunătățește.

6) <u>Îmbunătățirea soluției</u>:

a) Se calculează $\delta_{k\ell} = \max\limits_{(i,j) \notin \mathcal{B}} \delta_{ij}$. $x_{k\ell}$ va intra în bază.

b) Se determină ciclul format de celula (k,ℓ) cu celelalte celule corespunzătoare variabilelor de bază. Se calculează $\bar{x}_{ps} = \min\{\bar{x}_{tr} \mid (t,r)$ celulă de rang par în ciclul anterior determinat$\}$. x_{ps} va ieși din bază.

c) Se determină noile valori ale variabilelor de bază astfel: $\tilde{x}_{tr} = \bar{x}_{tr} + \bar{x}_{ps}$ dacă (t,r) este celulă de rang impar în ciclu și $\tilde{x}_{tr} = \bar{x}_{tr} - \bar{x}_{ps}$ dacă (t,r) este celulă de rang par în ciclu.

Observăm că această operație poate da unor variabile de bază o valoare nulă. Aceste variabile nule vor fi considerate ca făcînd parte din noua soluție de bază, care este acum degenerată.

7) Se reia algoritmul pentru noua soluție de bază.

1) Să se rezolve problema de transport dată de tabelul următor:

8	3	5	2	1o
4	1	6	7	15
1	9	4	3	25
5	1o	2o	15	

adică $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ \min c'x \end{cases}$ cu

$A(7 \times 12)$, rang $A = 6$

$b = (1o,15,25,5,1o,2o,15)' \in R^7$

$c = (8,3,\dots,3)' \in R^{12}$

Soluție:

Determinarea unei soluții inițiale de bază prin metoda colțului de N-V.

8 / 5	3 / 5	5 / 0	2 / 0	1o, 5, 0
4 / 0	1 / 5	6 / 1o	7 / 0	15,1o, 0
1 / 0	9 / 0	4 / 1o	3 / 15	25,15, 0
5, 0	1o, 5, 0	2o, 1o, 0	15, 0	

$\bar{x}_{11}= 5$

$\bar{x}_{12}= 5$

$\bar{x}_{22}= 5$

$\bar{x}_{23}= 10$

$\bar{x}_{33}= 10$

$\bar{x}_{34}= 15$

Prima iterație

	8	3	8	7
0	8 / 5	3 / 5	5 / 3	2 / 5
-2	4 / 2	1 / 5	6 / 1o	7 / -2
-4	1 / 3	9 / -1o	4 / 1o	3 / 15

$\mathcal{B} = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4)\}$

Rezolvînd sistemul $u_i + v_j = c_{ij}$, $(i,j)\in\mathcal{B}$ obținem

$\bar{u}_1 = 0,\ \bar{u}_2 = -2,\ \bar{u}_3 = -4,\ \bar{v}_1 = 8,\ \bar{v}_2 = 3,\ \bar{v}_3 = 8,\ \bar{v}_4 = 7$.

Calculăm δ_{ij} pentru $(i,j)\notin\mathcal{B}$

$\delta_{13} = 0 + 8 - 5 = 3$, $\delta_{14} = 5$, $\delta_{21} = 2$, $\delta_{24} = -2$,

$\delta_{31} = 3$, $\delta_{32} = -10$

Soluția nu este optimă, pentru că $(\exists)\ \delta_{ij} > 0$.

$\max \delta_{ij} = \delta_{14} = 5$. Deci x_{14} intră în bază.

Considerăm ciclul pornit de la celula (1,4)

$\mathcal{C} = \{(1,4),(3,4),(3,3),(2,3),(2,2),(1,2),(1,4)\}$

$\min\left\{\bar{x}_{t,r} \mid (t,r)\in \{(3,4),(2,3),(1,2)\}\right\} = \bar{x}_{12} = 5$

Deci iese din bază x_{12}.

Cda. 46/978 Fasc.5.

Noile variabile de bază vor avea deci următoarele valori: $\bar{x}_{11}= 5$ (neschimbată), $\bar{x}_{14}= 5$, $\bar{x}_{34}= 15 - 5 =$ lo, $\bar{x}_{33}=$ lo $+ 5 = 15$, $\bar{x}_{23}=$ lo $- 5 = 5$, $\bar{x}_{22}= 5 + 5 =$ lo.

<u>Iterația a doua</u>:

	8	-2	3	2
0	8 / 5	3 / -5	5 / -2	2 / 5
3	4 / 7	1 / lo	6 / 5	7 / -2
1	1 / 8	9 / -lo	4 / 15	3 / lo

$\mathcal{B} = \{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4)\}$

Sistemul $u_i + v_j = c_{ij}$, $(ij) \in \mathcal{B}$ conduce la:

$\bar{u}_1 = 0$, $\bar{u}_2 = 3$, $\bar{u}_3 = 1$, $\bar{v}_1 = 8$, $\bar{v}_2 = -2$, $\bar{v}_3 = 3$, $\bar{v}_4 = 2$

Se calculează $\delta_{ij} = \bar{u}_i + \bar{v}_j - c_{ij}$, $(i,j) \notin \mathcal{B}$

Soluția nu este optimă, pentru că există $\delta_{ij} > 0$.

$\max \{ \delta_{ij} \mid (i,j) \in \{(2,1),(3,1)\} \} = \delta_{31} = 8$.

Deci x_{31} intră în bază.

$\mathscr{C} = \{(3,1),(1,1),(1,4),(3,4),(3,1)\}$.

$\min \{ \bar{x}_{tr} \mid (t,r) \in \{(1,1),(3,4)\} \} = \bar{x}_{11} = 5$

Deci x_{11} iese din bază. Transformăm tabelul:

<u>Iterația a treia</u>

	0	-2	3	2
0	8 / -8	3 / -5	5 / -2	2 / lo
3	4 / -1	1 / lo	6 / 5	7 / -2
1	1 / 5	9 / -lo	4 / 15	3 / 5

$\mathcal{B} = \{(1,4),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3),(3,4)\}$

Sistemul $u_i + v_j = c_{ij}$ $(i,j) \in \mathcal{B}$ conduce la:

$\bar{u}_1 = 0,\ \bar{u}_2 = 3,\ \bar{u}_3 = 1,\ \bar{v}_1 = 0,\ \bar{v}_2 = -2,\ \bar{v}_3 = 3,\ \bar{v}_4 = 2$.

Se calculează δ_{ij} , $(i,j) \notin \mathcal{B}$

Cum $\delta_{ij} \leq 0$ $(\forall)$ $(i,j) \notin \mathcal{B}$, rezultă că soluţia optimă este: $\bar{x}_{13} = 10,\ \bar{x}_{22} = 10,\ \bar{x}_{23} = 5,\ \bar{x}_{31} = 5,\ \bar{x}_{33} = 15,\ \bar{x}_{34} = 5.$

Valoarea minimă a costului de transport este 125.

2) Să se rezolve problema de transport dată de următorul tabel:

1	3	2	7	9	15
7	6	5	4	3	10
4	9	11	1	10	13
2	10	8	6	1	12
20	5	7	8	10	50

adică $\begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \\ \min c'x \end{cases}$

cu $A(9 \times 20)$, rang $A = 8$, $b \in R^9$, $c \in R^{20}$

<u>Soluţie</u>:

<u>Determinarea unei soluţii iniţiale de bază prin metoda costului minim</u>

1 / 15	3 / 0	2 / 0	7 / 0	9 / 0	15,0
7 / 0	6 / 3	5 / 7	4 / 0	3 / 0	10,3,0
4 / 3	9 / 2	11 / 0	1 / 8	10 / 0	13,5,2,0
2 / 2	10 / 0	8 / 0	6 / 0	1 / 10	12,2,0
20, 5, 3, 0	5, 2, 0	7, 0	8, 0	10, 0	

$\min c_{ij} = 1 = c_{11} = c_{34} = c_{45}$

Luăm $\bar{x}_{11} = \min(15,20) = 15$, $\bar{x}_{12} = \bar{x}_{13} = \bar{x}_{14} = \bar{x}_{15} = 0$

$\bar{x}_{34} = \min(8,13) = 8$, $\bar{x}_{23} = \bar{x}_{43} = 0$

$\bar{x}_{45} = \min(10,12) = 10$, $\bar{x}_{24} = \bar{x}_{34} = 0$

In continuare $\min c_{ij} = 2 = c_{41}$

Luăm $\bar{x}_{41} = \min\left[(20-15),(12-10)\right] = 2$, $\bar{x}_{42} = \bar{x}_{44} = 0$

etc.

Iterația întîi:

	1	6	5	-2	0
0	1 / 15	3 / 3	2 / 3	7 / -9	9 / -9
0	7 / -6	6 / 3	5 / 7	4 / -6	3 / -3
3	4 / 3	9 / 2	11 / -3	1 / 8	10 / -7
1	2 / 2	10 / -3	8 / -2	6 / -7	1 / 10

$\mathcal{B} = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,5)\}$

Sistemul $u_i + v_j = c_{ij}$, $(i,j) \in \mathcal{B}$ conduce la

$\bar{u}_1 = 0$, $\bar{u}_2 = 0$, $\bar{u}_3 = 3$, $\bar{u}_4 = 1$, $\bar{v}_1 = 1$, $\bar{v}_2 = 6$, $\bar{v}_3 = 5$, $\bar{v}_4 = -2$, $\bar{v}_5 = 0$

Calculăm $\delta_{ij} = \bar{u}_i + \bar{v}_j - c_{ij}$ pentru $(i,j) \notin \mathcal{B}$ și le trecem în tabel.

Soluția nu este optimă, căci există $\delta_{ij} > 0$.

$\max\limits_{\delta_{ij} > 0} \delta_{ij} = 3 = \delta_{12} = \delta_{13}$.

Vom introduce în bază pe x_{12}.

$\mathcal{C} = \{(1,2),(3,2),(3,1),(1,1),(1,2)\}$

$\min\left\{ \bar{x}_{tr} \mid (t,r) \in \{(3,2),(1,1)\}\right\} = 2 = \bar{x}_{32}$

Deci x_{32} iese din bază.

Transformăm tabelul.

Iteratia a doua:

	1	3	2	-2	0
0	1 / 13	3 / 2	2 / 0	7 / -9	9 / -9
3	7 / -3	6 / 3	5 / 7	4 / -3	3 / 0
3	4 / 5	9 / -3	11 / -6	1 / 8	10 / -7
1	2 / 2	10 / -6	8 / -5	6 / -7	1 / 10

$\mathcal{B} = \{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,1),(3,4),(4,1),(4,5)\}$

Sistemul $u_i + v_j = c_{ij}$, $(i,j) \in \mathcal{B}$ are următoarea soluţie:

$\bar{u}_1 = 0$, $\bar{u}_2 = 3$, $\bar{u}_3 = 3$, $\bar{u}_4 = 1$, $\bar{v}_1 = 1$, $\bar{v}_2 = 3$, $\bar{v}_3 = 2$, $\bar{v}_4 = -2$, $\bar{v}_5 = 0$

Calculăm $\delta_{ij} = \bar{u}_i + \bar{v}_j - c_{ij}$, $(i,j) \notin \mathcal{B}$

Cum $\delta_{ij} \leq 0$, soluţia este optimă. Deci

$\bar{x}_{11} = 13$, $\bar{x}_{12} = 2$, $\bar{x}_{22} = 3$, $\bar{x}_{23} = 7$, $\bar{x}_{31} = 5$, $\bar{x}_{34} = 8$, $\bar{x}_{41} = 2$, $\bar{x}_{45} = 10$,
iar costul minim de transport este 114.

Probleme propuse:

3) Să se rezolve problema de transport dată de următorul tabel:

3	5	9	2	18
8	4	5	4	22
1	6	2	7	20
15	12	8	25	60

Soluţia optimă este $\bar{x}_{14} = 18$, $\bar{x}_{22} = 12$, $\bar{x}_{23} = 3$, $\bar{x}_{24} = 10$, $\bar{x}_{31} = 15$, $\bar{x}_{33} = 5$, iar costul minim de transport este 154.

4) Să se rezolve următoarea problemă de transport:

4	2	5	1	3	11
6	5	4	4	2	27
6	8	1	5	4	32
5	15	15	19	16	7o

Soluţia optimă este $\bar{x}_{12}= 11$, $\bar{x}_{22}= 4$, $\bar{x}_{24}= 7$, $\bar{x}_{25}= 16$, $\bar{x}_{31}= 5$, $\bar{x}_{33}= 15$, $\bar{x}_{34}= 12$, iar costul minim de transport este 2o7.

5) Să se rezolve următoarea problemă de transport:

3	2	2	4	7o
1	2	3	4	1o
3	5	2	1	2o
5o	25	15	1o	1oo

Soluţia optimă este $\bar{x}_{11}= 4o$, $\bar{x}_{12}= 25$, $\bar{x}_{13}= 5$, $\bar{x}_{21}= 1o$, $\bar{x}_{33}= 1o$, $\bar{x}_{34}= 1o$, iar costul minim de transport este 22o.

6) Să se rezolve următoarea problemă de transport:

2	4	6	8	13
3	6	9	1	6
3	5	7	9	7
8	15	2	1	26

Soluţia optimă este $\bar{x}_{11}= 2$, $\bar{x}_{12}= 9$, $\bar{x}_{13}= 2$, $\bar{x}_{21}= 6$, $\bar{x}_{24}= 1$, $\bar{x}_{32}= 6$, iar valoarea optimă a costului de transport este 1o9.

7) Să se determine soluţia problemei de transport dată prin tabelul:

4	5	6	12
18	2o	31	16
26	15	24	17
14	9	2	8
3	17	13	5
3o	19	9	58

Soluția optimă este $\bar{x}_{11}=9$, $\bar{x}_{12}=2$, $\bar{x}_{13}=1$, $\bar{x}_{21}=16$, $\bar{x}_{32}=17$, $\bar{x}_{43}=8$, $\bar{x}_{51}=5$, iar costul minim de transport este 626.

8) Să se rezolve următoarea problemă de transport:

6	5	4	11	6	9	2o
1	3	2	5	1	4	18
2	4	1	6	9	7	5
11	7	8	1o	4	3	43

Soluția optimă este $\bar{x}_{11}=5$, $\bar{x}_{12}=7$, $\bar{x}_{13}=8$, $\bar{x}_{21}=1$, $\bar{x}_{24}=1o$, $\bar{x}_{25}=4$, $\bar{x}_{26}=3$, $\bar{x}_{31}=5$, iar costul minim de transport este 174.

9) Să se rezolve problema de transport dată în tabelul:

3	2	6	5	1o
1	7	4	6	11
2	5	3	4	8
5	8	9	7	29

Soluția optimă este $\bar{x}_{12}=8$, $\bar{x}_{14}=2$, $\bar{x}_{21}=5$, $\bar{x}_{23}=6$, $\bar{x}_{33}=3$, $\bar{x}_{34}=5$, iar costul minim este 84.

1o) Să se rezolve următoarea problemă de transport:

5	3	8	1	2	4	18
2	6	3	7	2	5	12
3	1	2	8	5	3	18
5	6	2	1o	11	14	48

<u>Soluţia</u> optimă este $\bar{x}_{14}$= 1o, $\bar{x}_{15}$= 4, $\bar{x}_{16}$= 4, $\bar{x}_{21}$= 5, $\bar{x}_{25}$= 7, $\bar{x}_{32}$= 6, $\bar{x}_{33}$= 2, $\bar{x}_{36}$= 1o, iar costul minim de transport este 98.

11) Să se rezolve următoarea problemă de transport:

1	7	6	5	2	8	3	1o
3	6	1	4	9	2	8	25
2	7	3	1	5	4	8	3o
1	1o	4	2	11	2o	3	15
12	1o	15	13	7	9	14	8o

<u>Soluţia</u> optimă este $\bar{x}_{11}$= 3, $\bar{x}_{15}$= 7, $\bar{x}_{22}$= 1, $\bar{x}_{23}$= 15, $\bar{x}_{26}$= 9, $\bar{x}_{31}$= 8, $\bar{x}_{32}$= 9, $\bar{x}_{34}$= 13, $\bar{x}_{41}$= 1, $\bar{x}_{47}$= 14, iar costul minim de transport este 192.

7. PROGRAMARE LINEARA IN NUMERE INTREGI

7.1. Programare totală în numere întregi.

Fie problema de programare lineară în numere întregi

(1) $\max c'x$

(2) $Ax = b$

(3) $x \geq 0$

(4) $x \in Z^n$

unde A este o matrice $(m \times n)$ de rang m, ale cărei elemente sînt numere întregi, $b \in Z^m$, $c \in Z^n$. Metoda propusă de Gomory pentru rezolvarea unei astfel de probleme, constă în rezolvarea succesivă a unui şir de probleme de programare lineară obişnuite obţinute din (1) - (3), prin adăugarea unor relaţii suplimentare. Aceste relaţii suplimentare se construiesc avînd în vedere (4).

Gomory a elaborat doi algoritmi pentru rezolvarea problemelor de programare în numere întregi, bazaţi pe principiul introducerii unor restricţii suplimentare numite tăieturi sau secţiuni. Vom prezenta mai jos aceşti algoritmi.

7.1.1. Algoritmul ciclic

Algoritmul ciclic constă în următoarele:

Pasul 1. Se rezolvă, mai întîi, problema de programare lineară (1) - (3). Dacă soluţia optimă obţinută $\bar{x} = (\bar{x}_1,\dots,\bar{x}_n)$ (dacă există) verifică condiţia (4) atunci algoritmul s-a terminat. Altfel se trece la pasul 2.

Pasul 2. Fie indicele i astfel ca:

$$i = \min\{1 \leq j \leq n \,/\, x_j \text{ variabilă de bază, } \bar{x}_j \text{ neîntreagă.}\}$$

In tabloul simplex corespunzător soluţiei de bază $\bar{x}$, punem în evidenţă părţile fracţionare ale componentelor liniei variabilei de bază x_i. Fie $f_i = \{\bar{x}_i\}$, $f_i \in (0,1)$ partea fracţionară a componentei $\bar{x}_i$ iar $f_{ij} = \{y_{ij}\}$, $f_{ij} \in [0,1)$ partea fracţionară a elementului y_{ij} care se găseşte în tabloul simplex corespunzător soluţiei de bază $\bar{x}$. Se scrie ecuaţia de tăietură:

(5)
$$\sum_{j=1}^{n} (-f_{ij}) \cdot x_j + x_{n+1} = -f_i$$

(6)
$$x_{n+1} \geq 0, \quad x_{n+1} \in Z$$

Restricţia (5) avînd condiţia de nenegativitate (6) se poate adăuga tabloului simplex corespunzător soluţiei de bază $\bar{x}$. Valoarea variabilei de bază în această nouă linie este negativă. Se trece la pasul 3.

Pasul 3. Baza asociată tabelului simplex obţinut prin adăugarea liniei coeficienţilor din (5) şi a unei coloane pentru x_{n+1}, este dual admisibilă. Astfel se va elimina din bază variabila x_i. Aplicînd algoritmul simplex dual pe acest tabel simplex completat putem avea două cazuri:

Cazul 1: nu pot fi eliminate toate componentele negative din soluţie, care apar în cursul aplicării algoritmului simplex dual;

Cazul 2: se pot elimina toate componentele negative din soluţie.

In primul caz problema (1) - (4) nu are programe. Cazul 2 ne furnizează o soluţie $\bar{x}^1$ cu (n+1) componente. Dacă $\bar{x}^1$ are toate componentele întregi, va fi soluţia căutată. In caz contrar se trece la pasul 2.

Observaţii: 1) Pentru ca algoritmul să conveargă într-un număr finit de paşi se cere în plus ca domeniul soluţiilor posibile definit de (2) - (4) să fie mărginit. 2) La pasul 2, uneori, se alege indicele i pentru care $\bar{x}_i^B$ are partea fracţionară cea mai mare, sau se alege $i = \min\{1 \leq j \leq n \,/\, x_j \text{ variabilă de bază, } \bar{x}_j^B \text{ neîntreagă}\}$. Asemenea alegeri se fac pentru a demonstra convergenţa algoritmului.

Probleme rezolvate

1) Să se rezolve

$$\max\,(9x_1 + 5x_2)$$
$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \leq 75 \\ 7x_1 + 3x_2 \leq 68 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Soluţie:

Deoarece coeficienţii sistemului de inecuaţii sînt numere întregi iar variabilele x_1 şi x_2 sînt supuse la condiţia $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, rezultă că şi variabilele ecart x_3, x_4 care se introduc pentru egalizare trebuie să fie supuse la condiţia $x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$. Astfel problema iniţială se transformă într-o problemă de forma (1) - (4):

$$\max\,(9x_1+5x_2)$$

$$\begin{cases} 6x_1+4x_2+x_3=75 \\ 7x_1+3x_2+x_4=68 \\ x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0 \\ x_1,x_2,x_3,x_4 \in Z \end{cases}$$

Pentru a rezolva această problemă trebuie, mai întîi, să rezolvăm problema de programare lineară:

$$\max\,(9x_1+5x_2)$$

$$\begin{cases} 6x_1+4x_2+x_3=75 \\ 7x_1+3x_2+x_4=68 \\ x_1,x_2,x_3,x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Se observă că sistemul conţine o bază unitate formată din vectorii (a^3,a^4). Primul tabel simplex este:

			9 ↓	5	0	0
c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	75	6	4	1	0
← 0	x_4	68	7	3	0	1
		0	-9	-5	0	0

Deoarece există $j \in \{1,2,3,4\}$ cu $z_j - c_j < 0$ soluţia asociată acestei baze poate fi îmbunătăţită. Intră în bază a^1 şi iese a^4. Luînd ca pivot pe $y_{41}=7$ şi transformînd acest tabel obţinem:

			9	5 ↓	0	0
c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4
← 0	x_3	117/7	0	1o/7	1	-6/7
9	x_1	68/7	1	3/7	0	1/7
		612/7	0	-8/7	0	9/7

In acest tabel înlocuind a^3 cu a^2 obţinem următorul tabel optim:

			9	5	0	0
c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4
5	x_2	117/1o	0	1	7/1o	-3/5
9	x_1	47/1o	1	0	-3/1o	2/5
		5o4/5	0	0	4/5	3/5

(Tabelul 1)

Se observă că soluţia obţinută nu verifică condiţia de tip (4). Prin urmare putem trece la pasul 2. Fie:

$$i = \min\left\{1 \leq j \leq 4 \ / \ x_j \text{ variabilă de bază, } \bar{x}_j \text{ neîntreagă}\right\}$$

Obţinem i = 1. Părţile fracţionare corespunzătoare liniei variabilei de bază x_1 sînt:

$$f_1 = \{\bar{x}_1\} = \{47/10\} = \frac{7}{10}$$

$$f_{13} = \{y_{13}\} = \{-3/10\} = \frac{7}{10}$$

$$f_{14} = \{y_{14}\} = \{2/5\} = \frac{2}{5}$$

Ecuaţia de tăietură (5) devine:

$$-\frac{7}{10} x_3 - \frac{2}{5} x_4 + x_5 = -\frac{7}{10}$$

deoarece $f_{11} = f_{12} = 0$.

Introducînd această restricţie suplimentară, completăm ultima parte a tabelului simplex 1 cu elementele corespunzătoare acestei relaţii şi aplicăm algoritmul simplex dual pentru eliminarea componentei negative.

