14.03.2021
- curs 1 -

$9^{00}-10^{40}$
$11^{00}-12^{40}$
$13^{00}-14^{40}$.

Conținutul cursului CALCUL NUMERIC:

1. Elemente de analiză matriceală
2. Metode numerice pentru rezolvarea sistemelor liniare: metode directe și metode iterative.
3. Rezolvarea numerică a ecuațiilor în R.
4. Aproximarea vectorilor și valorilor proprii pentru matrice patratice de ordin n.
5. Interpolare prin polinoame și prin funcții spline (polinoame pe porțiuni.
6. Curbe de regresie
7. Integrare și derivare numerică.
8. Aproximarea soluțiilor problemelor Cauchy pentru ecuații diferențiale (metode într-un pas; metode în mai mulți pași).

Bibliografie:

[1] Curs în format electronic (postat pe Moodle)
[2]. I. Roșca, Analiză numerică matricială, Ed. Univ. București.
[3]. D. Stănică, Analiză numerică, Ed. Matrix Rom,
[4] I. Paraschiv-Munteanu, D. Stănică, Analiză numerică - exerciții și teme de laborator, Ed. Univ. București, 2008.

1 Elemente de analiză matricială

Def: 1) Se numește normă vectorială în $\mathbb{R}^n$, funcția $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ cu proprietățile:

$$(1)\begin{cases} i) \ \|x\| \geq 0, \ \forall x = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n \\ \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^n} \\ ii) \ \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in R^n$

2) Se numește <u>normă matricială în $M_n(\mathbb{R})$</u> o funcție : $\|\cdot\| : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow [0, \infty)$ care are proprietățile :

$$(2) \quad \begin{cases} a) \ \|A\| \geq 0, \quad \forall A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}} \in M_n(\mathbb{R}) \\ \quad \|A\| = 0 \iff A = O_n \\ b) \ \|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\| , \ \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall A \in M_n(\mathbb{R}) \\ \left.\begin{array}{l} c) \ \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \\ d) \ \|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \end{array}\right\} \ \forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

<u>Exemple de norme vectoriale</u> uzuale (în $\mathbb{R}^n$) :

$$(3) \quad \begin{cases} \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \\ \text{(norma euclidiană)} \\ \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \\ \|x\|_\infty = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| \end{cases}$$

Mai general, avem

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \forall p \in (0, \infty)$$

<u>Prop. 1</u> Dacă $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b : R^n \to [0, \infty)$ sunt norme în R^n, atunci sunt <u>echivalente</u>, adică :

(4) $\exists \, m, M > 0$ a.î. :

$$m \|x\|_b \leq \|x\|_a \leq M \|x\|_b , \quad \forall x \in R^n .$$

<u>Exemplu de normă matricială</u>, clasic, este norma <u>Frobenius</u> :

$$(5) \quad \|A\|_F = \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2} , \ \forall A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$$

<u>Def.</u> : Fie $\|\cdot\|_a$ o normă vectorială în R^n.

<u>Norma matricială</u> notată $\|\cdot\|_a : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ <u>generată de norma vectorială</u> $\|\cdot\|_a$ este definită prin:

$$\|A\|_a = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0_{\mathbb{R}^n}}} \frac{\|Ax\|_a}{\|x\|_a} \quad (6)$$

<u>Exemple</u> de norme matriciale generate de normele vectoriale $\|\cdot\|_1$ şi $\|\cdot\|_\infty$ sunt:

1) $$\boxed{\|A\|_\infty \overset{(6)}{=} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0_{\mathbb{R}^n}}} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} \overset{\text{se dem}}{=} \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|} \quad (7)$$

2) $$\boxed{\|A\|_1 \overset{(6)}{=} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} \overset{\text{se dem}}{=} \max_{j=\overline{1,n}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|} \quad (8)$$

Norma matricială generată de norma euclidiană $\|\cdot\|_2$ este:

$$\boxed{\|A\|_2 \overset{(6)}{=} \sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n \\ x\neq 0_{\mathbb{R}^n}}} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \overset{\text{se dem}}{=} \sqrt{\rho(A^t\cdot A)}} \quad (9)$$

unde $\rho(B)$ notează <u>raza spectrală</u> a matricei B adică, cea mai mare valoare proprie, în modul, a lui B:

$$\rho(B) = \max\{\,|\lambda| \;\big|\; \lambda \text{ este valoare proprie pt. } B, \text{ adică } \exists\, x\in\mathbb{R}^n,\ x\neq 0_{\mathbb{R}^n} \text{ aî } Bx = \lambda x\,\}. \quad (10)$$

<u>OBS</u>: Dem pentru (7), (8) şi (9) găsiţi în bibliografie [4].

<u>Matrice particulare. Tipuri de matrice</u>

1) $O_n = (0)_{i,j=\overline{1,n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; $I_n = (\delta_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

2) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A^t = (a_{ji})_{i,j=\overline{1,n}}$

$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$a_{ji} = {}^t a_{ij}$

$\hookrightarrow$ transpusa matricei A.

