15.12.2019
— curs 3 —

Examen: 9.02.2020, ora 9 → cu consultaţii pe 7.02.2020 la ora 13^{00}
sau
26.01.2020, ora 9 → ——"—— 25.01.2020, 9^{00}

OBS: Pt. consultaţii, anunţaţi prin e-mail dacă veniţi:

pmiulia@fmi.unibuc.ro

Sisteme de ecuaţii diferenţiale liniare

Cazul omogen: $x' = A(t)x$,

$A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$I \subset \mathbb{R}$

$A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=\overline{1,n}}$

Funcţia de determinat:
$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n.$$

sau

$$\boxed{y' = A(x)y}$$

$$A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=\overline{1,n}} \qquad (1).$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$$

Prop. 1 (în cursul 2)
Dacă S_A = mulţ sol. sistemului (1) atunci $(S_A, +, \cdot)$ este spaţiu vectorial real de dimensiune n.

Definiţii:
• O bază în S_A s.n. sistem fundamental de soluţii: $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset S_A$ formează bază în S_A dacă este liniar independent:

$$c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n = 0 \iff c_1 = \dots = c_n = 0$$

cu $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$

ϕ este sistem de generatori, adică

$$\forall \varphi \in S_A \text{ avem } \varphi = C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n$$

cu $C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$.

- Matricea fundamentală de soluții este matricea în care soluțiile dintr-un sistem fundamental de soluții sunt scrise pe coloane:

$$\phi(x) = \text{coloane}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x) & \dots & \varphi_{1n}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1}(x) & \dots & \varphi_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad (2)$$

unde $\varphi_j(x) = \begin{pmatrix} \varphi_{1j}(x) \\ \vdots \\ \varphi_{nj}(x) \end{pmatrix}$, $\forall x \in I$.

Prop. 2: Dacă ϕ este matrice fundamentală de soluții, atunci $\det \phi(x) \neq 0, \forall x \in I$. (3)

adică, $\exists (\phi(x))^{-1}, \forall x \in I$.

Cazul neomogen:

$$\boxed{y' = A(x)y + b(x)} \quad (4)$$

unde $A : I \subset \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$; $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Prop. 3: Dacă φ_0 este o soluție pt (4), atunci mulțimea sol. sist (4) este din funcții de forma:

$$y = (C_1\varphi_1 + \dots + C_n\varphi_n) + \varphi_0 \quad (5)$$

$C_1, \dots, C_n \in \mathbb{R}$.

unde $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ~~este~~ sistem fundamental de soluții pentru sistemul liniar omogen atașat sist. (4):

$$\bar{y}' = A(x)\bar{y} \quad (6).$$

<u>Prop 4</u>: Soluția generală pentru (4) poate fi obținută cu <u>metoda variației constantelor</u>:

- se determină un sistem fundamental de soluții pt (6): $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

  şi matricea fundam. de soluții ϕ. $\Rightarrow$

  $$\Rightarrow \boxed{(\phi(x))' = A(x)\phi(x),\ \forall x \in I}, \quad (7)$$

  şi: orice soluție pt (6) se scrie:

  $$\boxed{\bar{y}(x) = \phi(x)C, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n} \quad (8)$$

  $$\phi(x)C = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x).$$

- pt. metoda variației constantelor:

  determinăm $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$ a.î.

  $y(x) = \phi(x)C(x)$ să fie soluție pt sistemul (4) neomogen $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (\phi(x)C(x))' = A(x)\phi(x)C(x) + b(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\phi'(x)C(x)} + \phi(x)C'(x) = \cancel{A(x)\phi(x)C(x)} + b(x) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \phi(x)C'(x) = b(x) \\ &\text{Dar } \exists(\phi(x))^{-1}, \forall x \in I \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{C'(x) = (\phi(x))^{-1}b(x)}$$

$\Rightarrow$ comp lui C, adică $c_1, \dots, c_n$, verifică ecuații de tip primitivă:

$$\boxed{c_j' = h_j(x),\ j = \overline{1,n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c_j(x) = H_j(x) + k_j,\ j = \overline{1,n}},$$

unde H_j este o primitivă pt h_j.

Deci: Mulțimea sol. sistemului (4) este de forma:

$$\left\{ y(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n(x) \right\}$$
$$k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}.$$

Algoritm de rezolvare a sistemelor de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți:

$$\boxed{y' = A\cdot y + b(x)} \quad (9)$$

unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

Algoritmul se referă la partea omogenă:

$$\boxed{y' = Ay} \quad (10)$$

urmând ca pt. partea neomogenă să aplicăm prop 2 sau prop. 3.

