Algebră S2
Curs 1.
Inele. Corpuri

<u>Def.</u> $(R,+,\cdot)$ se numește inel dacă:

R = ring = = inel = O

1) $(R,+)$ grup comutativ
2) $(R,\cdot)$ monoid:
   - asociativă $(a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c\ \forall a,b,c\in R)$
   - element neutru - există un element neutru

   Notație: 1 (1_R)

$R^* = R\setminus\{0\}$

3) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad \forall a,b,c\in R$

   $(a+b)\cdot c = a\cdot c+b\cdot c$

0 - el neutru pt adunare

Distributivitatea operației „$\cdot$" față de „$+$"

Inel $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$

$\underbrace{(\mathbb{R},+,\cdot)}_{\text{mulțimea nr reale.}}$

polinoame $\leftarrow R[x]$

matrici $\leftarrow \mathcal{M}_n(R)$ → oricare element nenul este inversabil

$(\mathbb{Q},+,\cdot)$; $(\mathbb{Z},+,\cdot)$

$(\mathbb{C},+,\cdot)$ → Inele

$(K,+,\cdot)$ <u>este corp</u> dacă este inel și <u>$(K^*,\cdot)$ grup</u>. → elem simetrizabile pt „$\cdot$"

$(\mathbb{R},+,\cdot)\to$ Corp $\qquad (\mathbb{C},+,\cdot)\to$ Corp

$(\mathbb{Q},+,\cdot)\to$ Corp $\qquad (\mathbb{Z},+,\cdot)\to$ Nu este Corp

La $\mathbb{Z}$ $\nexists\, n\in\mathbb{Z}$ a.î. $2\cdot n = 1$

Dacă avem $a, b \in \mathbb{Z}$

$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid a - b$

$\bar{a} + \bar{b} \overset{def}{=} \overline{a+b}$ $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ Inel

$\bar{a} \cdot \bar{b} \overset{def}{=} \overline{a \cdot b}$

$(\mathbb{Z}_{10}, +, \cdot)$ corp?

$\bar{0}$ - elem neutru pt $+$

$\bar{1}$ — " — " pt $\cdot$

$\mathbb{Z}_{10}$

$\bar{3} \cdot \bar{x} = \bar{1}$ $\overline{21} = \bar{3} \cdot \bar{7} = \bar{1}$

$\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$ $\bar{9} \cdot \bar{9} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{x} = \bar{1}$ Nu există $\bar{x} \in \mathbb{Z}_{10}$ a.î. $\bar{2} \cdot \bar{x} = \bar{1}$

$\bar{2} \cdot \bar{x} = \bar{1}$

$\overline{2x} = \bar{1}$

$\Rightarrow 10 \mid 2x - 1$ $\not\!\!\exists$ Contradicție

$2 \mid 10 \mid 2x - 1$

Completare Teorie:

Inelele numerice $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ au proprietatea remarcabilă că oricare element nenul este inversabil. Pt aceste inele mulțimea unităților este $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}^*$, respectiv $\mathbb{C}^*$.

Def: Un inel nenul $(K, +, \cdot)$ în care oricare element nenul este inversabil s.n corp

Dacă inelul K este comutativ, corpul K s.n corp comutativ.
Tripletele $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ și $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sunt corpuri comutative.

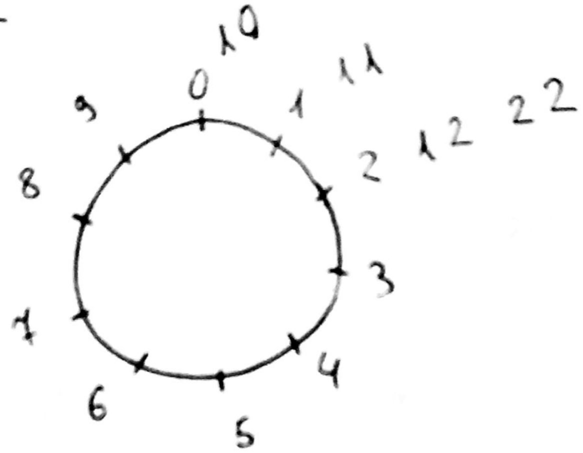
Grup.
Fie G o mulțime nevidă și $(x, y) \longrightarrow \varphi(x, y) \overset{not}{=} x \circ y$, o lege de compoziție pe G.
Def. Perechea $(G, \circ)$ s.n grup dacă sunt îndeplinite axiomele:
1. Axioma asociativității:
$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in G$
2. Axioma elem neutru:
$\exists e \in G$, a.î $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in G$
3. Axioma elementelor simetrizabile:
$\forall x \in G$, $\exists x' \in G$, a.î $x \circ x' = x' \circ x = e$
Un grup $(G, \circ)$ s.n grup comutativ sau abelian dc este verificată axioma de comutativitate
4. $x \circ y = y \circ x$, $\forall x, y \in G$

Monoid.
Perechea $(M, \circ)$ s.n monoid dc verifică următoarele axiome
1. Axioma asociativității:
$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in M$
2. Axioma elementului neutru:
$\exists e \in M$, a.î $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in M$
Dacă legea de compoziție „$\circ$" este comutativă, monoidul se numește monoid comutativ sau abelian.

10/17

Th. Inelul $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ este corp ddacă n este număr prim.

$\mathbb{Z}_{10}$



Reprezentare Vizuală

Obs: În orice inel $0 \cdot r = 0 \quad \forall r \in R$

Dem: $0 \cdot r = (0+0) \cdot r \qquad 0 + x = x$

$\overset{3)}{=} 0 \cdot r + 0 \cdot r$

$= 0 \cdot r = 0$

$(G, \cdot)$ grup $\quad g_1 \cdot g = g_2 \cdot g \Rightarrow g_1 = g_2$

$(-x) \cdot y = -x \cdot y$

$(-x) \cdot (-y) = xy$

Dacă $r \in R \quad (R, +, \cdot)$

$-r$ = inversul lui r față de $(+)$

$(-x) \cdot y$ demonstrație:

$0 = 0 \cdot y = (x - x) \cdot y \overset{3}{=} x \cdot y + (-x) \cdot y$

$-xy = \overbrace{-x \cdot y + x \cdot y}^{0} + (-x) \cdot y$

$-xy = (-x) \cdot y$

$(-x) \cdot (-y) \overset{dem}{=} (-x) \cdot (-y) = -(x \cdot (-y)) = -(-x \cdot y) = xy$

Notație $(R,+,\cdot)$ inel

$U(R)=\{r\in R \mid \exists\, s\in R \text{ a.î. } r\cdot s=s\cdot r=1\}$

↓

elementele inversabile din inel

$U(\mathbb{Z}_{10})=\{\bar{1},\bar{3},\bar{7},\bar{9}\}$

$\bar{5}$ nu are invers

$\bar{5}\cdot\bar{x}=\bar{1}$

$5 \mid 10 \mid 5x-1$ $\cancel{\ }$

În ce situație $0\in U(R)$?

$0=0\cdot x=1 \Rightarrow R=\{0\}$

$r\in R$

$r=r\cdot 1=r\cdot 0=0$

↓ element neutru față de $\cdot$

De obicei $|R|\geq 2$ $\quad 0\neq 1$

$U(\mathbb{Z})=\{\pm 1\}$ $\quad (\mathbb{Z},+,\cdot)$

$n\in\mathbb{Z}$

$n\in U(\mathbb{Z})$

$\Rightarrow \exists\, m\in\mathbb{Z}$ a.î. $n\cdot m=1 \Rightarrow n\in\{\pm 1\}$

$\mathbb{Z}[i]=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ $\quad (\mathbb{Z}[i],+,\cdot)$

$1\in U(R)$ $\quad 1\cdot 1=1$

$U(\mathbb{Z}[i])=\{\pm 1,\pm i\}$

$(-1)\cdot(-1)=1$

$i\cdot(-i)=1$

$a+bi \in U(\mathbb{Z}[i])$ $\quad a, b \in \mathbb{Z}$

$\exists\, c, d \in \mathbb{Z}$ a.î $(a+bi)(c+di) = 1$

$i^2 = -1$

$$\begin{cases} ac - bd = 1 & | \cdot c \\ ad + bc = 0 & | \cdot d \end{cases} \quad (+)$$