A este <u>simetrică</u> $\Leftrightarrow A = A^t$

A este <u>antisimetrică</u> $\Leftrightarrow A = -A^t$

- <u>partea simetrică a unei matrice</u> : ${}^sA = \frac{1}{2}(A + A^t)$
- <u>partea antisimetrică</u> a unei matrice : ${}^aA = \frac{1}{2}(A - A^t)$

3) A este <u>superior triunghiulară</u> $\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall 1 \leq j < i \leq n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

4) A este <u>inferior triunghiulară</u> $\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall 1 \leq i < j \leq n$

5) A este matrice <u>diagonală</u> $\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall i \neq j$

6) A este matrice <u>tridiagonală</u> $\Leftrightarrow a_{ij} = 0, \forall i,j$ cu $|i-j| \geq 2$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & O \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ O & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ & & & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

7) A este matrice <u>ortogonală</u> $\Leftrightarrow A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_n$.
(adică, inversa lui A este A^t).

8) A este <u>inversabilă</u> $\Leftrightarrow \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î. $AB = BA = I_n$.
$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

② Metode numerice pentru rezolvarea sistemelor liniare în $\mathbb{R}^n$

(11) $A x = b$, $\left.\begin{matrix} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ b \in \mathbb{R}^n \end{matrix}\right\}$ cunoscute

Se cere determinarea lui x ($x \in \mathbb{R}^n$) care verifică (11).

Avem:

(2.1) **Metode directe** (pentru sisteme cu soluție unică, adică sisteme compatibil determinate) :
- metoda Gauss
  - fără pivotare
  - cu pivotare parțială
  - cu pivotare totală.
- cu ajutorul factorizărilor:
  - LU
  - BB^t
  - QR

(2.2) **Metode iterative**: adică, să determinăm $(x^{(m)})_{m \geq 0} \subset \mathbb{R}^n$ a.î. $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = x$, unde x soluția sistemului (11)

(2.1.) Metode directe

Rezolvarea sistemelor triunghiulare:

1) A este matrice superior triunghiulară cu $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, atunci sistemul se scrie:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad\quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

soluția sistemului este:

$$(12)\ \boxed{\begin{cases} x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(-\displaystyle\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j + b_i\right), \quad i = \overline{n-1,1} \end{cases}}$$

2) A este matrice inferior triunghiulară cu $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$, atunci sistemul se scrie:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & = b_2 \\ \dots\dots\dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n & = b_n \end{cases}$$

şi soluţia sistemului este:

$$(13)\quad \boxed{\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_i = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j\right), \ j=\overline{2,n} \end{cases}}$$

OBS: 1) Dacă matricea A este ortogonală, atunci soluţia sistemului este $\boxed{x = A^t b}$ (14)

2) Sistemul $Ax=b$ poate fi rezolvat şi cu ajutorul inversei matricii A: $\boxed{x = A^{-1}b}$ (15)

Metoda Gauss: înseamnă să obţinem un sistem triunghiular echivalent (adică are aceeaşi soluţie) cu sistemul dat.

$Ax = b$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$, $b \in \mathbb{R}^n$

Presupunem $\det A \neq 0$ (adică sistemul are soluţie unică).

Exemplu numeric pt. metoda Gauss fără pivotare:

$n=3$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}; \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} \boxed{-1} & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \end{matrix}}_{A} \left| \underbrace{\begin{matrix} 15 \\ 7 \\ 11 \end{matrix}}_{b} \right.\right) \sim \left(\begin{matrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{8} & 17 \\ 0 & -5 & -3 \end{matrix} \left| \begin{matrix} 15 \\ 67 \\ -19 \end{matrix} \right.\right) \sim$$

se elimină x_1 din ec. $2 \div n$

$L2 \leftarrow L2 + L1 \cdot 4$
$L3 \leftarrow L3 + L1(-2)$

se elimină x_2 din ec $3 \div n$

$L3 \leftarrow L3 + L2 \cdot \frac{5}{8}$

$$\sim \left(\begin{matrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 8 & 17 \\ 0 & 0 & \frac{61}{8} \end{matrix} \left| \begin{matrix} 15 \\ 67 \\ \frac{183}{8} \end{matrix} \right.\right)$$

$-19 + 67 \cdot \frac{5}{8} = \frac{-152+335}{8}$	$-3 + 17 \cdot \frac{5}{8} = \frac{-24+85}{8} = \frac{61}{8}$

Rezultă: $\begin{cases} x_3 = \frac{183}{8} : \frac{61}{8} = \frac{\cancel{183}^{3}}{\cancel{8}} \cdot \frac{\cancel{8}}{\cancel{61}} = 3 \\ x_2 = \frac{1}{8}(67 - 17 \cdot 3) = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2 \\ x_1 = (15 - 4 \cdot 3 - 2 \cdot 2)\frac{1}{(-1)} = 1 \end{cases}$

Același sistem rezolvat cu metoda Gauss cu pivotare parțială înseamnă:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 15 \\ 4 & 0 & 1 & 7 \\ -2 & -1 & 5 & 11 \end{array}\right) \underset{L1 \leftrightarrow L2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{4} & 0 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & 15 \\ -2 & -1 & 5 & 11 \end{array}\right) \underset{L1 \leftarrow \frac{1}{4}L1}{\sim}$$

pivot

$$|4| = \max_{i=\overline{1,3}} |a_{i1}|$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ -1 & 2 & 4 & 15 \\ -2 & -1 & 5 & 11 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & \boxed{2} & \frac{17}{4} & \frac{67}{4} \\ 0 & -1 & \frac{11}{2} & \frac{29}{2} \end{array}\right) \sim$$

