Curs 1, EDDP, ID, 25.10.2020

Examen:

- dacă examenul va fi on-line, atunci va fi pe MOODLE, sub forma unui quiz cu întrebări grilă.
- dacă examenul va fi față-în față, atunci va fi lucrare cu rezolvări complete; se poate folosi o foaie A4 (față-verso) cu formule, enunțuri, definiții, fără exemple; scrisă de mână și nefocopiată.

Bibliografie:

1 - formatul electronic al cursului (pe MOODLE)
2 - Ioan Roșca, Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale, Ed. Fundației "România de Mâine", 2000.
3 - Șt. Mirică, Ecuații diferențiale (vol 1, 2), Ed. Univ. București.
4 - Aurelian Cernea, Ecuații diferențiale, Ed. Univ. București. (pe MOODLE).

Ecuații diferențiale în $\mathbb{R}$

Def. Fie $k \in \mathbb{N}^*$.

O ecuație diferențială de ordin k în formă implicită este dată prin:

$$\boxed{F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k)}) = 0} \qquad (1)$$

unde:

$F: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \longrightarrow \mathbb{R}$

x = variabila independentă

y = variabila dependentă

Conv: $y^{(0)} = y$

și se cere determinarea lui y ca funcție de x.

O formă explicită a ec. (1) este:

$$\boxed{y^{(k)} = f(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k-1)})} \qquad (2)$$

Ec. (2) este liniară dacă:

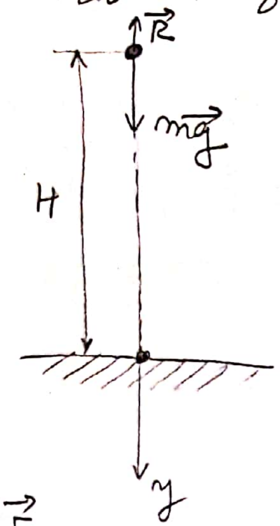
$$f(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k-1)}) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j(x) \cdot y^{(j)} + a_k(x) \qquad (3)$$

unde:

$$f : \Delta_1 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$$

$$a_0, a_1, \dots, a_k : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Exemple: 1) Căderea liberă cu rezistență a unui punct material



$y(0)=0$
$v(0)=0$
$v = y'(x) = \dot{y}(x)$
x = timpul
$\vec{j}$ = versorul axei Oy

$m\vec{a} = \vec{F}$

$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}$

Considerăm $\vec{R} = -m R(y')\vec{j}$

Avem $\vec{g} = mg\vec{j}$; $\vec{a} = y''\vec{j}$

$m y''\vec{j} = mg\vec{j} - mR(y')\vec{j}$ $\quad /:m$

$\boxed{y'' = g - R(y')}$ $\Rightarrow F(x, y, y', y'') = y'' - g + R(y')$

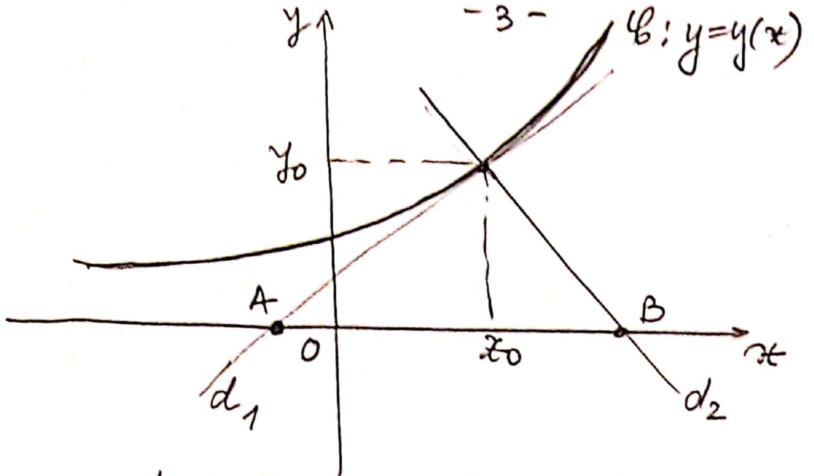
În cazul în care $R(y')=0$, atunci ec.:

$y'' = g \Rightarrow y' = gx + v_0$. ; $v_0 = v(x_0)$, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$.

$\Rightarrow y = g\frac{x^2}{2} + v_0 x + y_0$; $y(x_0) = y_0$, $y_0 = 0$; $x_0 = 0$.

Deci: $\boxed{\begin{array}{l} y = g\frac{x^2}{2} \\ v = gx. \end{array}}$ $\quad \left(\begin{array}{l} y = \frac{gt^2}{2} \\ v = gt \end{array} \right)$

2) Se cer curbele $y = y(x)$ care au proprietatea: în fiecare punct, distanța dintre punctul în care tangenta la curbă intersectează axa Ox și punctul în care normala curbă intersectează axa Ox este de lungime constantă k. $(k>0)$



d_1 = tangenta la curbă:

$$y - y(x_0) = y'(x_0)(x - x_0)$$

$A:\quad y_A = 0 \Rightarrow -y(x_0) = y'(x_0)(x_A - x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_A = x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A\left(x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)}, 0\right)}$$

d_2 = normala curbă $\Rightarrow$ are panta $-\frac{1}{y'(x_0)}$ și ec.:

$$y - y(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$$

$B:\quad y_B = 0 \Rightarrow -y(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0)}(x_B - x_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_B = x_0 + y(x_0)\cdot y'(x_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B\left(x_0 + y(x_0)\cdot y'(x_0), 0\right)}$$

Avem $AB = k \Rightarrow |x_B - x_A| = k \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|\cancel{x_0} + y(x_0)\cdot y'(x_0) - \cancel{x_0} + \frac{y(x_0)}{y'(x_0)}\right| = k$$

Cum x_0 oarecare pe curba $\mathcal{C}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|yy' + \frac{y}{y'}\right| = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left|yy' + \frac{y}{y'}\right| - k}_{F(x,y,y')} = 0$$

Pt. $\boxed{k=1}$, ec. (2) se scrie $\boxed{y' = f(x,y)}$ (4)

sau în forma implicită: $F(x,y,y')=0$

și este ec. diferențială de ordin 1 în $\mathbb{R}$.