Algoritmul pt (10):

- se determină valorile proprii pentru A, adică rezolvăm ec. (caract.): $\underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{\substack{\| \\ p_A(\lambda) = \text{polinomul caract. asociat matricii } A.}} = 0.$

  și găsim k valori proprii distincte pt A, cu multiplicitățile $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$, adică:

  $$p_A(\lambda) = \underbrace{(-1)^n}_{\text{coef}^{\text{t}}\text{. lui } \lambda^n} \cdot (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

  $$m_1 + \dots + m_k = n.$$

- pt $j = \overline{1,k}$, adică pt fiecare λ_j cu multiplicitatea m_j se determină m_j soluții pt (10), care vor intra într-un sistem fundamental de soluții:

Cazul 1: $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{R},\ m_j = 1}$

se determină $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ a.î. $Au = \lambda_j u$, adică u să fie vector propriu asociat valorii proprii λ_j.

Se scrie o soluție pt SFS (sist. fundam. de sol): $\boxed{\varphi_1(x) = e^{\lambda_j x}\cdot u}$

Cazul 2: $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}, \ m_j=1}$ $\Longrightarrow$ $\overline{\lambda_j}$ este valoare proprie
(p_A are coef reali)

și se află printre cele k valori proprii distincte și are $\overline{m_j} = m_j = 1$.

În acest caz, se determină 2 soluții pt SFS coresp. pt λ_j și $\overline{\lambda_j}$.

Avem: $\lambda_j = a_j + i \cdot b_j$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $b_j \neq 0$.
$(i^2=-1)$.

și determinăm $u \in \mathbb{C}^n$, $u \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ a.î. $Au = \lambda_j u$, adică, u este vector propriu cu valori complexe.

Se scrie 2 soluții în SFS:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_1(x) &= Re\left(e^{\lambda_j x} \cdot u\right) \\ \varphi_2(x) &= Im\left(e^{\lambda_j x} \cdot u\right) \end{aligned}}$$

Avem: $e^{\lambda_j x} = e^{a_j x} \cdot \underbrace{e^{i(b_j x)}}_{} \overset{=}{\uparrow} \underbrace{e^{a_j x}\left(\cos(b_j x) + i \sin(b_j x)\right)}_{}$

$$\boxed{e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha}$$

$u \in \mathbb{C}^n \Longrightarrow u = \underbrace{v + iw}_{}$ cu $v, w \in \mathbb{R}^n$
cu v, w nu amândoi nuli.

Obținem:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_1(x) &= e^{a_j x}\left(v\cos(b_j x) - w\sin(b_j x)\right) \\ \varphi_2(x) &= e^{a_j x}\left(w\cos(b_j x) + v\sin(b_j x)\right) \end{aligned}}$$

Cazul 3: $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{R}, \ m_j > 1}$

Se determină $p_0, p_1, \dots, p_{m_j-1} \in \mathbb{R}^n$ nu toți nuli a.î. $\varphi(x) = \left(\sum_{r=0}^{m_j-1} p_r x^r\right) e^{\lambda_j x}$ să verifice sistemul: $y' = Ay$ (adică, (10))

Se obține: $\left(\left(\sum_{r=0}^{m_j-1} p_r x^r\right) e^{\lambda_j x}\right)' = A\left(\left(\sum_{r=0}^{m_j-1} p_r x^r\right) e^{\lambda_j x}\right) \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\sum_{r=1}^{m_j-1} p_r\, r\, x^{r-1}\right)}_{r=s+1 \iff s=r-1} \cancel{e^{\lambda_j x}} + \left(\sum_{r=0}^{m_j-1} p_r x^r\right) \cancel{e^{\lambda_j x}} \cdot \lambda_j = \left(\sum_{r=0}^{m_j-1} (A p_r)\, x^r\right) \cancel{e^{\lambda_j x}} \quad \Big|: e^{\lambda_j x} \Rightarrow$$

r	1	m_j-1
s	0	m_j-2

$$\Rightarrow \left(\sum_{s=0}^{m_j-2} (s+1)\, p_{s+1}\, x^s\right) + \sum_{s=0}^{m_j-2} \lambda_j p_s\, x^s + \lambda_j p_{m_j-1}\, x^{m_j-1} =$$

$$= \sum_{s=0}^{m_j-2} (A p_s)\, x^s + (A p_{m_j-1})\, x^{m_j-1} \Rightarrow$$

Identificăm coeficienții pt x^s, $s=\overline{0, m_j-1}$:

$$\begin{cases} (s+1)p_{s+1} + \lambda_j p_s = A p_s, & s=\overline{0, m_j-2} \\ \lambda_j p_{m_j-1} = A p_{m_j-1} \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} p_1 + \lambda_j p_0 = A p_0 & (\text{coef pt } x^0) \\ 2p_2 + \lambda_j p_1 = A p_1 & (\text{coef pt } x^1) \\ \vdots \\ (m_j-1)\, p_{m_j-1} + \lambda_j p_{m_j-2} = A p_{m_j-2} & (\text{coef pt } x^{m_j-2}) \\ \lambda_j p_{m_j-1} = A p_{m_j-1} & (\text{coef pt } x^{m_j-1}) \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} (A-\lambda I_n)^{m_j-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ (A-\lambda_j I_n)\cdot 1 \\ \end{array} \left.\begin{cases} p_1 = (A-\lambda_j I_n)\, p_0 \\ p_2 = \frac{1}{2}(A-\lambda_j I_n)\, p_1 \\ \vdots \\ \left.\begin{array}{l} p_{m_j-1} = \frac{1}{m_j-1}(A-\lambda_j I_n)\, p_{m_j-2} \\ 0 = (A-\lambda_j I_n)\, p_{m_j-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{m_j-1}(A-\lambda_j I_n)^2 p_{m_j-2} = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{(A-\lambda_j I_n)^{m_j} p_0 = 0} \Rightarrow p_0 \in \underbrace{\ker\left((A-\lambda_j I_n)^{m_j}\right)}_{\overset{not}{=}\ \{u \in \mathbb{R}^n \mid (A-\lambda_j I_n)^{m_j} u = 0_{\mathbb{R}^n}\}}$$

Știm că $\ker((A-\lambda_j I_n)^{m_j})$ este subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^n$, cu dimensiunea m_j $\Rightarrow$ luăm pt p_0 pe rând valorile vect. unei baze a subspațiului $\{f_1, \dots, f_{m_j}\}$:

pt $s = \overline{1, m_j}$: $p_0 = f_s \Rightarrow$ calc.
$$\begin{cases} p_1 = (A-\lambda_j I_n) p_0 \\ p_2 = \frac{1}{2}(A-\lambda_j I_n) p_1 \\ \vdots \\ p_{m_j-1} = \frac{1}{m_j-1}(A-\lambda I_n) p_{m_j-2} \end{cases}$$

și avem $\varphi_s(x) = \left(\sum_{r=0}^{m_j-1} p_r x^r\right) e^{\lambda_j x}$.

Cazul 4: $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ m_j > 1}$ $\Rightarrow$ avem $\overline{\lambda_j}$ val. proprie cu aceeași multiplicitate ca și λ_j.

- Analog cu cazul 3, determinăm $p_0, \dots, p_{m_j-1} \in \mathbb{C}^n$, nu toți nuli ai
$$\varphi(x) = \left(\sum_{r=0}^{m_j-1} p_r x^r\right) \cdot e^{\lambda_j x}$$
să verifice ec. (10) (în complex).

Analog cu (3) găsim m_j variante independente pt $p_0, \dots, p_{m_j-1} \in \mathbb{C}^n$ nu toți nuli, pentru fiecare variantă având 2 soluții pt SFS:

$$\begin{cases} \varphi_{1r}(x) = Re\left(\left(\sum_{r=0}^{m_j-1} p_r x^r\right) e^{\lambda_j x}\right) \\ \varphi_{2r}(x) = Im\left(\left(\sum_{r=0}^{m_j-1} p_r x^r\right) e^{\lambda_j x}\right) \end{cases}, r = \overline{1, m_j}.$$

Exemple:

(1) Fie sistemul $\begin{cases} y_1' = y_1 - 2y_2 + e^x \\ y_2' = 2y_1 + y_2 + 2e^x \end{cases}$

a) Forma matriceală a sistemului
b) SFS pt sist. liniar omogen atașat
c) Mult. sol. sist. dat.

a) $\boxed{n=2}$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^x \\ 2e^x \end{pmatrix}}_{b(x)}$$

b) $\bar{y}' = A\bar{y}$

$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

• val proprii pt. A:

$$\det(A - \lambda I_2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$$(1-\lambda)^2 + 4 = 0.$$

$$(1-\lambda)^2 = -4.$$

$$(1-\lambda)^2 = (2i)^2 \Rightarrow 1-\lambda = \pm 2i$$

$$\lambda = 1 \mp 2i \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1 = 1+2i, \ m_1 = 1 \\ \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 1-2i, \ m_2 = 1 \end{array} \Big| \Rightarrow$ aplicam cazul 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ determinăm $u \in \mathbb{C}^2$, $u \neq 0_{\mathbb{C}^2}$ a.î. $Au = \lambda_1 u \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (1+2i)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{u_1} - 2u_2 = (\cancel{1}+2i)u_1 \\ 2u_1 + \cancel{u_2} = (\cancel{1}+2i)u_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2u_2 = 2iu_1 \ |:(-2) \\ 2u_1 = 2iu_2 \ |:(2i) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_2 = -iu_1 \\ u_2 = \frac{i}{i}\frac{1}{i}u_1 = -iu_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ -iu_1 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_1(x) = Re\left(e^{(1+2i)x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right) \\ \varphi_2(x) = Im\left(e^{(1+2i)x} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}\right) \end{cases}$$