$L2 \leftarrow L2 - L1 \cdot (-1)$
$L3 \leftarrow L3 - L1(-2)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & \frac{17}{8} & \frac{67}{8} \\ 0 & -1 & \frac{11}{2} & \frac{29}{2} \end{array}\right) \underset{L3 \leftarrow L3 - L2(-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 1 & \frac{17}{8} & \frac{67}{8} \\ 0 & 0 & \frac{61}{8} & \frac{183}{8} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{183}{8} \cdot \frac{8}{61} = 3 \\ x_2 = \frac{67}{8} - \frac{17}{8} \cdot 3 = \frac{67-51}{8} = 2 \\ x_1 = \frac{7}{4} - \frac{1}{4} \cdot 3 - 0 \cdot 2 = \frac{4}{4} = 1 \end{cases}$$

Algoritm pentru metoda Gauss cu pivotare parțială

Intrare: $n \in \mathbb{N}^*$

(m1) $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $b = (b_i)_{i=\overline{1,n}}$

Pentru $i = \overline{1, n-1}$

(m2) • determinăm linia $s \in \{\overline{i, n}\}$ a.î. $|a_{si}| = \max_{k=\overline{i,n}} |a_{ki}|$

• dacă $s \neq i$ atunci schimbăm liniile s și i în A și în b.

(m3)

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \boxed{a_{ii}} & \cdots & a_{in} & b_i \\ & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & a_{ki} & \cdots & a_{kn} & b_k \\ & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & a_{ni} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

- dacă $a_{ii}=0$, atunci algoritmul se oprește
  (sistemul nu are soluție unică sau nu are soluție)

  altfel ($a_{ii}\neq 0$)
  - împărțim linia i la a_{ii}:

    pentru $j=\overline{i+1,n}$

    $\quad a_{ij} \leftarrow a_{ij}/a_{ii}$

    $b_i \leftarrow b_i/a_{ii}$

    $a_{ii}=1$
  - se face reducerea la zero a elementelor de pe coloana i:

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & \overset{j}{\downarrow} & & & \\ i \rightarrow & a_{ii}=1 & a_{i,i+1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} & b_i \\ & \vdots & & & & & & \\ k \rightarrow & a_{ki} & a_{k,i+1} & \cdots & a_{kj} & \cdots & a_{kn} & b_k \end{array}$$

pentru $k=\overline{i+1,n}$

$\quad$ pentru $j=\overline{i+1,n}$

$\qquad a_{kj} \leftarrow a_{kj} - a_{ki} * a_{ij}/a_{ii}$

$\quad b_k \leftarrow b_k - a_{ki} * b_i$

$\quad a_{ki}=0$.

dacă $a_{nn}=0$, atunci alg se oprește,

altfel

rezolvă sistemul superior triunghiular folosind relațiile (12) și afișează soluția $x=(x_1,\dots,x_n)$.

[illegible]

Metoda Gauss cu pivotare totală se deosebește de metoda cu pivotare parțială prin faptul că alegem pivotul pentru poziția (i,i) din submatricea $(a_{kp})_{k,p=\overline{i,n}}$

Este necesară o matrice permutare, deoarece schimbând coloane în matrice, se schimbă componentele soluției în x.

În algoritmul pt metoda cu pivotare parțială vom preciza doar modificările:

(m1) inițializare matrice permutare: $P = I_n$.

(m2) • determinăm linia $s \in \{\overline{i,n}\}$ și coloana $t \in \{\overline{i,n}\}$ a.î.
$$|a_{st}| = \max_{\substack{k=\overline{i,n}\\ p=\overline{i,n}}} |a_{kp}|$$

(m3) • dacă $t \neq i$, atunci schimbăm coloana t și i în matricea A și în matricea P.

(m4) după rez sistemului triunghiular:
$$x \leftarrow Px$$
afișează soluția

Pentru exemplu de mai sus, metoda Gauss cu pivotare totală se aplică astfel:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 4 & 15 \\ 4 & 0 & 1 & 7 \\ -2 & -1 & 5 & 11 \end{array}\right) \underset{L1 \leftrightarrow L3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 5 & 11 \\ 4 & 0 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 4 & 15 \end{array}\right) \underset{C1 \leftrightarrow C3}{\sim}$$

$i=1 \Rightarrow s=3$
$t=3$

$|a_{33}| = \max_{k,p=\overline{1,3}} |a_{kp}|$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{5} & -1 & -2 & 11 \\ 1 & 0 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & -1 & 15 \end{array}\right) \underset{L1 \leftarrow L1/5}{\sim}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{11}{5} \\ 1 & 0 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & -1 & 15 \end{pmatrix} \underset{\substack{L2 \leftarrow L2 - L1 \cdot 1 \\ L3 \leftarrow L3 - L1 \cdot 4}}{\sim}$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{22}{5} & \frac{24}{5} \\ 0 & \frac{14}{5} & \frac{3}{5} & \frac{31}{5} \end{array}\right) \underset{C2 \sim C3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & \boxed{\frac{22}{5}} & \frac{1}{5} & \frac{24}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{14}{5} & \frac{31}{5} \end{array}\right) \sim$$