$a(c^2+d^2) = c+0$

$a = \dfrac{c}{c^2+d^2} \in \mathbb{Z}$

Dacă $c^2+d^2 = 0$

$\Rightarrow c = d = 0$

$\Rightarrow 0 = ac - bd = 1$ $\cancel{\circ}$

$\dfrac{c}{c^2+d^2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow d = 0$ sau $c = 0$

Dacă $d \neq 0 \Rightarrow c^2+d^2 \geq c^2+1 > |c|$

$0 < \dfrac{|c|}{c^2+d^2} < 1$ $\quad d \neq 0$

Dacă $c = 0$ $\quad \begin{array}{l} -bd = 1 \\ ad = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} b = \pm 1 \\ a = 0 \\ c \neq 0 \end{array}$

Dacă $d = 0$ $\quad \begin{array}{l} ac = 1 \\ bc = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} b = 0 \\ a = \pm 1 \end{array}$

$z \in \mathbb{C}$ $\quad z = a+bi$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ $\quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

$\sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2} = 1$ $\quad a, b \in \mathbb{Z}$

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=1 \qquad |a|\leq 1$

$\Rightarrow a^2+b^2=1$

$a=0 \qquad b=\pm 1$

$a=\pm 1 \qquad b=0$

$\mathbb{Z}[\sqrt{10}]=\{a+b\sqrt{10} \mid a,b\in\mathbb{Z}\} \quad a,b\in\mathbb{Z}$

$(\mathbb{Z}[\sqrt{10}],+,\cdot)$ inel

Exemplu de un element $u\in U(\mathbb{Z}[\sqrt{10}])$
(element inversabil) $u\neq\pm 1$

$10-9=1$

$$\underbrace{(\sqrt{10}+3)}_{\in\, \mathbb{Z}[\sqrt{10}]}\underbrace{(\sqrt{10}-3)}_{\in\, \mathbb{Z}[\sqrt{10}]}=10-9=1$$

$U(\mathbb{Z}[\sqrt{10}]) \overset{\text{greu}}{=\!=} \{\pm(\sqrt{10}+3)^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$

$n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. In ce situație $(\mathbb{Z}_n,+,\cdot)$ e corp?

$\Leftrightarrow n$ prim

$n=p\cdot t \quad p$ prim; $t\geq 2$

$\bar{p}\neq\bar{0}$

Dacă $\bar{p}=\bar{0}\Rightarrow n\mid p$

$pt\mid p$

$t\mid 1$

$t\in\mathbb{N}, t\geq 2$ ↯

$\Rightarrow$

Dacă $\mathbb{Z}_n$ ar fi corp $\Rightarrow \exists\ \bar{x} \in \mathbb{Z}_n$ cu $\bar{p}\,\bar{x} = \bar{1}$

1) Dacă n nu e prim $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathbb{Z}_n$ nu e corp

$p \mid n \mid px - 1$

$p \mid px - 1 \Rightarrow p \mid 1$ abs

2) n prim $\Rightarrow (\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ corp

$(\mathbb{Z}_n^{*}, \cdot)$ grup dacă nu e prim

Problemă:
(asemănătoare cu cea de la examen)

Care este restul împărțirii lui $79!\,130!$ la 211?

211 prim

$\sqrt{2+1}$

Restul e $\underline{29}$

$209 = 11 \cdot 19$

$$80! \cdot 130! \overset{211}{\equiv} 130! \cdot (-131)\cdot(-132)\cdot(-133)\dots(-210)$$

$80 \equiv -131 \pmod{211} \overset{211}{\equiv} 210! \cdot (-1)^{80}$

$79 \equiv -132 \pmod{211} = 210! \equiv -1\ (211)$

$78 \equiv -132 \cdot (211)$

$\vdots$

$1 \equiv -210\ (211)$

$\overline{80} \cdot \bar{x} = \overline{80! \cdot 130!} = -\bar{1}$

$-\overline{80} \cdot \bar{x} = \bar{1}$

p prim

$(p-1)! \overset{p}{\equiv} 1$

t. Wilson

$\overline{80} \cdot \bar{x} = -\bar{1} = \overline{210}$

$\bar{8} \cdot \bar{x} = \overline{21} = \overline{21 + 211}$

$= \overline{232}$

$\bar{x} = \overline{29}$

$\mathbb{Z}_n$ corp $\Leftrightarrow$ n prim

Def: $(R,+,\cdot)$ inel R s.n comutativ dc „$\cdot$" este comutativă

$(a\cdot b = b\cdot a, \forall a,b\in R)$

Exercițiu:

$(R,+,\cdot)$ inel a.î $r^2 = r, \forall r\in R$

Să se arate că inelul este comutativ.

$(R,+)$ grup comutativ

fie $r = a+b$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

Doar dacă $\exists$ comutativitate

$(a+b)^2 = a+b$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$

$(a+b)(a+b) \overset{3)}{=} (a+b)\cdot a + (a+b)\cdot b$

$\overset{3)}{=} a^2 + b\cdot a + a\cdot b + b^2$

$a^2 = a$

$b^2 = b$

$(a+b)^2 = \cancel{a^2} + ab + ba + \cancel{b^2} = \cancel{a} + \cancel{b}$

$a\cdot b + b\cdot a = 0$

$ab = -ba = ba$

$\forall a,b\in R$ (R com)

$(a\cdot b)^2 = a\cdot b$

$(a\cdot b)(a\cdot b) = a\cdot b$

$0 \quad 0^2 = 0$

$1 \quad 1^2 = 1$

Aleg $r = -1$

$1 = (-1)^2 = -1$

deci $1 = -1$ în cazul nostru

$\Rightarrow z = -z, \forall z\in R$

Exercițiu:

$(K, +, \cdot)$ corp $\quad r^2 = r \quad \forall r \in K$ (corp)

Câte elemente are corpul K?

$|K| = ?$

$|K| \geq 2 \quad 0 = 1$

Obs: Orice el $\neq 0$ are invers față de prima operație

$r^2 = r \qquad r \neq 0$

$\Rightarrow \exists\ s$ a.î. $\underline{r \cdot s = s \cdot r = 1}$

$r \cdot r = r$

$s \cdot r \cdot r = s \cdot r$

$1 \cdot r = 1$

$r = 1$

$K = \{0, 1\} \quad |K| = 2$

<u>Obs</u>: $(K, +, \cdot)$ corp

$x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $y = 0$

Obs: Dacă produsul a două elemente este 0, obligatoriu unul dintre elemente este 0

Demonstrație:

Presupun că $x \neq 0$

$\Rightarrow \exists\ z \in K$ a.î. $x \cdot z = z \cdot x = 1$

$y = 1 \cdot y = (z \cdot x) \cdot y = z \cdot (x \cdot y) = z \cdot 0 = 0$

$y = 0$

—

Algebră Curs 1 S 2
Test.

1) Calculați inversul lui $\overline{23}$ în corpul $(\mathbb{Z}_{211}, +, \cdot)$

$\overline{23} \cdot \overline{x} = \overline{1} \quad | \cdot \overline{10}$

$\overline{230} = \overline{19}$

$\overline{19} \cdot \overline{x} = \overline{10} \quad | \cdot \overline{11}$

$\overline{209} \cdot \overline{x} = \overline{110}$

$-\overline{2} \cdot \overline{x} = \overline{110}$

$\overline{x} = \overline{-55} = \overline{156}$

$\overline{23} \cdot \overline{x} = 1$

Inmulțim $\overline{23}$ cu un număr a.î să ne apropiem de 211

2) $\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}] = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}\}$

Dați exemplu de $u \in U(\mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}])$, $u \neq \pm 1$

Pornim de la $2 - 1 = 1$

$(\sqrt[3]{2})^3 - 1^3 = a^3 - b^3 = 2 - 1 = 1$

$(\sqrt[3]{2} - 1)(\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1) = 1$

$\begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^3 \mp ab + b^2)$

3) Câte elemente $\overline{x}$ din inelul $(\mathbb{Z}_{99}, +, \cdot)$ au proprietatea că $\exists\, n \in \mathbb{N}^*$ a.î $\overline{x}^n = \overline{0}$

Se caută divizorii primi ai lui 99

Multiplii comuni ai divizorilor care aparțin inelului.

$\bar{x}^n = \bar{0}$

$99 \mid x^n \Rightarrow 3 \mid x$

$11 \mid x$

$33 \mid x$

Raspuns: Clasa de 0, Clasa de 33 și Clasa de 66.