			9	5	0 ↓	0	0
C_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	117/10	0	1	7/10	-3/5	0
9	x_1	47/10	1	0	-3/10	2/5	0
← 0	x_5	- 7/10	0	0	-7/10	-2/5	1
			0	0	4/5	3/5	0

Iese din bază a^5 şi intră a^3. Obţinem următorul tabel:

			9	5	0	0	0
C_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
5	x_2	11	0	1	0	-1	1
9	x_1	5	1	0	0	4/7	-3/7
0	x_3	1	0	0	1	4/7	-10/7
		100	0	0	0	1/7	8/7

Obţinem o nouă soluţie posibilă, care fiind întreagă, reprezintă soluţia problemei de programare lineară în numere întregi. Prin urmare soluţia optimă este $\bar{x}_1 = 5$, $\bar{x}_2 = 11$, iar $z_{optim} = 100$.

2) Să se rezolve:

$$\max\,(-x_1+3x_2)$$

$$(7)\qquad \begin{aligned} -2x_1+3x_2 &\leq 3\\ 2x_1+\tfrac{5}{2}x_2 &\geq 5\\ x_1+2x_2 &\leq 5\\ x_1,\, x_2 &\geq 0\\ x_1,x_2 &\in Z \end{aligned}$$

Soluție:

Pentru a putea rezolva această problemă cu algoritmul ciclic trebuie, mai întîi, să facem astfel ca sistemul de inegalități să conțină numai coeficienți întregi. Este necesar acest lucru deoarece variabila ecart care se va introduce după aceea va fi supusă la condiția de a fi întreagă. Dacă am introduce înainte în a doua inegalitate o variabilă ecart atunci am obține o problemă de programare lineară mixtă în care variabila ecart introdusă nu va fi supusă condiției de a fi întreagă. Aducînd la acelaşi numitor în a doua inegalitate obținem problema:

$$\max\,(-x_1+3x_2)$$

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2 \leq 3\\ 4x_1+5x_2 \geq 10\\ x_1+2x_2 \leq 5\\ x_1,x_2 \geq 0\\ x_1,x_2 \in Z \end{cases}$$

Introducînd trei variabile ecart (şi ele supuse la condiția de a fi întregi, condiție ce rezultă din forma relațiilor sistemului de inegalități) obținem problema de programare în numere întregi de forma (1) - (4):

$$\max\,(-x_1+3x_2)$$

$$(8)\qquad \begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3 = 3\\ 4x_1+5x_2-x_4 = 10\\ x_1+2x_2+x_5 = 5\\ x_1,\dots,x_5 \geq 0\\ x_1,\dots,x_5 \in Z \end{cases}$$

Rezolvînd problema de programare lineară obținută din (8) prin neglijarea condiției de integritate de tip (4), obținem următorul tabel simplex optim:

			-1	3	0	0	0
C_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
3	x_2	13/7	0	1	1/7	0	2/7
0	x_4	31/7	0	0	-3/7	1	22/7
-1	x_1	9/7	1	0	-2/7	0	3/7
		30/7	0	0	5/7	0	3/7

După cum se vede, punctul optim:

$$\bar{x}_1 = \frac{9}{7}\ ,\quad x_2 = \frac{13}{7}\ ,\quad x_3 = 0\ ,\quad x_4 = \frac{31}{7}\ ,\quad x_5 = 0$$

$$\text{iar } \max(-x_1 + 3x_2) = \frac{30}{7}$$

In figura 1. este trecut punctul $(x_1, x_2) = (\frac{9}{7}, \frac{13}{7})$ în sistemul de axe $x_1 0 x_2$.

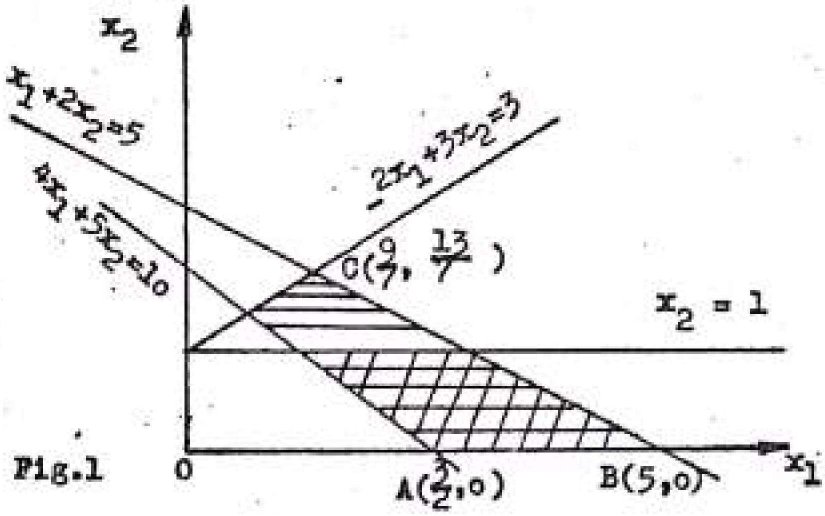

Fig.1

Punctul C nu corespunde unei soluții întregi. De aceea vom genera o tăietură Gomory alegînd în tabloul de mai sus prima linie care exprimă pe x_2 funcție de variabilele secundare x_3 şi x_4. Deci i = 2. Deoarece:

$$f_2 = \left\{\frac{13}{7}\right\} = \frac{6}{7}$$

$$f_{21} = f_{22} = f_{24} = 0$$

$$f_{23} = \left\{\frac{1}{7}\right\} = \frac{1}{7}$$

$$f_{25} = \left\{\frac{2}{7}\right\} = \frac{2}{7}$$

ecuația de tăietură va fi:

$$-\frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_5 + x_6 = -\frac{6}{7} \qquad (9)$$

cu: $x_6 \geq 0$, şi $x_6 \in Z$.

Pentru a reprezenta grafic ecuaţia de tăietură (9) vom scrie relaţia în forma:

$$-\frac{1}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_5 \leq -\frac{6}{7}$$

care se reduce la:

(1o) $$x_3 + 2x_5 \geq 6$$

Inlocuind în (1o) pe x_3 şi x_5 obţinuţi din (8) funcţie de x_1 şi x_2:

$$x_3 = 3 + 2x_1 - 3x_2$$
$$x_5 = 5 - x_1 - 2x_2$$

rezultă ecuaţia de tăietură exprimată în variabilele x_1, x_2:

(11) $$x_2 \leq 1$$

Sub forma (11), tăietura Gomory poate fi reprezentată în planul x_1Ox_2

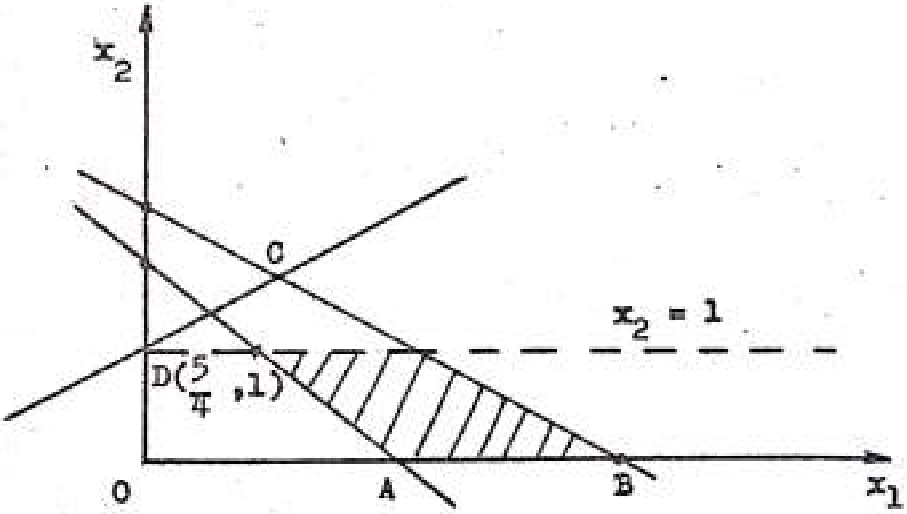

Fig.2

Se vede că restricţia (11) restrînge domeniul soluţiilor admisibile (porţiunea haşurată din Fig.1) la domeniul din Fig.2 (porţiunea haşurată), "tăind" o parte din soluţii, printre care şi pe $(x_1,x_2)=(\frac{9}{7}, \frac{13}{7})$

Am folosit Fig.1 şi Fig.2 numai pentru a da o interpretare geometrică metodei Gomory. Acum vom completa tabelul simplex de mai sus cu noua restricţie (9). Obţinem următorul tabel:

			-1	3	0	0	0	0
C_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3	x_2	13/7	0	1	1/7	0	2/7	0
0	x_4	31/7	0	0	-3/7	1	22/7	0
-1	x_1	9/7	1	0	-2/7	0	3/7	0
0	x_6	-6/7	0	0	-1/7	0	-2/7	1
		3o/7	0	0	5/7	0	3/7	0

Folosind algoritmul simplex dual pentru a reoptimiza acest tabel obținem:

			-1	3	0	0	0	0
c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3	x_2	1	0	1	0	0	0	1
← 0	x_4	-5	0	0	-2	1	0	11
-1	x_1	0	1	0	-1/2	0	0	1/2
0	x_5	3	0	0	1/2	0	1	-7/2
		3	0	0	1/2	0	0	3/2
3	x_2	1	0	1	0	0	0	1
0	x_3	5/2	0	0	1	-2/4	0	-11/2
-1	x_1	5/4	1	0	0	-1/4	0	-5/4
0	x_5	7/4	0	0	0	1/4	1	-3/4
		7/4	0	[illegible]	0	1/4	0	17/4

(Tabel 2)

Soluția obținută este:

$$\bar{x}_1 = 1,\ \bar{x}_2 = \frac{5}{4},\ \bar{x}_3 = \frac{5}{2},\ \bar{x}_4 = 0,\ \bar{x}_5 = \frac{7}{4},\ \bar{x}_6 = 0$$

și este redată în Fig.2. Soluția obținută nu este întreagă și de aceea trebuie să construim o nouă tăietură Gomory. Ca și mai sus luăm i astfel ca partea fracționară f_i să fie cea mai mare. Ea corespunde lui $f_5 = \{\bar{x}_5\} = \frac{3}{4}$.

Deoarece:

$$f_{51} = f_{52} = f_{53} = f_{55} = 0$$

$$f_{54} = f_{56} = \frac{1}{4}$$

ecuația de tăietură corespunzătoare este:

$$(12) \qquad -\frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 + x_7 = -\frac{3}{4}$$

unde $x_7 \geq 0$, $x_7 \in Z$.

Pentru a reprezenta grafic porțiunea înlăturată din domeniul admisibil (Fig.2), vom scrie (12) în forma:

$$-\frac{1}{4}x_4 - \frac{1}{4}x_6 \leq -\frac{3}{4}$$

care se reduce la:

$$(13) \qquad x_4 + x_6 \geq 3$$

Din (8) avem pe x_4 funcţie de x_1 şi x_2:

$$x_4 = -10 + 4x_1 + 5x_2$$

Folosind (9) şi cele două relaţii ce urmează lui (10) obţinem:

$$x_6 = 1 - x_2$$

Prin urmare (13) devine:

$$x_1 + x_2 \geq 3 \tag{14}$$

In figura 3 este reprezentată dreapta $x_1 + x_2 = 3$:

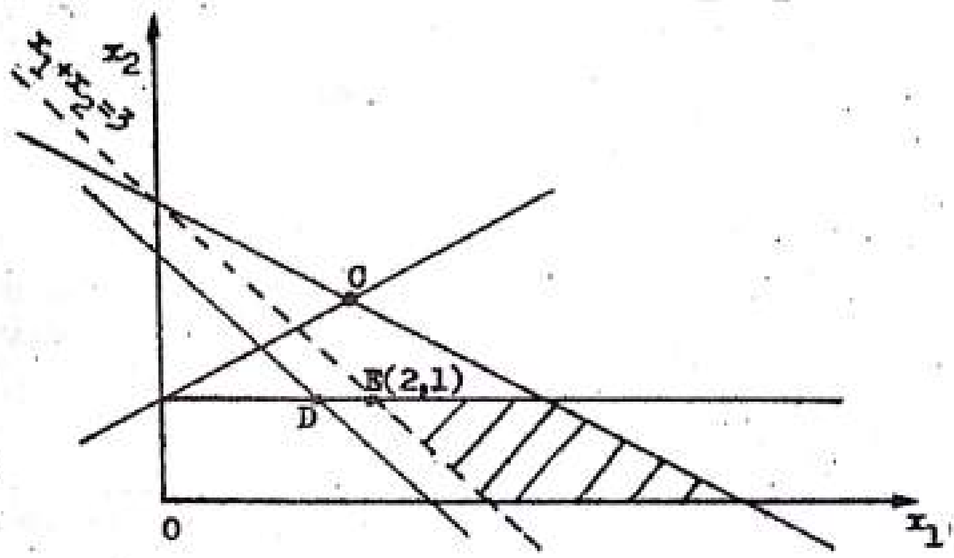

Fig.3

Adăugăm restricţia (12) ultimului tabel simplex, care devine:

			-1	3	0	0	0	0	0
C_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
3	x_2	1	0	1	0	0	0	1	0
0	x_3	5/2	0	0	1	-1/2	0	-11/2	0
-1	x_1	5/4	1	0	0	-1/4	0	-5/4	0
0	x_5	7/4	0	0	0	1/4	1	-3/4	0
← 0	x_7	-3/4	0	0	0	-1/4	0	-1/4	1
		7/4	0	0	0	1/4	0	17/4	0

Pentru a reoptimiza această problemă folosim algoritmul simplex dual. Se obţine tabelul:

C_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	x_2	1	0	1	0	0	0	0	1
	x_3	4	0	0	1	0	0	2	-5
	x_1	2	1	0	0	0	0	1	-1
	x_5	1	0	0	0	0	1	-1	-1
	x_4	3	0	0	0	1	0	-4	1
		1	0	0	0	0	0	1	4

care dă soluţia optimă în numere întregi:

$$\bar{x}_1 = 2\ ,\ \bar{x}_2 = 1\ ,\ \bar{x}_3 = 4\ ,\ \bar{x}_4 = 3\ ,\ \bar{x}_5 = 1$$

$$\bar{x}_6 = \bar{x}_7 = 0 \quad \text{iar} \quad \max\,(-x_1 + 3x_2) = 1.$$

Prin urmare soluţia optimă, în numere întregi, a problemei iniţiale (7) este $\bar{x}_1 = 2$, $\overline{x_2} = 1$. In figura 3 este reprezentată această soluţie optimă prin punctul E.

3) Să se găsească mulţimea soluţiilor optime pentru problema:

$$(15)\qquad \min\,(4x_1 + 3x_2 + 6x_3)$$
$$\begin{cases} 43x_1 + 40x_2 + 48x_3 \geq 500 \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3 \in Z \end{cases}$$

Soluţie:

Introducem două variabile ecart x_4 şi x_5 şi transformăm problema de minim într-o problemă de maxim. Obţinem:

$$(16)\qquad \max\,(-4x_1 - 3x_2 - 6x_3)$$
$$\begin{cases} 43x_1 + 40x_2 + 48x_3 - x_4 = 500 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in Z \end{cases}$$

Rezolvînd problema de programare lineară (16) fără condiţia de integritate obţinem următorul tabel simplex optim:

C_B	x^B	$\bar{x}^B$	$\overset{-4}{x_1}$	$\overset{-3}{x_2}$	$\overset{-6}{x_3}$	x_4	x_5
-4	x_1	2o/3	1	0	8/3	-1/3	-4o/3
-3	x_2	16/3	0	1	-5/3	1/3	43/3
		-128/3	0	0	1/3	1/3	31/3

Se observă că soluţia obţinută nu are componentele întregi. Fie:

$$f_1 = \{\bar{x}_1\} = \left\{\frac{2o}{3}\right\} = \frac{2}{3}$$

$$f_2 = \{\bar{x}_2\} = \left\{\frac{16}{3}\right\} = \frac{1}{3}$$

Alegem i astfel ca $f_i = \max\{f_1, f_2\}$. Deci variabilei de bază $x_i = x_1$ ataşăm o ecuaţie de tăietură. Părţile fracţionare corespunzătoare componentelor liniei variabilei de bază x_1 sînt:

$$f_{11} = f_{12} = 0 \ , \ f_{13} = \frac{2}{3} \ , \ f_{14} = \frac{2}{3} \ , \ f_{15} = \frac{2}{3} \ .$$

Prin urmare ecuaţia de tăietură are forma:

(17) $$-\frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 - \frac{2}{3}x_5 + x_6 = -\frac{2}{3}$$

Completăm tabelul simplex de mai sus cu o nouă linie ce corespunde relaţiei (17) şi o nouă coloană ce corespunde variabilei care este variabilă de bază, x_6. Valoarea acestei variabile de bază este $-\frac{2}{3}$. Tabelul completat este următorul:

C_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	$x_4 \downarrow$	x_5	x_6
-4	x_1	2o/3	1	0	8/3	-1/3	-4o/3	0
-3	x_2	16/3	0	1	-5/3	1/3	43/3	0
← 0	x_6	-2/3	0	0	-2/3	-2/3	-2/3	1
		-128/3	0	0	1/3	1/3	31/3	0

Aplicînd algoritmul simplex dual acestui tabel observăm că iese variabila x_6 din bază şi intră x_4. Transformînd acest tabel obţinem:

	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	$x_3 \downarrow$	x_4	x_5	x_6
	x_1	7	1	0	3	0	-13	1/3
	x_2	5	0	1	-2	0	14	1/3
←	x_4	1	0	0	1	1	1	-1
		-43	0	0	0	0	1o	1/3

Acest tabel ne furnizează o soluţie ale cărei componente sînt întregi. Deci o soluţie optimă pentru problema iniţială este:

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \bar{x}_6)' = (7,5,0,1,0,0)'$$

Pe de altă parte, deoarece $z_3 - c_3 = 0$, iar x_3 este variabilă secundară, putem introduce pe x_3 în bază şi eliminăm o variabilă de bază aplicînd criteriul de ieşire din bază de la algoritmul simplex primal. Deoarece $\min\left\{\frac{7}{3}, \frac{1}{1}\right\} = 1$ este atins pe linia lui x_4, va ieşi din bază variabila x_4. Pivotînd tabelul de mai sus în jurul lui $y_{43} = 1$ obţinem următorul tabel simplex optim:

x^B	$\bar{\bar{x}}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	4	1	0	0	-3	8/3	8/3
x_2	7	0	1	0	2	-5/3	-5/3
x_3	1	0	0	1	1	-1	-1
	-43	0	0	0	0	1o	1/3

Acest tabel ne furnizează o altă soluţie optimă întreagă:

$$\bar{\bar{x}} = (\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \bar{\bar{x}}_3, \bar{\bar{x}}_4, \bar{\bar{x}}_5, \bar{\bar{x}}_6)' = (4,7,1,0,0,0)'.$$

Se poate arăta uşor că pe segmentul $[\bar{x}, \bar{\bar{x}}]$,

$$[\bar{x}, \bar{\bar{x}}] = \{x \in R^6 \,/\, x = \lambda \bar{x} + (1-\lambda)\bar{\bar{x}}, \ 0 \le \lambda \le 1\}$$

nu avem alte soluţii întregi decît cele găsite mai sus. Deci mulţimea soluţiilor optime pentru problema dată are numai două elemente.

4) Dacă problema (1) - (3) are optim infinit iar sistemul (2) - (4) are cel puţin o soluţie atunci problema (1) - (4) are optim infinit.

<u>Soluţie</u>:

Deoarece problema (1) - (3) are optim infinit rezultă că fixînd o anumită bază B din matricea A există $k \in \mathcal{R}$ astfel ca $z_k^B - c_k < 0$ şi $y_{ik} \le 0$ pentru orice $i \in \mathcal{B}$, unde $\mathcal{B}$ este mulţimea indicilor variabilelor de bază iar $\mathcal{R}$ este mulţimea indicilor variabilelor secundare. Definim vectorul α astfel ca:

$$\alpha_i = -y_{ik}, \quad i \in \mathcal{B}$$

$$\alpha_k = 1$$

$$\alpha_j = 0, \quad j \in \mathcal{R} \setminus \{k\}$$

Deoarece A şi b sînt matrici cu elemente numere întregi rezultă că vectorul α are componentele raţionale. Fie M numitorul lor comun, iar β vectorul cu componente întregi:

$$\beta = M\alpha$$

Evident că $\beta \geqslant 0$ şi $A\beta = 0$.
Deoarece sistemul (2) - (4) are cel puţin o soluţie, există $x_0 \geqslant 0$, $x_0 \in Z^n$ astfel ca $Ax_0 = b$. Fie vectorul:

$$\tilde{x}_n = x_0 + n\beta \quad \text{, unde } n \text{ este natural.}$$

Este clar că $\tilde{x} \geqslant 0$, $\tilde{x} \in Z^n$ şi $A\tilde{x} = b$. Pentru această soluţie avem:

$$c'\tilde{x}_n = c'(x_0 + n\beta) = c'x_0 + nMc'\alpha =$$

$$= c'x_0 + nM(c_k - z_k^B)$$

Deoarece $M \cdot (c_k - z_k^B) > 0$, luînd mai sus n tinzînd la infinit rezultă:

$$\lim_{n \to \infty} c'\tilde{x}_n = +\infty$$

adică problema (1) - (4) are optim infinit.

Probleme propuse

5) Să se rezolve:

$$\max(3x_1 + x_2 + 5x_3)$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geqslant -2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 \leqslant 15 \\ x_1, x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \in Z,\ x_3 \in Z \end{cases}$$

Soluţia optimă: $x_1 = 4,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0;\ x_1 = 3,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$
$\max z = 14.$

6) Să se rezolve problema:

$$\min (5x_1+ 4x_2)$$

$$\begin{cases} 3x_1+ x_2 \geqslant 9 \\ x_1+ 2x_2 \geqslant 7 \\ 5x_1+ 3x_2 \geqslant 21 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

<u>Soluție</u>: $x_1= 3$, $x_2= 2$; max $z = 23$.

7) Să se găsească:

$$\min (-x_1- x_2+ x_3$$

cu condițiile:

$$\frac{1}{3} x_1+ x_2+ \frac{2}{3} x_3 = 1$$
$$3x_1+ 3x_2+ x_3 = 4$$
$$x_i \geqslant 0 , i = \overline{1,3}$$
$$x_i \in \mathbb{Z} , i = \overline{1,3}$$

<u>Soluție</u>: $x_1= 1$, $x_2= 0$, $x_3= 1$, min $z = 0$

8) Să se rezolve:

$$\max (7x_1+ 5x_2+ 4x_3)$$
$$x_1+ x_2+ x_3 \leqslant 5$$
$$3x_1+ 2x_2+ x_3 \leqslant 9$$
$$2x_1 \leqslant \frac{1}{2} (x_1+ x_2+ x_3)$$
$$x_i \geqslant 0 , i = \overline{1,3}$$
$$x_i \in \mathbb{Z} , i = \overline{1,3}$$

<u>Soluție</u>: $x_1= x_2= 1$, $x_3= 2$, max $z = 2o$.