$i=2$ $\quad s=2$
$t=3$

$$|a_{23}| = \left|\frac{22}{5}\right| = \max_{k,p=\overline{2,3}} |a_{kp}|$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \quad L3 \leftarrow L3 / \left(\tfrac{22}{5}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{22} & \frac{24}{22} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{14}{5} & \frac{31}{5} \end{array}\right) \sim$$

$$L3 \leftarrow L3 - L2 \cdot \tfrac{3}{5}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{22} & \frac{24}{22} \\ 0 & 0 & \frac{305}{110} & \frac{610}{110} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = \frac{\cancel{610}^{\,2}}{\cancel{110}} \cdot \frac{\cancel{110}}{\cancel{305}} = 2 \\ x_2 = \frac{24}{22} - \frac{2}{22} = 1 \\ x_1 = \frac{11}{5} + \frac{1}{5} \cdot 2 + \frac{2}{5} \cdot 1 = 3. \end{cases}$$

$$^{22)}\frac{14}{5} - \frac{1}{22} \cdot \frac{3}{5} = \frac{308-3}{110} = \frac{305}{110}.$$

$$^{22)}\frac{31}{5} - \frac{24}{22} \cdot \frac{3}{5} = \frac{682-72}{110} = \frac{610}{110}$$

$$x \leftarrow Px = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Obs: Derivând din metoda Gauss fără pivotare se poate scrie o metodă, <u>metoda Gauss – Jordan</u>, pentru calculul inversei unei matrice:

$$(A \mid I_n) \underset{\text{Gauss fără pivotare}}{\sim} \left(\text{A sub formă superior triunghiulară} \;\middle|\; I_n \text{ în care aplicat trusul din Gauss fără pivotare}\right)$$

$$\sim (I_n \mid A^{-1}).$$

Exemplu :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{-1} & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L1 \leftarrow L1/(-1)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\substack{L2 \leftarrow L2 - L1\cdot 4 \\ L3 \leftarrow L3 - L1\cdot(-2)}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & 5 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L2 \leftarrow L2/8}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{4}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -5 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L3 \leftarrow L3 - L2\cdot(-5)}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{4}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & \frac{36}{8} & \frac{5}{8} & 1 \end{array}\right) \underset{L3 \leftarrow L3/\frac{1}{8}}{\sim}$$

$-3 + \frac{25}{8} = \frac{1}{8}$

$2 + \frac{20}{8} = \frac{36}{8}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{8} & \frac{4}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 36 & 5 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$i = 3$

$L2 \leftarrow L2 - L3 \cdot \frac{5}{8}$

$L1 \leftarrow L1 - L3 \cdot (-4)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 143 & 20 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & -\cancel{\frac{176}{8}}\,22 & -\cancel{\frac{24}{8}}\,3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 36 & 5 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$\frac{4}{8} - \frac{180}{8}$

$\frac{1}{8} - \frac{25}{8}$

$$\underset{L1 \leftarrow L1 - L2(-2)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 99 & 14 & 22 \\ 0 & 1 & 0 & -22 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 36 & 5 & 8 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 99 & 14 & 22 \\ -22 & -3 & -5 \\ 36 & 5 & 8 \end{matrix}}_{A^{-1}}$$

$-99 - 44 + 144 = 1$

$-14 - 6 + 20 = 0$

$-22 - 10 + 32 = 0$

Temă: 1) de scris algoritmul pentru metoda Gauss-Jordan

2) opțional, de scris programe pentru alg. din metoda Gauss (pivotare parțială și pivotare totală) și pentru metoda Gauss-Jordan.

! Pt. programele lucrate, pot fi prezentate la consultațiile dinainte de examen și se pot adăuga între 0–2 puncte la notă (nota de la 1 la 10).

Rezolvarea sistemelor liniare cu ajutorul factorizărilor

1) Factorizarea LU:

Dacă matricea $A = LU$; $L = (l_{ij})$; $U = (u_{ij})$

cu L = matrice inferior triunghiulară : $l_{ij} = 0$, $1 \le i < j \le n$

U = matrice superior triunghiulară : $u_{ij} = 0$, $1 \le j < i \le n$

atunci rezolvarea sistemului se face în două etape:

$$L\underbrace{(Ux)}_{y} = b$$

– se rezolvă sistemul $Ly = b$ folosind relațiile (13)

$$(14)\quad \begin{cases} y_1 = \dfrac{b_1}{l_{11}} \\ y_i = \dfrac{1}{l_{ii}}\left(b_i - \sum\limits_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, y_j\right), \quad i = \overline{2,n} \end{cases}$$

– se rezolvă sistemul $Ux = y$ folosind relațiile (12):

$$(15)\quad \begin{cases} x_n = \dfrac{y_n}{u_{nn}} \\ x_i = \dfrac{1}{u_{ii}}\left(y_i - \sum\limits_{j=i+1}^{n} u_{ij}\, x_j\right), \quad i = \overline{n-1,1} \end{cases}$$

Presupunem că $\det A \neq 0 \Rightarrow l_{ii} \neq 0$, $u_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$

OBS: Descomp. LU nu este unică.