Cazuri de ec. (4) integrabile.

1 Ec de tip primitivă: $y' = f(x, \cancel{y})$

$\boxed{y' = g(x)}$ (5)

Mulț. sol. ec. (5) este mulțimea primitivelor funcției g:

$$\boxed{y(x) = \int g(x)\,dx = G(x) + C \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Operații cu primitive:

1) $\int (g(x) \pm h(x))\,dx = \int g(x)\,dx \pm \int h(x)\,dx$

2) $\int \alpha g(x)\,dx = \alpha \int g(x)\,dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Tabel de primitive (mulț de primitive pt funcții elementare)

1) $\boxed{\int 1\,dx = x + C}$; $\int \alpha\,dx = \alpha x + C$;

C = mulț funcțiilor constante: $C + C = C$
$\alpha C = C$.

2) $\boxed{\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$

3) $\boxed{\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C}$

4) $\boxed{\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C}$; $\boxed{\int e^x\,dx = e^x + C}$

$a \in (0,\infty) \setminus \{1\}$

5) $\boxed{\int \sin x\,dx = -\cos x + C}$; $\boxed{\int \cos x\,dx = \sin x + C}$

$$\boxed{\int tg\,x\,dx = -\ln|\cos x| + C}$$

$$\boxed{\int ctg\,x\,dx = \ln|\sin x| + C}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \int (1+tg^2 x)dx = tg\,x + C}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = \int (1+ctg^2 x)dx = -ctg\,x + C}$$

6)
$$\boxed{\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\,arctg\,\frac{x}{a} + C}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C}\quad , x\in R\setminus\{\pm a\}$$

7)
$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C}\quad x\in R$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C}\quad x\in(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$$

$$\boxed{\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\frac{x}{a} + C}\quad x\in(-a,a)$$

$a\neq 0$

8)
$$\boxed{\int \frac{x}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2) + C}$$

$$\boxed{\int \frac{x}{x^2-a^2}dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-a^2| + C}$$

9)
$$\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = \sqrt{x^2+a^2} + C}$$

$$\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}dx = \sqrt{x^2-a^2} + C}$$

$$\boxed{\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = -\sqrt{a^2-x^2} + C}$$

<u>Metode de integrare:</u>

1) folosind tabelul de primitive

2) Metoda de integrare prin părți:

$$\boxed{\int \underbrace{u(x)v'(x)}_{g(x)}\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx} \quad (6)$$

<u>OBS</u>: Formula (6) provine din formula de derivare a <u>produsului</u> de funcții și formula:

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{\int \underbrace{h'(x)}_{g(x)}\,dx = h(x) + C} \\ \\ (u(x)v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int (u(x)\,v(x))'\,dx = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)v'(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u(x)v(x) = \int u'(x)\,v(x)\,dx + \underbrace{\int u(x)\,v'(x)\,dx}_{\Rightarrow (6)} \Rightarrow$$

3) <u>Prima schimbare de variabilă</u>

$$\boxed{\int g(u(x))\cdot \underbrace{u'(x)\,dx} = G(u(x)) + C}$$

$u(x) = t$

$u'(x)\,dx = dt$

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C$$

G = primitivă pt g

<u>OBS</u>: Pt formulele din tabelul de primitive avem, de exemplu:

pt 2): $\displaystyle\int (u(x))^r\cdot u'(x)\,dx = \frac{(u(x))^{r+1}}{r+1} + C$, $r \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

este formula pentru funcția putere compusă.

La fel, pot fi generalizate toate formulele din tabelul de primitive.

4) <u>A doua schimbare de variabilă</u>:

$$\boxed{\int g(u(x))\,dx = H(u(x)) + C, \quad \text{unde } H \text{ este primitivă pt } g\cdot(u^{-1})'}$$

$$u(x)=t \Longrightarrow x = u^{-1}(t) \overset{not}{=} \varphi(t)$$

(inversăm funcția u;
orice schimbare de variabilă este inversabilă)

Avem $x=\varphi(t)$

$$dx = \varphi'(t)\,dt = \left(u^{-1}(t)\right)'dt$$

$$\int \underbrace{g(t)\,\varphi'(t)}_{h(t)}\,dt = \int h(t)\,dt = H(t)+C$$

unde H primitivă pt $g\cdot\varphi'$.

Exemple:

a) $$\int \frac{1}{4x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{4(x^2+\frac{1}{4})}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x^2+(\frac{1}{2})^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\frac{1}{2}}\right)+C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x)+C.$$

b) $$\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx = \mathcal{I}, \quad x>0.$$

$$u(x)=\ln x \xrightarrow{\text{derivare}} u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$v'(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}} \xrightarrow[\text{integrare}]{} v(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

$$\mathcal{I} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x - \int \frac{1}{x}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\ln x - \frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{2}{3}\,\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C =$$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x - \frac{4}{9}\cdot\underbrace{x^{\frac{3}{2}}}_{x\sqrt{x}}+C = \frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)+C.$$

c) $y'=\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$

ec. de tip primitivă:

$$y(x)=\int \sqrt{x^2+1}\,dx.$$

$$u(x)=\sqrt{x^2+1} \Longrightarrow u'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)' =$$