9) Să se găsească:

$$\min (-2x_1- x_2)$$

în condițiile:

$$10x_1 - 3x_2 \leq 20$$
$$6x_1 + 7x_2 \leq 56$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Soluţie: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $\min z = -11$

7.1.2. Algoritmul discret

Fie problema de programare lineară în numere întregi (1) - (4) definită la începutul capitolului. Algoritmul discret constă în următoarele:

Pasul 1. Se găseşte o bază B dual admisibilă pentru problema de programare lineară (1) - (3). (vezi § 2.3.). Se scrie tabelul simplex corespunzător acestei baze.

Dacă baza B este şi primal admisibilă, adică dacă $\bar{x}^B = B^{-1}b \geq 0$ atunci soluţia obţinută este şi soluţie pentru problema (1) - (4), deoarece toate elementele tabelului simplex sînt numere întregi.

Dacă $\bar{x}^B$ are cel puţin o componentă negativă, atunci trecem la pasul 2.

Pasul 2. Fie indicele ℓ astfel ca:

(18) $$\bar{x}^B_\ell = \min\left\{\bar{x}^B_i \ / \ i \in \mathcal{B}\right\}$$

Definim mulţimea:

(19) $$\mathcal{J}(\ell) = \left\{j \in \mathcal{R} \ / \ y_{\ell j} < 0\right\}$$

Dacă $\mathcal{J}(\ell) = \phi$ atunci problema (1)-(4) nu are soluţie.

Dacă $\mathcal{J}(\ell) \neq \phi$ trecem la pasul 3.

Pasul 3. Fie indicele k astfel ca:

(2o) $$z^B_k - c_k = \min\left\{z^B_j - c_j \ / \ j \in \mathcal{J}(\ell)\right\}$$

Pentru $j \in \mathcal{J}(\ell)$ notăm:

(21) $$g_j = \left[\frac{z^B_j - c_j}{z^B_k - c_k}\right]$$
$$h_j = \left[-\frac{y_{\ell j}}{g_j}\right]$$

unde cu $[a]$ am notat partea întreagă a numărului a.

Acum punem:

$$\lambda = \max_{j\in\mathcal{J}(\ell)} \left\{ -y_{\ell k}\ ,\ h_j \right\} \tag{22}$$

şi trecem la pasul 4.

Pasul 4. Scriem ecuaţia de tăietură:

$$\left[\frac{\bar{x}_{\ell}^{B}}{\lambda} \right] - \sum_{j\in\mathcal{R}} \left[\frac{y_{\ell j}}{\lambda} \right] \cdot x_j \geqslant 0 \tag{23}$$

pe care o ataşăm tabloului simplex corespunzător bazei dual admisibile B. Pentru aceasta se introduce o nouă variabilă ecart în (2.3), variabilă care este supusă la condiţiile, de a fi nenegativă şi întreagă. Astfel se ataşează tabelului simplex o nouă linie şi o nouă coloană. Variabila ecart va fi o variabilă de bază. Se va elimina din bază această variabilă şi va intra în bază variabila x_k. Astfel vom avea de fiecare dată pivotul egal cu -1, şi elementele oricărui tabel simplex numere întregi.

Dacă după înlocuirea variabilei ecart cu variabila x_k, noua bază este primal admisibilă atunci tabelul obţinut furnizează soluţia problemei (1) - (4). In caz contrar se trece la pasul 1.

Probleme rezolvate

1) Să se găsească soluţia următoarei probleme de programare în numere întregi:

$$\max\,(-8x_1 - 3x_2) \tag{24}$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 \geqslant 2 \\ 7x_1 + 3x_2 \geqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Soluţie:

Introducem două variabile ecart x_3, x_4 şi punem în evidenţă o bază unitate. Obţinem problema:

$$\max\,(-8x_1 - 3x_2)$$

$$\begin{cases} -5x_1 - 4x_2 + x_3 = -2 \\ -7x_1 - 3x_2 + x_4 = -2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Tabelul simplex inițial corespunzător acestei probleme fără condiția de integritate este:

			-8	-3	0	0
c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	-2	-5	-4	1	0
0	x_4	-2	-7	-3	0	1
		0	8	3	0	0

Se observă că baza asociată acestui tabel este o bază dual admisibilă, deoarece $z_1^B - c_1 > 0$, $z_2^B - c_2^B > 0$

Pentru pasul 2 alegem $\ell = 3$. Deci:

$$\mathcal{J}(3) = \left\{ j \in \mathcal{R} \ / \ y_{3j} < 0 \right\}.$$

Deoarece $\mathcal{R} = \{1,2\}$ avem $\mathcal{J}(3) = \{1,2\}$
Trecem la pasul 3. Din (20) obținem:

$$z_2^B - c_2 = \min\left\{ z_j^B - c_j \mid j \in \mathcal{J}(3) \right\} = 3.$$

Deci $k = 2$. Folosind (21) avem:

$$g_1 = \left[\frac{z_1^B - c_1}{z_2^B - c_2} \right] = \left[\frac{8}{3} \right] = 2$$

$$g_2 = 1$$

$$h_1 = \left[-\frac{y_{31}}{g_1} \right] = \left[-\frac{-5}{2} \right] = \left[\frac{5}{2} \right] = 2$$

$$h_2 = \left[-\frac{y_{32}}{g_2} \right] = [4] = 4$$

Prin urmare:

$$\lambda = \max\left\{ -y_{32}, h_1, h_2 \right\} = \max\{4, 2, 4\} = 4$$

Conform (23), restricția suplimentară este:

$$\left[\frac{-2}{4}\right] - \left[-\frac{5}{4}\right] x_1 - \left[-\frac{4}{4}\right] x_2 \geqslant 0$$

adică:

$$-1 + 2x_1 + x_2 \geqslant 0 .$$

Introducînd variabila ecart $x_5 \geqslant 0$, $x_5 \in \mathbb{Z}$ obținem:

$$-2x_1 - x_2 + x_5 = -1$$

Adăugăm tabelului de mai sus această restricție și o nouă coloană. Obținem:

c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5
	x_3	-2	-5	-4	1	0	0
	x_4	-2	-7	-3	0	1	0
←	x_5	-1	-2	-1	0	0	1
		0	8	3	0	0	0

Efectuînd un pivotaj în jurul elementului $y_{52}=-1$ obţinem:

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_3	2	3	0	1	0	-4
x_4	1	-1	0	0	1	-3
x_2	1	2	1	0	0	-1
	-3	2	0	0	0	3

Acest tabel este optim. Deci soluţia optimă a problemei (24) este:

$$\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 = 1 \quad \text{şi} \max z = -3 .$$

2) Să se rezolve cu algoritmul discret următoarea problemă:

$$\max (x_1 - 5x_2)$$

$$(25) \quad \begin{cases} 3x_1 - x_2 \leqslant 6 \\ -x_1 + 3x_2 \leqslant 9 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

<u>Soluţie</u>:

Introducem variabilele ecart $x_3, x_4 \geqslant 0$, $x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$ şi obţinem problema:

$$\max (x_1 - 5x_2)$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + x_4 = 9 \\ x_i \geqslant 0 \ , \ i = \overline{1,4} \\ x_i \in \mathbb{Z} \ , \ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

Considerînd problema de programare lineară fără condiţia de integritate, se constată că avem o bază unitate $B = (a^3, a^4)$. Calculînd

$z_j^B - c_j$ pentru $j = 1,2$ se constată că baza B nu este dual admisibilă. Deoarece $z_1^B - c_1 = -1 < 0$ şi $z_2^B - c_2 = 5 > 0$ adăugăm restricţia:

$$x_1 \leq M \ , \tag{26}$$

unde M este un întreg ce trebuie ales. Este recomandat să se aleagă M cît mai mic pentru ca numărul iteraţiilor la aplicarea algoritmului discret să fie cît mai mic.

Inmulţind prima restricţie din (25) cu 3 şi adunînd relaţia obţinută cu a doua relaţie obţinem:

$$8x_1 \leq 27$$

adică $x_1 \leq \frac{27}{8}$. Vom lua $M = 4$. Inlocuind valoarea lui M în (26) şi introducînd o variabilă ecart $x_o \geq 0$, $x_o \in Z$ obţinem restricţia:

$$x_1 + x_o = 4$$

Avem următorul tabel simplex:

			1	-5			
c_B	x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_o
0	x_3	6	3	-1	1	0	0
0	x_4	9	-1	3	0	1	0
← 0	x_o	4	1	0	0	0	1
		0	-1	5	0	0	0

In acest tabel eliminăm din bază pe x_o şi introducem pe x_1. Obţinem o bază $\tilde{B} = (a_3, a_4, a_1)$ dual admisibilă:

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_o
x_3	-6	0	-1	1	0	-3
x_4	13	0	3	0	1	1
x_1	4	1	0	0	0	1
	4	0	5	0	0	1

Conform algoritmului discret, deoarece baza $\tilde{B}$ nu este şi primal admisibilă, trecem la pasul 2. Avem $\ell = 3$ şi $\mathcal{J}(2) = \{2,0\}$.

Trecînd la pasul 3, avem $k = 0$. Este clar că:

$$g_2 = \left[\frac{5}{1}\right] = 5 \ , \quad g_o = 1$$

$$h_2 = 0 \ , \quad h_o = 3 \ .$$

Prin urmare $\lambda = 3$.

Conform (23), restricţia suplimentară este:

$$\left[-\frac{6}{3}\right]-\left[-\frac{1}{3}\right]x_2-\left[-\frac{3}{3}\right]x_o \geq 0$$

adică

$$-2+x_2+x_o \geq 0 .$$

Introducem variabila ecart $x_5 \geq 0$, $x_5 \in Z$ şi obţinem:

$$-x_2-x_o+x_5=-2 .$$

Adăugînd această restricţie la ultimul tabel simplex rezultă:

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_o	x_5
x_3	-6	0	-1	1	0	-3	0
x_4	13	0	3	0	1	1	0
x_1	4	1	0	0	0	1	0
x_5	-2	0	-1	0	0	-1	1
	4	0	5	0	0	1	0

Conform pasului 4, va ieşi din bază variabila x_5 şi va intra variabila $x_k=x_o$. După transformări obţinem:

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_o	x_5
x_3	0	0	2	1	0	0	-3
x_4	11	0	2	0	1	0	1
x_1	2	1	-1	0	0	0	1
x_o	2	0	1	0	0	1	-1
	2	0	4	0	0	0	1

Acest tabel este optim. Prin urmare soluţia problemei definită prin (25) are soluţia:

$$\bar{x}_1=2,\ \bar{x}_2=0 ,\quad \max z=2 .$$

<u>Probleme propuse</u>

3) Problema 5 din § 7.1.1.

4) Problema 6 din § 7.1.1.

5) Să se găsească:

$$\max\ (18x_1 + 7x_2)$$

în condițiile:

$$-2x_1 + x_2 \leq 1$$
$$3x_1 + x_2 \leq 4$$
$$12x_1 + 9x_2 \leq 29$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Soluție: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

6) Să se rezolve problema:

$$\min\ (16x_1 - 4x_2 - 2x_3)$$
$$x_1 - 4x_2 + x_3 \geq 4$$
$$\frac{1}{4} x_1 - x_2 + x_3 \leq 7$$
$$x_1 + 6x_2 - 2x_3 \geq 5$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$$

Soluție: $x_1 = 5$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$

$\min z = 7o$.

7.2. Programare mixtă. Algoritmul mixt.

Fie problema de programare matematică:

(1) $\max c'x$

(2) $Ax = b$

(3) $x \geq 0$

(4) $x_j \in \mathbb{Z}$, $j \in J$

unde A, b, c sînt matrici cu elemente numere raționale, iar $J \neq \emptyset$, $J \subset \{1,2,\ldots,n\}$.

Pentru rezolvarea acestei probleme, Gomory a propus un algoritm, algoritmul mixt, care constă în rezolvarea succesivă a unui șir de probleme de programare liniară obișnuite, care se obțin din (1)-(3), prin adăugarea a cîte unei relații suplimentare care au în vedere (4). Principiul acestui algoritm va fi asemănător cu acela al algoritmului ciclic, deosebindu-se de acesta prin faptul că numai o parte din variabile sînt supuse condiției de integritate. Din această cauză, construcția restricției suplimentare va fi mai complicată.

Algoritmul mixt constă în următoarele:

<u>Pasul 1</u>. Mai întîi, se rezolvă problema de programare lineară (1) - (3). Dacă soluția optimă obținută (dacă există) verifică (4) atunci algoritmul se încheie. In caz contrar trecem la pasul 2.

<u>Pasul 2</u>. Fie x_ℓ variabila de bază în tabelul simplex de la pasul 1, cu $\ell \in J$ și a cărei valoare nu este întreagă. Notăm cu $\mathcal{R}$ mulțimea indicilor variabilelor secundare care apar în tabelul simplex de la pasul 1. Determinăm mulțimile:

$$\mathcal{R}^* = \mathcal{R} - \mathcal{R} \cap J$$
$$\mathcal{R}^*_+ = \{ j \in \mathcal{R}^* / y_{\ell j} > 0 \}$$
$$\mathcal{R}^*_- = \{ j \in \mathcal{R}^* / y_{\ell j} < 0 \}$$

Pentru $j \in \mathcal{R} \cap J$ calculăm părțile fracționare $f_{\ell j} = \{ y_{\ell j} \}$.

De asemenea se calculează $f_\ell = \{ \bar{x}^B_\ell \}$. Mai determinăm mulțimile:

$$\mathcal{R}_1 = \{ j \in \mathcal{R} \cap J / f_{\ell j} < f_\ell \}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{ j \in \mathcal{R} \cap J / f_{\ell j} > f_\ell \}$$

Apoi de trece la pasul 3.

<u>Pasul 3</u>. Se adaugă, la ultimul tabel simplex de la pasul 1, următoarea restricție suplimentară:

$$(5) \qquad \sum_{j \in \mathcal{R}} (-g_{\ell j}) \cdot x_j + x_{n+1} = - f_\ell$$

unde $x_{n+1} \geq 0$ iar $g_{\ell j}$ definit prin relațiile:

$$(6) \qquad g_{\ell j} = \begin{cases} y_{\ell j} & , j \in \mathcal{R}^*_+ \\ \frac{f_\ell}{1 - f_\ell} |y_{\ell j}| & , j \in \mathcal{R}^*_- \\ f_{\ell j} & , j \in \mathcal{R}_1 \\ \frac{f_\ell}{1 - f_\ell}(1 - f_{\ell j}) & , j \in \mathcal{R}_2 \end{cases}$$

Tabelul simplex obținut prin adăugarea unei linii și a unei coloane, conține o bază dual admisibilă și se trece la pasul 2 aplicînd algoritmul simplex dual.

<u>Observație</u>. Finitudinea acestui algoritm a fost demonstrată folo-

sind argumente asemănătoare celor din paragraful 7.1.1. în ipoteza restrictivă că valoarea optimă a funcţiei obiectiv este un număr întreg.

Probleme rezolvate

1) Să se rezolve:

$$\max (4x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7 \\ 3x_1 + 10x_2 + 10x_4 = 15 \\ x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,4} \\ x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Soluţie:

Rezolvînd, mai întîi, problema de programare lineară care se obţine prin neglijarea restricţiilor de integritate, obţinem următorul tabel simplex optim:

x^B	x^B	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	7/4	1	1/2	1	0
x_4	39/40	0	17/20	-3/10	1
	7	0	1	4	0

Deoarece $\bar{x}_1 = \frac{7}{4}$ nu este întreagă, trecem la pasul 2. Avem $\ell = 1$. Variabilele x_1 şi x_4 fiind variabile de bază avem $\mathcal{R} = \{2,3\}$. Din enunţul problemei rezultă $J = \{1,2\}$. Deci:

$$\mathcal{R} \cap J = \{2\}, \quad \mathcal{R}^* = \{3\}, \quad \mathcal{R}^*_+ = \{3\}, \quad \mathcal{R}^*_- = \emptyset$$

Avem $f_1 = \left\{\frac{7}{4}\right\} = \frac{3}{4}$, $f_{12} = \frac{1}{2}$. Deci:

$$\mathcal{R}_1 = \{2\}, \quad \mathcal{R}_2 = \emptyset$$

Trecem la pasul 3. Conform (6) avem:

$$g_{12} = f_{12} = \frac{1}{2}, \quad g_{13} = y_{13} = 1 .$$

Restricţia (5) are forma:

$$-\frac{1}{2}x_2 - x_3 + x_5 = -\frac{3}{4}$$

unde $x_5 \geq 0$. Adăugînd această restricţie la tabelul simplex de mai sus obţinem următorul tabel:

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	7/4	1	1/2	1	0	0
x_4	39/40	0	17/20	-3/10	1	0
x_5	-3/4	0	-1/2	-1	0	1
	7	0	1	4	0	0

Aplicînd, acestui tabel, algoritmul simplex dual obţinem:

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	0	1
x_4	-3/10	0	0	-2	1	17/10
x_2	3/2	0	1	2	0	-2
	11/2	0	0	2	0	2

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	0	0	0	1
x_3	3/20	0	0	1	-1/2	-17/20
x_2	6/5	0	1	0	1	-3/10
	26/5	0	0	0	1	74/5

Se observă că nici acest tabel nu furnizează soluţia optimă pentru problema dată, deoarece $\bar{x}_2 = 6/5$. Trecînd la pasul 2, avem $\ell = 2$. Deoarece $J = \{1,2\}$, $\mathcal{R} = \{4,5\}$ avem:

$$\mathcal{R} \cap J = \emptyset, \quad \mathcal{R}^* = \{4,5\}, \quad \mathcal{R}^*_+ = \{4\}, \quad \mathcal{R}^*_- = \{5\}.$$

Avem: $f_2 = \left\{\frac{6}{5}\right\} = \frac{1}{5}$, $R_1 = \mathcal{R}_2 = \emptyset$ şi putem trece la pasul 3.

Folosind (6) obţinem:

$$g_{24} = y_{24} = 1 \quad ; \quad g_{25} = \frac{f_2}{1-f_2}\,|y_{25}| = \frac{3}{40}$$

Din (5) rezultă restricţia suplimentară:

$$-x_4 - \frac{3}{40}x_5 + x_6 = -\frac{1}{5}$$

unde $x_6 \geq 0$. Adăugînd această restricţie la ultimul tabel simplex obţinem tabelul:

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	1	0	0	0	1	0
x_3	3/20	0	0	1	-1/2	-17/20	0
x_2	6/5	0	1	0	1	-3/10	0
x_6	-1/5	0	0	0	-1	-3/40	1
	26/5	0	0	0	1	74/5	0

Aplicînd algoritmul simplex dual acestui tabel, va ieşi din bază variabila x_6 şi va intra în bază variabila x_4. Luînd drept pivot $y_{64}= -1$ obţinem:

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	1	0	0	0	1	0
x_3	1/4	0	0	1	0	13/16	-1/2
x_2	1	0	1	0	0	3/8	1
x_4	1/5	0	0	0	1	3/40	-1
	5	0	0	0	0	35/8	1

Deoarece toate componentele x_j pentru $j \in J = \{1,2\}$ sînt întregi, programul actual este programul optim căutat. Deci, soluţia optimă va fi:

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = 1 \ , \ x_3 = \frac{1}{4} \ , \ x_4 = \frac{1}{5}$$

iar valoarea funcţiei de optimizat este 5 .

2) Să se rezolve:

$$\max \left(\frac{11}{6} x_1 + \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{3} x_3 \right)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq \frac{3}{2}$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 \leq \frac{13}{6}$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq \frac{15}{4}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Soluţie:

Pentru a rezolva problema de programare lineară fără condiţia de integritate se introduc variabilele ecart x_4, x_5, x_6. Se obține problema în care se optimizează aceeași funcție, însă cu restricțiile:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{3}{2}$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = \frac{13}{6}$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = \frac{15}{4}$$
$$x_i \geq 0 \ , \quad i = \overline{1,6}$$

Rezolvînd această problemă obținem următorul tabel simplex optim:

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	3/2	1	1	1	1	0	0
x_5	2/3	0	-2	1	-1	1	0
x_6	3/4	0	-3	-3	-2	0	1
	11/4	0	4/3	3/2	11/6	0	0

In cazul nostru $J = \{1,2\}$. Deoarece $\bar{x}_1 = \frac{3}{2}$ nu este întreg, trecem la pasul 2. Avem $\ell = 1$, $\mathcal{R} = \{2,3,4\}$, $\mathcal{R} \cap J = \{2\}$, $\mathcal{R}^* = \{3,4\}$ $\mathcal{R}^*_+ = \{3,4\}$, $\mathcal{R}^*_- = \emptyset$.

$$f_1 = \left\{ \frac{3}{2} \right\} = \frac{1}{2} \ , \quad f_{12} = 0$$
$$\mathcal{R}_1 = \{2\} \ , \quad \mathcal{R}_2 = \emptyset$$

Folosind (6) și relațiile de mai sus obținem:

$$g_{12} = f_{12} = 0 \ ; \ g_{13} = y_{13} = 1; \ g_{14} = y_{14} = 1$$

Obținem de aici și din (5) următoarea restricție suplimentară:

$$-x_4 + x_7 = -\frac{1}{2}$$

unde $x_7 \geq 0$. Adăugăm această restricție la ultimul tabel simplex și obținem:

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	$x_4 \downarrow$	x_5	x_6	x_7
x_1	3/2	1	1	1	1	0	0	0
x_5	2/3	0	-2	1	-1	1	0	0
x_6	3/4	0	-3	-3	-2	0	1	0
$\leftarrow x_7$	-1/2	0	0	0	-1	0	0	1
	11/4	0	4/3	3/2	11/6	0	0	0

Aplicînd acestui tabel algoritmul simplex dual, se observă că iese din bază x_7 și intră x_4. Obținem:

x^B	$\bar{x}^B$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
x_1	1	1	1	1	0	0	0	1
x_5	7/6	0	-2	1	0	1	0	-1
x_6	7/4	0	-3	-3	0	0	1	-2
x_4	1/2	0	0	0	1	0	0	-1
	11/6	0	4/3	3/2	0	0	0	11/6

tabel care este optim. Soluția acestui tabel furnizează și soluția problemei inițiale:

$$\bar{x}_1 = 1, \ \bar{x}_2 = \bar{x}_3 = 0.$$

Probleme propuse

3) Să se rezolve problema:

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{6} = 4$$

$$x_1 - x_2 \geq -3$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 29$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\max\left(\frac{3x_1}{7} + \frac{x_2}{3}\right)$$

Soluție: $x_1 = 6$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$

4) Să se rezolve:

$$\max(2x_1 + x_2)$$

$$x_1 - x_2 \leq 4$$

$$3x_1 - x_2 \leq 18$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 \in \mathbb{Z}.$$

Soluție: $x_1 = 8$, $x_2 = 6$.

5) Să se rezolve:

$$\max\,(10x_1 - 7x_2 + 2x_3 - x_4)$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_3 = 1$$

$$x_1 + 2x_3 + x_4 = 12$$

$$2x_2 + x_3 + 3x_4 = 16$$

$$x_i \geq 0\ ,\ i = \overline{1,4}$$

$$x_2 \in \mathbb{Z}$$

Soluție:

Se obține: $x_1 = \frac{97}{18}$, $x_2 = 6$, $x_3 = \frac{19}{6}$, $x_4 = 0$.