Deducerea relațiilor de calcul pentru elementele matricilor L și U:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & u_{nn} \end{pmatrix}}_{U} = A$$

• înmulțim liniile din L cu prima coloană din U ⟹

⟹ prima coloană din A:

$$\begin{cases} l_{11} u_{11} = a_{11} \\ l_{21} u_{11} = a_{21} \\ \vdots \\ l_{n1} u_{11} = a_{n1} \end{cases}$$

$n+1$ necunoscute: u_{11}, $l_{11}, l_{21}, \dots, l_{n1}$

Alegem $\boxed{l_{ii} = 1, \ i = \overline{1,n}}$

sau $\boxed{u_{ii} = 1, \ i = \overline{1,n}}$

Presupunem că alegem $\boxed{l_{ii} = 1, \ i = \overline{1,n}}$ (16) ⟹

⟹ $\boxed{u_{11} = a_{11}}$

Presupunem că $a_{11} \neq 0$.

OBS: Dacă $a_{11} = 0$, atunci nu se poate aplica metoda în această formă, trebuie considerată o matrice permutare P și atunci factorizarea devine factorizarea $\underline{LUP}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} u_{11} = a_{11} \\ l_{j1} = a_{j1} / u_{11}, \ j = \overline{2,n} \end{array}} \quad (16).$$

• înmulțim linia 1 din L cu fiecare coloană din U

⟹ (prima linie din A)

$$\begin{cases} l_{11} u_{11} = a_{11} \\ l_{11} u_{12} = a_{12} \\ l_{11} u_{13} = a_{13} \\ \vdots \\ l_{11} u_{1n} = a_{1n} \end{cases} \Rightarrow \boxed{u_{1j} = a_{1j}, \ j = \overline{2,n}} \quad (17)$$

Din (16) și (17) avem inițializarea calculului pentru elem. matricilor L și U: prima coloană din L și prima linia din U.

• pentru $i=\overline{2,n}$: determinăm coloana i din L și linia i din U, având cunoscute:

$$\begin{cases} \cdot \text{ liniile } \overline{1,i-1} \text{ din } U \\ \cdot \text{ coloanele } \overline{1,i-1} \text{ din } L \end{cases}$$

• pentru linia i din U: înmulțim linia i din L cu coloanele de la i la n din U:

$$\text{linia } i \text{ din } L \longrightarrow \Big(\underbrace{l_{i1}\ l_{i2} \ldots\ l_{i,i-1}}_{\text{cunoscute}}\ \overset{1}{\overset{\shortparallel}{l_{ii}}}\ 0 \ldots 0\Big) \qquad \begin{array}{c} \downarrow k \\ \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \\ \vdots \\ u_{i-1,k} \\ \boxed{u_{i,k}} \\ \hline u_{i+1,k} \\ \vdots \\ u_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

pentru $k=\overline{i,n}$:

$$l_{i1}u_{1k} + l_{i2}u_{2k} + \ldots + l_{i,i-1}u_{i-1,k} + \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{l_{ii}}\, u_{i,k} = a_{ik} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{i,k} = a_{ik} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{ip}u_{pk} \quad ; \quad k=\overline{i,n}} \qquad (18)$$

(elem. liniei i din u).

În ipoteza că $u_{ii} \neq 0$, continuăm cu determinarea coloanei i din L: înmulțim liniile de la $i+1$ la n din L cu coloana i din U:

$$\begin{array}{l} \text{liniile} \\ k \in \{i+1,n\} \\ \text{din } L \end{array} \Big(\underline{l_{k1}\ l_{k2} \ldots\ l_{k,i-1}}\ \ l_{ki}\ \Big|\ \underline{l_{k,i+1} \ldots l_{kk}}\ 0 \ldots 0\Big) \qquad \begin{array}{c} \downarrow i \text{ (coloana } i \text{ din } U) \\ \begin{pmatrix} u_{1i} \\ u_{2i} \\ \vdots \\ u_{i-1,i} \\ u_{ii} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\underbrace{l_{k1}u_{1i} + l_{k2}u_{2i} + \ldots + l_{k,i-1}u_{i-1,i}}_{\text{cunoscute}} + \boxed{l_{ki}}\, \overset{\neq 0}{u_{ii}} = a_{ki}$$

$$\Rightarrow \boxed{l_{ki} = \frac{1}{u_{ii}}\Big(a_{ki} - \sum_{p=1}^{i-1} l_{kp}u_{pi}\Big), \quad k=\overline{i+1,n}} \qquad (19).$$

Alg de rezolvare sistem folosind factorizarea LU:

Intrare: n, A, b

- factorizăm A (în ipoteza că $l_{ii}=1$, $i=\overline{1,n}$)
  - inițializăm $L=I_n$, $U=O_n$.
  - calculăm (16) & (17) (prima coloană din L și prima linie din U) în ipoteza $a_{11}\neq 0$.
  - pentru $i=\overline{2,n}$
    - calculăm linia i din U cu (18)
    - dacă $u_{ii}\neq 0$, atunci calculăm coloana i din L cu (19).
    - altfel
      - factorizarea LU (calculată astfel) nu există.
- a descompus A în produsul LU.
- calculăm y din (14)
- calculăm x din (15)
- afișează soluția x.