Avem:

$$e^{x} \cdot e^{2ix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= e^{x}\left(\cos 2x + i \sin 2x\right)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1(x) = e^{x}\left(\cos 2x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\sin 2x \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_1(x) = e^{x}\begin{pmatrix} \cos 2x \\ \sin 2x \end{pmatrix}}$$

$$\varphi_2(x) = e^{x}\left(\cos 2x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \sin 2x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \Rightarrow \boxed{\varphi_2(x) = e^{x}\begin{pmatrix} \sin 2x \\ -\cos 2x \end{pmatrix}}$$

$\Rightarrow$ matricea fundam. de soluții: $\phi(x) = \begin{pmatrix} e^{x}\cos 2x & e^{x}\sin 2x \\ e^{x}\sin 2x & -e^{x}\cos 2x \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{y}(x) = \phi(x)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2}$$

sau $\begin{cases} \bar{y}_1(x) = e^{x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) \\ \bar{y}_2(x) = e^{x}(c_1 \sin 2x - c_2 \cos 2x) \end{cases}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$

c) Aplicăm met. variației const.: determinăm

$$C : I = \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

ai $\underline{y(x) = \phi(x) C(x)}$ să verifice sistemul

$$y' = Ay + b(x). \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\phi(x)C(x))' = A\phi(x)C(x) + b(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\phi'(x)C(x)} + \phi(x)C'(x) = \cancel{A\phi(x)C(x)} + b(x)$$

$$\Rightarrow \underline{C'(x) = (\phi(x))^{-1} b(x).}$$

$\Rightarrow$ ec. pt $\underline{c_1, c_2}$ (det. de tip primitivă).

determinăm pe $(\phi(x))^{-1}$:

$$\det \phi(x) = -e^{2x}\cos^2 2x - e^{2x}\sin^2 2x = -e^{2x}\underbrace{(\cos^2 2x + \sin^2 2x)}_{1} = -e^{2x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(\phi(x))^t = \begin{pmatrix} e^x \cos 2x & e^x \sin 2x \\ e^x \sin 2x & -e^x \cos 2x \end{pmatrix}$$

$$(\phi(x))^* = \begin{pmatrix} -e^x \cos 2x & -e^x \sin 2x \\ -e^x \sin 2x & e^x \cos 2x \end{pmatrix}$$

$$(\phi(x))^{-1} = \frac{1}{\det(\phi(x))}(\phi(x))^* = \frac{1}{-e^{2x}}\begin{pmatrix} -e^x \cos 2x & -e^x \sin 2x \\ -e^x \sin 2x & e^x \cos 2x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\phi(x))^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-x} \cos 2x & e^{-x} \sin 2x \\ e^{-x} \sin 2x & -e^{-x} \cos 2x \end{pmatrix}$$

Obţinem:

$$C'(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \cos 2x & e^{-x} \sin 2x \\ e^{-x} \sin 2x & -e^{-x} \cos 2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^x \\ 2e^x \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1' = \cos 2x + 2\sin 2x \\ c_2' = \sin 2x - 2\cos 2x \end{cases} \Rightarrow$$

ec. de tip primitivă pt C_1, C_2

$$\Rightarrow C_1(x) = \int(\cos 2x + 2\sin 2x)\,dx = \frac{\sin 2x}{2} + \cancel{2}\left(-\frac{\cos 2x}{\cancel{2}}\right) + K_1$$

$$\boxed{C_1(x) = \frac{\sin 2x}{2} - \cos 2x + K_1}$$

La fel: $\boxed{C_2(x) = -\frac{\cos 2x}{2} - \sin 2x + K_2}$ $\qquad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$

Deci, soluţia sist. dat este:

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos 2x & e^x \sin 2x \\ e^x \sin 2x & -e^x \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\sin 2x}{2} - \cos 2x + K_1 \\ -\frac{\cos 2x}{2} - \sin 2x + K_2 \end{pmatrix},$$

$K_1, K_2 \in \mathbb{R}$

(2) Fie sistemul:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + 1 \\ y_2' = -y_1 + 3y_2 + e^x \end{cases}$$

a) Forma matricială; b) SFS pt sistem omogen ataşat.
c) Soluţia sist. dat.