$\bar{0}, \overline{33}, \overline{66} \Rightarrow$ 3 elemente

$\bar{0}^1 = \bar{0}$

$\overline{33}^2 = \bar{0} \quad 99 \mid 33^2$

$\overline{66}^2 = \bar{0} \quad 99 \mid 66^2$

4) Câte elemente $\bar{x}$ din inelul $(\mathbb{Z}_{99}, +, \cdot)$ au proprietatea $\bar{x}^2 = \bar{x}$? Și care sunt?

Se caută cel mai mare divizor prim al lui 99

$99 \mid x^2 - x$

$99 \mid x(x-1)$

$(x, x-1) = 1$ (x și x-1 sunt prime între ele)

$\boxed{x = 0}$

$\boxed{x = 1}$

4 posibilități avem:

1) $99 \mid x$

2) $99 \mid x-1$

3) $9 \mid x$

$11 \mid x-1$

$\Rightarrow x = 11t + 1 \quad \boxed{x = 45}$

4) $11 \mid x$

$9 \mid x-1$

$11 \mid x$

$x = 9t + 1$

$\boxed{x = 55}$

Raspuns: 4 elemente din inel $\bar{0}, \bar{1}, \overline{45}, \overline{55}$

c) $(R,+,\cdot)$ inel comutativ, $u \in U(R)$, $a \in R$

Arătați că $u-a \in U(R)$ $\quad k \in \mathbb{N}^*$, $a^k = 0$

Pornim de la următoarea observație.

(de unde, trebuie să scot asta doar Dzeu știe xD)

$$(u-a)(u^{k-1} + u^{k-2}\cdot a + u^{k-3}\cdot a^2 + \dots + u\cdot a^{k-2} + a^{k-1})$$

$$= u^k - \underbrace{a^k}_{0} = u^k \;\Big|\; v^k$$

pt că inelul este comutativ

u este inversabil deci $\exists v \in R$ a.î. $u \cdot v = 1$

$$(u-a)\left[v^k\cdot(u^{k-1} + u^{k-2}\cdot a + \dots + u\cdot a^{k-2} + a^{k-1})\right]$$

$$= u^k\cdot v^k = (u\cdot v)^k = 1^k = 1$$

pt că este comutativ

$u-a \in U(R)$

Este inversabil pt că, $(u-a)\cdot$ ceva $= 1$.

Algebră S2
Curs 2
Polinoame

$(R, +, \cdot)$ inel comutativ

$R[X] = \{a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \dots + a_1 X + a_0 \mid a_j \in R$

$\forall j = \overline{ak}$

$a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \dots + a_1 X + a_0 = b_e X^e + b_{e-1} X^{e-1} + \dots + b_1 X + b_0$

$\Rightarrow k = e$

$a_j = b_j$

$\forall j = \overline{a,k}$

Un polinom se identifică cu o funcție

$f \in R[X] \leftrightarrow f: \mathbb{N} \to R$

$\exists n_0$ a.î. $f(n) = 0$

$\forall n \geq n_0$

$(a_k X^k + a_{k-1} X^{k-1} + \dots + a_1 X + a_0) +$
$+ (b_e X^e + \dots + b_1 X + b_0) = (a_0 + b_0) +$
$+ (a_1 + b_1) X$

$(a_k X^k + \dots + a_1 X + a_0)(b_e X^e + \dots + b_1 X + b_0) =$
$= a_0 b_0 + X(a_0 b_1 + a_1 b_0) + X^2(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots +$
$X^t \cdot (a_0 b_t + a_1 b_{t-1} + \dots + a_t b_0) \dots$

$$\sum_{t=0}^{\gamma} a_j \cdot b_{j-t}$$

Inel de polinoame cu coeficienți în inelul R

$f(X) = a_k X^k + \dots + a_1 X + a_0 \quad a_k \neq 0$

$k = \text{grad } f$

Def: $\alpha \in R$ s.n rădăcină a polinomului f dacă $f(\alpha) = 0$

Funcția (polinomială) asociată polinomului

$f \in R[X]$ $\quad f(x) = a_k x^k + \dots + a_1 x + a_0$

Funcție asociată acestui polinom: $f: R \to R$

Polinomul $\neq$ funcție polinomială asociată $\quad f(y) = a_k y^k + \dots + a_1 y + a_0$

$f(x) = x^3 - x \in \mathbb{Z}_6[X]$

Funcție polinomială asociată acestui polinom.

$f(\bar{0}) = \bar{0}^3 - \bar{0} = \bar{0}$

$f(\bar{1}) = \bar{1}^3 - \bar{1} = \bar{0}$

$f(\bar{2}) = \bar{2}^3 - \bar{2} = \bar{6} = \bar{0}$

$f(\bar{3}) = \overline{27} - \bar{3} = \overline{24} = \bar{0}$

$f(\bar{4}) = \overline{64} - \bar{4} = \overline{60} = \bar{0}$

$f(\bar{5}) = \overline{125} - \bar{5} = \overline{120} = \bar{0}$

Prin convenție

grad $0 = -\infty$

Obs: $x^3 - x \neq \bar{0}$

Nu trebuie să confundăm polinomul cu funcția asociată.

$\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{5}$ sunt rădăcini pt polinomul $x^3 - x \in \mathbb{Z}_6[X]$

grad $(x^3 - x) = 0$

Teoremă. $f \in K[X]$, K corp comutativ

$f \neq 0$

$\Rightarrow$ nr rădăcini $\leq$ grad f (cel mult gradul)

Teoremă Bezout.

$a \in R$ rădăcină pt $f \in R[x]$

$\Leftrightarrow f(x) = (x-a)\, g(x),\ g \in R[x]$

Obs:

1) grad $f \cdot g \leq$ grad f + grad g

2) grad $f \cdot g =$ grad f + grad g

dacă R este corp

$(a_k x^k + a_{k-1} x^k + \dots + a_1 x + a_0)(b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_1 x + b_0) \overset{?}{\Longrightarrow} a_k \cdot b_p x^{k+p} + \dots + b_0 \cdot a_0$ $\quad a_k \neq 0$

$b_p \neq 0$

Ex: $\mathbb{Z}_6$

$\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{0}$

$\bar{2} \neq \bar{0},\ \bar{3} \neq \bar{0}$

Problemă:

$f(x) = x^3 + x + 1 \quad \in \mathbb{R}[x]$

Câte rădăcini reale are f?

Argument de analiză:

$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(-1) = -1 \end{array}\right| \Rightarrow \exists\ x_0 \in (-1, 0)$ a.î. $f(x_0) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow f$ crescătoare (strict)

$\Rightarrow f$ are cel mult o rădăcină reală.

Teorema fundamentală a algebrei:

$f \in \mathbb{C}[X]$, grad $f = n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f$ are n rădăcini în $\mathbb{C}$ (ținând cont de multiplicități)

$f(x) = x^n \quad \in K[X] \quad K$ - corp comutativ

$f(0) = 0$

α - rădăcină pt f

$\alpha^n = 0 \Rightarrow \alpha = 0$

$$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 0 \\ x, y \in K \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{c} x = 0 \\ \text{sau} \\ y = 0 \end{array}$$

$f \in K[X]$, $f \neq 0$, K corp comutativ

$\alpha \in K$ este rădăcină de ordin m a lui f

$f(x) = (x-\alpha)^m \cdot g(x)$, $g \in K[X]$

$g(\alpha) \neq 0$

Formulele lui Viète

K - corp comutativ

$f(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$x_1, x_2, \dots, x_k$ rădăcini (din K) pt polinomul f

Atunci:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = -\frac{a_{k-1}}{a_k}$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{k-1}\cdot x_k = \frac{a_{k-2}}{a_k}$$

$\vdots$

$$x_1x_2x_3\dots x_t + \dots = (-1)^t \frac{a_{k-t}}{a_k}$$

$\vdots$

$$x_1x_2x_3\dots x_k = (-1)^k \cdot \frac{a_0}{a_k}$$

$\Rightarrow$ Relațiile lui Viete

Din teorema fundamentală a algebrei $f(x) = x^3 + x + 1$ are trei rădăcini complexe (una este reală)

$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui f

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$
$$= 0^2 - 2\cdot 1 = -2$$

pt funcție

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a_2}{a_3} = 0$$

$$x_1\cdot x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{a_1}{a_3} = 1$$