Temă: Determinați relații de calcul pt. elementele matricilor L și U, dacă alegem $u_{ii}=1$, $i=\overline{1,n}$, în loc de $l_{ii}=1$, $i=\overline{1,n}$.

2) Factorizarea BB^t (factorizarea Cholesky)

Ipoteze:
- $\det A\neq 0$
- A simetrică
- A pozitiv definită (adică, $x^t\cdot Ax>0$, $\forall x\in\mathbb{R}^n$)

Se poate determina o matrice B inferior triunghiulară în $A=B\cdot B^t$ $\Rightarrow$ rezolvarea sistemului se reduce la rezolvarea a 2 sisteme triunghiulare:

$$B\underbrace{(B^t x)}_{y}=b$$

$$By=b \overset{(13)}{\Longrightarrow} y$$

$$B^t x=y \overset{(12)}{\Longrightarrow} x.$$

B^t — superior triunghiulară

Avem $B=(B_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$; $B_{ij}=0$, $1\le i<j\le n$

Procedând ca la metoda LU se determină relații de calcul pentru elementele lui B :

$$\boxed{B_{11}=\sqrt{a_{11}}} \text{ sau } \boxed{B_{11}=-\sqrt{a_{11}}} \quad (20)$$

(trebuie $a_{11}>0$ pt ca A este pozitiv definită)

OBS : [dacă A nu este poz. definită, atunci este posibil că a_{11} să fie ≤ 0.

pentru $i=\overline{2,n}$

$$\boxed{B_{ii}=\pm\sqrt{\underbrace{a_{ii}-\sum_{j=1}^{i-1}B_{ij}^2}_{d}}} \quad (21)$$

obs. dacă $d\le 0$, atunci înseamnă că A nu e poz. definită ⇒ ⇒ ∄ descomp BB^t.

$$\boxed{B_{ki}=\frac{1}{B_{ii}}\left[a_{ik}-\sum_{j=1}^{i-1}B_{ij}\cdot B_{kj}\right] \quad k=\overline{i+1,n}} \quad (22)$$

3) <u>Factorizarea QR</u> : constă în descompunerea matricei A, astfel:

$A=QR$

cu Q = matrice ortogonală $(QQ^t=Q^t\cdot Q=I_n)$

R = matrice superior triunghiulară ($r_{ij}=0$, $1\le j<i\le n$)

În acest caz, rezolvarea sistemului se face astfel:

$$Q(Rx)=b$$

• rezolvăm : $\left.\begin{array}{l} Qy=b \\ \underbrace{Q^tQ}_{I_n}y=Q^tB \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y=Q^tb}$

• apoi rezolvăm : $Rx=y$ folosind relațiile (12).

<u>Algoritmul pentru factorizarea QR</u> : obținerea unor relații de calcul pentru elementele matricelor Q și R. Avem:

$$\begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Din $QQ^t = I_n \Rightarrow (QQ^t)_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} q_{ik} q_{jk} = \delta_{ij}, \quad i,j=\overline{1,n}}$ (21)

$Q^t Q = I_n \Rightarrow (Q^t Q)_{ij} = \delta_{ij} \Rightarrow \boxed{\sum_{k=1}^{n} q_{ki} q_{kj} = \delta_{ij}, \quad i,j=\overline{1,n}}$ (22)

<u>Inițializare</u>: fiecare linie din Q se înmulțește cu coloana 1 din $R \Rightarrow$ coloana 1 din $A \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_{11} r_{11} = a_{11} \\ q_{21} r_{11} = a_{21} \\ \vdots \\ q_{n1} r_{11} = a_{n1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_{11}^2 r_{11}^2 = a_{11}^2 \\ q_{21}^2 r_{11}^2 = a_{21}^2 \\ \vdots \\ q_{n1}^2 r_{11}^2 = a_{n1}^2 \end{cases} \xRightarrow{(+)}$$

$$\Rightarrow r_{11}^2 \underbrace{(q_{11}^2 + q_{21}^2 + \dots + q_{n1}^2)} = a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2 \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} q_{k1}^2 = \sum_{k=1}^{n} q_{k1} q_{k1} \overset{(22)}{=} \delta_{11} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{11} = \pm\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2 + \dots + a_{n1}^2}} \quad (23).$$

$$\boxed{q_{j1} = \frac{a_{j1}}{r_{11}}, \quad j=\overline{1,n}} \quad (24)$$ cu cond $a_{11}^2 + \dots + a_{n1}^2 \neq 0$.

Pentru <u>$i=\overline{2,n}$</u> : - se cunosc coloanele de la 1 la $i-1$ din Q și din R
- calculăm a i-a coloană din Q și din R

Înmulțim liniile de la 1 la n din Q cu a i-a coloană din R:

$$k=\overline{1,n}\quad \left(q_{k1}\ \ q_{k2}\ \cdots\ q_{k,i-1}\ q_{ki}\ \middle|\ q_{k,i+1}, \cdots, q_{kn}\right) \begin{array}{c} \downarrow i \text{ din } R \\ \begin{pmatrix} r_{1i} \\ r_{2i} \\ \vdots \\ r_{ii} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{k1} r_{1i} + q_{k2} r_{2i} + \dots + q_{k,i-1} r_{i-1,i} + q_{ki} r_{ii} = a_{ki}, \quad k=\overline{1,n}$$