II. CONVEXITATE

1. PRELIMINARII

1.1. Preliminarii topologice

Un element $x \in R^n$ va fi considerat vector coloană; accentul va indica transpunerea pentru vectori sau matrici. De exemplu dacă:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{atunci } x' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Pentru $x, y \in R^n$ cu $x' = (x_1, \dots, x_n)$, $y' = (y_1, \dots, y_n)$ notăm produsul scalar dintre x şi y prin: $x'y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. De asemenea notăm $\|x\| = (x'x)^{1/2}$.

D_1. Sfera de centru $x_0 \in R^n$ şi rază $r > 0$ este:

$$S(x_0, r) = \left\{ x \in R^n \ / \ \|x - x_0\| < r \right\}$$

D_2. Mulţimea $A \subset R^n$ este o vecinătate pentru $x_0 \in R^n$ dacă există $r > 0$ astfel ca: $S(x_0; r) \subseteq A$.

D_3. Mulţimea $A \subset R^n$ este o mulţime deschisă dacă este vecinătate pentru fiecare punct al ei.

D_4. Mulţimea $A \subset R^n$ este închisă dacă $R^n \setminus A$ este deschisă.

D_5. Fie $A \subset R^n$. Punctul $x_0 \in R^n$ este:

i) punct interior pentru A dacă există $r > 0$ cu $S(x_0; r) \subseteq A$

ii) punct aderent pentru A dacă $A \cap S(x_0; r) \neq \emptyset$ pentru orice $r > 0$.

Notăm cu A^o mulţimea punctelor interioare ale lui A iar cu $\bar{A}$ mulţimea punctelor aderente ale lui A.

D_6. Fie $A \subset R^n$. Punctul $x_0 \in R^n$ este punct:

i) exterior pentru A dacă $x_0 \in R^n \setminus \bar{A}$.

ii) frontieră pentru A dacă $x_0 \in \bar{A} \setminus A^o$.

D_7. Mulţimea $A \subset R^n$ este mărginită dacă există $r > 0$ astfel ca, $\|x\| \leq r$ pentru orice $x \in A$.

D_8. Mulţimea $A \subset R^n$ este compactă dacă este mărginită şi închisă.

1.2. Preliminarii asupra calculului diferențial matriceal.

Fie mulțimea $A \subset R^n$, $A^o \neq \emptyset$, $x^o \in A^o$ și funcția $f: A \to R$.

D_1. Fie $h \in R^n$. Funcția f este derivabilă în x^o după direcția h dacă există și este finită:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[f(x^o + th) - f(x^o)\right]$$

și notăm această valoare cu $\delta f(x^o,h)$.

D_2. Dacă f este derivabilă în x^o după direcția h atunci numărul

$$f'(x_o;h) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } h = 0 \\ \frac{1}{\|h\|} \delta f(x^o,h), \; h \neq 0 \end{cases}$$

este derivata lui f în x^o după direcția h.

D_3. Fie $1 \leq i \leq n$. f este derivabilă parțial în raport cu variabila x_i în punctul x^o dacă f este derivabilă în x^o după direcția $\ell_i = (0,\ldots$ $\ldots,1,0,\ldots,0)'$. Notăm această derivată parțială cu $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x^o)$

D_4. Dacă f este derivabilă parțial în raport cu toate variabilele $x_1,\ldots,x_n$ în punctul x^o, vectorul:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^o),\ldots\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^o)\right)'$$

se numește gradientul lui f în x^o și se notează cu $\nabla f(x^o)$.

D_5. f este diferențiabilă Gâteaux în x^o dacă este derivabilă în x^o după orice direcție $h \in R^n$.

D_6. f este diferențiabilă Fréchet în x^o dacă există $y \in R^n$ și o funcție $\omega : A \to R$ astfel ca: $\lim_{x \to x^o} \omega(x) = \omega(x^o) = 0$,

$$f(x) - f(x^o) = y'(x - x^o) + \omega(x) \cdot \|x - x^o\|$$

pentru orice $x \in A$.

D_7. f este de clasă $C^1(A)$ dacă are derivate parțiale și acestea sînt continue pe o mulțime deschisă $B \supseteq A$.

D_8. Fie $g: R^n \to R^m$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x),\ldots,g_m(x))'$ unde $g_i(x)$ pentru $1 \leq i \leq m$ are derivate parțiale în $x^o \in R^n$. Atunci gradientul funcției vectoriale g în x^o este:

$$\nabla g(x^o) = ((\nabla g_1(x^o))',\ldots\ldots,(\nabla g_m(x^o))')'$$

D_9. Dacă f admite derivate parțiale de ordinul doi în x^o atunci matricea hessiană (a lui f în x^o) este definită de:

$$Hf(x^o) = \nabla(\nabla f)(x^o)$$

Se arată ușor:

P_1. Dacă f este derivabilă în x^o după direcția h iar $a \in R$ atunci:

$$\delta f(x^o, ah) = a\,\delta f(x^o, h)$$

P_2. Fie $h \in R^n$ iar $T = \{t \in R \,/\, x^o + th \in A\}$. Atunci f este derivabilă în x^o după direcția h dacă și numai dacă funcția $\varphi(t) = f(x^o + th)$ definită pe T este derivabilă în punctul zero. In acest caz avem: $\delta f(x^o, h) = \varphi'(0)$.

P_3. Pentru $f(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2$, $x^o = (1,2,\dots,n)'$ și $h = (1,1,\dots,1)'$

să se arate că $f'(x^o, h) = (n+1) \cdot \sqrt{n}$

P_4. f diferențiabilă Fréchet în x^o atunci f este diferențiabilă Gâteaux în x^o și $\delta f(x^o, h) = y'h$ pentru orice $h \in R^n$.

<u>Indicație</u>: Fie $h \in R^n$. Deoarece x^o este punct interior pentru A există $r > 0$ cu $S(x^o, r) \subseteq A$. Putem alege $t \in [-a, a]$ unde $a = r.(2\|h\|)^{-1}$ astfel ca $x^o + th \in A$.

P_5. Dacă există o vecinătate V a lui x^o pe care f este derivabilă parțial în raport cu toate variabilele $x_1, \dots, x_n$ și dacă $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sînt continue în x^o atunci f este diferențiabilă Fréchet.

P_6. Dacă f este diferențiabilă Fréchet pe A atunci pentru orice x^1, $x^2 \in A$ există $0 < \theta < 1$ cu:

$$f(x^2) - f(x^1) = (x^2 - x^1)' \cdot \nabla f(x^1 + \theta(x^2 - x^1))$$

P_7. Dacă $f \in C^2(A)$ atunci:

i) pentru orice $x^o \in A$, $Hf(x^o)$ este simetrică

ii) pentru orice $x^1, x^2 \in A$ există $0 < \theta < 1$ astfel ca:

$$f(x^2) - f(x^1) = (x^2 - x^1)' \cdot \nabla f(x^1) + \frac{1}{2}(x^2 - x^1)' Hf[x^1 + \theta(x^2 - x^1)]\,(x^2 - x^1)$$

P_8. Fie $f: R^n \longrightarrow R$, $g: R^n \longrightarrow R^m$ iar $h: R^n \longrightarrow R^m$ definită prin $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ pentru orice $x \in R^n$. Atunci:

$$\nabla h = f \cdot \nabla g + g \cdot (\nabla f)'$$

P_9. Fie $g, h: R^n \longrightarrow R^m$. Atunci:

$$\nabla(g + h) = \nabla g + \nabla h$$

$$\nabla(g'h) = (\nabla g)' \cdot h + (\nabla h)' \cdot g$$

P_{1o}. Să se calculeze gradientul funcţiilor: a'x, Ax, xa'x, xx'a, Cxx'a, xx'x unde $a \in R^n$, A matrice (m,n) iar C matrice simetrică (n,n) sînt constante.

P_{11}. Fie $f,g: R^n \to R$ iar $\alpha \in R$. Atunci pentru $x \in R^n$ pentru care $\frac{f}{g}$ are sens avem: $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g}\left[\nabla f - \frac{f}{g}\nabla g\right]$, iar pentru x pentru care f^{α} are sens avem:

$$\nabla(f^{\alpha}) = \alpha \cdot f^{\alpha-1} \cdot \nabla f$$

P_{12}. Să se calculeze $H(\|x\|)$

2. MULTIMI CONVEXE IN R^n. SEPARARE

2.1. Definiţii

D_1. Mulţimea $A \subset R^n$ este convexă dacă pentru orice $x^1, x^2 \in A$ şi pentru orice $0 < \lambda < 1$ avem $\lambda x^1 + (1-\lambda) x^2 \in A$.

D_2. Fie $a \in R^n$, vector nenul iar $\alpha \in R$. Mulţimea $H = \{x \in R^n / a'x = \alpha\}$ se numeşte hiperplan.

D_3. Fie a şi α ca în D_2. Se numeşte semispaţiu închis (deschis) mulţimea de forma $\{x \in R^n / a'x \leq \alpha\}$, respectiv $\{x \in R^n / a'x < \alpha\}$

D_4. Fie $A \subset R^n$ convexă iar $x^o \in A$. Punctul x^o este un punct extremal (sau vîrf) al lui A dacă din relaţia: $x^o = \lambda x^1 + (1-\lambda) x^2$ unde $x^1, x^2 \in A$ iar $0 < \lambda < 1$ rezultă că $x^1 = x^2$.

D_5. Se numeşte tronson o intersecţie finită de semispaţii închise.

D_6. Se numeşte poliedru un tronson mărginit.

D_7. Fie $A \subset R^n$. Acoperirea convexă a lui A, notată cu $[A]$, este intersecţia tuturor mulţimilor convexe din R^n care conţin pe A.

D_8. Fie $A, B \subset R^n$. Suma lor $A + B$ este definită prin:

$$A + B = \{z \in R^n / z = x + y,\ x \in A,\ y \in B\}$$

D_9. Fie $A \subset R^n$ iar $\lambda \in R$. Mulţimea λA este definită prin:

$$\lambda A = \{z \in R^n / z = \lambda x,\ x \in A\}$$

D_{10}. Fie $A, B \subset R^n$ nevide. Spunem că hiperplanul H definit în D_2 separă strict mulţimile A şi B dacă:

$$\sup\{a'x / x \in A\} < \alpha < \inf\{a'x / x \in B\}$$

D_{11}. Fie $A, B \subset R^n$ nevide. Spunem că hiperplanul H definit în D_2 separă mulţimile A şi B dacă:

$$\sup\{a'x / x \in A\} \leq \alpha \leq \inf\{a'x / x \in B\}$$

D_{12}. Fie $A \subset R^n$ nevidă. Spunem că hiperplanul H definit în D_2, este un hiperplan de sprijin al mulţimii A, dacă:

$$\inf\{a'x / x \in A\} = \alpha$$

Cda. 45/978 Fasc. 7

2.2. Proprietăţi ale mulţimilor convexe

P_1. Orice intersecţie de mulţimi convexe din R^n este o mulţime convexă.

P_2. Fie $A,B \subset R^n$ convexe iar λ, $\mu \in R$. Atunci mulţimea $\lambda A + \mu B$ este convexă.

P_3. Mulţimea $A \subset R^n$ este convexă dacă şi numai dacă pentru orice $x,y \in A$, mulţimea $T(x,y) = \{t \in R / y + t(x-y) \in X\}$ este convexă.

P_4. Fie $A \subset R^n$. Să se arate că mulţimea:

$$B = \left\{ y \,/\, y = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i,\ x^i \in A,\ \lambda_i \in R,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, k \geq 1 \right\}$$

este convexă.

P_5. Fie $A \subset R^n$. Mulţimea A este convexă dacă şi numai dacă pentru orice întreg $m \geq 1$, orice combinaţie convexă a oricăror m puncte din A se află în A.

P_6. Fie $A \subset R^n$, $m > n+1$ iar $y \in A$ cu $y = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$, unde $\lambda_i > 0$ pentru $i = \overline{1,m}$ şi $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$.

Atunci există $\mu_i \geq 0$, $i \geq 1$ cu $\sum_{i=1}^{m} \mu_i = 1$ şi cel puţin un μ_i egal cu zero, astfel ca $y = \sum_{i=1}^{m} \mu_i x^i$.

Indicaţie. Deoarece $m > n+1$, vectorii $x^1 - x^m, \ldots, x^{m-1} - x^m$ sînt liniar dependenţi şi există $c_1, \ldots, c_{m-1} \in R$ nu toţi nuli cu $\sum_{i=1}^{m-1} c_i(x^i - x^m) = 0$. Definim $c_m = -\sum_{i=1}^{m-1} c_i$ şi $\mu_i = \lambda_i - \frac{c_i}{\delta}$ unde $\delta = \max\left\{\frac{c_i}{\lambda_i} \,\middle|\, i = 1,2,\ldots,m\right\}$. Se arată uşor că $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ definiţi astfel verifică proprietăţile cerute.

P_7. Fie $A \subset R^n$ convexă iar $x \in \mathring{A}$, $y \in \bar{A}$. Atunci pentru orice $\lambda \in (0,1]$ avem $\lambda x + (1-\lambda) \cdot y \in \mathring{A}$.

Indicaţie. Fie $\lambda \in (0,1]$ fixat. Există $r > 0$ astfel ca $S(x,r) \subseteq A$ şi există un şir $(y_n)_n \subset A$ cu $y_n \to y$. Fie $z = \lambda x + (1-\lambda)y$ şi $z_n = \lambda x + (1-\lambda)y_n$. Deoarece şi $z_n \to z$, există un rang $N(r)$ încît pentru $n \geq N(r)$ să avem: $z_n \in S(z, \lambda r)$. Fie $\bar{n} \geq N(r)$. Atunci este clar că $z \in S(z_{\bar{n}}, \lambda r)$. Se poate arăta că $S(z_{\bar{n}}, \lambda r) = \lambda \cdot S(x,r) + (1-\lambda)\{y_{\bar{n}}\}$.

Se arată ușor că $\lambda \cdot S(x,r) + (1-\lambda)\{y_{\bar{n}}\} \subseteq A$ și deci $S(z_{\bar{n}}, \lambda r) \subseteq A$. Deoarece $z \in S(z_{\bar{n}}, \lambda r)$ putem alege $0 < \rho < \min \{\|z - z_{\bar{n}}\|, |\lambda r - \|z - z_{\bar{n}}\||\}$ astfel ca $S(z, \rho) \subset S(z_{\bar{n}}, \lambda r) \subseteq A$. Prin urmare $z \in \mathring{A}$.

P_8. Fie $A \subset R^n$ convexă. Atunci mulțimile $\mathring{A}$, $\bar{A}$ sînt convexe.

Indicație. Pentru convexitatea mulțimii $\mathring{A}$ se folosește P_7 și faptul că $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \bar{A}$. Pentru convexitatea mulțimii $\bar{A}$ se folosește faptul că $x \in \bar{A}$ dacă și numai dacă există un șir de elemente din A care converge la x.

P_9. Fie $A \subseteq R^n$ convexă cu $\mathring{A} \neq \emptyset$. Atunci $\mathring{A} = (\bar{A})^o$.

Indicație. Fie $\mathring{A} \neq \emptyset$. In general are loc $\mathring{A} \subseteq (\bar{A})^o$. Presupunem că există $x \in (\bar{A})^o$ cu $x \notin \mathring{A}$. Fie $y \in \mathring{A}$, $y \neq x$. Există $r > 0$ cu $S(x,r) \subseteq \bar{A}$. Fie α astfel ca: $1 < \alpha < 1 + r \cdot \|x-y\|^{-1}$. Se arată ușor că $z = \alpha x + (1-\alpha) y \in S(x,r)$ și deci $z \in \bar{A}$. Din expresia lui z rezultă $x = \lambda z + (1-\lambda) y$, unde $\lambda = \frac{1}{\alpha}$. Deoarece $y \in \mathring{A}$ iar $z \in \bar{A}$ putem folosi P_7 și rezultă $x \in \mathring{A}$, contradicție.

P_{10}. Să se arate că în general nu are loc P_9. dacă A nu este convexă.

P_{11}. Fie $A \subset R^n$ nevidă deschisă. Atunci acoperirea convexă a lui A, $[A]$ este deschisă.

Indicație. A fiind deschisă avem $A^o = A \subseteq [A]$. Deci $A \subseteq ([A])^o$. Dar $[A]$ este convexă deci $([A])^o$ este convexă din P_8. Deci $([A])^o$ este convexă și conține pe A prin urmare $([A])^o \supseteq [A]$. Deoarece și $([A])^o \subseteq [A]$ rezultă $[A] = ([A])^o$ adică $[A]$ este deschisă.

P_{12}. Dacă $A \subset R^n$ este mulțime compactă nevidă atunci $[A]$ este de asemenea compactă.

Indicație. Deoarece A este compactă există $M > 0$ cu $\|x\| \leq M$ pentru orice $x \in A$. Fie $y \in [A]$. Există (folosind și P_6) $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in A$ și $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0$ cu $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ astfel ca $y = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x^i$. Rezultă $\|y\| \leq \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \|x\| \leq M$ și deci $[A]$ este mărginită. Pentru a arăta că $[A]$ este închisă, fie x un punct limită. Atunci există un șir $\{x_j\} \subset [A]$ care converge la x. Deoarece $x_j \in [A]$, avem: $x_j = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{ij} x_{ij}$ cu $x_{ij} \in A$, $\lambda_{ij} \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{ij} = 1$. Pentru că avem un număr finit de indici i $(=1,2,\dots,n+1)$ putem extrage $\{\lambda_{ij_k}\}$ convergent la λ_i pentru orice i, și $\{x_{ij_k}\}$ convergent la z_i pentru orice i. Deci:

$$x = \lim_{k \to \infty} x_{j_k} = \lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{ij_k} x_{ij_k} = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i z_i$$

Insă $\lambda_{ij_k} \geq 0$ şi $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_{ij_k} = 1$. Trecînd la limită după $k \to \infty$ rezultă $\lambda_i \geq 0$ şi $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Mulţimea A este închisă şi deci $z_i \in A$ şi prin urmare $x \in [A]$.

P_{13}. Fie $A \subset R^n$ mărginită şi nevidă. Atunci $[\bar{A}] = \overline{[A]}$.

Indicaţie. Aplicînd P_{12} la $\bar{A}$ rezultă $[\bar{A}]$ închisă, deci $[\bar{A}] = \overline{[\bar{A}]}$. Insă $\overline{[A]} \subseteq \overline{[\bar{A}]}$. Rezultă $\overline{[A]} \subseteq [\bar{A}]$. Pentru incluziunea cealaltă avem $\bar{A} \subseteq \overline{[A]}$. Aplicăm P_8 la $\overline{[A]}$ şi definiţia acoperirii convexe şi rezultă $\overline{[A]} \supseteq [\bar{A}]$.

P_{14}. Fie $A \subset R^n$ convexă iar $x \in A$. Următoarele afirmaţii sînt echivalente:

1^o. Nu există două puncte $y, z \in A$, $y \neq z$ cu: $x = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z$.

2^o. x este un punct extremal al lui A.

3^o. Mulţimea $A - \{x\}$ este convexă.

Indicaţie. Se presupune că are loc 1^o şi că există $\lambda \in (0,1)$ $x = \lambda y + (1-\lambda) z$. Se pune $b = \min\{\lambda, 1-\lambda\}$, $c = \lambda + b$, $d = \lambda - b$ şi se foloseşte faptul că $\frac{1}{2} u + \frac{1}{2} v = x$ unde $u = cy + (1-c) z$, $v = dy + (1-d) z$. Se obţine că $1^o \Rightarrow 2^o$. Rezultă uşor că $2^o \Rightarrow 3^o$. Pentru $3^o \Rightarrow 1^o$ se presupune că există $y, z \in A$, $y \neq z$ cu $x = \frac{1}{2} y + \frac{1}{2} z$. Folosind 3^o ajungem la o contradicţie.

2.3. Separarea mulţimilor convexe. Hiperplane de sprijin.

P_1. Fie $A, B \subset R^n$ nevide. A şi B se pot separa strict printr-un hiperplan dacă şi numai dacă mulţimile $\{0\}$ şi $B - A$ se pot separa strict printr-un hiperplan.

Indicaţie. Dacă A,B pot fi separate strict prin hiperplanul $H = \{x \in R^n / a'x = \alpha\}$ atunci din relaţiile:

$$0 < \alpha - \sup\{a'x / x \in A\} < \inf\{a'x / x \in B\} - \sup\{a'x / x \in A\} \leq \inf\{a'x / x \in B - A\}$$

se poate alege $\alpha_1 = \alpha - \sup\{a'x / x \in A\}$ astfel ca hiperplanul $H_1 = \{x \in R^n / a'x = \alpha_1\}$ să separe strict $\{0\}$ şi $B - A$.

Invers, dacă $H = \{x \in R^n / a'x = \alpha\}$ separă strict $\{0\}$ şi $B - A$ atunci:

$$0 < \alpha < \inf\{a'x / x \in B - A\}$$

de unde se obţine relaţia:

$$a'y + \alpha \leq a'z \quad \text{pentru orice } y \in A,\ z \in B .$$

Rezultă:

$$\sup\{a'x / x \in A\} + \alpha \leq \inf\{a'x / x \in B\}.$$

Luăm $\alpha_1 = \sup\{a'x / x \in A\} + \frac{\alpha}{2}$ şi avem în vedere că $\alpha > 0$ şi obţinem că $H_1 = \{x \in R^n / a'x = \alpha_1\}$ separă strict A şi B.

P_2. Fie $A \subset R^n$ convexă şi nevidă. Mulţimile $\{0\}$ şi A se pot separa strict printr-un hiperplan dacă şi numai dacă $0 \notin \bar{A}$.

<u>Indicaţie</u>. Dacă H separă strict $\{0\}$ şi A rezultă $0 < \alpha \leq a'x$ pentru orice $x \in \bar{A}$, de unde se obţine că $0 \notin \bar{A}$. Invers. Fie $r > 0$ astfel ca $B = \overline{S(a,r)} \cap \bar{A} \neq \emptyset$. Funcţia $f: B \to R$ dată de $f(y) = \|y\|$ este continuă pe compactul B şi deci există $\bar{y} \in B$ cu: $\|\bar{y}\| = \min\{\|y\| / y \in B\}$. Se arată uşor că $\|\bar{y}\| \leq \|y\|$ pentru orice $y \in \bar{A}$. De aici se poate deduce că $\bar{y}'(\bar{y} - y) \leq 0$ pentru orice $y \in \bar{A}$, deoarece $\bar{A}$ este convexă. Pentru a arăta această relaţie este suficient să presupunem că există $\tilde{y} \in \bar{A}$ pentru care $\bar{y}(\bar{y} - \tilde{y}) > 0$ şi să alegem λ astfel ca: $0 < \lambda < \min\{1, 2\|\bar{y} - \tilde{y}\|^{-2}. \bar{y}'(\bar{y} - \tilde{y})\}$ şi atunci să punem $z = \lambda\tilde{y} + (1-\lambda)\bar{y} \in \bar{A}$. Se obţine $\|z\| < \|\bar{y}\|$ care contrazice alegerea lui $\bar{y}$. Prin urmare $\bar{y}(\bar{y} - y) \leq 0$ pentru orice $y \in \bar{A}$. Deoarece $\bar{y} \in \bar{A}$ iar $0 \notin \bar{A}$ rezultă $\bar{y} \neq 0$. Deci $0 < \|\bar{y}\|^2 \leq \inf\{\bar{y}'y / y \in A\}$. Luînd $\alpha_1 = \frac{1}{2}\|\bar{y}\|^2$, hiperplanul $H_1 = \{x \in R^n / \bar{y}'x = \alpha_1\}$ separă strict mulţimile $\{0\}$ şi A.

