5.11.2016
– curs 2 –

Ecuații diferențiale de ordinul întâi implicite

$$F(x, y, y') = 0 \quad (1) \quad \text{(forma implicită)}$$

Explicitarea ec. (1) înseamnă să scriem ec. sub forma

$$y' = f(x, y) \quad (2)$$

Ec. (2) au fost studiate forme particulare. (vezi curs 1)

1) Ecuația Lagrange:

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \quad (3)$$

unde $\varphi, \psi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue și derivabile.

Pt. ec. (3) se determină soluție parametrică prin derivarea ecuației în raport cu x $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = (x\varphi(y'))' + \psi(y')'$$

$$y' = x'\varphi(y') + x(\varphi(y'))' + \psi'(y')\cdot(y')'$$

$$y' = \underset{1}{x'}\varphi(y') + x\varphi'(y')(y')' + \psi'(y')(y')'$$

notăm $y' = p$ (p = parametru) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\cdot p' + \psi'(p)p'$$

unde $p' = \dfrac{dp}{dx}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow p - \varphi(p) = p'\left(x\varphi'(p) + \psi'(p)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{p - \varphi(p)}{x\varphi'(p) + \psi'(p)} \quad (4)$$

(ec. explicită de forma: $p' = f(x, p)$).

(cu cond $\varphi(p) \neq p$)

$$(x,y) \xrightarrow[\text{derivare}]{} (x,p) \xrightarrow{\text{"răsturnare"}} (p,x)$$

- pentru ec. (4) se face "răsturnare" ec:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x\varphi'(p) + \psi'(p)}{p - \varphi(p)}$$

$$\frac{dx}{dp} = \underbrace{\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}}_{a(p)} x + \underbrace{\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}}_{b(p)} \quad (5) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ec. liniară neomogenă: $\frac{dx}{dp} = a(p)x + b(p) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ se determină $x = x(p) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ soluția parametrică a ec. (3) (Lagrange) este:

$$\boxed{\begin{cases} x = x(p) \\ y = x\varphi(p) + \psi(p) \end{cases}}$$

(din ec. (5))

(din ec. (3) în care $y' = p$).

Exemplu: Determinați mulțimea sol. ec:

$$y = x\underbrace{(y')^2}_{\varphi(y')} + \underbrace{(y')^3}_{\psi(y')}.$$

Derivăm ec: $y' = x' \cdot \varphi(y') + x(\varphi(y'))' + (\psi(y'))'$

$$\left.y' = 1(y')^2 + x \cdot 2y'(y')' + 3(y')^2(y')'\right\} \Rightarrow$$

notăm $y' = p$

$$\Rightarrow p = p^2 + 2xpp' + 3p^2p' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p - p^2 = p' \cdot p(2x + 3p)$$

C1) $\underline{p = 0} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y = C, \ C \in \mathbb{R}$

se determină C a.î. să verifice ec dată:

$C = x \cdot 0^2 + 0^3 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \bar{y}(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

c2) $\underline{p \neq 0}$ $\Rightarrow$ împărțim prin p $\Rightarrow$

$\Rightarrow 1-p = p'(2x+3p) \Rightarrow p' = \dfrac{1-p}{2x+3p} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ răsturnăm ec:

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2x+3p}{1-p}$$

$$\frac{dx}{dp} = \underbrace{\frac{2}{1-p}}_{a(p)} x + \underbrace{\frac{3p}{1-p}}_{b(p)}$$ ec. liniară neomogenă

• se integrează ec. liniară omogenă atașată

$$\frac{d\bar{x}}{dp} = \frac{2}{1-p}\bar{x} \Rightarrow \bar{x}(p) = C e^{A(p)}$$

unde A este o primitivă pt $a(p) = \dfrac{2}{1-p}$

$$\int \frac{2}{1-p} dp = -2\int \frac{1}{p-1} dp = \underbrace{-2\ln|p-1|}_{A(p)} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x}(p) = C \cdot e^{\ln(|p-1|^{-2})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x}(p) = C|p-1|^{-2} = \frac{C}{(p-1)^2}$$