$$v'(x)=1 \Longrightarrow v(x)=x \qquad = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y(x)=x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\cdot x\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{(\sqrt{x^2+1})^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{x^2+1}}}\,dx + \int\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = x\sqrt{x^2+1} - \underbrace{\int \sqrt{x^2+1}\,dx}_{y(x)} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y(x) = x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) + C,$$
$$C \in \mathbb{R}.$$

d) $$\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+5}\,dx = y(x)$$

$u(x) = x^2+2x+5$

$u'(x) = 2x+2 = 2(x+1)$

$2(x+1)\,dx = dt$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+5\right| + C$$

e) $$\int \frac{x+3}{x^2+2x+5}\,dx = y(x)$$

$$x^2+2x+5 = (x^2+2x+1)-1+5 = (x+1)^2+4$$

$x+1 = t$; $u(x) = x+1$

$x = t-1$; $u^{-1}(t) = t-1 = \varphi(t)$

$dx = dt$

$$\int \frac{t-1}{t^2+4}\,dt = \int \frac{t}{t^2+4}\,dt - \int \frac{1}{t^2+2^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(t^2+4) - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{2} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$$

Tema 1: Să se determine mulț. soluțiilor ec. diferențiale următoare:

1) $y' = \dfrac{(x+1)^2}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

2) $y' = \dfrac{2^x+5^x}{10^x}$, $x \in \mathbb{R}$

3) $y' = \dfrac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$; $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

4) $y' = tg^2 x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

5) $y' = \dfrac{\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^4-16}}$; $x \in (2, +\infty)$

6) $y' = \dfrac{x+2}{\sqrt{4-x^2}}$; $x \in (-2, 2)$

7) $y' = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$; $x \in \mathbb{R}$

8) $y' = \sqrt{9-x^2}$; $x \in (-3, 3)$

9) $y' = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2-6x+10}}$; $x \in \mathbb{R}$

10) $y' = x^2 \cdot \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

2 Ec. diferențială cu variabile separabile:

$$\boxed{y' = \underbrace{a(x) \cdot b(y)}_{f(x,y)}} \qquad (7)$$

unde $a : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue

Notație: $y' = \dfrac{dy}{dx}$; $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}(x)$

$y'(x_0) = \dfrac{dy}{dx}(x_0)$.

Algoritm de integrare a ec. (7)

• pasul 1: determinăm soluții staționare (care nu depind de x, sunt funcții const.) prin rezolvarea ec. alg: $\boxed{b(y) = 0}$

• dacă nu are soluții, atunci (7) nu are soluții staționare

• dacă $y_1, \dots, y_p$ soluții pt $b(y) = 0$, atunci avem soluțiile staționare:

$$\boxed{y(x) = y_j, \quad j = \overline{1,p}} \quad (8)$$

• pasul 2: pt y ai $b(y) \neq 0$, adică $y \in J \setminus \{y_1, \dots, y_p\}$, separăm variabile în ec. (7):

$$(7): \frac{dy}{dx} = a(x)\, b(y)$$

$$\frac{dy}{b(y)} = a(x)\, dx$$

• se determină B primitivă pt $\dfrac{1}{b}$, adică: $\displaystyle\int \frac{dy}{b(y)} = B(y) + C$

și A primitivă pt a, adică $\displaystyle\int a(x)\, dx = A(x) + C$

Mulțimea de soluții implicite pentru ec. (7) este:

$$(9) \quad \boxed{B(y) = A(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}},$$

care se poate explicita dacă putem exprima y în funcție de x din (9):

$$\boxed{y = B^{-1}\left(A(x) + C\right)} \quad (10)$$

Mult. sol. ec. (7) este (8) $\cup$ (9) sau (8) $\cup$ (10).

<u>Exemplu</u>: Fie ecuația: $\frac{dy}{dx} = \frac{(y^2-5y+6)x}{x^2+1}$; $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$.

Să se determine mulț. sol. ec.

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{a(x)} \cdot \underbrace{(y^2-5y+6)}_{b(y)}$$

$a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $I = \mathbb{R}$; $Y = \mathbb{R}$

$b: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

- $b(y) = 0 \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} y_1 = 3 \in Y \\ y_2 = 2 \in Y \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ec. dif are 2 soluții staționare:

$\varphi_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\varphi_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi_1(x) = 3$; $\varphi_2(x) = 2$

<u>Def</u>: Pt ec $y' = f(x, y)$ o funcție $\varphi: I_\varphi \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este soluție a ec. dacă:

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad \forall x \in I_\varphi.$$

- $b(y) \neq 0 \Rightarrow y \in \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} = (-\infty, 2) \cup (2, 3) \cup (3, +\infty)$

separăm variabilele:

$$\frac{dy}{y^2-5y+6} = \frac{x}{x^2+1}\, dx$$

$$\int \frac{dy}{y^2-5y+6} = \int \frac{dy}{\left(y^2 - 2y \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4}\right) - \frac{25}{4} + \overset{4}{6}} =$$

$$= \int \frac{dy}{\left(y-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = B(y) + C$$

$$\underbrace{y - \frac{5}{2}}_{u(y)} = t \Rightarrow dy = dt$$

$$\int \frac{dt}{t^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \cdot \ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}}{t+\frac{1}{2}}\right| + C$$

$$\Rightarrow B(y) = \ln\left|\frac{y-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}}{y-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}\right| = \ln\left|\frac{y-3}{y-2}\right|$$

$$\int \underbrace{\frac{x}{x^2+1}}_{a(x)} dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C \Rightarrow A(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$$