Să presupunem că sunt 2 reale $x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_3 = -(x_1 + x_2) \in \mathbb{R}$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \geq 0$ Ab

$f \in \mathbb{R}[x]$, grad $f = 2t+1$ impar $\Rightarrow f$ are o rădăcină reală

$f(x) = a_{2t+1}x^{2t+1} + \dots + a_1x + a_0$

$a_{2t+1} > 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

f continuă $\Rightarrow$ f surjectivă $\Rightarrow$ $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ cu $f(x_0) = 0$

$f(x) = x^3 + x + 1$ Care este rădăcina lui f

Istoric
del Ferro
Tartaglia
Cardano

$x = u + v$

$(u+v)^3 + (u+v) + 1 = 0 \Rightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + (u+v) + 1 = 0$

$\Rightarrow 3uv(u+v) + (u+v) = (u+v)(\underbrace{3uv+1}_{=0})$

$uv = -\frac{1}{3}$

$u^3 + v^3 = -1 \qquad uv = -\frac{1}{3}$

$(u^3 - v^3)^2 = u^6 + v^6 - 2u^3v^3 = u^6 + v^6 + 2u^3v^3 - 4u^3v^3 =$
$= (u^3 + v^3)^2 - 4u^3v^3 = 1 - 4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = 1 + \frac{4}{27} = \frac{31}{27}.$

$$\begin{cases} u^3 - v^3 = \sqrt{\frac{31}{27}} \\ u^3 + v^3 = -1 \end{cases}$$

$2u^3 = -1 + \sqrt{\frac{31}{27}}$

$u^3 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{31}{108}}$

$2v^3 = -1 - \sqrt{\frac{31}{27}}$

$u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{31}{108}}}$

$v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{31}{108}}}$

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{31}{108}}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{31}{108}}}$$

Polinoame Simetrice

$(R, +, \cdot)$ inel comutativ $\qquad n \in \mathbb{N}^*$

$$R[X_1, \dots, X_n] = \underbrace{R[X_1, \dots, X_{n-1}]}_{= S}[X_n]$$

$S =$ inel comutativ

$S[X]$

Inel de polinoame în n variabile cu coeficienți în inelul R

Def. (polinom simetric)

$f \in R[X_1, \dots X_n]$ se numește simetric dacă

$$f(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = f(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \forall \sigma \in S_n$$

$$S_n = \{\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\} \mid \sigma \text{ bijectivă}\}$$

Exemplu

$f(X_1, X_2, X_3) = X_1^3 + X_2^2 + X_3^2 \in \mathbb{R}[X_1, X_2, X_3]$ Este simetric? NU

$f(X_2, X_1, X_3) = X_2^3 + X_1^2 + X_3^2$

Cum construim un polinom simetric

$$\left.\begin{aligned} g(X_1, X_2, X_3) &= X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 \\ &X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 \end{aligned}\right\} \text{simetric}$$

Teorema fundamentală a polinoamelor simetrice.

$f \in R[x_1, ..., x_n]$ f simetric $\Rightarrow \exists\, g \in R[x_1, ... x_n]$ a.î.

$f = g(s_1, s_2, ..., s_n)$

$s_1(x_1, x_2, ... x_n) = x_1 + x_2 + ... + x_n$

$s_2(x_1, ... x_n) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + ... + x_{n-1} x_n$

$\vdots$

$s_n(x_1, ... x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot ... x_n$

$s_1, s_2, ... s_n$ se numesc polinoame simetrice fundamentale.

Algoritm pt a-l găsi pe g.

(1) Se separă componentele „omogene" (de același grad)

$g_1 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \qquad g = g_1 + g_2$

$g_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

Ulterior lucrez pe componente omogene de grad k

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3)$

$= S_1^2 - 2 S_2$

(2) Rezolv ecuația.

$$\begin{cases} k_1 + k_2 + ... + k_n = k \\ k_1 \geq k_2 \geq ... \geq k_n \geq 0 \end{cases} \qquad k_j \in \mathbb{N} \quad \forall j = \overline{1, n}$$

$a \cdot S_1^{k_1-k_2} \cdot S_2^{k_2-k_3} \cdot \ldots \cdot S_{m-1}^{k_{m-1}-k_m} \cdot S_m^{k_m}$

termenul general

(3) Găsirea coeficienților (a)

$m = 3$
$k = 3$

Pasul 2) $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq 0$

$k_1 + k_2 + k_3 = 3$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_m = S_1$

$x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{m-1} x_m = S_2$

$x_1 x_2 x_3 \ldots x_m = S_m$

$(k_1, k_2, k_3) = (3, 0, 0)$
$(2, 1, 0)$
$(1, 1, 1)$

$a \cdot S_1^3 + b \cdot S_1 S_2 + c \cdot S_3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$

$a = 1$ trebuie găsit b și c

Se dau valori lui x_1, x_2, x_3

Aleg
$x_1 = x_2 = 1$ $\quad S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$x_3 = 0$ $\quad S_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_2 x_3 = 1$

$S_3 = x_1 x_2 x_3 = 0$

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2 = 8 + b \cdot 2 \Rightarrow 2b = -6 \Rightarrow b = -3$

Aleg
$x_1 = x_2 = x_3 = 1$ $\quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3 = 27 - 27 + c$

$S_1 = 3$ $\quad c = 3$

$S_2 = 3$

$S_3 = 1$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)^3-3(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+$
$+x_1x_3+x_2x_3)\quad +3x_1x_2x_3$

$f\in\mathbb{R}[x_1,x_2,x_3]$

$x_1^3x_2+x_1x_2^3+x_1^3x_3+x_1x_3^3+x_2^3x_3+x_2x_3^3$

este simetric
trebuie scris $f=g(s_1,s_2,s_3)$.
Primul pas nu trebuie parcurs

Pas 2

$$\begin{cases} k_1\geq k_2\geq k_3\geq 0, & k_1,k_2,k_3\in\mathbb{N}\\ k_1+k_2+k_3=4\end{cases}$$

$(k_1,k_2,k_3)=(4,0,0)$
$(3,1,0)-s_1^2s_2s_3^0$
$(2,2,0)-s_2^2$
$(2,1,1)-s_1s_3$

$a\cdot s_1^{k_1-k_2}\cdot s_2^{k_2-k_3}\cdot\ldots\cdot s_{m-1}^{k_{m-1}-k_m}\cdot s_m^{k_m}$

$x_1^3\cdot x_2^1\cdot x_3^0\longrightarrow(3,1,0)$ deci nu apare $(4,0,0)$

$f(x_1,x_2,x_3)=a\cdot s_1^2s_2+b\cdot s_2^2+cs_1s_3$

$\boxed{a=1}$; Dăm valori

$x_1=x_2=x_3=1\quad s_1=3;\ s_2=3;\ s_3=1\quad f(1,1,1)=6=27+9b+3c$
$9b+3c=-21\,|:3$
$3b+c=-7$

$x_1=x_2=1\quad s_1=2;\ s_2=1;\ s_3=0$
$x_3=0\quad f(1,1,0)=2=4+b\Rightarrow\boxed{b=-2};$
$-6+c=-7\Rightarrow\boxed{c=-2}$

Algebră S2 Curs 2

Exerciții.

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \in \mathbb{R}[x_1, x_2, x_3]$

$f = g(s_1, s_2, s_3)$

Aplicați teorema fundamentală a polinoamelor simetrice (algoritmul).

$f(x) = x^4 + \bar{1} \in R[x]$ Găsiți rădăcinile lui f dacă

2) $R = \mathbb{Z}_{13}$

3) $R = \mathbb{Z}_{19}$

4) $R = \mathbb{Z}_{41}$

5) Găsiți rădăcinile în $\mathbb{Z}_{491}$ ale polinomului $f(x) = x^3 + x + \bar{1}$

6) Câte rădăcini reale are polinomul

$$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 2 \in \mathbb{R}[x] ?$$

7) $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile lui f de mai sus

Calculați $\sum_{j=1}^{4} x_j^3 = ?$ (Răspuns $\underline{\underline{6}}$).