Apl. metoda variației constantelor: determinăm $C: R \to R$ a.î. $x(p) = \dfrac{C(p)}{(p-1)^2}$ să fie soluție a ec. liniare neomogene:

$$\left(\frac{C(p)}{(p-1)^2}\right)' = \frac{2}{1-p} \cdot \frac{C(p)}{(p-1)^2} + \frac{3p}{1-p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(p) \cdot \frac{1}{(p-1)^2} + \cancel{C(p) \cdot \frac{-1 \cdot 2(p-1)}{(p-1)^{4\,3}}} = \cancel{\frac{-2C(p)}{(p-1)^3}} + \frac{-3p}{p-1}$$

$$\Rightarrow C'(p) = (p-1)^{\cancel{2}} \cdot \frac{(-3p)}{\cancel{p-1}} \Rightarrow C'(p) = -3p^2 + 3p \Rightarrow$$

(ec. de tip primitivă)

$$\Rightarrow C(p) = \int(-3p^2+3p)dp = -\cancel{3}\frac{p^3}{\cancel{3}} + 3\frac{p^2}{2} + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(p) = -p^3 + \frac{3p^2}{2} + K \Rightarrow x(p) = \frac{1}{(p-1)^2}\left(-p^3 + \frac{3p^2}{2} + K\right)_{K \in R}.$$

$$\left(\frac{C(p)}{(p-1)^2}\right)' = \left(C(p)\cdot\frac{1}{(p-1)^2}\right)' = C'(p)\cdot\frac{1}{(p-1)^2} + C(p)\left(\frac{1}{(p-1)^2}\right)' =$$
$$= C'(p)\cdot\frac{1}{(p-1)^2} + C(p)\cdot\frac{1'\cdot(p-1)^2 - 1\cdot((p-1)^2)'}{(p-1)^4}$$

Solutia parametrică a ec este:

$$\begin{cases} x(p) = \frac{1}{(p-1)^2}\left(-p^3 + \frac{3p^2}{2} + k\right), & k \in \mathbb{R} \\ y = xp^2 + p^3. \end{cases}$$

2) Ecuatia Clairaut: $\boxed{y = xy' + \psi(y')}$ (6)

Ec. (6) se derivează:

$$\cancel{y'} = 1\cdot\cancel{y'} + x(y')' + \psi'(y')\cdot(y')'$$
$$0 = (y')'\cdot(x + \psi'(y')) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ c1) $\left.\begin{array}{l}(y')' = 0 \\ \text{cu not } y' = p\end{array}\right\} \Rightarrow p' = 0 \Rightarrow p = C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y = C_1 x + C_2 \\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\end{array}\right\} \Rightarrow$ înloc. în ec(6)

$\Rightarrow \cancel{C_1 x} + C_2 = \cancel{x C_1} + \psi(C_1) \Rightarrow$

$\Rightarrow C_2 = \psi(C_1) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y = C_1 x + \psi(C_1) \\ C_1 \in \mathbb{R}\end{array}}$ (7)

c2) $x + \psi'(p) = 0 \Rightarrow x = -\psi'(p) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ se obține soluția parametrică:

$$\boxed{\begin{cases} x = -\psi'(p) \\ y = xp + \psi(p) \end{cases}} \quad (8)$$

Deci: mulț. sol. ec. (6) este dată de (7) & (8).

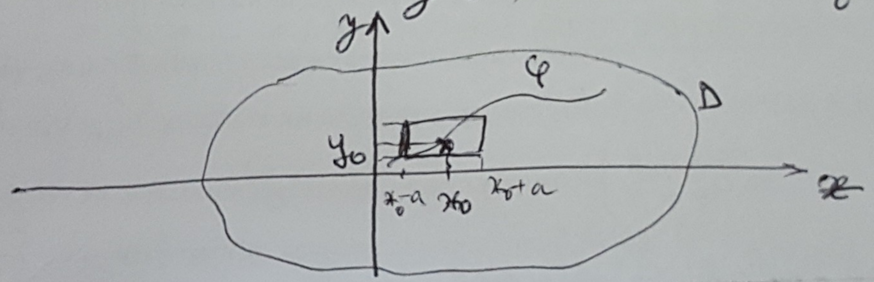
Problema Cauchy pentru ecuații diferențiale scalare de ordinul întâi

Def: Problema Cauchy pentru ec. dif. scalare explicite de ordinul întâi este dată prin:

$$\cancel{\frac{dx}{dt} = f(t,x)} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (9)$$

unde $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x_0, y_0) \in D$.