$\Rightarrow$ Mulț. sol. implicite: $\boxed{\ln\left|\frac{y-3}{y-2}\right| = \ln\sqrt{x^2+1} + \underbrace{\ln C}_{\in\mathbb{R}},\ C>0}$

Pt explicitare:

$$\ln\left|\frac{y-3}{y-2}\right| = \ln\left(C\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$\left|\frac{y-3}{y-2}\right| = C\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \frac{y-3}{y-2} = \underbrace{\pm C}_{C_1}\sqrt{x^2+1} \Rightarrow \quad C_1 \in \mathbb{R}^*$$

$$\Rightarrow y - 3 = yC_1\sqrt{x^2+1} - 2C_1\sqrt{x^2+1}$$

$$\boxed{y = \frac{3 + 2C_1\sqrt{x^2+1}}{1 - C_1\sqrt{x^2+1}}, \quad C_1 \in \mathbb{R}^*}$$

③ Ec diferențială omogenă:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x,y)}$$

cu f funcție omogenă, adică

$$\boxed{f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y)}$$

Deci, ec. omogenă se poate scrie sub forma:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)} \quad (11)$$

y → variab. dependentă

x → variab. indep.

Prop. 1: Prin schimbarea de variabile: $\frac{y}{x} = z$,

adică: $(x, y) \xrightarrow{y = z \cdot x} (x, z)$

ec. omogenă

ec. (11) în variabile (x,y) devine o ec. diferențială cu variabile separabile în variabile (x, z).

<u>Dem:</u>

$$\frac{y}{x} = z \quad ; \quad \frac{y(x)}{x} = z(x)$$

În ec. (11) schimbam variab:

$$\frac{d}{dx}(x\underset{z(x)}{z}) = g\left(\frac{\cancel{x}z}{\cancel{x}}\right)$$

$$\underset{1}{x'} \cdot z + x z' = g(z)$$

$$z + x z' = g(z) \Rightarrow x z' = g(z) - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' = \frac{1}{x} \cdot (g(z) - z)$$

$$\frac{dz}{dx} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{a(x)} \underbrace{(g(z) - z)}_{b(z)} \quad \text{ec. cu variab separabile.}$$

<u>Exemplu:</u>

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{x+y}{x-y}}_{f(x,y)} \quad ; \quad x \in (0,1), \ y \in (1, +\infty).$$

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{\alpha x + \alpha y}{\alpha x - \alpha y} = \frac{\cancel{\alpha}(x+y)}{\cancel{\alpha}(x-y)} = \frac{x+y}{x-y} = f(x,y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ este funcție omogenă $\Rightarrow$ ec. este ec. dif. omogenă.

$$(x, y) \xrightarrow[y = xz]{} (x, z)$$

$$(y(x) = x \cdot z(x)) \quad ; \quad z = \frac{y}{x} \in (1, +\infty)$$

Ec dată devine:

$$(xz)' = \frac{x + xz}{x - xz} \Rightarrow 1 \cdot z + x \cdot z' = \frac{\cancel{x}(1+z)}{\cancel{x}(1-z)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x z' = \frac{1+z}{1-z} - \frac{1-z}{z} \Rightarrow x z' = \frac{1 + \cancel{z} - \cancel{z} + z^2}{1-z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{a(x)} \cdot \underbrace{\frac{1+z^2}{1-z}}_{b(z)} \quad \text{ec cu var sep.}$$

(temă 2)

4) Ec. diferențială de tipul:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)} \quad , (12)$$

unde $g: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$

a.î. $\begin{cases} a_1^2+a_2^2>0 & (a_1 \text{ și } a_2 \text{ nu pot simultan zero}) \\ b_1^2+b_2^2>0 \\ c_1^2+c_2^2>0 \end{cases}$

OBS.:
1) $a_1=a_2=0 \overset{(12)}{\Longrightarrow} \frac{dy}{dx} = \underbrace{g\left(\frac{b_1y+c_1}{b_2y+c_2}\right)}_{h(y)} \to \frac{dy}{dx} = h(y)$

ec. cu var. sep.: $a(x)=1$, $b(y)=h(y)$

2) $b_1=b_2=0 \overset{(12)}{\Longrightarrow} \frac{dy}{dx} = \underbrace{g\left(\frac{a_1x+c_1}{a_2x+c_2}\right)}_{h(x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = h(x)$

ec. de tip primitivă.

3) $c_1=c_2=0 \overset{(12)}{\Longrightarrow} \frac{dy}{dx} = g\left(\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}\right) \Rightarrow$ ec. omogenă.

Prop. 2: Pt. ec. (12) calculăm $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$.

1) Dacă $\Delta = 0$, atunci prin schimbarea de variabilă:

$$a_1x+b_1y = z \quad , \text{ dacă } b_1 \neq 0$$

sau

$$a_2x+b_2y = z \quad , \text{ dacă } b_2 \neq 0$$

ec. (12) devine ec cu variabile separabile în variabile (x, z)

2) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci prin schimbarea de variabile

$$\begin{cases} s = x-x_0 & (s = \text{ind. independentă}) \\ z = y-y_0 & (z = \text{var. dependentă}) \end{cases}$$

unde (x_0, y_0) este soluția sistemului liniar:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases},$$

ec. (12) devine o ec. omogenă în variabile (s, z).