Rezolvări (Lică :)))

2) fără

3) fără

4) petra

$\mathbb{Z}_{13}$

$\bar{x}^4 = -\bar{1}$ $\mathbb{Z}_{13}$

$\bar{1} = \bar{x}^{12} = (x^4)^3$ $\bar{x}^{12} = \bar{1}$

$= (-\bar{1})^3 = -\bar{1}$

$\Rightarrow 13 \mid 2$ Abs

p prim

$p \nmid x$

$\Rightarrow x^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$

$\mathbb{Z}_{19}$

$\bar{x}^4 = -\bar{1}$ $\bar{1} = \bar{x}^{18} = (\bar{x}^4)^4 \cdot \bar{x}^2 = (-1)^4 \cdot \bar{x}^2$

$\bar{x}^{18} = \bar{1}$

$x^2 = \bar{1} \cdot 2$

$\bar{x}^4 = \bar{1}$

$\mathbb{Z}_{41}$ $\bar{x}^4 = -\bar{1} = \overline{81} = \bar{3}^4$

$\bar{x}_1 = \bar{3}$

$\bar{x}_2 = -\bar{3} = \overline{38}$

$\bar{x}^2 = \bar{9}$

$\bar{x}^2 = -9 = \bar{9}^2 \cdot \bar{3}^2 = \overline{27}^2$

$\bar{9}^2 = -1$ $\bar{x}_3 = \overline{27}$

$\bar{x}_4 = -\overline{27} = \overline{14}$

1) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = s_1^4 + a s_1^2 s_2 + b s_2^2 + c s_1 s_3$

$k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq 0$

$k_1 + k_2 + k_3 = 3$

$(k_1, k_2, k_3) = (4,0,0)$ s_1^4

$(3,1,0)$ $s_1^2 s_2$

$(2,2,0)$ s_2^2

$(2,1,1)$ $s_1 s_3$

$a = -4$

$b = 2$

$c = 4$

$x_1 = 1$ $\quad S_1 = 0$

$x_2 = 1$ $\quad S_2 = -3$

$x_3 = -2$ $\quad S_3 = -2$

$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 18 = 9b$

$\underline{\underline{b = 2}}$

$x_1 = 1$ $\quad S_1 = 2$ $\quad x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 2$

$x_2 = 1$ $\quad S_2 = 1$ $\quad \cancel{2} = 16 + 4a + \cancel{2}$

$x_3 = 0$ $\quad S_3 = 0$ $\quad 4a = -16$

$\underline{\underline{a = -4}}$

$x_1 = x_2 = x_3 = 1$ $\quad S_1 = 3$ $\quad x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 3$

$S_2 = 3$ $\quad 3 = 81 - 108 + 18 + 3c$

$S_3 = 1$ $\quad 12 = 3c$

$\underline{\underline{c = 4}}$

Altă rezolvare:

$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = S_1^4 + aS_1^2 S_2 + bS_2^2 + cS_1 S_3$

$x_3 = 0$ $\quad x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = (S_1^2 - 2S_2)^2$

$= S_1^4 - 4S_1^2 S_2 + 2S_2^2$

$S_1 = x_1 + x_2 + x_3$

$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

$S_3 = 0$

5) E prea grea. Nu se poate rezolva.

7) Prima soluție.

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^4 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3 = -27 + 45 - 12$$

$$= 45 - 39 = 6$$

th fundamentală a pol simetrice.

$k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq k_4 \geq 0$ $\quad k_j \in \mathbb{N}$

$k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 3$ $\quad \forall j = \overline{1,4}$

Formule V

$S_1 = -3$

$S_2 = 5$

$S_3 = -4$

$(k_1, k_2, k_2, k_4) = (3,0,0,0)$ S_1^3

$(2,1,0,0)$ S_1S_2

$(1,1,1,0)$ S_3

A doua soluție.

$j = \overline{1,4}$ $\quad 0 = x_j^3 + 3x_j^2 + 5x_j + 4 + \frac{2}{x_j} = 0$

$$0 = \sum_{j=1}^{4} x_j^3 + 3\sum x_j^2 + 5\sum x_j + 16 + 2\sum \frac{1}{x_j} = 0$$

$$\sum x_j = S_1 = -3$$

$$\sum x_j^2 = \left(\sum x_j\right)^2 - 2\left(\sum_{i<j} x_i x_j\right) = S_1^2 - 2S_2 = 9 - 10 = -1$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = \frac{S_3}{S_4} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$0 = \sum_{j=1}^{4} x_j^3 + (-3) + (-15) + 16 + (-4)$$

$$\sum_{j=1}^{4} x_j^3 = 6$$

$$-1 = \sum x_j^2 = \left(\sum x_j\right)^2 - 2\left(\sum_{i<j} x_i x_j\right) = S_1^2 - 2S_2 = 9 - 10 = -1$$

$\Rightarrow \exists$ rădăcini care nu sunt reale

$\Rightarrow$ 2 rădăcini reale sau 0 rădăcini reale.

6) $x = a + bi \in \mathbb{C}$

$\bar{x} = a - bi \in \mathbb{C}$

$x \in \mathbb{C},\ f(x) = 0 \quad f \in R[x]$

$\Rightarrow f(\bar{x}) = 0$

Presupun că există $x \in \mathbb{R}$

$$x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 4x + 2 = 0$$

$$x^4 + 3x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{11}{4}x^2 + 4x + 2$$

$$= \left(x^2 + \frac{3}{2}x\right)^2 + \frac{11}{4}x^2 + 4x + 2$$

$\Delta = 16 - 22 = -6 < 0$ $\nexists$ Nu există rădăcini reale.

5) Deși nu se poate rezolva concret, câteva observații:

$x^3 + x + \bar{1} = \bar{0}$ $\qquad \mathbb{Z}_{491}$

$x = u + v$

$u^3 + v^3 + (u + v)(\bar{3}uv + 1) + \bar{1} = \bar{0}$

$u^3 + v^3 = -\bar{1} \qquad \bar{3}uv = -\bar{1}$

$\bar{3}\,\bar{U}\,\bar{V} = -\bar{1} = -\overline{492}$

$\bar{U} \cdot \bar{V} = -\overline{164}$

$\overline{(U^3 - V^3)^2} = \overline{(U^3 - V^3)^2 - 4U^3V^3} = \bar{1} + \bar{4} \cdot \overline{164}^3$

$\stackrel{?}{=} -\overline{308} = \bar{4} \cdot (-\bar{7}) \cdot \overline{11}$

$-\varphi^2 = \overline{11}$ Hu tìm φ

$= \bar{2}^2 \cdot \overline{22}^2 \cdot \bar{\varphi}^2$

$\overline{U^3 + V^3} = \overline{44\varphi}$

$\overline{2U^3} = \overline{-1 + 44\varphi}$

$\overline{U^3} = \overline{245 + \varphi}$ U

$\overline{V^3} = \overline{245 - \varphi}$ V

Algebră S2
Curs 3
Matrici și determinanți

R - inel comutativ, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$M_n(\mathbb{R})$ = $\left\{ \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} a_{ij} \in \mathbb{R} \\ \forall\, i,j \in \overline{1,n} \end{array} \right\}$

inel de matrici

$= (a_{ij})\ 1 \leq i,j \leq n$

$(M(R), +, \cdot)$ inel (necomutativ)

$(a_{ij})_{ij} + (b_{ij})_{ij} = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$

$(a_{ij}) \leq i,j \leq n \quad (b_{ij}) \leq i,j \leq n \quad (a_{ij}) < i,j \leq n$

$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$ $\qquad A, B \in M_2(\mathbb{Z})$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

$A + B = \begin{pmatrix} 1+0 & 2+1 \\ 1+2 & 1+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = 4 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 7 \\ 1\ 0 + 1 \cdot 2 = 2 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Propoziție

O matrice $A \in \mathcal{M}_n(R)$ este inversabilă

$A \in U(\mathcal{M}_n(R)) \iff \det A \in U(R)$

Elementul neutru pt „+": $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Elementul neutru pt „·" este:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n$ → matricea identitate

Calcul determinanți

$A \in \mathcal{M}_n(R)$ $\quad A = (a_{ij})$ $1 \le i, j \le n$

Definiție:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

$S_n = \{ \sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots n\} \mid \sigma$ bijectivă $\}$ $\quad (S_n, \circ)$ grupul permutărilor cu n elemente