OBS: Problema Cauchy (9) se mai notează (f, x_0, y_0).



Def: $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este soluție a problemei (9) dacă:

$$\begin{cases} \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \ \forall x \in I. \\ \varphi(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (10)$$

Propoziție 1 (reprezentarea sub formă integrală a soluției prob. (9)).

Are loc echivalența:

$\varphi : I \to \mathbb{R}$ soluție a prob. (9) $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in I : \varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\,ds. \quad (11)$$

Teorema de existență și unicitate a soluției PC (9)

Pt. prob. (9) se dau ipotezele:

1) $\exists\, a, b > 0$ a.î. $D_1 = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset D$.

2) f este continuă pe D_1 și $\exists M \geq 0$ a.î. $M = \sup_{(x,y) \in D_1} |f(x,y)|$

3) f este Lipschitz în a doua variabilă:

$\exists L > 0$ a.î. $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$
$\forall (x,y_1), (x,y_2) \in D_1$.

În aceste ipoteze avem:
$\forall \alpha \le \min\{a, \frac{b}{M}\}$, $\exists!\, \varphi : \overbrace{[x_0-\alpha, x_0+\alpha]}^{I_\alpha} \to [y_0-b, y_0+b]$
soluție a problemei Cauchy (9).

<u>Dem</u>: Fie $\alpha \le \min\{a, \frac{b}{M}\}$.
Ideea dem. t. ex. & unicitate constă în ~~constr~~ construirea unui șir de funcții $(\varphi_n)_{n\ge 0}$
$\varphi_n : I_\alpha \to [y_0-b, y_0+b]$ convergent la φ sol. a prob. Cauchy.

$(\varphi_n)_{n\ge 0}$ = <u>șirul aproximațiilor succesive</u> (Picard)
este definit recursiv astfel:

$$(11)\quad \begin{cases} \varphi_0(x) = y_0, \ \forall x \in I_\alpha \\ \varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_n(s))\,ds, \ \forall x \in I_\alpha, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

<u>Exemplu de PC</u>: Fie: $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 = D$

a) Se cere soluția φ
b) Determinați șirul $(\varphi_n)_{n\ge 0}$ al aprox. succesive.

a) $y' = y$ este ec. liniară omogenă cu $a(x) = 1$ $\Rightarrow$ $y = C \cdot e^{A(x)}$
unde $A(x) = x$ primitivă a lui a $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = Ce^x$, $C \in \mathbb{R}$.
Se determină C a.î. $y(0) = 1$ $\Bigg\} \Rightarrow 1 = Ce^0 \Rightarrow$ <u>$C = 1$</u>

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(x) = e^x \\ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$$

b) $\varphi_0(x) = 1$; $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $f(x,y) = y$
$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x f(s, \varphi_0(s))\,ds = 1 + \int_0^x \varphi_0(s)\,ds = 1 + \int_0^x 1\,ds = 1 + s\big|_0^x \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_1(x) = 1 + x$

Arătăm prin inducție că:

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Verificarea este făcută mai sus.