Dem: 1) Presupunem $b_1 \neq 0$.

$$(x,y) \xrightarrow[a_1x+b_1y=z]{} (x,z) \iff y = \frac{z-a_1x}{b_1}$$

$$y(x) = \frac{z(x)-a_1x}{b_1}$$

Ec. (12) devine:

$$\left(\frac{z-a_1x}{b_1}\right)' = g\left(\frac{a_1x + \cancel{b_1}\cdot\frac{(z-a_1x)}{\cancel{b_1}} + c_1}{a_2x + b_2\cdot\frac{(z-a_1x)}{b_1} + c_2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b_1}(z'-a_1) = g\left(\frac{(\cancel{a_1x} + z - \cancel{a_1x} + c_1)b_1}{b_1a_2x + b_2z - b_2a_1x + b_1c_2}\right) \Rightarrow$$

$$-x\underbrace{(a_1b_2 - b_1a_2)}_{=\Delta=0} = 0$$

$$\Rightarrow z'-a_1 = b_1 g\left(\frac{(z+c_1)b_1}{b_2z+b_1c_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \underbrace{b_1 g\left(\frac{zb_1+b_1c_1}{zb_2+b_1c_2}\right)+a_1}_{b(z)} \quad ; a(x)=1 \quad \Big| \Rightarrow \text{ec. cu var. separabile.}$$

2) $\Delta \neq 0$.

Presupunem că (x_0, y_0) este soluția sistemului liniar:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \quad (13)$$

(soluția e unică pt că $\Delta \neq 0$ este determinantul matr. sistemului).

și efectuăm schimbarea de variabile:

$$(x,y) \xrightarrow[\begin{cases} s = x-x_0 \\ z = y-y_0 \end{cases}]{} (s,z) \iff \begin{cases} x = s+x_0 \\ y = z+y_0 \end{cases}$$

$$y(x) = z(s(x)) + y_0.$$

$$s(x) = x-x_0 \Rightarrow \frac{ds}{dx} = 1$$

Avem: $$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(z(s(x))+y_0\right) = \frac{dz}{ds}(s(x))\cdot\frac{ds}{dx}(x) =$$

$$= \frac{dz}{ds}\cdot 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{ds}$$

Ec. (12) devine: $$\frac{dz}{ds} = g\left(\frac{a_1(s+x_0)+b_1(z+y_0)+c_1}{a_2(s+x_0)+b_2(z+y_0)+c_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{ds} = g\left(\frac{a_1 s + a_1 x_0 + b_1 z + b_1 y_0 + c_1}{a_2 s + a_2 x_0 + b_2 z + b_2 y_0 + c_2}\right)$$

dar din (13) $\Rightarrow \begin{cases} a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 = 0 \\ a_2 x_2 + b_2 y_0 + c_2 = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{dz}{ds} = g\left(\frac{a_1 s + b_1 z}{a_2 s + b_2 z}\right)$ ec. omogenă.

Exemplu: Fie ecuatia $\frac{dy}{dx} = \frac{3x + y - 5}{x - y + 1}$.

Să se determine mulţ. sol. ec. date.

Ec. de tip (12) în care:

$a_1 = 3$, $b_1 = 1$, $c_1 = -5$

$a_2 = 1$, $b_2 = -1$, $c_2 = 1$

$$\Delta = 3\cdot(-1) - 1\cdot 1 = -4 \neq 0.$$

Rezolvăm sistemul: $\begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ x - y + 1 = 0 \end{cases}$ (+)

$4x / -4 = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = 1}$

$1 - y + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y_0 = 2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ schimbarea de variabile este: $\begin{cases} s = x - 1 \\ z = y - 2 \end{cases}$

$$(x, y) \xrightarrow[\substack{x = s+1 \\ y = z+2}]{} (s, z)$$

$$y(x) = z(s(x)) + 2, \quad s(x) = x - 1$$

Avem (din prop. 2): $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{ds}$. $\Rightarrow$ ec. devine:

$$\Rightarrow \frac{dz}{ds} = \frac{3(s\cancel{+1}) + z\cancel{+2}\cancel{-5}}{s\cancel{+1} - z - \cancel{2}\cancel{+1}} \Rightarrow \frac{dz}{ds} = \underbrace{\frac{3s + z}{s - z}}_{f(s,z)}$$ ec. omogenă

Se face schimbarea de variab.

$$(s, z) \xrightarrow[z = s w]{} (s, w) \Rightarrow$$

$(z(s) = s \cdot w(s))$

$$\Rightarrow (s w)' = \frac{3s - sw}{s - sw} \Rightarrow 1\cdot w + s \cdot w' = \frac{\cancel{s}(3 - w)}{\cancel{s}(1 - w)} \Rightarrow$$

$$\to w' = \underbrace{\frac{1}{s}}_{a(s)} \underbrace{\left(\frac{3-w}{1-w} - w\right)}_{b(w)}$$ ec. cu var separabile.
(temă 3)

După integrarea ec cu variabile separabile ne întoarcem pe schimbarile de varib. făcute:

$$w(s) \xrightarrow{z = sw} z(s) = s \cdot w(s) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow y(x) = z(x-1) + 2 = (x-1)\, w(x-1)$$

5 Ec. afină sau liniară neomogenă.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a(x)\, y + b(x)} \qquad (14)$$

unde $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcții continue.

OBS: Dacă a, b sunt constante, atunci ec este cu variabile separabile: $\frac{dy}{dx} = \underbrace{(ay+b)}_{b_1(y)}$; $a_1(x) = 1$.

Cazul 1: $b(x) = 0$, $\forall x \in I$ $\Rightarrow$ ec. liniară omogenă:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a(x)\, y} \qquad (15)$$

(este ec. cu variab separabile cu $a_1(x) = a(x)$, $b_1(y) = y$)

Prop. 3 Mulțimea soluțiilor ec. (15) este formată din:

$$\boxed{y(x) = C\, e^{A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}} \qquad (16)$$

unde A este o primitivă pt a.