P_3. Fie $A, B \subset R^n$ nevide şi convexe. Ele se pot separa strict printr-un hiperplan dacă şi numai dacă $0 \notin \overline{B - A}$.

<u>Indicaţie</u>. Rezultă din P_2(§ 2.2) şi P_1, P_2 de mai sus.

P_4. Fie $A, B \subset R^n$ nevide, convexe, închise cu A mărginită. Atunci A şi B se pot separa strict printr-un hiperplan dacă şi numai dacă $A \cap B = \emptyset$.

<u>Indicaţie</u>. Se foloseşte P_3. Pentru suficienţă se foloseşte faptul că dacă $A \cap B = \emptyset$ atunci $0 \notin B - A = \overline{B - A}$.

P_5. A,B din R^n, nevide se pot separa printr-un hiperplan dacă şi numai dacă mulţimile $\{0\}$ şi $B - A$ se pot separa printr-un hiperplan.

P_6. Fie $A \subset R^n$ convexă. Atunci mulţimile $\{0\}$ şi A se pot separa printr-un hiperplan dacă şi numai dacă $0 \notin \mathring{A}$.

<u>Indicație</u>. Dacă $H = \{x \in R^n / a'x = \alpha\}$ unde $a \neq 0$ separă $\{0\}$ și A atunci $a'x \geq 0$ pentru orice $x \in A$. Presupunînd că $0 \in \mathring{A}$, există $r > 0$ cu $S(0,r) \subseteq A$. Insă există k natural astfel ca $y = -\frac{1}{k} \cdot a$ să fie în $S(0,r)$ și deci în A. Se obține o contradicție pentru că $a'y < 0$. Invers, presupunem că $0 \notin \mathring{A}$. Din P_9 (§ 2.2) avem $\mathring{A} = (\bar{A})^o$ și deci $0 \notin (\bar{A})^o$. Rezultă $0 \in \overline{R^n \setminus \bar{A}}$ adică există un șir $\{x^k\}_k \subset R^n \setminus \bar{A}$ cu limita 0. Fie k număr natural fixat. Mulțimea $A - x^k$ este convexă și $\overline{A - x^k} = \bar{A} - x_k$ și deci $0 \notin \overline{A - x^k}$. Deci putem aplica P_2 de mai sus; există $a^k \in R^n \setminus \{0\}$ astfel ca: $0 < \inf\{(a^k)' x / x \in A - x^k\}$. Fie $b^k = \frac{a^k}{\|a^k\|}$. Deci $0 < (b^k)'(x - x^k)$ pentru orice $x \in A$. Pentru fiecare k natural, procedînd în acest mod obținem un șir $\{b^k\}_k \subset \partial S(0,1)$, din frontiera sferei $S(0,1)$, care verifică relația de mai sus. Mulțimea $\partial S(0,1)$ este compactă și deci $\{b^k\}_k$ conține un subșir $\{b^{k_j}\}_j$ care are limita $a \in \partial S(0,1)$. In relația: $0 < (b^{k_j})'(x - x^{k_j})$ pentru orice $x \in A$, luînd j să tindă spre $+\infty$ obținem $a'x \geq 0$ pentru orice $x \in A$. Atunci hiperplanul $\{x \in R^n / a'x = 0\}$ separă mulțimile $\{0\}$ și A.

P_7. Fie $A, B \subset R^n$ nevide și convexe. Ele se pot separa printr-un hiperplan dacă și numai dacă $0 \notin \widehat{B - A}^{\,o}$.

P_8. Fie $A, B \subset R^n$ nevide și convexe. Dacă $A \cap B = \emptyset$ atunci ele se pot separa printr-un hiperplan.

P_9. Fie $A, B \subset R^n$ nevide și convexe. Dacă $\mathring{A} \neq \emptyset$ și $\mathring{A} \cap B = \emptyset$ atunci există un hiperplan H care separă A și B cu proprietatea că $H \cap \mathring{A} = \emptyset$.

<u>Indicație</u>. Pentru prima parte se folosește P_8. Pentru partea a doua fie $H = \{x \in R^n / a'x = \alpha\}$ cu $a \neq 0$ hiperplanul care separă A și B. Presupunem că $H \cap \mathring{A} \neq \emptyset$, deci există $x \in H \cap \mathring{A}$. Cum $a \neq 0$, există k natural cu: $k\|a\|^2 > \alpha$. Fie $y = ka$. Avem $a'[x + \beta(y - x)] > \alpha$ pentru orice $\beta > 0$. Insă, pe de altă parte $x \in \mathring{A}$, deci există $r > 0$ cu $S(x,r) \subseteq A$. Alegem $\bar{\beta}$ astfel ca $0 < \bar{\beta} < \frac{r}{\|y-x\|}$. Atunci $x + \bar{\beta}(y - x) \in S(x,r)$ și deci $x + \bar{\beta}(y - x) \in A$ și prin urmare $a'[x + \bar{\beta}(y - x)] \leq \alpha$ care contrazice o relație de mai sus valabilă pentru orice $\beta > 0$.

P_{10}. Hiperplanul $H = \{x \in R^n / a'x = \alpha\}$ este un hiperplan de sprijin pentru $A \subset R^n$ dacă și numai dacă $\inf\{a'x / x \in A\} \geq \alpha$ și $d(A,H) = 0$, unde $d(A,H) = \inf\{\|x - y\| / x \in A, y \in H\}$.

<u>Indicație</u>. Pentru necesitate este suficient de arătat că $d(A,H) = 0$. Din definiția hiperplanului de sprijin, există un șir

$\{x^k\}_k \subset A$ cu: $\lim\limits_{k\to\infty} a'x^k = \alpha$. Fie $y^k = x^k + \frac{b-a'x^k}{a'a}\, a$. Atunci $a'y^k = \alpha$ şi deci $y^k \in H$ pentru orice k natural. Se arată uşor că $\lim\limits_{k\to\infty}\|x^k - y^k\| = 0$ şi de aici rezultă că $d(A,H) = 0$.

Pentru suficienţă presupunem că $\delta = \inf\{a'x/x \in A\} - \alpha > 0$. Deci $0 < \delta \le a'x - a'y = a'(x-y) \le \|a\| \cdot \|x - y\|$ pentru orice $x \in A$, $y \in H$. Obţinem: $0 < \frac{\delta}{\|a\|} \le \|x - y\|$ pentru orice $x \in A, y \in H$. Deci: $d(A,H) \ge \frac{\delta}{\|a\|} > 0$ care contrazice faptul că $d(A,H) = 0$.

P_{11}. Fie $A \subset R^n$ convexă iar $x^0 \in \bar{A}$. Există un hiperplan de sprijin H al lui A, cu $H \ni x^0$, dacă şi numai dacă $x^0 \in \partial A$.

Indicaţie. Pentru necesitate se are în vedere că $H \cap \mathring{A} = \emptyset$ şi atunci dacă $x^0 \in H$ avem $x^0 \notin \mathring{A}$. Pentru suficienţă avem în vedere că dacă $x^0 \in \partial A$ atunci $0 \notin \widehat{(x^0 - A)}$ şi există, conform P_7, un hiperplan $H = \{x \in R^n / a'x = \alpha\}$ care separă A şi $\{x^0\}$. Deci $a'x \le \alpha \le a'x^0$ pentru orice $x \in A$. Dar există $\{x^k\}_k \subset A$ cu $x^k \to x^0$. Deci $a'x^k \le \alpha \le a'x^0$. Luînd limita după k tinzînd la infinit rezultă $\alpha = a'x^0$ adică H este hiperplan de sprijin pentru A cu $H \ni x^0$.

P_{12}. Fie hiperplanul $H = \{x \in R^n / a'x = \alpha\}$. Dacă avem x^0 şi y^0 în R^n cu $a'x^0 < \alpha < a'y^0$ atunci există $\lambda^0 \in (0,1)$ astfel ca $\lambda^0 x^0 + (1-\lambda^0)\, y^0 \in H$.

Indicaţie. Funcţia continuă $f(\lambda) = a'[\lambda x^0 + (1-\lambda)\, y^0] - \alpha$ definită pe $[0,1]$ cu valori reale are proprietatea $f(1) < 0 < f(0)$.

P_{13}. Fie $k \ge 2$ mulţimi convexe şi compacte $A_1,\dots,A_k \subset R^n$, a căror reuniune este o mulţime convexă. Dacă intersecţia a oricare k-1 mulţimi dintre ele nu este vidă, atunci şi: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k \ne \emptyset$.

Indicaţie. Demonstraţia se face prin inducţie matematică. Se foloseşte P_4 şi P_{12} de mai sus.

P_{14}. Fie $X_1, X_2, \dots, X_m$, $m > n+1$, mulţimi din R^n convexe, compacte. Fie $p \ge n+1$. Dacă orice intersecţie de p mulţimi X_i este nevidă, atunci şi orice intersecţie de (p+1) mulţimi X_i este nevidă.

Indicaţie. Fie $X_1,\dots,X_{p+1}$. Se notează:

$A_i = \bigcap\limits_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{p+1} X_j$; $i = 1,2,\dots,p+1$. Fie $a_i \in A_i$ şi $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{p+1}\}$. Se arată că $[A] \subset \bigcup\limits_{j=1}^{p+1} X_j$. Apoi se definesc mulţimile $X_j' = X_j \cap [A]$, $j = 1,2,\dots,p+1$, care sînt convexe şi compacte. Deoarece:

$\bigcup_{j=1}^{p+1} X'_j = (\bigcup_{j=1}^{p+1} X_j) \cap [A] = [A]$ este mulţime convexă iar intersecţia a oricăror p mulţimi X'_j, este nevidă, deoarece de exemplu: $\bigcap_{j=1}^{p} X'_j = (\bigcap_{j=1}^{p} X_j) \cap [A] = A_{p+1} \cap [A] \ni a_{p+1}$, putem aplica P_{13} şi obţinem că $\bigcap_{j=1}^{p+1} X'_j \neq \emptyset \iff (\bigcap_{j=1}^{p+1} X_j) \cap [A] \neq \emptyset$. Deaici rezultă că şi $\bigcap_{j=1}^{p+1} X_j \neq \emptyset$.

P_{15}. Fie X mulţime convexă iar $X_1, \dots, X_m$ $(m \geqslant 1)$ mulţimi convexe închise în R^n. Dacă $A_i = X \cap (\bigcap_{j \neq i} X_j) \neq \emptyset$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ dar $X \cap (\bigcap_{i=1}^{m} X_i) = \emptyset$ atunci $X \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} X_i$; anume, dacă $a_i \in A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$ şi $A = \{a_1, \dots, a_m\}$ atunci există $x_0 \in [A]$ astfel ca $x_0 \in X$ şi $x_0 \notin X_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

<u>Indicaţie</u>. Pentru $m = 1$ P_{15} este imediată. Dacă $m \geqslant 2$ atunci $[A] \subseteq X$. Fie $X'_i = X_i \cap [A]$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Aceste mulţimi sînt convexe şi închise. Este clar că $a_i \in \bigcap_{j \neq i} X'_j = [A] \cap (\bigcap_{j \neq i} X_j)$ şi deci orice intersecţie de $m - 1$ din mulţimile X'_i, este nevidă. Pe de altă parte $\bigcap_{j=1}^{m} X'_j = \emptyset$, deoarece în caz contrar am obţine că X şi $\bigcap_{i=1}^{m} X_i$ au puncte comune ceea ce nu se poate. Folosind acum P_{13} rezultă că mulţimea $\bigcup_{i=1}^{m} X'_i = \bigcup_{i=1}^{m} X'_i = [A] \cap (\bigcup_{i=1}^{m} X_i)$ nu poate fi convexă. De aici rezultă uşor că $[A] \not\subseteq \bigcup_{i=1}^{m} X_i$, adică există $x_0 \in [A] \subseteq X$ astfel ca $x_0 \notin X_i$, $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

3. SISTEME DE INECUATII DEFINITE IN R^n

3.1. Cazul liniar

Fie x un vector finit dimensional. Dacă x este nenegativ notăm $x \geqslant 0$; dacă este semipozitiv ($x \geqslant 0$, $x \neq 0$) notăm $x \geqslant 0$; dacă este pozitiv (adică pentru orice componentă a sa x_i avem $x_i > 0$) notăm $x > 0$.

P_1. Fie A matrice (m,n) iar $b \in R^m$. Atunci unul şi numai unul dintre sistemele liniare:

$$(1) \quad \begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \quad \text{şi} \quad (2) \quad \begin{cases} A'u \geqslant 0 \\ b'u < 0 \end{cases}$$

este compatibil, unde evident $x \in R^n$, $u \in R^m$.

Indicaţie. Se obţine uşor din P7 sau P8 din § 3.2.

P_2. Fie A matrice (m,n) iar $b \in R^m$. Atunci o condiţie necesară şi suficientă pentru ca sistemul (1) să fie compatibil este ca $A'u \geqslant 0 \Longrightarrow b'u \geqslant 0$.

Indicaţie. Rezultă din P_1.

P_3. Unul şi numai unul din următoarele sisteme liniare este compatibil:

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &\leqslant b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &= b_2 \\ A_{31}x_1 + A_{32}x_2 &\geqslant b_3 \end{aligned} \qquad \text{şi} \qquad \begin{aligned} &u_1 \geqslant 0 \\ &u_2 \text{ oarecare} \\ &u_3 \leqslant 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x_1 \geqslant 0 \\ &x_2 \text{ oarecare} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A'_{11}u_1 + A'_{21}u_2 + A'_{31}u_3 &\geqslant 0 \\ A'_{12}u_1 + A'_{22}u_2 + A'_{32}u_2 &= 0 \\ b'_1u_1 + b'_2u_2 + b'_3u_3 &< 0 \end{aligned}$$

unde $x_j \in R^{n_j}$, u_i, $b_i \in R^{m_i}$, iar A_{ij} este o matrice (m_i, m_j) ($i = 1,2,3$; $j = 1,2$).

Indicaţie. Inlocuim $x_2 = v_1 - v_2$ cu $v_1, v_2 \geqslant 0$ şi transformăm inegalităţile în egalităţi cu ajutorul variabilelor ecart $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant 0$ introduse în primul sistem în prima respectiv a treia inegalitate. Atunci primul sistem, sub formă matricială, devine:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{12} & I_1 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & -A_{22} & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & -A_{32} & 0 & -I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

Astfel se poate aplica P_1 acestui sistem.

P_4. Unul şi numai unul din următoarele perechi de sisteme liniare, este compatibil:

(i) $Ax = b$; $A'u = 0$, $b'u \neq 0$

(ii) $Ax \leqslant b$, $x \geqslant 0$ $A'u \geqslant 0$, $u \geqslant 0$, $b'u < 0$

(ooo) $Ax \geqslant 0$, $b'x < 0$; $A'u = b$, $u \geqslant 0$

P_5. Dacă următoarele sisteme liniare sînt compatibile să se scrie sistemele corespunzătoare incompatibile:

(i) $Ax + By = b$, $x \geqslant 0$

(ii) $Ax \geqslant a$, $Bx = b$, $x \geqslant 0$

(iii) $Ax \leqslant a$, $Bx = b$

P_6. Unul şi numai unul din următoarele sisteme liniare este compatibil:

$Ax + By + Cz = 0$; $A'u = 0$, $B'u \geqslant 0$, $C'u \geqslant 0$

$y \geqslant 0$, $z > 0$

<u>Indicaţie</u>. Al doilea sistem este incompatibil dacă şi numai dacă sistemul $A'u = 0$, $B'u \geqslant 0$, $C'u \geqslant 0$, $e'C'u > 0$ (unde $e' = (1,\dots,1)$) este incompatibil adică dacă şi numai dacă (conform P_5(i) şi P_3) există x arbitrar, $y \geqslant 0$, $\bar{z} \geqslant 0$ astfel ca $Ax + By + C\bar{z} = -Ce$, adică $Ax + By + Cz = 0$, $y \geqslant 0$ unde $z = \bar{z} + e > 0$.

P_7. Dintre sistemele:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + \sum_{j=4}^{q} A_jx_j = 0$$

$$x_2 \geqslant 0,\ x_3 > 0,\ x_j \geqslant 0 (j = 4 \div q)$$

şi:

$A_1'u = 0$, $A_j'u \geqslant 0$ $(j = 2 \div q)$ cu $A_3'u \neq 0$ sau

$A_j'u > 0$ pentru cel puţin un j $(4 \leqslant j \leqslant q)$

<u>Indicație</u>. Deoarece $x_j \gneqq 0 \iff (x_j \geqslant 0$ și $e_j' x_j - y_j = 0$ cu $y_j > 0)$ unde $y_j \in R$ și $e_j' = (1,\dots,1)$ are aceeași dimensiune cu $x_j (4 \leqslant j \leqslant q)$, primul sistem se scrie echivalent:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ 0' \\ 0' \\ \vdots \\ 0' \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} A_2 & A_4 & A_5 & \dots & A_q \\ 0' & e_4' & 0' & & 0' \\ 0' & 0' & e_5' & & 0' \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0' & 0' & 0' & \dots & e_q' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_3 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y \end{pmatrix} = 0 ,$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_5 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \geqslant 0 \quad , \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y \end{pmatrix} > 0$$

Presupunem că acest sistem este compatibil. Atunci există (folosind P_6) u și $v = (v_4, v_5, \dots, v_q)$ astfel ca $A_1'u = 0$, $A_2'u \geqslant 0$, $A_j'u + e_j v_j \geqslant 0$ $(j = 4 \div q)$ și $\begin{pmatrix} A_3'u \\ -v \end{pmatrix} \gneqq 0$. De aici obținem $A_3'u \geqslant 0$ și $v \leqslant 0$, $A_j'u \geqslant -e_j v_j \geqslant 0$. Dacă $v = 0$ atunci $A_3'u \gneqq 0$. Dacă există k $(4 \leqslant k \leqslant q)$ astfel ca $v_k < 0$ atunci $A_k'u \geqslant -e_k v_k > 0$.

P_8. Dintre sistemele:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + \sum_{j=4}^{q} A_j x_j = b \;;\; x_2 \geqslant 0,\ x_3 > 0 \ ,\ x_j \gneqq 0 \quad (4 \leqslant j \leqslant q);$$

$A_1'u = 0$, $A_j'u \geqslant 0$ $(j = 2 \div q)$, $b'u \leqslant 0$ și: $b'u < 0$ sau $A_3'u \neq 0$ sau $A_j'u > 0$ pentru cel puțin un j $(4 \leqslant j \leqslant q)$.

<u>Indicație</u>. Sistemul în x este compatibil dacă și numai dacă următorul sistem:

$$A_1x_1 + A_2x_2 + (A_3, -b) \begin{pmatrix} x_3 \\ x_o \end{pmatrix} + \sum_{j=4}^{q} A_j x_j = 0 \ ,\ x_2 \geqslant 0 \ ,\ \begin{pmatrix} x_3 \\ x_o \end{pmatrix} > 0 \ ,$$

$x_j \gneqq 0$ $(4 \leqslant j \leqslant q)$, este compatibil. Acum se poate aplica P_7.

P_9. Pentru ca sistemul:

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + \sum_{j=4}^{q} A_{1j}x_j = b_1$$

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + \sum_{j=4}^{q} A_{2j}x_j \leqslant b_2$$

$$A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + \sum_{j=4}^{q} A_{3j}x_j < b_3$$

$$A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + A_{i3}x_3 + \sum_{j=4}^{q} A_{ij}x_j \leqslant b_i \quad , (4 \leqslant i \leqslant p)$$

$$x_1 \text{ arbitrar}, \; x_2 \geqslant 0, \; x_3 > 0, \; x_j \geqslant 0, \; (4 \leqslant j \leqslant q)$$

să fie compatibil este necesar şi suficient ca sistemul:

$$A'_{11}u_1 + \sum_{i=2}^{p} A'_{i1}u_i = 0$$

$$E_j \equiv A'_{1j}u_1 + \sum_{i=2}^{p} A'_{ij}u_i \geqslant 0 \qquad (2 \leqslant j \leqslant q)$$

$$b'u \equiv b'_1u_1 + \sum_{i=2}^{p} b'_iu_i \leqslant 0$$

$$u_1 \text{ arbitrar} \; , \; u_i \geqslant 0 \quad (2 \leqslant i \leqslant p)$$

să nu aibă soluţii cu $b'u < 0$ sau $u_3 \geqslant 0$ sau $u_4 > 0$ sau ..... sau $u_p > 0$ sau $E_3 \geqslant 0$ sau $E_4 > 0$ sau.... sau $E_q > 0$.

Indicaţie. Introducem în inegalităţile primului sistem vectorii ecart $y_2 \geqslant 0$, $y_3 > 0$, $y_i \geqslant 0$ $(4 \leqslant i \leqslant p)$. Obţinem sistemul:

$$\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \\ \vdots \\ A_{p1} \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} A_{12} & 0 \\ A_{22} & I_2 \\ A_{32} & 0 \\ \vdots & \vdots \\ A_{p2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{13} & 0 \\ A_{23} & 0 \\ A_{33} & I_3 \\ \vdots & \vdots \\ A_{p3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + \sum_{j=4}^{q} \begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{2j} \\ \vdots \\ A_{pj} \end{pmatrix} x_j +$$

$$+ \sum_{i=4}^{p} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ I_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} y_i = b$$

x_1 arbitrar, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \geqslant 0$, $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} > 0$, $x_j \geqslant 0$ $(4 \leq j \leq q)$, $y_i \geqslant 0$ $(4 \leq i \leq p)$,

la care putem aplica P_8.

P_{10}. Pentru orice matrice A de tip (m,n) sistemele $Ax \geqslant 0$ şi $A'y = 0$, $y \geqslant 0$ $(x \in R^n,\ y \in R^m)$ au soluţiile x^o respectiv y^o astfel ca $Ax^o + y^o > 0$.

Indicaţie. Sistemele date se mai pot scrie sub forma:

$$\begin{aligned} A'y &= 0 \\ -Ax \quad &\leq 0 \\ -Ax - Iy &< 0 \\ y &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Acest sistem are soluţii dacă (folosind P_9) sistemul:

$$\begin{aligned} A'u_2 + A'u_3 &= 0 \\ Au_1 \quad - u_3 &\geqslant 0 \\ u_1 \text{ arbitrar},\ u_2 \geqslant 0,\ u_3 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

este incompatibil. Se arată uşor, prin reducere la absurd, că sistemul acesta este incompatibil.

P_{11}. Unul şi numai unul din următoarele sisteme liniare este compatibil:

$$Ax \geqslant 0,\ Bx > 0,\ x \geqslant 0 \quad ; \quad A'u + B'v \leq 0,\ u \geqslant 0,\ v \gneq 0 .$$

P_{12}. Pentru orice matrice L de tip (n,n) antisimetrică $(L' = -L)$ sistemul $Lx \geqslant 0$, $x \geqslant 0$ are o soluţie x^o astfel ca $Lx^o + x^o > 0$.