Presupunem că:

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{și}$$

dem că: $\varphi_{n+1}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

Din def. șirului $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ avem că:

$$\varphi_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f(s, \varphi_n(s))\,ds = 1 + \int_0^x \varphi_n(s)\,ds =$$

$$= 1 + \int_0^x \left(1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \dots + \frac{s^n}{n!}\right) ds =$$

$$= 1 + s\Big|_0^x + \frac{1}{1!}\frac{s^2}{2}\Big|_0^x + \frac{1}{2!}\frac{s^3}{3}\Big|_0^x + \dots + \frac{1}{n!}\frac{s^{n+1}}{(n+1)}\Big|_0^x =$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

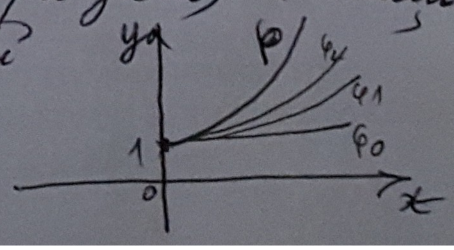
Ex temă 1) Fie PC: $\begin{cases} y' = x \sin y \\ y(0) = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$, $(x,y) \in (-2,2) \times (0, \frac{\pi}{2})$

a) Arătați că problema dată verifică ipotezele teoremei de existență și unicitate a soluției.

b) Determinați soluția φ a problemei.

c) Scrieți forma aproximațiilor succesive și calculați 3 astfel de aproximații.

2) Pt. problema $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ realizați o reprezentare grafică (printr-un program) a soluției și a câtorva aproximații



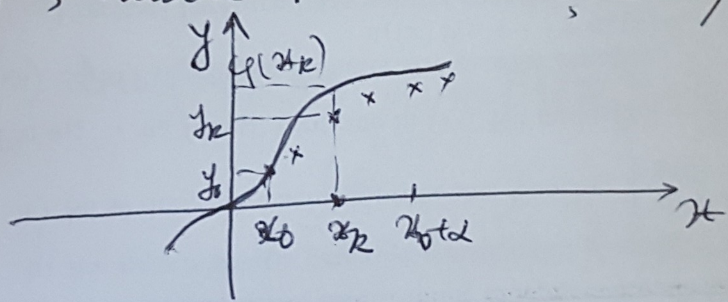
Aproximarea numerică a soluției prob. Cauchy

Fie: (12) $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, $x \in [x_0, x_0+\alpha]$, care îndeplinește condițiile teoremei de ex. și unicitate.

Se consideră o diviziune a intervalului $[x_0, x_0+\alpha]$, diviziune echidistantă: $h = \frac{\alpha}{N}$

$$x_k = x_0 + k \cdot h, \quad k = \overline{0,N}$$

A aproxima numeric problema (12), înseamnă să găsim în fiecare x_k, o aproximație y_k pentru $\varphi(x_k)$, unde φ este soluția prob. (12).



Avem: $k \in \{\overline{0, N-1}\}$

$$\varphi(x_{k+1}) - \varphi(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi'(s)\,ds = \underbrace{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(s, \varphi(s))\,ds}_{\Downarrow \text{ t. de medie}} \Rightarrow$$

$\exists\, x_* \in [x_k, x_{k+1}]$ a.î. $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(s,\varphi(s))\,ds = f(x_*, \varphi(x_*)) \cdot \underbrace{(x_{k+1} - x_k)}_{h}$

$$\Rightarrow y_{k+1} - y_k = h \cdot f(x_k, y_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_{k+1} = y_k + h f(x_k, y_k), \quad k = \overline{0, N-1} \\ \text{cu } y_0 \text{ din PC.} \end{cases} \quad (13)$$

(13) = metoda Euler explicită

Teorema de aproximare în metoda Euler.

În ipotezele t. de ex. & unicitate a soluției PC, la care adaugăm f să fie Lipschitz și în prima variabilă, adică: $\exists L_1 > 0$ a.î.

$$|f(x_1,y) - f(x_2,y)| \le L_1 |x_1 - x_2|$$

$\forall (x_1,y), (x_2,y) \in D_1$,

avem că:

$$(14) \quad \exists A > 0 \text{ a.î. } |\varphi(x_k) - y_k| < Ah, \ \forall k = \overline{0,N}$$

unde φ este soluția prob. Cauchy și $y_0, y_1, \dots, y_N$ sunt aproximațiile obținute cu schema (13).