Dem: (15) este ec. cu variabile separabile: $a_1(x) = a(x)$, $b_1(y) = y$

- $b_1(y) = 0 \Rightarrow y = 0$ sol. staționară $\Rightarrow \varphi : I \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = 0$, $\forall x \in I$
- pt $b_1(y) = 0$ $(y \neq 0)$ separăm variabilele:

$$\frac{dy}{y} = a(x)\,dx$$

$$\left.\begin{array}{l} \int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C \Rightarrow B_1(y) = \ln|y| \\ \int a(x)\,dx = A(x) + C \Rightarrow A(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ mulț. sol. implicite: $B_1(y) = A(x) + \ln C_1$, $C_1 > 0$.

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln(e^{A(x)}) + \ln C_1 \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} v = \ln(e^{v}) \\ \forall v \in \mathbb{R} \end{array}}$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln(C_1 e^{A(x)}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y| = C_1 e^{A(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \underbrace{\pm C_1}_{C} e^{A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}^* \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow y = Ce^{A(x)},\ C \in \mathbb{R}^* \\ \text{dar } y = 0 \text{ sol. staționară} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{y = Ce^{A(x)},\ C \in \mathbb{R}} \quad (16).$$

<u>Cazul 2</u>: ec. dif. afină:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)} \quad (14)$$

<u>Algoritm de rezolvare</u>:

<u>Pasul 1</u>: rezolvăm ec. liniară omogenă atașată:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = a(x)\bar{y}$$

Conform prop. 3: $\bar{y}(x) = Ce^{A(x)}$, $C \in \mathbb{R}$

unde A este o primitivă pentru a.

<u>Pasul 2</u>: Avem 2 variante:

Var. 1 Presupune să cunoaștem o soluție particulară a ec. (14). Fie $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ o soluție particulară a ec. (14). Atunci mulț. sol. ec. (14) este:

$$\boxed{y(x) = \underbrace{Ce^{A(x)}}_{\bar{y}(x)} + \varphi_0(x), \quad C \in \mathbb{R}} \quad (17)$$

var. 2 Când nu cunoaștem o soluție particulară pentru (14), se poate aplica metoda variației constantelor : adică, determinăm o funcție $C : I \to \mathbb{R}$

a.î.: $y(x) = C(x) \cdot e^{A(x)}$ (18)

să fie soluție a ec. (14)

Înlocuim (18) în (14) și se obține o ec. diferențială pentru funcția C:

$$\frac{d}{dx}\left(C(x) e^{A(x)}\right) = a(x) \cdot C(x) \cdot e^{A(x)} + b(x)$$

$$C'(x) e^{A(x)} + \cancel{C(x)\, e^{A(x)} \cdot \underbrace{A'(x)}_{= a(x)}} = \cancel{a(x) C(x)\, e^{A(x)}} + b(x)$$

$$\Rightarrow C'(x) \cdot e^{A(x)} = b(x) \;\Big|\; \cdot e^{-A(x)} \Rightarrow C'(x) = b(x) e^{-A(x)}$$

$$\frac{dC}{dx} = b(x) \cdot e^{-A(x)}$$

ec. de tip primitivă

Rezultă: $C(x) = \int b(x) \cdot e^{-A(x)} dx =$

$$= \int_{x_0}^{x} b(s) e^{-A(s)} ds + K, \quad K \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$x_0 \in I$

$\Rightarrow$ Mulț. sol. ec. (14) este:

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} b(s) e^{-A(s)} ds + K\right) e^{A(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = \underbrace{e^{A(x)} \cdot \int_{x_0}^{x} b(s) \cdot e^{-A(s)} ds}_{\text{soluție particulară } (\varphi_0)} + \underbrace{K \cdot e^{A(x)}}_{\text{sol. ec. liniare omogene atașate ec. (14)}} \quad (18)$$

⑥ Ecuația diferențială Bernoulli

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)\cdot y^{\alpha}} \qquad (19)$$

unde $a, b : I \to \mathbb{R}$ funcții continue

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

OBS: 1) $\alpha = 0 \Rightarrow$ ec. (14)

2) $\alpha = 1 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \underbrace{\big(a(x)+b(x)\big)}_{a_1(x)} y$ → ec. liniară omogenă

Varianta 1: Prin metoda variației constantelor:

• pasul 1: integrăm ec. liniară omogenă atașată ec. (19):

$$\frac{d\overline{y}}{dx} = a(x)\overline{y} \underset{\text{prop. 3}}{\Longrightarrow} \overline{y}(x) = C e^{A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

A = primitivă pt. a.

• pasul 2: aplicăm metoda variației constantelor: determinăm funcția $C : I \to \mathbb{R}$ a.î.

$$y(x) = C(x)\, e^{A(x)}$$

să fie soluția ec. Bernoulli:

$$\left(C(x)e^{A(x)}\right)' = a(x)\cdot C(x) e^{A(x)} + b(x)\cdot\left(C(x)\cdot e^{A(x)}\right)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow C'(x)e^{A(x)} + \cancel{C(x)e^{A(x)}\underbrace{A'(x)}_{a(x)}} = \cancel{a(x)C(x)e^{A(x)}} + b(x)\,C^{\alpha}(x)\cdot e^{\alpha A(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x)e^{A(x)} = b(x)\cdot C^{\alpha}(x)\cdot e^{\alpha A(x)} \;\Big|\cdot e^{-A(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dx} = \underbrace{b(x)\cdot e^{(\alpha-1)A(x)}}_{a_1(x)} \cdot \underbrace{C^{\alpha}}_{b_1(C)}.$$

ec. cu variabile separabile.