-11-

a) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ e^x \end{pmatrix}}_{b(x)}$

b) $\bar{y}' = A\bar{y}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)(3-\lambda) + 1 = 0$

$3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\lambda_1 = 2, \ m_1 = 2}$ $\Rightarrow$ se aplică cazul 3 :

determinăm $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^2$ nu amândoi nuli a.î. $(\|p_0\| + \|p_1\| \neq 0)$

$\varphi(x) = (p_0 + p_1 x) e^{2x}$ să verifice sistemul omogen:

$\varphi'(x) = A\varphi(x)$

$(p_0 + p_1 x)' e^{2x} + (p_0 + p_1 x)(e^{2x})' = A(p_0 + p_1 x) e^{2x}$

$p_1 e^{2x} + (p_0 + p_1 x) e^{2x} \cdot 2 = (Ap_0 + (Ap_1) x) e^{2x} \quad | : e^{2x}$

$p_1 + 2p_0 + 2p_1 x = Ap_0 + (Ap_1) x \Longrightarrow \begin{cases} p_1 + 2p_0 = Ap_0 \\ 2p_1 = Ap_1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = (A - 2I_2) p_0 & | \cdot (A - 2I_2) \text{ la stg} \\ 0 = (A - 2I_2) p_1 \end{cases} \Longrightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(A - 2I_2) p_1}_{=0} = (A - 2I_2)^2 p_0 \Rightarrow (A - 2I_2)^2 p_0 = 0_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow p_0 \in \ker((A - 2I_2)^2)$

Calculăm $(A - 2I_2)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ker(\underbrace{(A - 2I_2)^2}_{O_2}) = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ alegem pt p_0 valorile vect. din baza canonică pt $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow p_0 \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \Rightarrow$

• pt $p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow p_1 = (A - 2I_2)p_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi_1(x) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} x\right) e^{2x} \Rightarrow \boxed{\varphi_1(x) = \begin{pmatrix} (1-x)e^{2x} \\ -xe^{2x} \end{pmatrix}}$$

• pt $p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_1 = (A - 2I_2)p_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi_2(x) = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x\right) e^{2x} \Rightarrow \boxed{\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} xe^{2x} \\ (1+x)e^{2x} \end{pmatrix}}$$

Se obține:

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} (1-x)e^{2x} & xe^{2x} \\ -xe^{2x} & (1+x)e^{2x} \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{y}(x) = \phi(x)c$$
$$c \in \mathbb{R}^2.$$

c) temă!

(3)
$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_3 \\ y_3' = y_1 + y_2 \end{cases} \quad (\text{în } \mathbb{R}^3)$$

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} y \quad ; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I_3) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda = 0$$
$$\lambda^3 - 3\lambda - 2 = 0.$$
$$\underbrace{\lambda^3 - 2\lambda^2} + \underbrace{2\lambda^2 - 4\lambda} + \underbrace{\lambda - 2} = 0.$$
$$\lambda^2(\lambda-2) + 2\lambda(\lambda-2) + (\lambda-2) = 0$$
$$(\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+1) = 0$$
$$(\lambda-2)(\lambda+1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = 2, & m_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1, & m_2 = 2 \end{matrix}}$$

• $\boxed{\lambda_1 = 2, m_1 = 1} \overset{\text{cazul } 1}{\Rightarrow}$ $u \in \mathbb{R}^3$ a.î. $\boxed{Au = \lambda_1 u} \Rightarrow$
$u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_2+u_3=2u_1 \\ u_1+u_3=2u_2 \\ u_1+u_2=2u_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2u_1+u_2+u_3=0 \\ u_1-2u_2+u_3=0 \\ u_1+u_2-2u_3=0 \end{cases} \Rightarrow (+) \Rightarrow (ec.\,3)(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_3=\alpha \Rightarrow \begin{cases} -2u_1+u_2=-\alpha \quad |\cdot 2 \\ u_1-2u_2=-\alpha \end{cases}$$

$$-3u_1 \quad / = -3\alpha \Rightarrow u_1=\alpha$$

$$u_2=-\alpha+2\alpha$$

$$u_2=\alpha. \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u=\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\varphi_1(x)=e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

- $\boxed{\lambda_2=-1,\ m_2=2}$ $\xRightarrow{\text{cazul 3}}$ $p_0, p_1 \in \mathbb{R}^3$ nu amândoi nuli ai $\varphi(x)=(p_0+p_1x)\cdot e^{-x}$ să verifice sistemul $y'=Ay$ $\Big| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi'(x)=A\varphi(x)$$

$$p_1\cancel{e^{-x}}+(p_0+p_1x)\cancel{e^{-x}}\cdot(-1)=A(p_0+p_1x)\cancel{e^{-x}} \quad \Big| : e^{-x}$$

$$p_1-p_0-p_1x = Ap_0+Ap_1)x \Rightarrow \begin{cases} p_1-p_0=Ap_0 \\ -p_1=Ap_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1=(A+I_3)p_0 \quad |\cdot (A+I_3) \text{ la stg} \\ 0=(A+I_3)p_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{(A+I_3)p_1}_{=0}=(A+I_3)^2p_0 \Rightarrow (A+I_3)^2p_0=0$$