OBS: 1) Din (14) $\Rightarrow \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ (k \to \infty)}} |\varphi(x_k) - y_k| = 0$

2) Verificarea că f este Lipschitz într-una dintre variabile este echivalent cu a arăta că derivata parțială a lui f în raport cu acea variabilă este continuă.

Sisteme de ecuații diferențiale de ordinul întâi $\begin{pmatrix} k=1 \\ n>1 \end{pmatrix}$

$$(15) \quad \boxed{F(x, y, y') = 0} \quad \text{(forma implicită)}$$

unde $F: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$(16) \quad \begin{cases} F_1(x, y, y') = 0 \\ \vdots \\ F_n(x, y, y') = 0 \end{cases}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Forma explicită a sistemului (15) este:

$$y' = f(x, y) \qquad (17)$$

unde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$,

sau pe componente:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, (y_1, \dots, y_n)) \\ \vdots \\ y_n' = f_n(x, (y_1, \dots, y_n)) \end{cases} \qquad (18)$$

Sistemul (17) sau (18) s.n. <u>liniar</u> dacă:

$$f_k(x, y) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj}(x)\, y_j + g_k(x) \qquad (19)$$

unde $a_{k1}, \dots, a_{kn}, g_k : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = \overline{1,n}$.

adică, sistemul se poate ~~scrie~~ matricial astfel:

$$\boxed{y' = A(x) \cdot y + g(x)} \qquad (20)$$

unde $A(x) = \left(a_{kj}(x)\right)_{\substack{k=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$, $g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$

<u>Cazul omogen</u>: $g(x) \equiv 0$

$\Rightarrow$ sistem liniare omogen de ecuații diferențiale: $\boxed{y' = A(x)\, y}$ (21)

<u>Teoremă</u>: Mulțimea soluțiilor sistemului (21) este spațiu vectorial real de dimensiune n.

<u>Dem</u> (schemă)

$$S_A = \text{mulț sol sist (21)} = \left\{ \varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \mid \varphi \text{ soluție sist (21)} \right\}.$$

- $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in S_A$ avem $\varphi_1 + \varphi_2 \in S_A$.

$$\Downarrow$$

$$\varphi_1' = A(x) \cdot \varphi_1$$
$$\varphi_2' = A(x) \cdot \varphi_2 \quad (+)$$
$$(\varphi_1 + \varphi_2)' = A(x)(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$\forall \varphi \in S_A$ avem $\alpha\varphi \in S_A$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

$\Downarrow$

$\varphi' = A(x)\varphi \mid \cdot\alpha \Rightarrow \alpha\varphi'(x) = \alpha A(x)\varphi(x), \ \forall x \in I.$

$(\alpha\varphi)'(x) = A(x)\big((\alpha\varphi)(x)\big) \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha\varphi \in S_A$.

• Pt. a arăta că S_A are dimensiune n, se arată că $(S_A, +, \cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

suma de funcții — înmulțirea funcțiilor cu scalari

Pt. aceasta se definește $\mathcal{F}_{x_0} : S_A \longrightarrow \mathbb{R}^n$
(unde $x_0 \in I$), $\mathcal{F}_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0)$

este morfism de sp. vect. și este bijectivă.

<u>OBS</u>: $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n$, PC: $\begin{cases} y' = \cancel{f(x,y)} A(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ are soluție unică.

<u>Def</u>: Pt. (21) numim <u>sistem fundamental de soluții</u> o bază a spațiului soluțiilor S_A.

Adică, $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset S_A$ este sistem fundamental de soluții dacă: $\forall \varphi \in S_A$, $\exists! \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

a.î. $\varphi = \alpha_1\varphi_1 + \dots + \alpha_n\varphi_n$

<u>Concluzia</u>: Pt. a determina S_A, este suficient să găsim un sistem fundamental de soluții.

<u>Def</u>. S.n. <u>matrice fundamentală de soluții</u>, matricea $\phi(x) = \text{coloane}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$, $\forall x \in I$.