$\varepsilon(\sigma)$ - signatura permutărilor

$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{nr inversiuni}}$

(i,j) inversiune pt σ $\quad 1 \leq i,j \leq n$

dacă $i < j$ și $\sigma(i) > \sigma(j)$

Definiția ajută la calcule doar pt $n = 2$

și $n = 3$

$n = 2$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$S_{n_2} = \{ e, (1,2) \}$

identică $\qquad$ transpoziția

$\det A = \varepsilon(e) \cdot a_{11} \cdot a_{22} + \varepsilon((1,2)) \cdot a_{12} \cdot a_{21}$

$\varepsilon(e) = 1$

$\varepsilon((1,2)) = -1$

$\varepsilon((a_1, \dots, a_k)) = (-1)^{k-1}$

$|A| = \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

notație

$n = 3$ $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Cele 6 permutări

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\varepsilon(\sigma_1) = 1$ $\quad \varepsilon((1,2,3)) = (-1)^2 = 1$

$\varepsilon(\sigma_2) = 1$ $\quad \varepsilon(\sigma_2) = -1$ $\quad \varepsilon(\sigma 3) = -1$

$\varepsilon(\sigma_4) = -1$ $\quad \varepsilon(\sigma 6) = 1$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23} \cdot a_{32}$$

Proprietăți determinant

R inel comutativ

$M_n(R)$ $n \in \mathbb{N}$

$A \in M_n(R)$

1) Dacă A are o linie de zerouri atunci determinantul $\det A = 0$

2) Dacă la o linie (coloană) adunăm altă linie (coloană) înmulțită cu un $r \in R$, determinantul matricii nu se schimbă.

3) $\det A = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}}_{\text{dezvoltarea după coloana } j} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det A_{ij}}_{\text{dezvoltarea după linia } i}$

A_{ij} = matricea obținută din A prin tăierea liniei i și a coloanei j $\Rightarrow A_{ij} \in M_{n-1}(R)$

Exerciții:

Calculați det

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{din} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1}}{\overset{\text{prop } 2)}{=}} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \overset{\text{prop } 3}{=}$$

$\underset{\substack{\text{dezvolt după} \\ \text{prima coloană}}}{=}$

$$= (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 1 & -7 & -3 \\ 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{linie}1 + (\text{linie}2 \cdot 3) \\ \text{linie } 3 + (\text{linie } 2 \cdot (-2))}}{=}$$

3.

$a_{21} = 0$, $a_{31} = 0$, $a_{41} = 0$ => nu apar în calculul de mai sus

$$= \begin{vmatrix} 0 & -22 & -10 \\ 1 & -7 & -3 \\ 0 & 10 & 5 \end{vmatrix} \underset{\substack{\text{dezvoltare după} \\ \text{prima linie}}}{=} (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -22 & -10 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-110 + 100) = 10$$

4) $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$

osvanw

Determinantul Vandermond

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \\ x_1^{n-1} & \cdots & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1}) =$$

$$= \prod_{i<j}(x_j-x_i)$$

Demonstrația se face prin inducție după n

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \underset{C_{ii}-C_i}{\overset{2)}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ x_1^2 & x_2^2-x_1^2 & x_3^2-x_1^2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{dez} \\ \text{după } L_1}}{=\!=} (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ x_2^2-x_1^2 & x_3^2-x_1^2 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3^2-x_1^2)-$$

$$-(x_3-x_1)(x_2^2-x_1^2) = (x_2-x_1)(x_3-x_1)[x_3+x_1-$$

$$-(x_2+x_1)] = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$$

Inversa unei matrici

dacă $n=1$. $M_1(R)$

$\det(a) = a$

R inel comutativ, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$A \in U(\mathcal{M}_n(R)) \Leftrightarrow \det A \in U(R)$. Dacă R e corp $\overset{A \in U(\mathcal{M}_n(R))}{\Leftrightarrow} \det A \neq 0$

Cum se calculează inversa unei matrici? (în cazul în care există)

$\det A \in U(R)$

$A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot B^t$

↳ inversa lui A

$B = \left(\quad \right) = b(ij)_{1 \leq i, j \leq n}$

$b_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$

$B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

$B^t = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, $c_{ij} = b_{ji}$ $\forall$ $i, j = \overline{1, n}$

↳ transpusa matricii B

exemplu: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\det A = 8 - 7 = 1 \Rightarrow$ inversabilă în $\mathbb{R}$

inversul

$A^{-1} = (1)^{-1} \cdot B^t = 1 \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$

$b_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 8 = 8$

$b_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 7 = -7$

$b_{21} = (-1)^{2+1} \cdot 1 = -1$

$b_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1$

$\Rightarrow$

7

$$B = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

verificăm:

$$A \cdot A^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -7 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Exercițiu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}). \quad \exists A^{-1}?$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_{II} - C_I \\ C_{III} - C_I \cdot 2}}{=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$$

$$b_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \det A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \det A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3$$

$$b_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \det A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$b_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \det A_{21} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$

$b_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$

$b_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \det A_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -2$

$b_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \det A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

$b_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \det A_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$b_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \det A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot B^{T} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 1/2 & -3/4 \\ -3/4 & +1/2 & -1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Verificare: $I_3 = A \cdot A^{-1}$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$(5+2-3)/4 = 1$ $\qquad -3+2+1 \qquad 1-2+1$

$5+4-9=0$ $\qquad -3+4+3 \qquad 1-4+3$

$5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 4 = 0$ $\qquad -6+2+4 \qquad 2-2+4$

Calculați determinant:

$x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \neq 0$

$$n\begin{pmatrix} x & 1 & \cdots & \\ \vdots & x & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & & x \end{pmatrix} =$$

$$\underline{\quad n \quad}$$

$n=2 \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^2 - 1 =$

$= (x-1)(x+1)$

$n=3 \Rightarrow \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix} = x^3 + 1 + 1 -$

$- x - x - x = x^3 - 3x + 2 =$

$= (x-1)(x^2+x-2) = (x-1)^2(x+2)$

Adun $\underline{C_n + C_{n-1} + \cdots}$
$\underline{\cdots + C_2} + C_1$

$$= \begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x+n-1 & x & & 1 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ x+n-1 & & 1 & & x \end{vmatrix} = (x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & x & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & x \end{vmatrix} =$$

Proprietatea 5) $\begin{vmatrix} a_{11} & q a_{1j} & a_{1n} \\ & q a_{2j} & \\ & \vdots & \\ & q a_{nj} & \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ & a_{2j} \\ & \vdots \\ & a_{nj} \end{vmatrix}$

$$= (x+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x-1 & 0 & & 0 \\ \vdots & 0 & x-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x-1 \end{vmatrix} \underset{\text{după } L_1}{\overset{\text{dezv}}{=\!=}} 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot$$

$$\cdot\,(x+n-1)\underbrace{\begin{vmatrix} x-1 & & & 0 \\ & x-1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & x-1 \end{vmatrix}}_{n-1} = (x+n-1)\cdot(x-1)^{n-1}$$

Aplicație practică

Criptare cu Matrici

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} \\ \bar{3} & \overline{18} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{26})$$

Mesaj ZECE

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V

22	23	24	25
W	X	Y	Z

$A \in U(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_{26}))$

ZE|CE| → TRWA

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} \\ \bar{3} & \overline{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{25} \\ \bar{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} Z \\ E \end{matrix}$$

$\bar{1} \cdot \overline{25} + \bar{5} \cdot \bar{4} = \overline{45} = \overline{19} \to T$

$\bar{3} \cdot \overline{25} + \overline{18} \cdot \bar{4} = \overline{69} = \overline{17} \to R$

Se împarte mesajul în 2

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} \\ \bar{3} & \overline{18} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{4} \end{pmatrix} \begin{matrix} C \\ E \end{matrix}$$

$\bar{2} + \bar{5} \cdot \bar{4} = \overline{22} \to W$

$\bar{3} \cdot \bar{2} + \overline{18} \cdot \bar{4} = \overline{78} = \bar{0} \to A$

În general avem un alfabet de lungime n, o matrice $A \in U(\mathcal{M}_k(\mathbb{Z}_n))$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$

Se împarte mesajul în secvențe de lungime k

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$$

$(b_1, \dots, b_k) \rightarrow (c_1, \dots, c_k)$

Dacă mesajul este mai scurt decât k se pun la sfârșit câte x-uri este nevoie pt a ajunge să fie multiplu de k.