$$\Rightarrow p_0 \in \ker\left((A+I_3)^2\right)$$

$$(A+I_3)^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \neq O_3 \quad \Big| \Rightarrow$$

$$\ker\left((A+I_3)^2\right)=\{u\in\mathbb{R}^3 \mid (A+I_3)^2u=0\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{3u_1+3u_2+3u_3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_3=-u_1-u_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ker\left((A+I_3)^2\right)=\left\{u\in\mathbb{R}^3 \mid u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ -u_1-u_2 \end{pmatrix}\right\} =$$

$$= \left\{ u \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; u = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \text{Sp. gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}}$
- $p_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}}$

$$\Rightarrow \phi(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^{-x} & 0 \\ e^{2x} & 0 & e^{-x} \\ e^{2x} & -e^{-x} & -e^{-x} \end{pmatrix}$$

$$y(x) = \phi(x) C, \quad C \in \mathbb{R}^2.$$

<u>Temă</u>: Aceleași cerințe ca mai sus pentru sistemele:

1) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = -y_1 - y_2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 \end{cases}$

<u>Ecuații diferențiale de ordin n</u>: $\boxed{F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0}$ (11)$_1$

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, \underbrace{y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}})} \quad (11)_2 \text{ (forma explicită)}$$

unde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Pentru rezolvarea unei ec. explicite de ordin n, de tipul (11) avem situațiile:

[1] Să rezolvăm prin reducerea ordinului pentru ecuația (11) de formă particulară:

i) lipsesc derivatele lui y până la ordinul $(k-1)$

$$y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{sau} \quad \boxed{F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0} \quad (12)$$

se face s.v. $y^{(k)} = z \Rightarrow y^{(k+1)} = z^{(1)}$

$$\vdots$$

$$y^{(n)} = z^{(n-k)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ec. devine de ordin $(n-k)$

ii) $$\boxed{F(y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0} \quad (13)$$

se face s.v.: $\boxed{y^{(1)}(x) = z(y)}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow F_1(y, z, z^{(1)}, \dots, z^{(n-1)}) = 0$$

Reducerea se face de la ordin n la $n-1$.

$$y^{(2)}(x) = (y^{(1)}(x))^{(1)} = (z(y))^{(1)} = z^{(1)}(y) \cdot y^{(1)}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y^{(2)} = z^{(1)} \cdot z}$$

iii) $$\boxed{F\left(x, \frac{y^{(1)}}{y}, \frac{y^{(2)}}{y}, \dots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0} \quad (14)$$

Se face s.v.: $\boxed{\frac{y^{(1)}}{y} = z}$ $\Rightarrow$ $y^{(1)} = yz$

$$y^{(2)} = y^{(1)} z + y z^{(1)} \quad | : y$$

$$\frac{y^{(2)}}{y} = \frac{y^{(1)}}{y} z + z^{(1)}$$

$$\boxed{\frac{y^{(2)}}{y} = z^2 + z^{(1)}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ din (14) o ecuație de ordin $n-1$:

$$F_1(x, z, z^{(1)}, \dots, z^{(n-1)}) = 0.$$

iv) $\boxed{F\left(\frac{y}{x}, y^{(1)}, xy^{(2)}, \dots, x^{(n-1)}y^{(n)}\right)=0}$ (15)

(ec. omogenă)

Se face s.v.: $\boxed{\frac{y}{x}=z} \Rightarrow y^{(1)}=(xz)^{(1)} \Rightarrow \boxed{y^{(1)}=z+xz^{(1)}}$

$$y^{(2)}=\left(z+xz^{(1)}\right)^{(1)}=z^{(1)}+z^{(1)}+xz^{(2)}=2z^{(1)}+xz^{(2)}$$

$$\Rightarrow \boxed{xy^{(2)}=2xz^{(1)}+x^2z^{(2)}}$$

Se transf. în ec. Euler (v):

$$F_1\left(z, xz^{(1)}, x^2z^{(2)}, \dots, x^n z^{(n)}\right)=0.$$

v) $\boxed{F\left(y, xy^{(1)}, x^2y^{(2)}, \dots, x^n y^{(n)}\right)=0}$ (16), $x\neq 0$.

(ec. Euler).