<u>Teoremă</u>: $\boxed{\det \phi(x) \neq 0, \ \forall x \in I.}$; <u>OBS</u>: $\forall \varphi \in S_A$ avem $\varphi = \phi\alpha$; $\alpha = \dots$

Cazul neomogen: $g(x) \neq 0$.

$$\boxed{y' = A(x)y + g(x)} \quad (22)$$

Pt. a determina mulțimea soluțiilor sist (22) procedăm astfel:

- rezolvăm sistemul omogen atașat:

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} \quad (*)$$

fie $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ sistem fundamental de soluții pt $(*)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ este matrice fundam. de soluții pt $(*)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{y} = \phi \cdot \alpha, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

sau, renotând, $\bar{y} = \phi \cdot C$, $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

- aplicăm metoda variației constantelor, adică, determinăm $C : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a.î. $y(x) = \phi(x) C(x)$ să fie soluție pt (22):

$$\left(\phi(x)C(x)\right)' = A(x)\phi(x)C(x) + g(x)$$

$$\cancel{\phi'(x)C(x)} + \phi(x) \cdot C'(x) = \cancel{A(x)\phi(x)C(x)} + g(x)$$

ϕ matrice de soluții $\Rightarrow \phi'(x) = A(x)\phi(x)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi(x)C'(x) = g(x)$
dar $\phi(x)$ este inversabilă (det $\phi(x) \neq 0$) $\Big\} \Rightarrow C'(x) = (\phi(x))^{-1} g(x) \Rightarrow$ (ec. vectorială de tip primitivă)

$\Rightarrow C_j'(x) = \left((\phi(x))^{-1} g(x)\right)_j, \; j = \overline{1,n} \Rightarrow C_j(x) = h_j(x) + K_j \Rightarrow$

Forma generală a soluției sist (22) este:

$$y(x) = \phi(x)\left(h(x) + K\right), \quad K \in \mathbb{R}^n$$

$$h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_n(x) \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ K_n \end{pmatrix}$$

<u>Propoziție 2</u>: Dacă pentru sistemul (22) se știe o soluție particulară $\varphi_0 = \begin{pmatrix} \varphi_{01} \\ \vdots \\ \varphi_{0n} \end{pmatrix}$, atunci

forma generală a soluției sistemului (22) este

$$y(x) = \phi(x) C + \varphi_0(x), \quad C \in \mathbb{R}^n$$

unde ϕ este matrice fundamentală de soluții pentru sistemul liniar omogen atașat (*).

<u>Sisteme liniare cu coeficienți constanți</u>

$$y' = Ay + g(x) \quad (23)$$

unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

<u>Cazul omogen</u>: $\boxed{y' = Ay}$ (24)

<u>Determinarea sistemului fundamental de soluții prin metoda valorilor și vectorilor proprii</u>

- se determină spectrul lui A, adică, mulțimea valorilor proprii ale lui A, distincte:

$$spec(A) = \sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}, \quad m \le n$$

$$\lambda_i \neq \lambda_j, \ \forall\ i \neq j$$

$\sigma(A)$ este mulț. soluțiilor (rădăcinilor) distincte ale polinomului caracteristic $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

notăm pt λ_j, $j \in \{\overline{1,m}\}$, k_j = multiplicitatea lui λ_j $\Rightarrow$

$\Rightarrow k_1 + \dots + k_m = n$

Pt fiecare λ_j se determină k_j soluții pentru sistemul fundamental, astfel:

I) $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{R},\ k_j = 1}$ $\Rightarrow$ se det $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ a.î. $Au = \lambda_j u$ sau $(A - \lambda_j I_n)u = 0_{\mathbb{R}^n}$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_j(x) = u\, e^{\lambda_j x}}$ este sol. în sist. fundam.