Indicaţie. Conform P_{11}, pentru ca sistemul $Lx \geqslant 0$, $Lx + x > 0$, $x \geqslant 0$ să aibă soluţii este suficient ca sistemul dual $u \geqslant 0$, $v \gneq 0$, $L'u + L'v + v \leq 0$ să fie incompatibil. Dacă am presupune că sistemul dual ar avea o soluţie $(\bar{u}, \bar{v})$ atunci: $0 < \bar{v}'\bar{v} \leq (\bar{u} + \bar{v})'\bar{v} \leq (\bar{u} + \bar{v})' \cdot L \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = 0$ (deoarece pentru orice $y \in R^n$ avem $y'Ly = 0$, L fiind antisimetrică), contradicţie.

3.2. Cazul neliniar

P_1. Fie $A \subseteq R^n$ mulţime nevidă convexă. Fie f o funcţie vectorială convexă m-dimensională definită pe A iar h o funcţie vectorială liniară k-dimensională definită pe R^n. Dacă sistemul: $f(x) < 0$, $h(x) = 0$, $x \in A$ este incompatibil atunci există $u \in R^m_+$ şi $v \in R^k$, $(u,v)' \neq 0$, astfel ca:

$$u'f(x) + v'h(x) \geq 0, \text{ pentru orice } x \in A.$$

<u>Indicație</u>. Pentru orice $x \in A$ fie:

$$B(x) = \{(y',z')' \,/\, y \in R^m,\ z \in R^k,\ y > f(x),\ z = h(x)\}$$

iar $B = \bigcup \{B(x) \,/\, x \in A\} \subset R^{m+k}$. Se arată ușor că $0 \notin B$ și că B este o mulțime nevidă convexă. Folosind P_6 din (2.3), există $u \in R^m$, $v \in R^k$, $(u,v) \neq 0$ astfel ca: $u'y + v'z \geq 0$ pentru orice $(y',z')' \in B$. Dacă există o componentă $u_i < 0$ atunci, deoarece y_i se poate alege oricît de mare se obține o contradicție. Deci $u \geq 0$. Fie $\lambda \in R$, $\lambda > 0$ iar $y_\lambda = f(x) + e\lambda$, $z_\lambda = h(x)$ pentru $x \in A$, unde $e \in R^m$ are toate componentele egale cu unu. Se arată că $u'f(x) + v'h(x) \geq -\lambda u'e$ pentru orice $x \in A$. Dacă se presupune că $\inf \{u'f(x) + v'h(x) \,/\, x \in A\} = -\varepsilon < 0$, atunci se poate alege λ astfel ca $\lambda u'e < \varepsilon$ și se ajunge la o contradicție și deci $\inf \{u'f(x) + v'h(x) / x \in A\} \geq 0$.

P_2. Fie $A \subseteq R^n$ nevidă și convexă. Fie f_1, f_2, f_3 funcții vectoriale convexe, m_1-, m_2-, respectiv m_3- dimensională iar h o funcție vectorială lineară k-dimensională definită pe R^n. Dacă sistemul: $f_1(x) < 0$, $f_2(x) \lneq 0$, $f_3(x) \leq 0$, $h(x) = 0$, $x \in A$ este incompatibil, atunci există $u^1 \in R_+^{m_1}$, $u^2 \in R_+^{m_2}$, $u^3 \in R_+^{m_3}$, $v \in R^k$, $(u^1, u^2, u^3, v) \neq 0$, astfel ca:

$$(u^1)' f_1(x) + (u^2)' f_2(x) + (u^3)' f_3(x) + v'h(x) \geq 0, \text{ pentru orice}$$
$$x \in A.$$

<u>Indicație</u>. Se folosește P_1 și faptul că dacă f este o funcție vectorială m dimensională definită pe $A \subset R^n$ atunci: dacă sistemul $f(x) \leq 0$, $x \in A$ este incompatibil atunci sistemul $f(x) \lneq 0$, $x \in A$ este incompatibil; iar dacă acest ultim sistem este incompatibil, atunci sistemul $f(x) < 0$, $x \in A$ este incompatibil.

P_3. Fie f o funcție vectorială convexă m-dimensională, definită pe mulțimea convexă $A \subset R^n$. Atunci sau sistemul: $f(x) < 0$, $x \in A$ are soluție, sau există $u \in R_+^m$, $u \neq 0$ astfel ca $u'f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in A$.

<u>Indicație</u>. Dacă $\bar{x} \in A$ și $f(\bar{x}) < 0$ atunci este evident că pentru orice $u \in R_+^m$ avem $u'f(\bar{x}) < 0$. Invers, dacă presupunem că sistemul $x \in A$, $f(x) < 0$ nu are soluție atunci se poate explica P_1, neglijînd egalitățile $h(x) = 0$, și se obține că există $u \in R_+^m \setminus \{0\}$ cu $u'f(x) \geq 0$ pentru orice x real.

P_4. Fie f, funcție convexă m-dimensională definită pe R^n iar B o matrice $k \times n$ cu liniile liniar independente. In plus fie d un vector k-dimensional. Atunci, sau sistemul

(S_1) $f(x) < 0$, $Bx = d$, $x \in R^n$

are soluţie, sau

(S_2) există $u \in R^m_+$, $u \neq 0$, $v \in R^k$ cu: $u'f(x) + v'(Bx - d) \geq 0$ pentru orice $x \in R^n$.

Indicaţie. Se arată uşor că dacă (S_1) are soluţie atunci nu are loc (S_2). Dacă (S_1) nu are soluţie atunci se aplică P_1 cu $h(x) = Bx - d$. Există $u \in R^m_+$, $v \in R^k$, $(u,v) \neq 0$ pentru care are loc relaţia din (S_2). Se arată prin reducere la absurd că $u \neq 0$. Se are în vedere că dacă $u = 0$ atunci $B'v = 0$ (adică B are liniile liniar independente) ceea ce nu se poate. Dacă s-ar presupune că $B'v \neq 0$ atunci luînd $x = -v'B$, dacă $v'd \geq 0$ şi $x = 2\,(v'd)\,v'B/\,v'B\,B'v$ dacă $v'd < 0$ se obţine că $v'(Bx - d) < 0$ ceea ce nu se poate.

P_5. Fie $X \subseteq R^n$ mulţime convexă iar A matrice $m \times n$. Dacă sistemul $Ax \leq b$, $x \in X$ este incompatibil dar devine compatibil dacă se înlătură oricare dintre restricţiile $a_i'x \leq b_i$ $(i = 1,2,\ldots,m)$, atunci există $x^0 \in X$ astfel ca $Ax^0 > b$.

Indicaţie. Se aplică P_{15} din (2.3) cu $X_i = \{x /\ a_i'x \leq b_i\}$.

P_6. Fie $f, f_1, f_2, \ldots, f_p$, funcţii convexe pe R^n iar $a_1, a_2, \ldots, a_m \in R^n$. Dacă sistemul:

(S) $f(x) < 0$, $f_k(x) \leq 0$ $(1 \leq k \leq p)$, $a_i'x \leq b_i$ $(1 \leq i \leq m)$ este incompatibil, dar există $x_0 \in R^n$ astfel ca $f_k(x_0) < 0$, $(1 \leq k \leq p)$ şi $a_i'x_0 \leq b_i$, $(1 \leq i \leq m)$, atunci există $y_1, \ldots, y_p \geq 0$, $u_1, \ldots, u_m \geq 0$ astfel ca:

$$f(x) + \sum_{k=1}^{p} y_k \cdot f_k(x) + \sum_{i=1}^{m} u_i(a_i'x - b_i) \geq 0\,,$$

pentru orice $x \in R^n$.

Indicaţie. Prin inducţie după m. Pentru $m = 1$ avem două cazuri: a) Sistemul obţinut din (S) prin neglijarea restricţiei $a_1'x \leq b_1$, este incompatibil. Atunci conform P_2 există $\lambda, y_1, \ldots, y_p \geq 0$ nu toţi nuli astfel ca: $\lambda f(x) + \sum_{k=1}^{p} y_k f_k(x) \geq 0$ pentru orice $x \in R^n$. Dacă $\lambda = 0$, atunci rezultă că $y_1 = \ldots = y_p = 0$, deoarece există $x^0 \in R^n$ cu $f_k(x^0) < 0$ pentru orice $1 \leq k \leq p$. Deoarece $(\lambda, y_1, \ldots, y_p) \neq 0$ rezultă $\lambda > 0$ şi atunci proprietatea rezultă imediat luînd $u_1 = 0$. b) Sistemul obţinut din (S) prin neglijarea restricţiei $a_1'x \leq b_1$, este compatibil. Atunci, conform P_5, există $\bar{x} \in X = \{x \in R^n / f(x) < 0,\ f_k(x) \leq 0,\ 1 \leq k \leq p\}$ cu $a_1'\bar{x} - b_1 > 0$. Insă sistemul (S) pentru $m = 1$ nu este compatibil, deci conform P_2, există $\lambda, y_1, \ldots, y_p, u_1$ nu toţi nuli cu: $\lambda f(x) + \sum_{k=1}^{p} y_k \cdot f_k(x) + u_1(a'x - b) \geq 0$ pentru orice $x \in R^n$. Dacă $\lambda = 0$, rezultă imediat că $y_1 = \ldots = y_p = 0$. Deci $u_1 > 0$. Insă funcţia liniară $g(x) = u_1(a_1'x - b_1) \geq 0$ este nenegativă pe R^n deci este constantă pe R^n. Deoarece $g(x_o) \geq 0$ şi $g(x_o) \leq 0$ (din enunţ) rezultă că $g(x) = 0$ pe R^n. Insă $g(\bar{x}) > 0$ şi deci trebuie să avem $\lambda > 0$ şi proprietatea este demonstrată pentru $m = 1$.

Presupunînd proprietatea adevărată pentru $m-1$, să demonstrăm pentru m. Sînt posibile două cazuri: a) Există un indice $1 \leq \ell \leq m$ astfel ca înlăturînd restricţia $a_\ell' x \leq b_\ell$ sistemul să rămînă incompatibil. Atunci, punînd $u_\ell = 0$, proprietatea rezultă din ipoteza de inducţie. b) Inlăturînd oricare din restricţiile $a_i'x \leq b_i$ sistemul devine compatibil. Atunci, folosind P_5 cu $X = \{x \in R^n / f(x) < 0,\ f_k(x) \leq 0,\ 1 \leq k \leq p\}$ există $\bar{x} \in X$ astfel ca $A\bar{x} > b$, unde $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$. Pe de altă parte deoarece sistemul (S) nu are soluţii, din P_2 rezultă că există λ, $\tilde{y}_k$, $\tilde{u}_i \geq 0$ ($1 \leq k \leq p$, $1 \leq i \leq m$) nu toate nule, astfel ca $g(x) = \lambda f(x) + \sum_{k=1}^{p} \tilde{y}_k f_k(x) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{u}_i (a_i'x - b_i) \geq 0$ pentru orice $x \in R^n$. Arătăm că $\lambda > 0$ şi atunci proprietatea rezultă luînd $y_k = \tilde{y}_k / \lambda$, $u_i = \tilde{u}_i / \lambda$ Presupunem $\lambda = 0$. Rezultă imediat că $\tilde{y}_1 = \ldots = \tilde{y}_p = 0$. Insă $g(x) = \tilde{u}'(Ax-b)$ este liniară şi nenegativă pe R^n, deci constantă. Deci $g(x_o) \geq 0$. Din enunţ rezultă $g(x_o) \leq 0$ deoarece $\tilde{u} \neq 0$. Rezultă $g(x) = 0$ pe R^n. Pe de altă parte $g(\bar{x}) > 0$, ceea ce nu se poate. Prin urmare $\lambda > 0$.

P_7. Să se deducă P_1 din § 3.1 folosind P_6 de mai sus.

<u>Indicaţie</u>. Se arată uşor că sistemele $Ax = b$, $x \geq 0$ şi $A'u \geq 0$, $b'u < 0$ nu pot fi simultan compatibile. Este suficient să arătăm că dacă al doilea sistem este incompatibil atunci primul sistem este compatibil. Al doilea sistem se scrie: $f(u) = b'u < 0$, $-A'u \leq 0$. Dacă este incompatibil, conform P_6, există $x \in R^n_+$ astfel ca: $b'u - x'A'u \geq 0$ pentru orice $u \in R^m$. Ultima relaţie se mai scrie: $u'(b-Ax) \geq 0$ pentru orice $u \in R^m$. De aici rezultă că trebuie să avem $b - Ax = 0$ şi deci primul sistem este compatibil.

P_8. Să se deducă P_1 din § 3.1. folosind P_4 din § 2.3.

<u>Indicație</u>. Luăm $X = \{b\}$, $Y = \{y \in R^m / y = Ax, x \geqslant 0\}$. Sistemul $Ax = b$, $x \geqslant 0$ nu are soluție dacă și numai dacă $X \cap Y = \emptyset$. Conform P_4 din § 2.3 există un hiperplan $\{y \in R^m / u'y = \alpha\}$, $u \neq 0$ care separă strict X și Y. Rezultă $u'b < \alpha < u'Ax$, pentru orice $x \geqslant 0$. Luînd $x = 0$ rezultă $u'b < 0$. Luînd apoi $x = (n,0,\ldots,0)'$ obținem: $\frac{\alpha}{n} < u'a_1$, unde a_1 este prima coloană din A. Trecînd la limită după $n \to \infty$ obținem $u'a_1 \geqslant 0$. Considerînd în general $x = (0,\ldots0,n,0,\ldots 0)'$ cu componenta $x_i = n$ obținem în același mod $u'a_i \geqslant 0$. Rezultă $u'A \geqslant 0$.

4. FUNCTII CONVEXE SI GENERALIZAT CONVEXE

4.1. Definiţii

Fie $A \subseteq R^n$, $f: A \longrightarrow R$ iar $x_o \in A$. Spunem că f în x_o este (relativ la A):

i) quasi-convexă (q-convexă), dacă:

$$f(x) \leq f(x_o) \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)x_o) \leq f(x_o)$$

pentru orice $x \in X$ şi orice $0 < \lambda < 1$ astfel ca:

$$\lambda x + (1-\lambda) x_o \in A ;$$

ii) strict-quasi-convexă (sq-convexă), dacă:

$$f(x) < f(x_o) \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda) x_o) < f(x_o)$$

pentru orice $x \in X$ şi orice $0 < \lambda < 1$ astfel ca:

$$\lambda x + (1-\lambda)x_o \in A ;$$

iii) pseudo-convexă (p-convexă) dacă f este diferenţiabilă în x_o şi pentru orice $x \in A$ avem:

$$f(x) < f(x_o) \Rightarrow (x - x_o)' \nabla f(x_o) < 0 ;$$

iv) convexă, dacă

$$f(\lambda x + (1-\lambda) x_o) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(x_o)$$

pentru orice $x \in A$ şi orice $0 < \lambda < 1$ astfel ca $\lambda x + (1-\lambda) x_o \in A$;

v) strict-convexă (s-convexă) dacă în iv) avem inegalitate strictă.

vi) respectiv q-concavă, sq-concavă, p-concavă, concavă, s-concavă, dacă $(-f)$ este, respectiv, q-convexă, sq-convexă, p-convexă, convexă, s-convexă în x_o.

4.2. Condiţii necesare şi/sau suficiente pentru convexitate

P_1. Fie $\varphi : (a,b) \subset R \longrightarrow R$. Următoarele condiţii sînt echivalente:

(i) φ este convexă pe (a,b)

(ii) pentru orice $t_1 < t_2 < t_3$, $t_1, t_2, t_3 \in (a,b)$ avem:

$$\frac{\varphi(t_3) - \varphi(t_1)}{t_3 - t_1} \leq \frac{\varphi(t_3) - \varphi(t_2)}{t_3 - t_2}$$

(iii) Dacă $\varphi \in C^1([a,b])$ atunci φ' este crescătoare

(iv) Dacă $\varphi \in C^2([a,b])$ atunci φ'' este nenegativă

(v) Dacă $\varphi \in C^1([a,b])$ atunci pentru orice $t_1, t_2 \in (a,b)$ avem:

$$\varphi(t_1) - \varphi(t_2) \geqslant (t_1 - t_2) \cdot \varphi'(t_2)$$

<u>Indicație</u>. Se arată că:

$$\begin{tikzcd}
(i) \arrow[d, leftrightarrow] \arrow[dd, bend right] & & \\
(ii) & (iii) \arrow[ul] \arrow[r, leftrightarrow] & (iv) \\
(v) \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

(i) $\to$ (v) . Pentru $t_1, t_2 \in (a,b)$, $0 < \lambda < 1$ avem $\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leqslant \lambda\varphi(t_1) + (1-\lambda)\,\varphi(t_2)$ de unde: $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) \geqslant \frac{1}{\lambda}\left[\varphi(t_2 + \lambda(t_1 - t_2)) - \varphi(t_2)\right] = (t_1 - t_2) \cdot \varphi'\left[t_2 + \theta\lambda(t_1 - t_2)\right]$ cu $0 < \theta < 1$.

Se ia $\lambda \to 0$ și se ține seama de continuitatea derivatei $\varphi'(t)$.

(v) $\to$ (iii). Se scriu relațiile care se obțin din (v) luînd t_1 și t_2 și apoi t_2 și t_1, și se adună aceste relații.

(iii) $\to$ (i). Fie $t_1 < t_2$ și $t = \lambda t_1 + (1-\lambda)\, t_2$ cu $0 < \lambda < 1$. Avem:

$$\varphi(t) - \varphi(t_1) = (t - t_1) \cdot \varphi'(\xi_1) \quad , \; t_1 < \xi_1 < t$$

$$\varphi(t_2) - \varphi(t) = (t_2 - t) \cdot \varphi'(\xi_2) \quad , \; t < \xi_2 < t_2$$

Folosim aceste relații și faptul că $\varphi'(\xi_1) \leqslant \varphi'(\xi_2)$ deoarece $\xi_1 < \xi_2$.

P_2. Fie $f : A \to R$, $A \subseteq R^n$ convexă.

Următoarele condiții sînt echivalente:

(i) f este convexă pe A

(ii) pentru orice $x \in A$, $y \in R^n$ funcția $\varphi_{x,y}(t) = f(x+ty)$ definită pe $T(x,y) = \{t \in R / \; x+ty \in A\}$ este convexă.

(iii) $(\forall)\; x_1, x_2 \in A$, funcția $\psi_{x_1,x_2}(\lambda) = f\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2\right]$ definită pe $[0,1]$ este convexă.

(iv) mulțimea $(A,f) = \left\{ \binom{x}{z} \in A \times R \;/\; f(x) \leqslant z \right\}$ este convexă.

(v) Fie A deschisă. Pentru orice $x_o \in A$, există $u_o \in R^n$ cu:

$$f(x) - f(x_o) \geqslant u_o'\,(x - x_o) \quad , \; (\forall) \;\; x \in A \, .$$

<u>Indicație</u>. Se arată că (i) $\to$ (ii) $\to$ (iii) $\to$ (i) și (i) $\to$ (iv) $\to$ (v) $\to$ (i). La (i) $\to$ (ii) se arată mai întîi că $T(x,y)$ este convexă. La (ii) $\to$ (iii) se observă că $\Psi_{x_1,x_2}(\lambda) = f(x_2 + \lambda(x_1-x_2)) = \varphi_{x_2,x_1-x_2}(\lambda)$. Pentru (iii) $\to$ (i) se are în vedere că: $\lambda = \lambda\cdot 1 + (1-\lambda)\cdot 0$ și $\Psi_{x_1,x_2}(\lambda) \le \lambda\Psi_{x_1,x_2}(1) + (1-\lambda)\Psi_{x_1,x_2}(0)$. Se arată ușor că (i) $\to$ (iv).

(iv) $\to$ (v). Fie A deschisă $x_o \in A$. Punctul $\begin{pmatrix} x_o \\ f(x_o)\end{pmatrix}$ este un punct frontieră al mulțimii convexe (A,f). Putem folosi P_{11} din § 2.3. Deci există $\begin{pmatrix} v \\ v_o\end{pmatrix} \neq 0$ astfel ca: $v'x + v_o z \ge v'x_o + v_o f(x)$ pentru orice $\begin{pmatrix} x \\ z\end{pmatrix} \in (A,f)$.

Se arată că $v_o \neq 0$. Dacă $v_o = 0$ atunci $v'(x-x_o) \ge 0$ pentru orice $x \in A$ și în particular într-o vecinătate a lui x_o. Se obține $v = 0$ ceea ce nu se poate. Apoi se arată că $v_o > 0$ căci dacă $v_o < 0$ atunci se poate lua z suficient de mare pentru care inegalitatea $v'x + v_o z \ge v'x_o + v_o f(x_o)$ nu este satisfăcută. Punem $\tilde{v} = \frac{1}{v_o}\cdot v$ și obținem $\tilde{v}'x + z \ge \tilde{v}'x_o + f(x_o)$ pentru orice $\begin{pmatrix} x \\ f(x)\end{pmatrix} \in (A,f)$. In particular relația este verificată de $(x', f(x))'$. Deci: $\tilde{v}'x + f(x) \ge \tilde{v}'x_o + f(x_o)$, care se mai scrie sub forma: $f(x) - f(x_o) \ge \tilde{v}'(x_o - x)$. Luînd $u_o = -\tilde{v}$ obținem: $f(x) - f(x_o) \ge u_o'(x-x_o)$ pentru orice $x \in A$.

(v) $\to$ (i). Fie $x_1, x_2 \in A$. Conform (v) există, pentru $x_o \in A$, un vector $u_o \in R^n$ cu:

$$f(x) - f(x_o) \ge u_o'(x-x_o)$$

pentru orice $x \in A$. Pentru x_1, x_2 relația devine:

$$f(x_1) - f(x_o) \ge u_o'(x_1-x_o)$$
$$f(x_2) - f(x_o) \ge u_o'(x_2-x_o)$$

Inmulțind prima relație cu $0 < \lambda < 1$ iar a doua cu $1-\lambda$ și apoi adunînd relațiile obținute, rezultă:

$$\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - f(x_o) \ge u_o' \left[\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 - x_o\right]$$

Luăm $x_o = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in A$ în această relație și obținem (i).

P_3. Fie $f: A \to R$, $f \in C^1(A)$, $A \subseteq R^n$ convexă, deschisă. Următoarele condiții sînt echivalente:

(i) f este convexă pe A;

(ii) $(\forall)\ x \in A$, $y \in R^n$ funcția $h_{x,y}(t) = y'\cdot\nabla f(x+ty)$ definită pe

$f(x,y)$ [din P_2] este crescătoare;

(iii) $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$ funcţia $g_{x_1,x_2}(\lambda) = (x_1-x_2)' \cdot \nabla f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2)$ definită pe $[0,1]$ este crescătoare în λ.

(iv) $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$ avem: $f(x_1) - f(x_2) \geq (x_1-x_2)' \cdot \nabla f(x_2)$

(v) $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$ avem: $f(x_1) - f(x_2) \leq (x_1-x_2)' \cdot \nabla f(x_1)$

(vi) $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$ avem: $(x_1-x_2)' \cdot \left[\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2)\right] \geq 0$

(vii) Fie $f \in C^2(A)$. Atunci matricea $Hf(x)$, pentru orice $x \in A$ este pozitiv semidefinită.