Decriptați: RGMMIIVASXDSKQLBXE

QFR BOA CKR YUX

Alfabetul de 26 caractere de mai sus $A \in U(M_3(\mathbb{Z}_{26}))$

Hint: Probabilitatea de 1/3 sa nu pun x și 2/3 să pun un x. Am pus un x după criptare am pus un x la sfârșit.

Sisteme Liniare de ecuații

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

, unde $a_{ij}, b_i \in K$

$x_1, x_2, \dots x_n$ necunoscute

K - corp comutativ

7

Teorema: Dacă $\det(a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \ne 0$ atunci sistemul are soluție unică și
$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(a_{ij})_{1 \le i, j \le n}}$$

coloana j e singura modificată (înlocuită cu termenii liberi)

$\mathbb{Z}_{26}$ nu e corp, este corp doar dc n e prim

Rezolvați în $\mathbb{Z}_{26}$ sistemul

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} \\ \bar{3} & \overline{18} \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x + \bar{5}y = \bar{2} \\ \bar{3}x + \overline{18}y = \bar{3} \end{cases}$$

$\det A = \begin{vmatrix} \bar{1} & \bar{5} \\ \bar{3} & \overline{18} \end{vmatrix} = 3 \ne 0$ deci are soluție unică

$$\bar{x} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{2} & \bar{5} \\ \bar{3} & \overline{18} \end{vmatrix}}{\bar{3}} = \frac{\overline{36 - 15}}{\bar{3}} = \frac{\overline{21}}{\bar{3}} = \bar{7}$$

K inel comutativ $\det(a_{ij}) \in U(K)$

$$\bar{y} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{3} & \bar{3} \end{vmatrix}}{\bar{3}} = \frac{\overline{3 - 6}}{\bar{3}} = \overline{-1}$$

Formulele lui Cramer

Verificare $\overline{x + 5y} = \overline{7 - 5} = \bar{2}$

$\overline{3x + 18y} = \overline{21 - 18} = \bar{3}$

Altă Variantă:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} , \quad A = \begin{pmatrix} a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \overline{18} & \overline{23} \\ \overline{21} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

$$B^t = \begin{pmatrix} \overline{18} & \overline{21} \\ \overline{23} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \overline{1} & \overline{5} \\ \overline{3} & \overline{18} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{6} & \overline{7} \\ -\overline{1} & \overline{9} \end{pmatrix} = (\det A)^{-1} \cdot B'$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \overline{18} & \overline{21} \\ \overline{23} & \overline{1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{6} & \overline{7} \\ -\overline{1} & \overline{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{2} \\ \overline{3} \end{pmatrix}$$

$$x = \overline{6 \cdot 2 + 7 \cdot 3} = \overline{33} = \overline{7}$$

$$y = \overline{-1 \cdot 2 + 9 \cdot 3} = \overline{-1}$$

Algebră Curs 3 S2

Exerciții

Exerciții test:

1) $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{5} \\ \hat{3} & \hat{18} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}_{26})$. Găsiți $B \in M_2(\mathbb{Z}_{26})$

a.î. $A \cdot B = B \cdot A = I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ $\quad \det A = \hat{3}$, $\hat{3} \in U$,

$= \hat{18} - \hat{15} = \hat{3}$

$(\hat{3})^{-1} = \hat{9} \qquad \hat{3} \cdot \hat{9} = \hat{1}$ în $\mathbb{Z}_{26}$

2) Calculați $|U(M_2(\mathbb{Z}_3))|$ = Câte matrici M_2 inversabile există în $\mathbb{Z}_3$?

3) Calculați $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 16 & 25 \\ 27 & 64 & 125 \end{vmatrix}$

4) Calculați $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & & & \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$

5) Calculați $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 1 & \alpha\beta \end{vmatrix}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

6) Calculați:

$$a_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 \\ & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & \alpha\beta \\ & & & & 1 & \alpha\beta \end{vmatrix} = ?$$

Rezolvări:

(1) $\det A = \bar{3} \Rightarrow \dfrac{1}{\det A} = \bar{9}$ în $\mathbb{Z}_{26}$

$$B = \begin{pmatrix} \overline{18} & -\bar{3} \\ -\bar{5} & \bar{1} \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} \overline{18} & -\bar{5} \\ -\bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \overline{18} = \overline{18}$

$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \bar{3} = -\bar{3}$

$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \bar{5} = -\bar{5}$

$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \bar{1} = \bar{1}$

$$(A)^{-1} = \bar{9} \cdot \begin{pmatrix} \overline{18} & -\bar{5} \\ -\bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{7} \\ \overline{25} & \bar{9} \end{pmatrix}$$

$$B = \bar{9} \cdot \begin{pmatrix} \overline{18} & -\bar{3} \\ -\bar{5} & \bar{1} \end{pmatrix}^t = 9 \begin{pmatrix} \overline{18} & -\bar{5} \\ -\bar{3} & \bar{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{6} & \bar{7} \\ \overline{25} & \bar{9} \end{pmatrix}$$

(2) $A \in U(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)) \Leftrightarrow \det A \neq \bar{0}$, $\mathbb{Z}_3$ = corp

$A = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}$, $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\} \in \mathbb{Z}_3$

$\det A \neq \bar{0}$

Aflăm în câte situații $\det A = \bar{0}$

$\overline{ad} = \overline{bc}$

dacă $\bar{a} = \bar{0} \Rightarrow \bar{0} = \overline{bc} \Rightarrow (\bar{b}, \bar{c}) = (\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, 0), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2})$

$\Rightarrow$ 15 posibilități

$\bar{d} \in \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$

dacă $\bar{a} = 1 \Rightarrow \bar{d} = \bar{b} \cdot \bar{c} \Rightarrow$ 9 posibilități

dacă $\bar{a} = \bar{2} \Rightarrow \bar{2}\bar{d} = \bar{b}\bar{c} \Rightarrow \bar{d} = -\bar{b}\bar{c} \Rightarrow$ 9 posibilități

Avem 33 matrici $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ cu $\det A = \bar{0}$

$|U(\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3))| = 81 - 33 = 48$

(3)
$$\begin{array}{l} \\ C_{II} - C_I \\ C_{III} - C_I \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 9 & 7 & 16 \\ 27 & 37 & 98 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 16 \\ 37 & 98 \end{vmatrix} = 686 - 592 = 94$$

(4)

egalitate de polinoame

Adaugăm o linie și o coloană să-l facem Vandermond

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & x^2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n & x^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)(x - x_1)(x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & & & \\ x_1^n & \dots & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = (-1)^{2+(n+1)} \cdot x \cdot \Delta =$$

dezvoltare după ultima coloană

$$= \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \cdot S_{n-1} - (-1)^{n-1} \cdot x$$

$$(-1)^{n+3} = (-1)^{n-1} \cdot (-1)^n = (-1)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \Delta = \prod_{\substack{1 \le i \\ j \le n}} (x_j - x_i) \, S_{n-1}$$

Verificăm $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 5$

$$\Delta = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)(x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3) =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (12 + 15 + 20) = 2 \cdot 47 = 94$$

5) $(\alpha + \beta)^3 - 2\alpha\beta(\alpha + \beta) = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 - 2\alpha^2\beta - 2\alpha\beta^2 = \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$

6) $\alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta^2 + \dots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n$ (inducție)

pt. $n = 2$

$$\begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix} = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$$

Verificare

$n = 1, 2, 3$

Presupun adevărat ptr $k \leq n-1$ și-l dem ptr n,

$n \geq 4$ dezvoltare după prima linie

$$a_n = (\alpha+\beta)(-1)^{1+1} \cdot a_{n-1} + \alpha\beta \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha+\beta) a_{n-1} - \alpha\beta \cdot (-1)^{1+1} \cdot a_{n-2} =$$

$$= (\alpha+\beta)(\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-2} + \beta^{n-1}) -$$

$$- \alpha\beta(\alpha^{n-2} + \alpha^{n-3}\beta + \dots + \alpha\beta^{n-3} + \beta^{n-2})$$

$$= \alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta^2 + \dots + \alpha\beta^{n-1} + \beta^n$$

Algebră S2
Curs 4

Rezolvarea sistemelor liniare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$a_{ij} \in K \quad \forall i,j = \overline{1,n}$

K - corp comutativ

$b_1, b_2, \dots, b_m \in K$

Cazul $\det (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \neq 0$

- sistemul are soluție unică

determinant

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

col j col termeni liberi

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Cazul $\det (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} = 0$

$\operatorname{rang} (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, \min\{m,n\}\}$

Spunem că rangul matricii a_{ij} este k dacă k este maximul cu calitatea că $\exists$ o matrice obținută din intersecția a k linii și k coloane din matricea a_{ij} care să aibă $\det \neq 0$.