Înmulțim fiecare relație cu q_{kj}, $j=\overline{1,i-1}$ și sumăm după k $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ pt $j=\overline{1,i-1}$:

$$\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} q_{k1} q_{kj}\right)}_{\delta_{1j}} r_{1i} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} q_{k2} q_{kj}\right)}_{\delta_{2j}} r_{2i} + \dots + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} q_{k,i-1} q_{kj}\right)}_{\delta_{i-1,j}} r_{i-1,i} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} q_{ki} q_{kj}\right)}_{=\delta_{ij}} r_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} q_{kj} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta_{1j} r_{1i} + \delta_{2j} r_{2i} + \dots + \delta_{i-1,j} r_{i-1,i} + \underbrace{\delta_{ij}}_{=0} r_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} q_{kj}, \quad j=\overline{1,i-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} q_{kj}, \quad j=\overline{1,i-1}} \quad (25)$$

Pt. a determina r_{ii} avem:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(q_{k1} r_{1i} + q_{k2} r_{2i} + \dots + q_{k,i-1} r_{i-1,i} + q_{ki} r_{ii}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \Rightarrow$$

$$(r_{1i})^2 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} q_{k1} q_{k1}\right)}_{\delta_{11}=1} + \dots + r_{i-1,i}^2 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} q_{k,i-1} q_{k,i-1}\right)}_{\delta_{i-1,i-1}=1} + r_{ii}^2 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} q_{ki} q_{ki}\right)}_{\delta_{ii}=1} +$$

$$+ 2 \sum_{1 \le s < t \le n} \left(r_{si} r_{ti} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} q_{ks} q_{kt}\right)}_{\delta_{st}=0\ (s<t)}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_{ii}^2 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2}_{d}.$$

cu cond $d > 0 \Rightarrow$ $\boxed{r_{ii} = \pm\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2}}$ (26)

Din $q_{k1} r_{1i} + q_{k2} r_{2i} + \dots + q_{k,i-1} r_{i-1,i} + q_{ki} r_{ii} = a_{ki}$

$$\Rightarrow \boxed{q_{ki} = \frac{1}{r_{ii}}\left[a_{ki} - \sum_{s=1}^{i-1} q_{ks} r_{si}\right], \quad k = \overline{1,n}} \quad (27)$$

<u>Alg de factorizare QR și rezolvare sistem $Ax = b$</u> :

<u>Intrare</u> A, $\det A \neq 0$

<u>Inițializări</u> : $Q = O_n$; $R = O_n$

calculăm r_{11} din (23)

dacă $r_{11} \neq 0$ atunci

calculăm q_{j1}, $j = \overline{1,n}$ din (24)

altfel

algoritmul se oprește (nu există descomp QR).

pentru $i = \overline{2,n}$

calculăm r_{ji}, $j = \overline{1,i-1}$ din (25)

calculăm $d = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 - \sum_{k=1}^{i-1} r_{ki}^2$

dacă ($d <= 0$) atunci

alg se oprește

nu există descompunerea QR.

altfel

calculează r_{ii} cu (26)

calculează q_{ki}, $k = \overline{1,n}$ cu (27)

afișează Q și R

- calculează $y = Q^t b$
- rezolvă sistemul triunghiular $Rx = y$ folosind (12).
- afișează sol. x.

Temă: La tema opțională cu programe, adăugăm:
[– rezolvarea sistemelor liniare folosind factorizări LU, BB^t, QR.

Încercați prog. realizate pe exemplele:

1) pt LU: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$\left(L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} ; U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right)$

2) pt BB^t: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\left(B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right)$

3) pt QR: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2-\sqrt{3}}{2} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2\sqrt{3}+1}{2} & \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

2.2. Metode iterative pentru rezolvarea sistemelor liniare

$$Ax = b \quad , A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Dacă $A = M - N$ cu M matrice inversabilă $\Rightarrow$

$$Mx - Nx = b$$

$$Mx = Nx + b$$

înmulțim în stânga cu M^{-1} $\Big\} \Rightarrow M^{-1}Mx = M^{-1}Nx + M^{-1}b$

$$\Rightarrow x = \underbrace{M^{-1}N}_{B}x + \underbrace{M^{-1}b}_{c} \Rightarrow \boxed{x = Bx + c} \quad (28)$$

Pornind de la (28) construim o schemă iterativă, adică calculăm un șir de vectori $(x^{(m)})_{m \geq 0}$, astfel:

$$(29)\quad \begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n & \text{ales arbitrar} \\ x^{(m+1)} = B x^{(m)} + c, & \forall m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

În ce cond $(x^{(m)})_{m\geq 0}$ converge la soluția sistemului $Ax = b$, scris în mod echivalent $x = Bx + c$?

Avem: $\boxed{x^{(m+1)} - x} = Bx^{(m)} + \cancel{c} - (Bx + \cancel{c}) =$

$$= B(x^{(m)} - x) =$$

$$= B(Bx^{(m-1)} + \cancel{c} - Bx - \cancel{c}) = B^2(x^{(m-1)} - x) =$$

$$= \dots = \boxed{B^{m+1}(x^{(0)} - x)}$$

Deci: $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m+1)} = x \iff \lim\limits_{m\to\infty} B^{m+1} = O_n$

<u>În concluzie:</u> $\lim\limits_{m\to\infty} B^m = O_n$ este cond necesară și suficientă pt ca $(x^{(m)})_{m\geq 0}$ din (29) să converagă la x.