<u>Indicaţie</u>. Se arată că:

$$(i) \leftrightarrow (ii) \leftrightarrow (iii) \rightarrow (iv) \rightarrow (v) \rightarrow (vi) \rightarrow (iii)$$
$$(ii) \rightarrow (vii) \rightarrow (iv)$$

(i)$\leftrightarrow$(ii). Se foloseşte P_2(ii) şi P_1(iii) şi faptul că $\varphi'_{x,y} = h_{x,y}$.

(ii)$\leftrightarrow$(iii). Se foloseşte P_2(iii) şi P_1(iii).

(iii)$\rightarrow$(iv). Deoarece $g_{x_1,x_2}(\lambda)$ este crescătoare, pentru orice $\lambda > 0$ obţinem: $(x_1-x_2)' \cdot \nabla f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \geq (x_1-x_2)' \cdot \nabla f(x_2)$. Folosind formula Taylor de primul ordin avem:

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1-x_2)' \cdot \nabla f\left[x_2 + \theta(x_1-x_2)\right]$$

pentru $0 < \theta < 1$. Luînd $\lambda = \theta$ obţinem (iv).

(v)$\rightarrow$(vi). Se scrie relaţia din (v) pentru x_1 şi x_2, iar apoi relaţia pentru x_2, x_1. Adunînd relaţiile obţinute, sîntem conduşi la (vi).

(vi)$\rightarrow$(iii). Fie $x_1, x_2 \in A$ şi $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, $\lambda_1 < \lambda_2$. Avem:

$$g_{x_1,x_2}(\lambda_1) - g_{x_1,x_2}(\lambda_2) = (x_1-x_2)' \cdot \nabla f(\lambda_1 x_1 + (1-\lambda_1)\, x_2) -$$
$$- (x_1-x_2)' \cdot \nabla f(\lambda_2 x_1 + (1-\lambda_2)\, x_2) =$$
$$= \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot (y_1-y_2)' \left[\nabla f(y_1) - \nabla f(y_2)\right] \leq 0,$$

unde: $y_i = \lambda_i x_1 + (1-\lambda_i)\, x_2 \in A$, $i = 1,2$.

(vii)$\rightarrow$(iv). Fie $x_1, x_2 \in A$. Deoarece $f \in C^2(A)$, există $0 < \theta < 1$ astfel ca:

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1-x_2)' \cdot \nabla f(x_2) + \frac{1}{2}(x_1-x_2)' \cdot Hf(\theta x_1 + (1-\theta)\, x_2) \cdot (x_1-x_2)$$

Insă $\theta x_1 + (1-\theta)\, x_2 \in A$ şi prin urmare conform (vii) avem:

$$(x_1-x_2)' Hf(\theta x_1 + (1-\theta)\, x_2)\, (x_1-x_2) \geqslant 0 \, .$$

Prin urmare, $f(x_1) - f(x_2) \geqslant (x_1-x_2)' \cdot \nabla f(x_2)$.

(ii) $\to$ (vii). Avem $0 \in T(x,y)$, pentru orice $x \in A$, $y \in R^n$. Conform P_1(iii) şi (iv), $h_{x,y}(t)$ este crescătoare dacă şi numai dacă $h'_{x,y}(t) \geqslant 0$ pentru orice $t \in T(x,y)$. Pentru $t = 0$ obţinem:

$$h'_{x,y}(0) = y' \, Hf(x)\, y \geqslant 0 \, , \quad \text{pentru orice } y \in R^n$$

şi prin urmare are loc (vii).

P_4. Fie $A \subseteq R^n$ convexă iar $f : A \to R$.

Următoarele condiţii sînt echivalente:

(i) f este q-convexă pe A;

(ii) $(\forall)\ \alpha \in R$, mulţimea $A_\alpha = \{x \in A / \ f(x) \leq \alpha\}$ este convexă sau vidă.

(iii) $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$ avem $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$ pentru orice $\lambda \in [0,1]$.

(iv) $(\forall)\ x \in A$, $y \in R^n$, funcţia $\varphi_{x,y}(t) = f(x+ty)$ este q-convexă pe mulţimea $T(x,y)$ definită în P_2.

(v) $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$, funcţia $\psi_{x_1,x_2}(\lambda) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2)$ este q-convexă pe $[0,1]$.

(vi) Fie A deschisă, $f \in C^1(A)$. $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow (x_1-x_2)' \cdot \nabla f(x_2) \leq 0$.

(vii) Fie A deschisă, $f \in C^1(A) \cdot (\forall)\ x_1, x_2 \in A$ cu $(x_1-x_2)' \cdot$

$$\cdot \nabla f(x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Indicaţie. Se arată că:

$$\text{(iii)} \leftrightarrow \text{(i)} \leftrightarrow \text{(ii)} \quad ; \ \text{(vi)} \leftrightarrow \text{(vii)}$$

$$\text{(i)} \to \text{(iv)} \to \text{(v)} \to \text{(vi)} \to \text{(i)}$$

(ii) $\to$ (i). Fie $x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) \leq f(x_2)$. Se consideră A_α cu $\alpha = f(x_2)$, care este convexă şi deci $\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \in A_\alpha$ pentru orice $\lambda \in [0,1]$. Rezultă $\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2 \leq f(x_2)$.

(iv) $\to$ (v). Pentru $x_1, x_2 \in A$ avem $\psi_{x_1,x_2}(\lambda) = \varphi_{x_1,x_1-x_2}(\lambda)$.

(v) $\to$ (vi). Fie $x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) \leq f(x_2)$. Deoarece:

$$\psi_{x_1x_2}(0) = f(x_2) \, , \quad \psi_{x_1,x_2}(1) = f(x_1) \ \text{rezultă că:}$$

$$\psi_{x_1,x_2}(1) \leq \psi_{x_1,x_2}(0) \, .$$

Dar ψ este q-convexă, deci pentru orice $\lambda \in [0,1]$, $\lambda = \lambda \cdot 1 + (1-\lambda) \cdot 0$ avem: $\psi_{x_1,x_2}(\lambda) \leq \psi_{x_1,x_2}(0)$, adică $\lambda = 0$ este punct de maxim pentru ψ. Însă $f \in C^1(A)$. Deci $\psi \in C^1([0,1])$. Prin urmare:

$$\psi'_{x_1,x_2}(\lambda) = (x_1-x_2)' \cdot \nabla f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq 0$$

pentru orice $\lambda \in [0,1]$. Pentru $\lambda = 0$ obținem (vi).

(vi) $\to$ (i). Fie $x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) \leq f(x_2)$. Este suficient să se arate că $\psi_{x_1,x_2}(\lambda) \leq \psi_{x_1,x_2}(0)$, $(\forall)$ $\lambda \in [0,1]$. Pentru $\lambda = 0$ și $\lambda = 1$ relația este evidentă. Fie mulțimea:

$$L = \{\lambda \in (0,1) \;/\; \psi_{x_1,x_2}(\lambda) > \psi_{x_1,x_2}(0)\}$$

Deoarece $f \in C^1(A)$, $\psi_{x_1,x_2}(\lambda)$ este continuă pe $[0,1]$ și deci mulțimea L este deschisă. Presupunem $L \neq \emptyset$.

Fie $\lambda_0 = \sup\{\lambda / \lambda \in L\}$. L deschisă, avem $\lambda_0 \notin L$ și prin urmare $\psi_{x_1,x_2}(\lambda_0) \leq \psi_{x_1,x_2}(0)$. (*)

Arătăm că ψ_{x_1,x_2} este constantă pe L. Fie $\lambda \in L$ iar $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$. Cum $\psi_{x_1,x_2}(\lambda) > \psi_{x_1,x_2}(0)$ avem: $f(x_2) \leq f(x_\lambda)$, deci conform (vi) avem:

$$(x_2 - x_\lambda)' \cdot \nabla f(x_\lambda) = -\lambda (x_1-x_2)' \cdot \nabla f(x_\lambda) \leq 0$$

Dar $f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_\lambda)$, deci și:

$$(x_1 - x_\lambda)' \cdot \nabla f(x_\lambda) = (1-\lambda)(x_1-x_2)' \nabla f(x_\lambda) \leq 0.$$

Se obține: $(x_1-x_2)' \cdot \nabla f(x_\lambda) = 0$, adică $\psi'_{x_1,x_2}(\lambda) = 0$ și prin urmare ψ_{x_1,x_2} este constantă pe L. Deci: $\lim\limits_{\substack{\lambda \to \lambda_0 \\ \lambda \in L}} \psi_{x_1,x_2}(\lambda) > \psi_{x_1,x_2}(0)$ care împreună cu (*) contrazice continuitatea funcției ψ în λ_0.

P_5. Fie $A \subseteq R^n$, convexă, $f: A \to R$. Atunci următoarele condiții sînt echivalente:

(i) f este strict convexă pe A;

(ii) $(\forall)$ $x \in A$, $y \in R^n \setminus \{0\}$, funcția $\varphi_{x,y}(t) = f(x+ty)$ este strict convexă pe $T(x,y)$ definită în P_2;

(iii) $(\forall)$ $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$, funcția $\psi_{x_1,x_2}(\lambda) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2)$ este strict convexă pe $[0,1]$;

P_6. Fie $A \subseteq R^n$, convexă şi deschisă iar $f: A \longrightarrow R$ cu $f \in C^1(A)$. Atunci următoarele condiţii sînt echivalente:

(i) f este strict convexă pe A;

(ii) $(\forall)\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2$:
$$f(x_1) - f(x_2) > (x_1 - x_2)' \nabla f(x_2) ;$$

(iii) $(\forall)\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2$:
$$f(x_1) - f(x_2) < (x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_1) ;$$

(iv) $(\forall)\ x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2$:
$$(x_1 - x_2)' \left[\nabla f(x_1) - \nabla f(x_2)\right] > 0$$

P_7. Fie $A \subseteq R^n$ convexă iar $f: A \longrightarrow R$. Atunci următoarele condiţii sînt echivalente:

(i) $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) < f(x_2)$, avem:
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) < f(x_2)$$
pentru orice $0 < \lambda < 1$;

(ii) f este sq-convexă pe A ;

(iii) $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$ avem :
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) < \max\left\{f(x_1),\ f(x_2)\right\}$$
pentru orice $0 < \lambda < 1$.

P_8. Fie $B \subseteq R^n$ deschisă, $A \subseteq B$, iar $f: B \longrightarrow R$ cu f diferenţiabilă pe B. Atunci următoarele condiţii sînt echivalente:

(i) f este p-convexă pe A ;

(ii) $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_1) < f(x_2)$, avem:
$$(x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_2) < 0 ;$$

(iii) $(\forall)\ x_1, x_2 \in A$ cu: $(x_1 - x_2)' \cdot \nabla f(x_2) \geq 0$, avem:
$$f(x_1) \geq f(x_2) .$$

P_9. Fie $A \subseteq R^n$ convexă, $f: A \longrightarrow (0, \infty)$. Dacă pentru orice x_1, $x_2 \in A$ şi orice $0 < \lambda < 1$ avem:
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \leq \left[f(x_1)\right]^{\lambda} \cdot \left[f(x_2)\right]^{1-\lambda}$$
atunci f este convexă pe A.

P_{10}. Dacă $f: A \longrightarrow R$ este convexă pe mulţimea convexă $A \subseteq R^n$ atunci f este p-convexă pe A.

Fie $f: B \to R$, $B \subseteq R^n$ deschisă iar $A \subseteq B$. Fie $\bar{x} \in A$.

P_{11}. Fie A convexă iar f diferenţiabilă în $\bar{x}$. Atunci:

(i) Fie A convexă iar f diferenţiabilă în $\bar{x}$. Atunci:

$$f(\bar{x}) = \min\{f(x)/\ x \in A\} \implies (x-\bar{x})' \cdot \nabla f(\bar{x}) \geq 0,\ (\forall)\ x \in A.$$

(ii) Fie f, p-convexă în $\bar{x}$. Atunci:

$$(x-\bar{x})' \cdot \nabla f(\bar{x}) \geq 0,\ (\forall)\ x \in A \implies f(\bar{x}) = \min\{f(x)/x \in A\}.$$

Indicaţie. (i) Fie $x \in A$ iar $x_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)\bar{x}$. Evident $x_\lambda \in A$, $(\forall)\ 0 \leq \lambda \leq 1$. Avem $f(\bar{x}) \leq f(x_\lambda)$, $(\forall)\ 0 \leq \lambda \leq 1$. Deci:

$$0 \leq f(x_\lambda) - f(\bar{x}) = \lambda \cdot (x-\bar{x})' \cdot \nabla f(\bar{x}) + \lambda \cdot \|x-\bar{x}\| \cdot \omega[\bar{x}, \lambda(x-\bar{x})]$$

unde $\lim_{\lambda \to 0} \omega[\bar{x}, \lambda(x-\bar{x})] = 0$. Prin urmare pentru orice $0 < \lambda \leq 1$ avem:

$$(x-\bar{x})' \cdot \nabla f(\bar{x}) + \omega[\bar{x}, \lambda(x-\bar{x})] \cdot \|x-\bar{x}\| \geq 0.$$

Luînd λ tinzînd la zero obţinem:

$$(x-\bar{x})' \cdot \nabla f(\bar{x}) \geq 0$$

(ii) Se foloseşte ipoteza împreună cu P_8(iii).

P_{12}. Fie $A \subseteq R^n$ deschisă, convexă, $f: A \to R$ iar $\bar{x} \in A$. Presupunem f diferenţiabilă în $\bar{x}$. Atunci:

(i) $f(\bar{x}) = \min\{f(x)/\ x \in A\} \implies \nabla f(\bar{x}) = 0$;

(ii) Fie f, p-convexă în $\bar{x}$. Atunci :

$$\nabla f(\bar{x}) = 0 \implies f(\bar{x}) = \min\{f(x)/\ x \in A\}.$$

Indicaţie. Se foloseşte P_{11} şi faptul că A este deschisă; există $\delta > 0$ astfel ca $x = \bar{x} - \delta\ \nabla f(\bar{x}) \in A$. Apoi se are în vedere relaţia din P_{11}(i).

P_{13}. Fie $A \subseteq R^n$, convexă, $B \subseteq R^n$ deschisă, $A \subseteq B$ iar $f: B \to R$. Dacă f este p-convexă pe A atunci f este sq-convexă pe A şi prin urmare şi q-convexă pe A. In general inversa nu este adevărată.

Indicaţie. Se presupune că f nu este sq-convexă. Atunci există $x_1, x_2 \in A$ cu $f(x_2) < f(x_1)$ şi există $0 < \lambda_o < 1$ astfel ca pentru: $x_o = \lambda_o x_1 + (1-\lambda_o) x_2$ să avem $f(x_o) = \max\{f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2/0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Folosind P_{11}(i) avem: $(x_1-x_o)' \nabla f(x_o) \leq 0$ şi $(x_2-x_o)' \cdot \nabla f(x_o) \leq 0$.

Inlocuind pe x_o în aceste relaţii cu expresia sa obţinem: $(x_1-x_2)' \cdot \nabla f(x_o) = 0$ şi $(x_2-x_o)' \nabla f(x_o) = 0$. Acum din p-convexitatea lui f rezultă că $f(x_2) \geq f(x_o)$ şi deci $f(x_1) > f(x_o)$, deoarece

$f(x_1) > f(x_2)$. Rezultă o contradicţie cu faptul că x_0 este un punct de maxim pentru f pe segmentul $[x_1,x_2] = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2 / \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Pentru a arăta că inversa nu este în general adevărată se poate considera $f(x) = x^3$, $f: R \to R$.

P_{14}. Fie $A \subseteq R^n$ convexă iar $f: A \to R$ inferior semicontinuă şi strict quasiconvexă pe A. Atunci f este q-convexă pe A dar nu şi invers.

Indicaţie. Fie f, sq-convexă pe A iar $x_1, x_2 \in A$. Dacă $f(x_1) < f(x_2)$ afirmaţia este imediată. Dacă $f(x_1) = f(x_2)$, fie:

$$\Omega = \{y \in (x_1,x_2) \ / \ f(y) > f(x_2)\}$$

Presupunem că $\Omega \neq \emptyset$. Atunci din sq-convexitatea lui f rezultă că pentru orice $y \in \Omega$ avem (x) $f(y) > f(x)$ pentru orice $x \in [x_1,x_2] = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2 / \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$, $x \neq y$. Deoarece f este inferior semicontinuă, mulţimea Ω este deschisă relativ la segmentul $(x_1,x_2) = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2 / \ 0 < \lambda < 1\}$. Deci există cel puţin două puncte $y_1, y_2 \in \Omega$ cu $y_1 \neq y_2$. Conform (x) avem $f(y_1) > f(y_2)$, şi $f(y_2) > f(y_1)$ ceea ce nu se poate.

Pentru a arăta că relaţia inversă nu are loc în general, se poate considera $f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ 0 & , 0 < x < 1 \\ x-1 & , x \geq 1 \end{cases}$ cu $f: R \to R$ care este q-convexă fără ca să fie sq-convexă. De exemplu se poate considera $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $\lambda = \frac{1}{10}$

P_{15}. Fie $A \subseteq R^n$ convexă cu: $-A \subseteq A$. Dacă $f: A \to R$ este convexă şi $f(0) = 0$ atunci $f(x) \geq -f(-x)$, pentru orice $x \in A$.

Indicaţie. Se scrie $0 = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2}(-x) \in A$ şi deci:

$f(0) \leq \frac{1}{2}\left[f(x) + f(-x)\right]$ şi de aici afirmaţia cerută.

P_{16}. Fie $A \subseteq R^n$ convexă, x^o punct interior lui A, iar $f: A \to R$ convexă. Atunci următoarele afirmaţii sînt echivalente:

(i) f este diferenţiabilă Gâteaux în punctul x^o;

(ii) f admite derivate parţiale în raport cu orice variabilă x_j, $j = \overline{1,n}$, în punctul x^o;

(iii) f este diferenţiabilă Fréchet în punctul x^o.

Indicaţie. Se arată că:

$$(i) \to (ii) \to (iii) \to (i).$$

Implicaţia (i) $\longrightarrow$ (ii) este evidentă, iar implicaţia (iii) $\longrightarrow$ (i) rezultă din P_4 din § 1.2.

(ii) $\longrightarrow$ (iii). Fie $r > 0$ cu $S(x^o, r) \subseteq A$ iar $g: S(0,r) \longrightarrow R$ definită prin: $g(h) = f(x^o+h) - f(x^o) - h' \nabla f(x^o)$, $(\forall)\ h \in S(0,r)$. Se arată că g este convexă. Fie $\{e^j\}_{j=\overline{1,n}}$ baza unitate din R^n. Atunci

$$g(h) = g(\sum_{j=1}^{n} h_j e^j) = g(\sum \frac{1}{n} (nh_j e^j)) \leqslant \frac{1}{n} \sum g(nh_j e^j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{f(x^o + nh_j e^j) - f(x^o)}{n} - h_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^o) \right]$$

pentru orice $h \in S(0, \frac{r}{n})$. Definim pentru fiecare $j = \overline{1,n}$ funcţia

$\varphi_j : S(0, \frac{r}{n}) \longrightarrow R$ prin:

$$\varphi_j(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x^o + nh_j e^j) - f(x^o)}{nh_j} - \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x^o) & , h_j \neq 0 \\ 0 & , h_j = 0 \end{cases}$$

Atunci $g(h) \leqslant \sum_{j=1}^{n} h_j \varphi_j(h)$, $(\forall)\ h \in S(0, \frac{r}{n})$.

Punem $\varphi(h) = (\varphi_1(h), \dots, \varphi_n(h))'$ şi obţinem:

$$g(h) \leqslant h' \varphi(h) \leqslant \|h\| \cdot \|\varphi(h)\| \quad , (\forall)\ h \in S(0, \frac{r}{n}).$$

Este clar că şi:

$$g(-h) \leqslant \|h\| \cdot \|\varphi(-h)\| \quad , (\forall)\ h \in S(0, \frac{r}{n}).$$

Folosind P_{14} avem: $-g(-h) \leqslant g(h)$, $(\forall)\ h \in S(0, \frac{r}{n})$, de unde obţinem:

$$-\|\varphi(-h)\| \leqslant \frac{1}{\|h\|} g(h) \leqslant \|\varphi(h)\| \quad , (\forall)\ h \in S(0, \frac{r}{n}) \setminus \{0\}$$

Deoarece $\lim_{h \to 0} \varphi_j(h) = 0$, $(\forall)\ j = \overline{1,n}$, avem $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

Se obţine: $\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|} g(h) = 0$, adică f este diferenţiabilă Fréchet în punctul x^o.

4.3. Proprietăţi

P_1. Fie $A \subseteq R^n$ convexă iar $f: A \to R$. Dacă $\bar{x} \in A$ este un minim local pentru f iar f este sq-convexă în $\bar{x}$ atunci $\bar{x}$ este un minim global pentru f.

Indicaţie. Dacă $\bar{x}$ este minim local pentru f atunci există $r > 0$ astfel ca $f(\bar{x}) \leq f(x)$, $(\forall)$ $x \in A \cap S(\bar{x},r)$. Presupunem că există $x^{*} \in A \setminus S(\bar{x},r)$ cu $f(x^{*}) < f(\bar{x})$. Din sq-convexitatea lui f în $\bar{x}$ şi din convexitatea mulţimii A avem:

$$f(\lambda x^{*} + (1-\lambda)\bar{x}) < f(\bar{x}) \text{ , } (\forall) \ 0 < \lambda < 1.$$

Fie $0 < \tilde{\lambda} < \frac{r}{\|\bar{x}-\bar{\bar{x}}\|}$. Atunci $\tilde{\lambda}\bar{x} + (1-\tilde{\lambda})x^{*} \in A \cap S(\bar{x},r)$ contrazice proprietatea de minim local a lui $\bar{x}$.

P_2. Să se arate că nu are loc P_1 dacă se înlocuieşte sq-convexitatea lui f cu q-convexitate.

Indicaţie. Se poate considera:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{dacă } x \leq 0 \\ 0 & \text{dacă } 0 < x < 1 \\ x-1 & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases}$$

cu $\bar{x} = \frac{1}{2}$ minim local.

P_3. Fie $B \subseteq R^n$ deschisă, $A \subseteq B$, $f: B \to R$ p-convexă, iar $\bar{x} \in A$. Atunci dacă: $(x-\bar{x})' \nabla f(\bar{x}) \geq 0$, $(\forall)$ $x \in A$, avem $f(\bar{x}) = \min\{f(x)/x \in A\}$.

P_4. Fie $A \subseteq R^n$ convexă. Atunci $f: A \to R$ este convexă dacă şi numai dacă:

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

pentru orice p natural, orice $x_1,\ldots,x_p \in A$, $(\forall)$ $\lambda_1,\ldots,\lambda_p \geq 0$ cu $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$

P_5. Fie $A \subseteq R^n$ convexă, $f: A \to R$ continuă. Atunci f este convexă pe A dacă şi numai dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$ avem: $f(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2) \leq \frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$.