În cazul în care $\alpha > 0$ avem soluția staționară $C(x) = 0 \Rightarrow y(x) = 0$ soluție pt. ec. Bernoulli

Varianta 2: În ec. Bernoulli se face schimbarea de variabile:

$$(x,y) \xrightarrow[z = y^{1-\alpha}]{y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}} (x,z)$$

Se obține:

$$\left(z^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)' = a(x)\cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(x)\cdot\left(z^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\cdot z' = a(x)\cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(x)\cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\cdot z' = a(x)\cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(x)\cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \Big| : \frac{1}{1-\alpha} z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow z' = (1-\alpha)a(x)\cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1-\alpha}} + b(x)(1-\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' = \underbrace{(1-\alpha)a(x)}_{a_1(x)}\cdot z + \underbrace{(1-\alpha)b(x)}_{b_1(x)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ pt z ec dif. afină (liniară neomogenă) în variab (x,z);

(7) Ec. diferențială Riccati

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)\cdot y + c(x)} \quad (20)$$

$a, b, c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcții continue.

OBS: 1) Dacă a, b, c sunt constante, atunci ec. (20) este cu variabile separabile:

$$\frac{dy}{dx} = 1\cdot\underbrace{(ay^2 + by + c)}_{b_1(y)}$$

$$a_1(x) = 1.$$

2) Dacă $c(x) = 0$, $\forall x \in I$, atunci ec. (20) este ec. Bernoulli cu $\alpha = 2$:

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{b(x)}_{a_1(x)} y + \underbrace{a(x)}_{b_1(x)} y^2$$

Ec. Riccati se poate integra dacă cunoaștem o soluție particulară a ec. Notăm $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ soluția particulară pentru ec. (20):

$$\varphi_0'(x) = a(x)\cdot\varphi_0^2(x) + b(x)\varphi_0(x) + c(x), \quad \forall x \in I.$$

În ec. (20) se face schimbarea de variabilă:

$$(x,y) \xrightarrow[y(x) = z(x) + \varphi_0(x)]{y = z + \varphi_0} (x,z)$$

Ec. (20) devine:

$$(z+\varphi_0)' = a(x)(z+\varphi_0)^2 + b(x)(z+\varphi_0) + c(x)$$

$$\Rightarrow z' + \cancel{\varphi_0'} = a(x)z^2 + 2a(x)z\cdot\varphi_0 + \cancel{a(x)\varphi_0^2} + b(x)\cdot z + \cancel{b(x)\cdot\varphi_0} + \cancel{c(x)}.$$

$$\Rightarrow z' = \underbrace{\left[2a(x)\varphi_0(x) + b(x)\right]}_{a_1(x)} z + \underbrace{a(x)}_{b_1(x)}\cdot z^2$$

$$\frac{dz}{dx} = a_1(x)z + b_1(x)z^2 \quad \text{ec. Bernoulli cu } \alpha = 2.$$

<u>Exemplu</u>: Fie ec:

$$y' = y^2 - \frac{4}{x}y + \frac{2}{x^2}; \quad x > 0, \; y \in \mathbb{R}.$$

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ a.î. $\varphi_0 : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\varphi_0(x) = \frac{m}{x}$ să fie soluție a ec. date.

b) Să se determine mulț. sol. ec. și apoi soluția care verifică $y(1) = 2$.

a) φ_0 soluție $\Rightarrow \left(\frac{m}{x}\right)' = \left(\frac{m}{x}\right)^2 - \frac{4}{x}\cdot\frac{m}{x} + \frac{2}{x^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow m\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{m^2}{x^2} - \frac{4m}{x^2} + \frac{2}{x^2}, \quad \forall x > 0$$

Se elimină x sau se face identificarea coeficienților $\Rightarrow -m = m^2 - 4m + 2 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 = 1 \\ m_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \varphi_0(x) = \frac{1}{x} \text{ sau } \varphi_0(x) = \frac{2}{x}.$$

b) ec. Riccati: $a, b, c : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$a(x) = 1; \quad b(x) = -\frac{4}{x}; \quad c(x) = \frac{2}{x^2}$$

Alegem una dintre cele 2 soluții particulare:

$$\varphi_d(x) = \frac{1}{x}$$

și efectuăm schimbarea de variabile:

$$(x,y) \xrightarrow{y = z + \frac{1}{x}} (x,z)$$

$$\left(z+\frac{1}{x}\right)' = \left(z+\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{4}{x}\left(z+\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^2}$$

$$z' - \cancel{\frac{1}{x^2}} = z^2 + 2z\frac{1}{x} + \cancel{\frac{1}{x^2}} - \frac{4z}{x} - \cancel{\frac{4}{x^2}} + \cancel{\frac{2}{x^2}}$$

$$z' = \frac{-2}{x} z + z^2$$

ec. Bernoulli cu $a_1(x) = \frac{-2}{x}$; $b_1(x) = 1$

Integrăm ec. Bernoulli cu varianta 1, cu metoda variației constantelor:

- ec. liniară omogenă atașată:

$$\bar{z}' = \underbrace{-\frac{2}{x}}_{a_1(x)} \bar{z} \underset{\text{prop 3}}{\Rightarrow} \bar{z}(x) = C e^{A_1(x)}$$

$$\int a_1(x)dx = -2\int \frac{1}{x}dx = -2 \ln|x| + C = \ln|x|^{-2} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1(x) = \ln x^{-2} = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{A_1(x)} = e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{z}(x) = C \cdot \frac{1}{x^2}$$

$$\boxed{e^{\ln v} = v, \ \forall v > 0}$$

$$\boxed{\alpha^{\log_\alpha v} = v, \ \forall v > 0, \ \forall \alpha \in (0,\infty)\setminus\{1\}}$$

- aplicăm în ec. Bernoulli, metoda variației constantelor, adică, determinăm $C : (0,\infty) \to \mathbb{R}$

a.î. $z(x) = C(x)\frac{1}{x^2}$ să fie soluție a ec. Bernoulli

$$\left(C(x)\cdot\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x}\cdot C(x)\cdot\frac{1}{x^2} + C^2\frac{1}{x^4} \Rightarrow$$

$$\left(\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}\right)$$

$$\Rightarrow C'(x)\cdot\frac{1}{x^2} + \cancel{C(x)\cdot\left(\frac{-2}{x^3}\right)} = \cancel{\frac{-2}{x^3}C(x)} + C^2\frac{1}{x^4}.$$

$$C'(x)\cdot\frac{1}{x^2} = C^2\frac{1}{x^4} \quad \Big| \cdot x^2 \Rightarrow C'(x) = C^2\frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dx} = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{a_2(x)}\cdot\underbrace{C^2}_{b_2(C)}$$ ec. cu variabile separabile.