Prin definiție

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \overset{def}{=} 0$$

Teoremă

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

Formulele Cramer

Sistemul are soluții $\Leftrightarrow$

$$k = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & b_m \end{pmatrix}$$

Dacă cele două ranguri sunt egale

Presupun că

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & \dots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0$$

atunci $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots x_n \in K$ iar $x_1, x_2, \dots x_k$ se obțin din formulele Cramer pt

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 - a_{1k+1}x_{k+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kk} \cdot x_k = b_k - a_{kn}x_{k+1} - \dots - a_{kn}x_n \end{cases}$$

Exemplu:

Rezolvați sistemul $\begin{cases} mx + y + z = m \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = 1 \end{cases}$

Pas 1. calculăm det

$$\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 + 1 - m - m - m = m^3 - 3m + 2$$
$$= (m-1)(m^2+m-2) = (m-1)^2(m+2)$$

Cazul când $m \neq 1$ și -2 (determinantul $\neq 0$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{rang}\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} = 3 = \text{rang}\begin{pmatrix} m & 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ s-a înlocuit coloana 1 cu $b_1 \dots b_n$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+2)} = 1$$

dacă iau prima nedeterminată (x) înlocuiesc I coloană (coloana 1) cu coloana termenilor liberi (în acest caz cu una din cele 2 coloane)

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+2)} = 0$$

s-a înlocuit coloana 2 cu b_1, b_2, b_3

$C_{II} - C_{I} \cdot (-1)$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \end{vmatrix}$$

- matrice cu col 0 $\Rightarrow$ det = 0

$$Z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+2)} = 0$$

$C_{I} = C_{III} \Rightarrow$ det = 0

s-a înlocuit coloana 3 cu $b_1 = m, b_2 = 1, b_3 = 1$

$\Rightarrow$ $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 0$ - 1 singură soluție

Cazul când determinant = 0

~~m~~ $= 1$

$m = -2$

~~Cazul~~ $m=1$

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad \det = 0$$

$y, z \in \mathbb{R}$

$x = 1 - y - z$

Cazul $m=-2$

$$\begin{cases} -2x+y+z=-2 \\ x-2y+z=1 \\ x+y-2z=1 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{rang} < 3$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4-1 = 3 \neq 0$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \longrightarrow \text{matricea extinsă al patrin } 2$$

$\Rightarrow$ sistemul are soluții

$$\begin{vmatrix} -2 & a & -2 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$C_{I} = C_{IV}$ $\qquad (C_{I} + C_{II}) + C_{III}$

Deoarece cele 2 ranguri coincid => sistemul are soluții

$z \in \mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3$$

$$\begin{cases} -2x + y = -2 - z \\ x - 2y = 1 - z \end{cases}$$

Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2-z & 1 \\ 1-z & -2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{4+2z-1+z}{3} = 1+z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -2-z \\ 1 & 1+z \end{vmatrix}}{3} = \frac{-2+2z+2+z}{3} = z$$

Soluții $z \in \mathbb{R}$ $\quad x = z+1$

$y = z$

Cazul $m = -2$

$z \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = z+1 \\ y = z \end{cases}$$

$m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$ $\quad \Delta = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2}$

$$-1 - \cancel{1} + \cancel{1} - (-1) - (-1) - (1) = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$$

$$1 + 1 - 1 - (-1) - 1 - (-1) = 1 + 1 - 1 + 1 = 3 - 1 = 2$$

$$\begin{cases} -x - y + z = -1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$x + y - z = 1$$
$$x + y - z = -1$$

Algebră Curs 4 S2
Test

(1) Rezolvați sistemul

$$\begin{cases} mx + my + z = m \\ x + my + z = 1 \\ x + y + mz = m \end{cases} \qquad m \in \mathbb{R}$$

(2) Rezolvați în $\mathbb{R}$

$$\begin{cases} y + z - u - v = 0 \\ -x + z + u - v = 0 \\ x + y - u - v = 0 \\ x - y + z - v = 0 \\ x + y - z - u = 0 \end{cases}$$

Rezolvare

(1) Calculăm determinantul

$$\begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 + \cancel{m} - \cancel{m} - m - m^2 = m^3 - m^2 - m + 1$$

$$= m^2(m-1) - (m-1) = (m-1)(m^2-1) = (m-1)(m-1)$$
$$(m+1) = (m-1)^2(m+1)$$

Cazul când $m \neq 1, -1$

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} = 3 = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} m & m & 1 & m \\ 1 & m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & m \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+1)} = \frac{m^3+1+m^2-m^2-m-m}{(m-1)^2(m+1)}$$

$$= \frac{m^3-m^2-m+1}{(m-1)^2(m+1)} = \frac{m^2(m-1)-(m-1)}{(m-1)^2(m+1)}$$

$$= \frac{(m^2-1)(m-1)}{(m-1)^2(m+1)} = \frac{(m-1)^2(m+1)}{(m-1)^2(m+1)} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} m & m & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+1)} = \frac{m^2+m+m-1-m^2-m^2}{(m-1)^2(m+1)}$$

$$= \frac{-m^2+2m-1}{(m-1)^2(m+1)} = \frac{-(m^2-2m+1)}{(m-1)^2(m+1)} = \frac{-\cancel{(m-1)^2}}{\cancel{(m-1)^2}(m+1)} = -\frac{1}{m+1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & m & m \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{(m-1)^2(m+1)} = \frac{m^3+m+m-m^2-m-m}{(m-1)^2(m+1)}$$

$$= \frac{m^3 - 2m^2 + m}{(m-1)^2 (m+1)} = \frac{m \cancel{(m-1)^2}}{\cancel{(m-1)^2} (m+1)} = \frac{m}{m+1}$$

$x = 1$

$y = -\frac{1}{m+1}$, $m \in \mathbb{R}$
$m \neq -1, 1$

$z = \frac{m}{m+1}$

Cazul $m = 1$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \qquad \text{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1$$

$y, z \in \mathbb{R}$
$x = 1 - y - z$

Cazul $m = -1$

$$\begin{cases} -x - y + z = -1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = -1 \end{cases} \qquad \text{rang}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2; \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (-1)\cdot 1\,(-1) +$$

$$+ 1\cdot 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 1\cdot 1 - (-1)\cdot 1\,(-1) -$$

$$- 1\cdot 1\cdot(-1) = \cancel{1} - \cancel{1} + 1 + 1 - \cancel{1} + \cancel{1} = 2$$

$$\text{rang}\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$\text{rang}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \neq \text{rang}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ sistemul nu are soluții

(2) Primei a treia $y+z = u+v$ și $x+y = u+v \Rightarrow x = z$

Din a doua ecuație $\Rightarrow u = v$

Din ultima ecuație $\Rightarrow y = u$

$\Rightarrow u = v = y$

$\Rightarrow x = z$

Din ec 4 $\Rightarrow 2x - 2y = 0$

$\Rightarrow x = y$

$\Rightarrow u = v = y = x = z$

cu x, y, z, v, u reale

Algebră II

Examen

1) Câte elemente inversabile, idempotente și nilpotente există în inelul $(\mathbb{Z}_{30}, +, \cdot)$?

$x \in \mathbb{R}$ idempotent dacă $x^2 = x$

$x \in \mathbb{R}$ nilpotente dacă $\exists\, n \in \mathbb{N}$ a.î. $x^n = 0$

2) $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{1} & \hat{2} & \hat{3} \\ \hat{1} & \hat{4} & \hat{4} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5)$

a) Calculați $\det A$

b) Calculați A^{-1}

3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ rădăcinile ecuației:

$x^4 - x^2 + 1 = 0$

a) Câte din cele 4 rădăcini sunt reale?

b) Calculați $\sum_{j=1}^{4} x_j^{2019}$

c) Calculați $\sum_{j=1}^{4} x_j^{2020}$

4) Pentru $m \in \mathbb{R}$ sist.:

$$\begin{cases} x + y - 3t - u = 2 \\ x - y + 2z - t = 0 \\ 4x - 2y + 6z + 3t - 4u = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 4t - 7u = m \end{cases}$$

are soluții