Schimbarea de variabilă: $|x|=e^s \Leftrightarrow s=\ln|x|$

$$y(x)=z(s)$$
$$z(s(x))$$

$$y^{(1)}=\left(z(s(x))\right)^{(1)}=z^{(1)}(s)\cdot s^{(1)}(x)$$

$$s=\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ \ln(-x), & x<0\end{cases} \Rightarrow s^{(1)}(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x>0\\ \frac{1}{-x}(-1), & x<0\end{cases}=\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{xy^{(1)}=z^{(1)}}$$

$$y^{(2)}=\left(z^{(1)}(s)\cdot\frac{1}{x}\right)^{(1)}=z^{(2)}(s)\cdot s^{(1)}(x)\cdot\frac{1}{x}+z^{(1)}(s)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^{(2)}=z^{(2)}(s)\cdot\frac{1}{x^2}-z^{(1)}(s)\cdot\frac{1}{x^2} \;\Big|\cdot x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2y^{(2)}=z^{(2)}-z^{(1)}}$$

Se transf. în ec.: $\underbrace{F_1\left(z, z^{(1)}, z^{(2)}, \dots, z^{(n)}\right)=0}_{\text{în variab. indep. } s}$.

ec. de tipul ii)

2 Asociem sistem dacă ec. e de formă explicită $(11)_2$.

notăm: $\begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = y^{(1)} \\ \vdots \\ z_{n-1} = y^{(n-2)} \\ z_n = y^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1' = y^{(1)} = z_2 \\ z_2' = y^{(2)} = z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = y^{(n-1)} = z_n \\ z_n' = y^{(n)} = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{cases}$

$\Rightarrow$ pt $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ avem sistemul:

$$(17) \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = f(x, z_1, z_2, \dots, z_n) \end{cases}$$

3 Cazul ec. liniare:

$$\boxed{y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)} + g(x)} \quad (18)$$

Cazul omogen: $g(x) \equiv 0 \Rightarrow \boxed{y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)}}$ (19)

Ec. (18) i se poate asocia un sistem liniar, cf (17)

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) \cdot z_{k+1} + g(x). \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_{n-1}' \\ z_n' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0(x) & a_1(x) & a_2(x) & \dots & a_{n-2}(x) & a_{n-1}(x) \end{pmatrix}}_{=A(x)} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}}_{\text{,,}b(x)\text{''}} \Rightarrow (20)$$

$$\Rightarrow z' = A(x)z + b(x)$$

Prop. 4 : 1) Dacă φ este soluție pt ec. (18), atunci: $\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$ este soluție a sist (20)

2) Dacă $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ este soluție pt (20), atunci

$\varphi = \psi_1$ este soluție pt (18)

În cazul omogen $\Rightarrow$ sistemul asociat ec. (19) este

$z' = A(x)z$ pentru

care mulț soluțiilor este S_A - spațiu vectorial de dimensiune n $\underset{\text{Prop 4}}{\Rightarrow}$ mulț. sol ec. (19) este spațiu vectorial de dim n $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ pt ec. (19) este suficient să găsim o bază, adică un SFS: $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ a.î.

$$\{y = c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\}$$

În cazul neomogen se poate rezolva dacă știm o sol particulară sau prin metoda variației constantelor:

- avem de rez. ec. (18) (neomogenă)
- scriem ec. omogenă asociată de forma (19)
- determinăm SFS pt (19): $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$
- determinăm $c_1, \dots, c_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a.î. $y(x) = c_1(x)\varphi_1(x) + \dots + c_n(x)\varphi_n(x)$ să fie sol. a ec. (18)

Prop. 5 : Folosind sistemul asociat ec. (18) se poate arăta că $c_1', \dots, c_n'$ sunt solutule sist liniar:

$$(21)\quad \boxed{\begin{cases} C_1'\varphi_1 + \dots + C_n'\varphi_n = 0 \\ C_1'\varphi_1' + \dots + C_n'\varphi_n' = 0 \\ \vdots \\ C_1'\varphi_1^{(n-2)} + \dots + C_n'\varphi_n^{(n-2)} = 0 . \\ C_1'\varphi_1^{(n-1)} + \dots + C_n'\varphi_n^{(n-1)} = g(x) \end{cases}}$$

din care determinam $\underline{C_j' = h_j(x),\ j=\overline{1,n}}$ $\Rightarrow$
ec. de tip primitivă pt C_j'

$\Rightarrow C_j = H_j(x) + k_j,\ j=\overline{1,n}$

H_j = primitivă pt h_j.

<u>Alg. de determinare a unui SFS pt ec. liniară omogenă de ordin n cu coef. constanți</u>

$$(22)\quad \boxed{y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)},\quad a_0,\dots,a_{n-1}\in\mathbb{R}}$$

- se scrie ec. caracteristică (coincide cu polinomul caracteristic pt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$):

$$\boxed{r^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k}$$

care are p soluții distincte reale sau complexe $\underbrace{}_{r_1,\dots,r_p}$ de multiplicități $m_1,\dots,m_p$.
Avem $m_1 + \dots + m_p = n$.
- pt a scrie SFS avem cazurile pt $j=\overline{1,p}$:

<u>Cazul 1</u>: $\boxed{r_j\in\mathbb{R},\ m_j\geq 1}$ $\Rightarrow$ se scriu m_j funcții