- $b_2(C) = 0 \Rightarrow C^2 = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow C(x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow z(x) = 0\cdot\frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow y = 0 + \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = \frac{1}{x} = \varphi_0(x)}$$

- pt $C \neq 0$ ($b_2(C) \neq 0$) $\Rightarrow$ separăm variabilele:

$$\frac{dC}{C^2} = \frac{1}{x^2}dx$$

$$\int C^{-2}dC = \frac{C^{-2+1}}{-2+1} + C_1 \Rightarrow \boxed{B_2(C) = \frac{-1}{C}}$$

$$\int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C_2 \Rightarrow \boxed{A_2(x) = -\frac{1}{x}}$$

$\Rightarrow$ mulț. sol implicite pt ec. în C:

$$-\frac{1}{C} = -\frac{1}{x} + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{-1}{-\frac{1}{x} + K} = \frac{x}{1 - xK} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x) = \frac{\cancel{x}}{1-xK}\cdot\frac{1}{x^{\cancel{2}}} = \frac{1}{x(1-xK)};\ K \in \mathbb{R}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{x(1-xK)} + \frac{1}{x} = \frac{2-xK}{x(1-xK)}};\ K \in \mathbb{R}$$

Ec Riccati are sol: $\begin{cases} \varphi_0(x) = \frac{1}{x} \\ y(x) = \frac{2-xK}{x(1-xK)},\ K \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Evident că $\varphi_0(1) = 1 \neq 2$.

Determinăm K a.î. $y(1) = 2 \Rightarrow \frac{2-1\cdot K}{1\cdot(1-1\cdot K)} = 2 \Rightarrow \cancel{2} - K = \cancel{2} - 2K$ $(K = 0)$.

$\Rightarrow$ sol care verifică $y(1)=2$ este:

$$y(x) = \frac{2}{x}.$$

Tema 4:

1) Să se determine mult sol. ec:

a) $y' = e^{y}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

b) $y' = \sqrt{4-y^2}$; $x \in \mathbb{R}$, $y \in (-2,2)$

c) $y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$; $x, y \in \mathbb{R}$

d) $y' = \dfrac{x\sqrt{1+y^2}}{y\sqrt{1+x^2}}$, $x, y > 0$

e) $y' = \dfrac{y(x^3+1)}{x(y^2+1)}$; $x, y > 0$.

f) $y' = \dfrac{\cos y \cdot \sin x}{(\sin^2 y+1)(\cos^2 x+4)}$; $x \in \mathbb{R}$, $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

2)

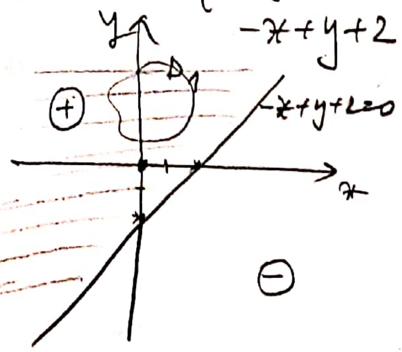
g) $y' = \dfrac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$; $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$

h) $y' = \dfrac{3x^2y + y^3}{2x^3}$; $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$

i) $y' = \dfrac{x-y+1}{-x+y+2}$, $(x,y) \in D_1 \subset \{(x,y) \mid -x+y+2 > 0\}$.

j) $y' = \dfrac{2x-y-1}{x-y+1}$

$(x,y) \in D_1 \subset \{(x,y) \mid x-y+1 < 0\}$.



k) $y' + \dfrac{2y}{x^2-1} = 2x+2$, $x \in (1, +\infty)$, $y \in \mathbb{R}$

l) $y' = -\dfrac{1}{x}y + 1$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$.

m) $y' = \dfrac{y}{x} + \dfrac{1}{x^2y^2}$; $x, y > 0$.

n) $y' = (tg\,x)\,y + \cos^2 x$, $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $y \in \mathbb{R}$

o) $y' = -xy + y^2 \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

p) $y' = +\frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$

2) Fie ecuatia: $xy' + y^2 - 4y + 3 = 0$, $x > 0$, $y \in \mathbb{R}$

a) Precizati tipul ecuatiei

b) Determinati mulț. sol. ec. considerând ec. ca ec. cu var. separabile.

c) Determinati mulț. sol. ec. considerând ec. ca ec. Riccati folosind o soluție particulară de forma: $\varphi_0(x) = m$, cu m convenabil determinat.

3) Fie ec. Riccati:

(*) $y' - \frac{3x^2}{x^5-1} - \frac{x^4}{x^5-1}\,y + \frac{2x}{x^5-1}\,y^2 = 0$

$x \in (1, +\infty)$; $y \in \mathbb{R}$.

a) Determinati $m, n \in \mathbb{R}$ a.î. $\varphi_0(x) = m x^n$ să fie soluție a ec. (*).

b) Determinati mulț. sol. ec. (*).