II) $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ k_j = 1}$ $\Rightarrow \overline{\lambda_j} \in \sigma(A)$ $\Rightarrow$
(există și valoarea proprie conjugată)

$\Rightarrow$ se det. 2 soluții în sist. fundamental, coresp. pt λ_j și $\overline{\lambda_j}$:

se det $u \in \mathbb{C}^n$, $u \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ a.î.
$(A - \lambda_j I_n)u = 0_{\mathbb{C}^n}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_j(x) = \mathrm{Re}(u e^{\lambda_j x}) \\ \overline{\varphi_j}(x) = \mathrm{Im}(u \cdot e^{\lambda_j x}) \end{cases}$$

unde $e^{\lambda_j x} = e^{(\alpha_j + i\beta_j)x} = e^{\alpha_j x} \cdot e^{i\beta_j x} =$
$= e^{\alpha_j x}(\cos\beta_j x + i \sin\beta_j x)$

III) $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{R},\ k_j > 1}$ $\Rightarrow$ se determină $p_0, p_1, \dots, p_{k_j - 1} \in \mathbb{R}^n$ nu toți nuli a.î.

$$\varphi(x) = \left(\sum_{r=0}^{k_j - 1} p_r x^r\right) e^{\lambda_j x}$$ să fie soluție pt. sistemul (24)

Se obțin k_j seturi de vectori $p_0, \dots, p_{k_j - 1} \in \mathbb{R}^n$ nu toți nuli a.î. φ să fie soluție $\Rightarrow$
$\Rightarrow k_j$ soluții în sistemul fundamental.

IV) $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ k_j \geq 1} \Rightarrow \overline{\lambda_j} \in \sigma(A)$ cu aceeași multiplicitate $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ se determină $p_0, p_1, \ldots, p_{k_j-1} \in \mathbb{C}^n$ nu ~~toți~~ nuli

a.î. $\varphi(x) = \left(\sum_{r=0}^{k_j-1} p_r x^r\right) e^{\lambda_j x}$ soluție pt. 24 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $2k_j$ soluții: $\begin{cases} \varphi_1(x) = \mathrm{Re}(\varphi(x)) \\ \varphi_2(x) = \mathrm{Im}(\varphi(x)) \end{cases}$

<u>Exemplu</u>: Fie sistemul $\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}$.

a) Scrieți sistemul matriceal

b) Det. un sistem fundam. de soluții.

a) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

b) $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$

$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 =$

$= 1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 =$

$= \lambda^2 - 2\lambda - 3$.

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$

$\Delta = 4 + 12 = 16$

$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2}$ $\begin{cases} \lambda_1 = 3, & k_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1, & k_2 = 1 \end{cases}$; $\sigma(A) = \{3, -1\}$

• $\lambda_1 = 3,\ k_1 = 1 \Rightarrow u \in \mathbb{R}^2, u \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ a.î. $(A - \lambda_1 I_2)u = 0_{\mathbb{R}^2}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2u_1 + 4u_2 = 0 \\ u_1 - 2u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow u_1 = 2u_2 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 2u_2 \\ u_2 \end{pmatrix},\ u_2 \in \mathbb{R}$.

Luăm $u_2 = 1 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}}$$

• $\lambda_2 = -1,\ k_2 = 1 \Rightarrow u \in \mathbb{R}^2,\ u \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ a.î. $(A - \lambda_2 I_2)u = 0_{\mathbb{R}^2}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2u_1 + 4u_2 = 0 \\ u_1 + 2u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_1 = -2u_2 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} -2u_2 \\ u_2 \end{pmatrix},\ u_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Luăm $u_2 = 1 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -2e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}}$$

Deci: $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x)\}$ formează sistem fundam. de soluții $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S_A = \{\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -2e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1(x) = 2C_1e^{3x} - 2C_2e^{-x} \\ y_2(x) = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} \end{cases},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Matricea fundam. de soluții este:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} 2e^{3x} & -2e^{-x} \\ e^{3x} & e^{-x} \end{pmatrix} \Rightarrow S_A = \{\varphi(x) = \phi(x)C \mid C \in \mathbb{R}^2\}$$

Verificăm $\det \phi(x) \neq 0$

$$\begin{vmatrix} 2e^{3x} & -2e^{-x} \\ e^{3x} & e^{-x} \end{vmatrix} = 2e^{2x} + 2e^{2x} = 4e^{2x} \neq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

<u>Temă</u>: $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$