P_6. Fie $A \subseteq R^n$ convexă. Atunci $f: A \to R$ este convexă şi concavă pe A dacă şi numai dacă pentru orice $\mu \in R$ şi $x_1, x_2 \in A$ cu $x = \mu x_1 + (1-\mu)x_2 \in A$ avem: $f(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) = \mu f(x_1) + (1-\mu)f(x_2)$.

<u>Indicație</u>. Presupunem f convexă și concavă. Punem $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} \in A$. Atunci pentru orice $0 < \lambda < 1$ avem: $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(x_0) =$

$$= f\left[\left(\lambda\mu + \frac{1-\lambda}{2}\right) x_1 + \left(\lambda(1-\mu) + \frac{1-\lambda}{2}\right) x_2\right]$$

Atunci pentru λ suficient de mic, avem ultima expresie egală cu:

$$\left(\lambda\mu + \frac{1-\lambda}{2}\right) f(x_1) + \left(\lambda(1-\mu) + \frac{1-\lambda}{2}\right) f(x_2) =$$

$$= \lambda\left[\mu f(x_1) + (1-\mu) f(x_2)\right] + (1-\lambda) f(x_0) .$$

De aici rezultă ușor relația cerută.

P_7. Fie $A \subseteq R^n$ convexă iar $f: A \to R$ convexă care își atinge maximul global în $\bar{x}$ punct interior pentru A. Atunci f este constantă pe A.

<u>Indicație</u>. Presupunem că există $y \in A$ cu $f(y) < f(\bar{x})$. Atunci fie $\alpha > 1$ astfel ca $z = y + \alpha(\bar{x}-y)$ să aparțină lui A . Atunci:

$$\bar{x} = \frac{1}{\alpha} z + \frac{\alpha-1}{\alpha} y \in A \quad \text{și avem:}$$

$$f(\bar{x}) \leq \frac{1}{\alpha} f(z) + \frac{\alpha-1}{\alpha} f(y) < \frac{1}{\alpha} f(\bar{x}) + \frac{\alpha-1}{\alpha} f(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

care conduce la contradicție

P_8. Fie $A \subseteq R^n$ convexă, deschisă. Dacă $f: A \to R$ este o funcție convexă pe A atunci f este continuă pe A.

<u>Indicație</u>. Fie $x^0 \in A$. Există $r > 0$ astfel ca:

$$B = \left\{x \in R^n \;/\; |x_j - x_j^0| < r ,\; j = \overline{1,n}\right\} \subset A$$

Fie C mulțimea celor 2^n vîrfuri ale cubului B, iar $\alpha = \max\left\{f(x) \;/\; x \in C\right\}$. Arătăm că dacă $\|x-x^0\| < r$ atunci:

$$(*) \qquad \left|f(x) - f(x^0)\right| \leq \frac{\alpha - f(x^0)}{r} \|x-x^0\| .$$

Deoarece mulțimea $A_\alpha = \left\{x \in A \;/\; f(x) \leq \alpha\right\}$ este convexă iar $C \subset A_\alpha$ avem $B = [C] \subset A_\alpha$ și deci și $f(x^0) \leq \alpha$ .. Fie x astfel ca $\|x-x^0\| < r$.

Notăm $\lambda = \frac{\|x-x^0\|}{r} \in (0,1)$

și:

$$x_1 = x^0 + \frac{1}{\lambda}(x-x^0)$$

$$x^2 = x^0 - \frac{1}{\lambda}(x-x^0)$$

Avem $\|x^1-x^0\| = \|x^2-x^0\| = r$ și deci $f(x^1) \leq \alpha$, $f(x^2) \leq \alpha$

Insă:

$$f(x) = f(\lambda x^1 + (1-\lambda) x^0) \leq \lambda \alpha + (1-\lambda) f(x^0) ;$$

$$f(x^0) = f\left(\frac{1}{1+\lambda} x + \frac{\lambda}{1+\lambda} x^2\right) \leq \frac{1}{1+\lambda}\left[f(x) + \lambda\alpha\right]$$

De aici rezultă imediat (x) şi prin urmare rezultă şi continuitatea lui f.

P_9. Să se arate că dacă în P_8 nu se presupune A deschisă atunci în general f nu este continuă.

Indicaţie. Se poate lua $A = \{x \in R / x \geq -1\}$ iar $f(x) = 2$ dacă $x = -1$ şi $f(x) = (x)^2$ dacă $x > -1$.

P_{10}. Fie $A \subseteq R^n$ convexă, deschisă, $f: A \to R$ convexă. Definim:

$$B = \{y \in R^n / \sup_{x \in A} (y'x - f(x)) < +\infty\}$$

şi

$$g(y) = \sup_{x \in A} \{y'x - f(x)\} .$$

Atunci:

a) $(\forall)\ x \in A$, $(\exists)\ y \in B$ astfel ca:

$$x'y = f(x) + g(y)$$

b) $f(x) = \sup_{y \in B} (x'y - g(y))$

c) dacă f este diferenţiabilă pe A atunci: $\nabla f(X) \subseteq Y$.

Indicaţie. Pentru (a) se foloseşte $P_2(v)$ din (§ 4.2). La (c) fie $x_0 \in A$. Conform (a) există $y_0 \in B$ astfel ca: $x_0' y_0 = f(x_0) + g(y_0)$. Deoarece $g(y_0) \geq x'y_0 - f(x)$, $(\forall)\ x \in A$ (din (b)) rezultă că x_0 este un punct de extremum pentru funcţia $\varphi(x) = x'y_0 - f(x)$. Deci $\nabla\varphi(x_0) = 0$. Insă $\nabla\varphi = y_0 - \nabla f$, deci $\nabla f(x_0) = y_0 \in B$.

P_{11}. Fie $A \subseteq R^n$ convexă, $g: A \to R^m$ convexă iar $\varphi : [g(A)] \subset R^m \to R$, unde $[g(A)]$ este acoperirea convexă a mulţimii g(A). Dacă φ este crescătoare în raport cu fiecare componentă y_i pentru care $g_i(x)$ nu este liniară şi este:

(i) q-convexă;

(ii) sq-convexă;

(iii) convexă;

pe $B = [g(A)]$, atunci funcţia compusă $\psi(x) = \varphi(g(x))$ are proprietatea (i), (ii) respectiv (iii) pe A.

<u>Indicaţie</u>. (i) Fie $x_1, x_2 \in A$, $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, $\lambda \in (0,1)$. Avem $g(x_0) \in B$ şi deci: $g(x_0) \leq \lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2)$, unde avem egalitate pentru componentele liniare ale lui g. Obţinem:

$$\varphi(g(x_0)) \leq \varphi(\lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2))$$

deoarece φ este crescătoare în raport cu componentele neliniare ale lui g. Însă:

$$\varphi(\lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2)) \leq \max \{ \varphi(g(x_1)), \varphi(g(x_2)) \}$$

adică: $\psi(x_0) \leq \max \{ \psi(x_1), \psi(x_2) \}$.

(ii), (iii) se obţin în acelaşi mod.

P_{12}. Orice transformare (strict) crescătoare.

P_{12}. Fie $A \subseteq R^n$ convexă, $\gamma : A \longrightarrow R$ q-convexă iar φ o funcţie definită pe $B = [\gamma(A)]$, $\varphi : B \longrightarrow R$ crescătoare. Atunci funcţia $\psi = \varphi \circ \gamma$ este q-convexă.

P_{13}. Dacă în P_{12} se consideră γ ca fiind sq-convexă iar φ strict crescătoare atunci ψ este sq-convexă.

P_{14}. Să se arate că P_{12} şi P_{13} nu au loc dacă se consideră γ, funcţie convexă.

<u>Indicaţie</u>. Se poate lua $\gamma(x) = x$, $\gamma : R \longrightarrow R$ iar $\varphi(y) = y^3$. Atunci $\psi(x) = (x)^3$ nu este convexă.

P_{15}. Fie f_i, $i \in M$ (finită sau infinită) funcţii convexe. Atunci funcţiile:

$$f(x) = \sup \{ f_i(x) \,/\, i \in M \}$$
$$g(x) = \sup \{ /f_i(x)/ \,/\, i \in M \}$$

sînt convexe.

P_{16}. O funcţie f strict convexă are cel mult un minim pe mulţimea convexă $A \subseteq R^n$, unde $f : A \longrightarrow R$.

P_{17}. Fie f_i, $i \in M$ (finită sau infinită) funcţii q-convexe. Atunci funcţia $f(x) = \sup \{ f_i(x) / i \in M \}$ este q-convexă.

P_{18}. Fie $f : A \longrightarrow R$, $g : A \longrightarrow R$ cu $A \subseteq R^n$ convexă. Notăm $h = f \cdot g$. Atunci:

(i) Dacă f este convexă şi $f \leq 0$ pe A iar g este concavă şi $g > 0$ pe A, atunci funcţia h este q-convexă pe A.

(ii) Dacă în plus f, g sînt diferenţiabile pe A deschisă atunci funcţia h este p-convexă pe A.

P_{19}. Fie $A \subseteq R^n$ convexă iar $f: A \longrightarrow R$.

(i) dacă f are semn constant pe A atunci f este p-convexă pe A dacă şi numai dacă funcţia $h = \frac{1}{f}$ este p-concavă pe A.

(ii) dacă f este convexă negativă pe A atunci $h = \frac{1}{f}$ este concavă pe A.

(iii) dacă f este concavă pozitivă pe A atunci $h = \frac{1}{f}$ este convexă pe A.

P_{20}. Să se arate că dacă în P_{19}(ii) f este convexă pozitivă atunci proprietatea nu mai este adevărată.

Indicaţie. Se poate lua $f(x) = x$, $A = (0, \infty)$.

P_{21}. Fie $A \subseteq R^n$ convexă, $f: A \longrightarrow R$ convexă nenegativă. Atunci:

(i) dacă $\alpha \geq 1$ atunci f^{α} este convexă pe A ;

(ii) dacă $\alpha < 1$ atunci în general f^{α} nu este convexă.

4.4. Convexitatea unor funcţii elementare

P_1. Fie funcţia:

$$\Psi(x) = (x_1)^{\alpha_1} \ (x_2)^{\alpha_2} \ldots\ldots (x_n)^{\alpha_n}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$ este sq-concavă pe R^n_+.

Indicaţie. Pentru $x \in \mathring{A}$, unde $A = R^n_+$ fie funcţia:

$$\gamma(x) = \alpha_1 \log x_1 + \alpha_2 \log x_2 + \ldots + \alpha_n \log x_n$$

Se arată uşor că γ este concavă pe $\mathring{A}$. Fie $\varphi(y) = e^y$ care este strict crescătoare pe R. Folosind o variantă (pentru concavitate) a problemei P_{11} din § 4.3, rezultă că funcţia $\Psi(x) = \varphi(\gamma(x))$ este sq-concavă pe $\mathring{A}$. Insă $\Psi(x) \geq 0$ pe A şi $\Psi(x) > 0$ pe $\mathring{A}$. Deci pentru $x_1, x_2 \in A$ şi $x_0 \in (x_1, x_2) = \{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \ / \ 0 < \lambda < 1\}$ avem:

$\Psi(x_0) \geq \min\{\Psi(x_1), \Psi(x_2)\} = 0$, dacă x_1, sau $x_2 \in A \setminus \mathring{A}$. In plus, dacă $\Psi(x_1) > \Psi(x_2) = 0$ atunci $x_1 > 0$ şi deci $x_0 > 0$ şi avem $\Psi(x_0) > 0 = \Psi(x_2)$. Deci Ψ este sq-concavă şi în A.

P_2. Funcţia $f(x,y) = xy$ este sq-concavă pe R^2_+.

P_3. Fie $g(x) = (g_1(x), \ldots, g_m(x))'$ concavă şi nenegativă în mulţimea convexă $A \subset R^n$ iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \geq 0$. Atunci funcţia:

$$\Psi(x) = \prod_{i=1}^{m} (g_i(x))^{\alpha_i}$$

este sq-concavă pe A.

Indicaţie. Conform P_1, funcţia $\varphi(y) = (y_1)^{\alpha_1} (y_2)^{\alpha_2} \dots (y_m)^{\alpha_m}$ este sq-concavă pe R_+^m, unde $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)'$. Însă φ este crescătoare în raport cu fiecare componentă şi deci conform unei variante a problemei P_{11}(§ 4.3), funcţia $\psi(x) = \varphi(g(x))$ este sq-concavă pe A.

P_4. Fie $f, g: A \to R_+$ concave, unde $A \subseteq R^n$ este convexă atunci funcţia $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ este sq-concavă pe A.

Indicaţie. Rezultă din P_3 luînd $n=2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $g_1 = f$ şi $g_2 = g$.

P_5. Fie $f: A \to R_+$ convexă, $g: A \to (0, \infty)$ concavă unde $A \subseteq R^n$ este convexă. Atunci funcţia: $h = \frac{f}{g}$ este sq-convexă pe A.

Indicaţie. Fie $x_1, x_2 \in A$ şi $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ cu $0 < \lambda < 1$. Evident că:

$$0 \leq f(x_0) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

$$g(x_0) \geq \lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2) > 0$$

Atunci:

$$h(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(x_1)} \leq \frac{\lambda g(x_1) \cdot h(x_1)}{\lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2)} + \frac{(1-\lambda) g(x_2) \cdot h(x_2)}{\lambda g(x_1) + (1-\lambda) g(x_2)} \leq$$

$\leq \max \{ h(x_1), h(x_2) \}$. Ultima inegalitate trebuie să fie strictă deoarece coeficienţii lui $h(x_1)$, $h(x_2)$ sînt din (0,1) iar $h(x_1) \neq h(x_2)$.

P_6. Fie $A \subseteq R^n$ convexă, $f: A \to R$ convexă iar $g(x) = a'x + \alpha$ pozitivă în A unde $a \in R^n$, $\alpha \in R$. Atunci funcţia $h = \frac{f}{g}$ este sq-convexă pe A.

P_7. Fie $f(x) = a'x + \beta$, $g(x) = a'x + \alpha$ cu $f, g: A \to R$, $A \subseteq R^n$ convexă iar $g(x) \neq 0$ pe A. Atunci funcţia $h = \frac{f}{g}$ este sq-convexă pe A.

P_8. Fie $A \subseteq R^n$ o mulţime convexă iar $g: A \to R^m$ unde $g = (g_1, g_2, \dots g_m)'$ este:

(i) q-convexă;

(ii) sq-convexă;

(iii) convexă

pe mulţimea A. Atunci funcţia:

$$h(x) = \max \{ g_i(x) \ / \ i \in \{1, 2, \dots, m\} \}$$

are proprietatea (i), (ii) respectiv (iii) pe A.

Indicaţie. Fie $x_1, x_2 \in A$, $x_0 = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, $\lambda \in (0,1)$.

(i) $h(x_0) = \max\limits_i \{g_i(x_0)\} \leqslant \max\limits_i \max\{g_i(x_1), g_i(x_2)\} =$
$= \max\{\max\limits_i\{g_i(x_1)\}, \max\limits_i\{g_i(x_2)\}\} = \max\{h(x_1), h(x_2)\}$.

(ii) Fie i_k astfel ca: $g_{i_k}(x_k) = \max\limits_i \{g_i(x_k)\}$, $k = 0,1,2$. Presupunem $h(x_1) < h(x_2)$, adică $g_{i_1}(x_1) < g_{i_2}(x_2)$. Dacă h nu are proprietatea (ii) atunci $h(x_0) = \max\{h(x_1), h(x_2)\} = h(x_2)$ adică $g_{i_0}(x_0) =$ $= g_{i_2}(x_2)$ care contrazice (ii) pentru g. Dacă $g_{i_0}(x_1) \neq g_{i_0}(x_2)$ atunci:

$$g_{i_0}(x_0) < \max\{g_{i_0}(x_1), g_{i_0}(x_2)\} \leqslant \max\{g_{i_1}(x_1), g_{i_2}(x_2)\} =$$
$$= g_{i_2}(x_2) = g_{i_0}(x_0) \text{ ceea ce nu se poate.}$$

Dacă $g_{i_0}(x_1) = g_{i_0}(x_2)$ atunci:

$$g_{i_0}(x_0) \leqslant g_{i_0}(x_1) \leqslant g_{i_1}(x_1) < g_{i_2}(x_2) = g_{i_0}(x_0)$$

Deci în general $h(x_1) < h(x_2)$ implică $h(x_0) < h(x_2)$.

P_9. Fie $g(x) = (g_1(x),\ldots,g_m(x))'$, $g: A \subseteq R^n \longrightarrow R^m$ diferențiabilă și convexă în $\bar{x} \in A$. Fie $\varphi(y)$, $\varphi: g(A) \longrightarrow R$ și p-convexă în $\bar{y} = g(\bar{x})$ și $\frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(\bar{y}) \geqslant 0$ pentru orice i pentru care $g_i(x)$ nu este convexă în $\bar{x}$. Atunci funcția compusă $\psi(x) = \varphi(g(x))$ este p-convexă în $\bar{x}$ relativ la A.

<u>Indicație</u>. Fie $x \in A$, $y = g(x) \in g(A)$. Se arată mai întîi că:

(1) $$(x-\bar{x})'\nabla\psi(\bar{x}) \leqslant (y-\bar{y})'\nabla\varphi(\bar{y}).$$

Se consideră: $M_1 = \{1 \leqslant i \leqslant m \,/\, g_i(x)$ nu este concavă în $\bar{x}\}$
$M_2 = \{1 \leqslant i \leqslant m \,/\, g_i(x)$ este concavă în $\bar{x}\}$

Atunci: $(x-\bar{x})'\nabla\psi(\bar{x}) = \sum\limits_{i=1}^{m} (x-\bar{x})'\nabla g_i(\bar{x}) \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}(\bar{y})$. Însă

$$(x-\bar{x})'\nabla g_i(\bar{x}) \leqslant g_i(x) - g_i(\bar{x}) = y_i - \bar{y}_i$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}(\bar{y}) \geqslant 0$, $(\forall)\, i \in M_1$. Rezultă:

$$(x-\bar{x})'\nabla g_i(\bar{x}) \frac{\partial\varphi}{\partial y_i}(\bar{y}) \leqslant (y_i - \bar{y}_i)\frac{\partial\varphi}{\partial y_i}(\bar{y}), \ (\forall)\, i \in M_1$$

Pe de altă parte:

$$(x-\bar{x})' \nabla g_i(\bar{x}) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(\bar{y}) = \left[g_i(x) - g_i(\bar{x})\right] \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(\bar{y}) =$$

$$= (y_i - \bar{y}_i) \frac{\partial \varphi}{\partial y_i}(\bar{y})$$

pentru orice $i \in M_2$. Rezultă acum ușor (1).

Deci din (1) și q-convexitatea lui φ în y avem:

$$\psi(x) \leq \psi(\bar{x}) \Rightarrow \varphi(y) \leq \varphi(\bar{y}) \Rightarrow (y-\bar{y})' \nabla \varphi(\bar{y}) \leq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x-\bar{x})' \nabla \psi(\bar{x}) \leq 0$, deci ψ este q-convexă în x.

Analog, $\psi(x) < \psi(\bar{x}) \Rightarrow \varphi(y) < \varphi(\bar{y}) \Rightarrow (y-\bar{y})' \nabla \varphi(\bar{y}) < 0$

$\Rightarrow (x-\bar{x})' \nabla \psi(\bar{x}) < 0$, adică ψ e p-convexă în x.

P_{10}. Fie f(x), p-convexă în $\bar{x} \in A$, $A \subseteq R^n$ iar g(y) diferențiabilă în $\bar{y} = f(\bar{x})$ și $\nabla g(\bar{y}) > 0$, atunci funcția $h = \varphi \circ g$ este p-convexă în $\bar{x}$.

P_{11}. Fie $f(x) = \sum_{k=1}^{n} e^{x_k}$, $g(x) = \log f(x)$, unde $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Funcția g este convexă:

<u>Indicație</u>.

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} \dfrac{}{\{f(x)\}^2} \displaystyle\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} e^{x_k + x_i} & , i = j \\ -\dfrac{e^{x_i + x_j}}{\{f(x)\}^2} & , i \neq j \end{cases}$$

și se arată că matricea hessiană este pozitiv semidefinită. Apoi se aplică P_3 din § 4.2.

P_{12}. Funcția

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \log x_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \log \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

este convexă pentru $x_i > 0$, $(\forall)\ i = 1, 2, \ldots, n$.

<u>Indicație</u>. Se are în vedere că:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \log x_k - \log\left(\sum x_i\right) \quad \text{şi}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_k \partial x_\ell} = \frac{\delta_{k\ell}}{x_k} - \frac{1}{\sum_1^n x_i}$$

unde $\delta_{k\ell} = \begin{cases} 1 & , \ k = \ell \\ 0 & , \ k \neq \ell \end{cases}$

şi se arată că matricea hessiană este pozitiv semidefinită. Apoi se aplică P_3 din § 4.2.

BIBLIOGRAFIE

1. Abadie, J.(ed), "Nonlinear programming" North-Holland, Amsterdam,1967.
2. Berge, C. Ghouila-Houri,A., "Programmes, jeux et réseaux de transport", Dunod, Paris 1962.
3. Breckner,W. "Introducere în teoria problemelor de optimizare convexă cu restricții. I, Ed.Dacia 1974.
4. Dantzig G., "Applications et prolongements de la programmation linéaire", Dunod, Paris, 1966.
5. Dragomirescu,M., Malița,M., "Programarea pătratică", Ed.științifică, București, 1968.
6. Dragomirescu,M., Malița,M., "Programare neliniară", Ed.științifică, București 1972.
7. Gass,S., "Linear programming", McGraw-Hill-Book Co. 1969.
8. Hadley,G.; "Linear programming", Adison-Wesley Publishing Co.
9. Kaufmann,A., "Metode și modele ale cercetării operaționale", I,II.
10. Kaufmann,A., Henry-Labordère,A., "Metode și modele ale cercetării operaționale", III.
11. Malița,M., Zidăroiu,C., "Matematica organizării", Ed.Tehnică, București, 1975.
12. Mangasarian,Olvi L., "Nonlinear programming",McGraw-Hill - New York, 1969.
13. Martos,B., "Nonlinear programming", Akademiai KIADO Budapest 1975.
14. Mihoc,Gh., Nădejde,I., "Programarea matematică" I,II., Ed.științifică, București 1966-1967.
15. Mihoc,Gh., Ștefănescu,A., "Programarea matematică", Ed.didactică și pedagogică, București 1973.
16. Nădejde,I., Bergthaller,C., Zidăroiu,C., Sburlan,S., "Probleme de cercetare operațională". Ed.Academiei, București 1971.
17. Roberts,W., Varberg,D., "Convex functions", Academic Press, New York & London 1973.

18. Rockafellar,R.T., "Convex analysis", Princeton, Princeton University Press 197o.

19. Simonnard,M., "Programation linéaire", Dunod, Paris, 1972.

2o. Valentine,F.A., "Convex sets", McGraw-Hill, New York, 1964.

C-da nr. 46 Anul 1978
Tiraj: 553 Reeditare
Numele şi Prenumele dactilografei:
RUXANDA IONESCU
Desenul: Gheorghe Doina
Corectat şi bun de tipar: Dr. V.PREDA
Executat în cadrul Tipografiei Universităţii din Bucureşti