<u>Teorema 1</u> (condiții necesare și suficiente pt ca schema (29) să fie convergentă)

Șirul $(x^{(m)})_{m\geq 0}$ din (29) converge la soluția sistemului (28) dacă și numai dacă este îndeplinită una dintre condițiile:

$$(30)\quad \begin{cases} 1)\ \lim\limits_{m\to\infty} B^m = O_n \\ 2)\ \text{să existe o normă matricială ai } \|B\| < 1 \\ 3)\ \rho(B) < 1, \text{ unde } \rho(B) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \text{ valoare proprie pt } B\}. \end{cases}$$

<u>Metoda Jacobi</u> pentru sisteme liniare

$$Ax = b, \quad A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$$

$$A = D - L - U$$

$$D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Scanned with CamScanner

$$L = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \end{pmatrix} ; \quad l_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i>j \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} ; \quad u_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i<j \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

Presupunem că $a_{ii} \neq 0,\ i=\overline{1,n} \Rightarrow \exists D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}}\right)$

Scriem sistemul: $\overbrace{D}^{M} x = \overbrace{(L+U)}^{N} x + b \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \underbrace{D^{-1}(L+U)}_{B = J(A) = \text{matricea Jacobi}} x + \underbrace{D^{-1}b}_{c} \quad (31)$$

Schema iterativă Jacobi:

$$(32) \quad \begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n \\ x^{(m+1)} = J(A) \cdot x^{(m)} + c, \quad m \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Conform teoremei 1, (32) este convergentă dacă și numai dacă avem:

1) $\lim\limits_{m \to \infty} (J(A))^m = O_n$

sau

2) $\exists$ o normă matricială ai $\|J(A)\| < 1$

sau

3) $\rho(J(A)) < 1$.

Teorema 2 (cond. suficiente de conv. în metoda Jacobi).
Dacă A este matrice strict diagonal dominantă pe linii, adică $|a_{ii}| > \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|,\ i=\overline{1,n}$. (33)

atunci metoda Jacobi este convergentă.

Dem: $\mathcal{J}(A) = D^{-1}(L+U)$

$$(\mathcal{J}(A))_{ij} = (D^{-1}(L+U))_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(D^{-1})_{ik}}_{\begin{cases} \frac{1}{a_{ii}}, & i=k \\ 0, & i \neq k \end{cases}} (L+U)_{kj} =$$

$$= \frac{1}{a_{ii}} (L+U)_{ij}$$

dar $L+U = \begin{cases} 0, & i=j \\ -a_{ij}, & i \neq j \end{cases}$ $\Rightarrow (\mathcal{J}(A))_{ij} = \begin{cases} 0, & i=j \\ \frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \end{cases}$.

Calculăm $\|\mathcal{J}(A)\|_{\infty} = \max_{i=\overline{1,n}} \sum_{j=1}^{n} |(\mathcal{J}(A))_{ij}| =$

$$= \max_{i=\overline{1,n}} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| \right)$$

Dar pt $i=\overline{1,n}$: $\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} = \frac{1}{|a_{ii}|} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 1}}^{n} |a_{ij}| \underset{(33)}{<} 1$.

Deci: $\|\mathcal{J}(A)\|_{\infty} < 1 \xRightarrow{\text{Teorema 1}}$ metoda Jacobi converge.

OBS: Reciproca teoremei 2 nu este adevarată, adică, există matrice A care nu sunt diagonal dominante pe linii și pt care totuși metoda Jacobi converge pentru că verifică altă condiție de convergență.

Exemplu 1) Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că A nu e diagonal dominantă pe linii.

b) Arătați că metoda Jacobi nu converge.

a) $|2| \not> |-1| + |1| = 2$
$|2| \not> |2| + |2| = 4$
$|2| \not> |-1| + |-1| = 2$
$\Rightarrow$ A nu e diagonal dominantă pe linii.

b) Calculăm $J(A)$:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$L+U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J(A) = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculăm $\rho(J(A))$.
Valorile proprii pt $J(A)$ sunt rădăcinile polinomului caracteristic:

$$\det(J(A) - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\lambda & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + \cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} = 0$$

$$-\lambda^3 - \frac{5}{4}\lambda = 0 \Rightarrow -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{5}{4}\right) = 0 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_{2,3} = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} i \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(J(A)) = \max\left\{ |0|, \left|\frac{\sqrt{5}}{2} i\right|, \left|-\frac{\sqrt{5}}{2} i\right| \right\} = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ metoda Jacobi nu converge.

② (temă). Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) Arătați că A nu este strict diag dominantă.
b) Arătați că metoda Jacobi converge (adică, $\rho(A) < 1$)

Teorema 3 (cond suficiente de convergență în met Jacobi).
Dacă A este strict diagonal dominantă pe coloane,
adică, $$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| , \quad j = \overline{1,n} \quad (34)$$
atunci metoda Jacobi converge.

Dem: Se arată că (la fel ca în teorema 2):
$$\| J(A) \|_1 < 1 .$$