în SFS : $\begin{cases} \varphi_1(x) = e^{r_j x} \\ \varphi_2(x) = x e^{r_j x} \\ \vdots \\ \varphi_{m_j}(x) = x^{m_j - 1} e^{r_j x} \end{cases}$

Cazul 2. $\boxed{r_j = a_j + i b_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad m_j \geq 1} \Rightarrow$

$b_j \neq 0 \; ; \; a_j, b_j \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \overline{r_j} = a_j - i b_j$ este soluție a ec. caract cu același ordin de multiplicitate

$\rightarrow$ se scriu $2m_j$ sol. în SFS :

$$\begin{cases} \varphi_{1s}(x) = Re\left(x^{s-1} e^{r_j x}\right) = x^{s-1} e^{a_j x} \cos(b_j x) \\ \varphi_{2s}(x) = Im\left(x^{s-1} e^{r_j x}\right) = x^{s-1} e^{a_j x} \sin(b_j x) \\ s = \overline{1, m_j} \end{cases}$$

Exemple :

(1) $y^{(2)} = 5y^{(1)} - 6y + \underbrace{e^x}_{= g(x)}$

a) SFS pt ec. liniară omogenă atașată

b) Mulț. sol. ec. date.

c) Soluția care verifică : $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y^{(1)}(0) = 2 \end{cases}$

a) $\overline{y}^{(2)} = 5\overline{y}^{(1)} - 6\overline{y}$ $\quad ; \; y = y^{(0)}$

$r^2 = 5r - 6r^0$

$r^2 - 5r + 6 = 0$

$\Delta = 25 - 24 = 1$

$r_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}$ $\begin{cases} r_1 = 3, \; m_1 = 1 \Rightarrow \varphi_1(x) = e^{3x} \\ r_2 = 2, \; m_2 = 1 \Rightarrow \varphi_2(x) = e^{2x} \end{cases}$

$\{e^{3x}, e^{2x}\}$ SFS pt ec. omogenă

b) $y(x) = C_1(x)\cdot e^{3x} + C_2(x)\, e^{2x}$

C_1', C_2' conf prop. 5 verifică sist. algebric liniar:

$$\begin{cases} C_1'\cdot e^{3x} + C_2' e^{2x} = 0 \\ C_1' (e^{3x})' + C_2'(e^{2x})' = e^x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1' e^{3x} + C_2' e^{2x} = 0 \quad | \cdot (-2) \\ C_1'\cdot e^{3x}\cdot 3 + C_2' e^{2x}\cdot 2 = e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2C_1' e^{3x} - 2C_2' e^{2x} = 0 \\ 3C_1' e^{3x} + 2C_2' e^{2x} = e^x \end{cases}$$

$$C_1' e^{3x} \quad / \quad = e^x$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1' = e^{-2x}}$$

$$e^{-2x} e^{3x} + C_2' e^{2x} = 0 \Rightarrow C_2' = -e^x : e^{2x}$$

$$\boxed{C_2' = -e^{-x}}$$

$$C_1 = \int e^{-2x}dx = \frac{e^{-2x}}{-2} + K_1$$

$$C_2 = \int (-e^{-x})dx = -\frac{e^{-x}}{-1} + K_2 = e^{-x} + K_2$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow y(x) = \left(-\frac{e^{-2x}}{2} + K_1\right) e^{3x} + \left(e^{-x} + K_2\right) e^{2x} =$$

$$= K_1 e^{3x} + K_2 e^{2x} - \frac{e^x}{2} + e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = \underbrace{K_1 e^{3x} + K_2 e^{2x}}_{\text{sol. ec. omogene}} + \underbrace{\frac{e^x}{2}}_{\text{sol. particulară}}.$$

c) $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = K_1 + K_2 + \frac{1}{2} \Rightarrow K_1 + K_2 = \frac{1}{2} \quad |\cdot(-2)$

$y'(0) = 2.$

$$y'(x) = K_1 e^{3x}\cdot 3 + K_2 e^{2x}\cdot 2 + \frac{e^x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 = 3K_1 + 2K_2 + \frac{1}{2} \Rightarrow 3K_1 + 2K_2 = \frac{3}{2} \quad (+)$$

$$\Rightarrow K_1 = -1 + \frac{3}{2} \Rightarrow K_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow K_2 = 0 \Rightarrow y(x) = \frac{e^{3x} + e^x}{2}.$$

temă!

② $y^{(2)} = y^{(1)} - y + e^{\frac{x}{2}} \cdot \cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$

③ $y^{(3)} = -3y^{(2)} + 3y^{(1)} - y + 2e^{x}$

④ $y^{(2)} = 2y^{(1)} - y + xe^{x}$

⑤ $y^{(2)} = 2y^{(1)} + 2y + e^{x}\sin x$.

sol. generală