Matrici Inversabile

Def:

Fie A o matrice pătrată

A este inversabilă dacă există o matrice B astfel încât $A \cdot B = I$

Obs:

Dacă $A \cdot B = I$ atunci $B \cdot A = I$ (deși, în general, înmulțirea matricilor nu este comutativă)

Dacă A este inversabilă atunci B este unică.

Notație:

Matricea inversă se notează A^{-1}

(numită "inversa lui A")

ex: 1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ atunci $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ex: 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ nu este inversabilă

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 0 \\ 2a + 2c = 0 \\ 2b + 2d = 1 \end{cases}$$

contradicție

Fără soluție

de observat că, aceasta este o metodă pt a determina dacă A este inversabilă și a găsi o inversă dacă $\exists$ (există moduri mai eficiente)

Thm (1) Dacă A și B sunt inversabile atunci $A \cdot B$ este inversabil, și $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

(2) Dacă A este inversabilă, atunci A^t este inversabilă și $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

demonstrație:

(1) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(B \cdot B^{-1})A^{-1} =$

$= A I A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$

(2) $(A^t) \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} A)^t = I^t = I$ ■

Determinarea

Inversabilității unei Matrici

și Găsirea acesteia dacă $\exists$

Întrebări:

- Cum știm dacă A este inversabilă ori nu ?
- Cum găsim inversa (A^{-1}) ?
- La ce folosește A^{-1} ?

Thm.

Fie $A_{m \times m}$ matrice pătrată. Următoarele afirmații sunt echivalente:

① A este inversabilă

ddacă

② Rangul $r(A) = m$

③ A este echivalentă pe rând cu $\underline{I}$

④ Pt orice vector $b \in \tilde{F}^m$ (field), sistemul $Ax + b$ are soluție unică.

Thm.

Dacă A este inversabilă atunci operațiile pe rânduri ce transformă A în $\underline{I}$, transformă $\underline{I}$ în A^{-1}!

Ex: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ scriem $(A \mid I)$ și facem

operațiile pe rânduri ce transformă A în I:

$$\left(\overset{A}{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{matrix}} \;\middle|\; \overset{I}{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}\right) \xrightarrow[R_1 \to \frac{1}{2}R_1]{} \left(\begin{matrix} 1 & 1/2 \\ 4 & 5 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - 4R_1]{}$$

$$\left(\begin{matrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 3 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1/2 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}\right) \xrightarrow[R_2 \to \frac{1}{3}R_2]{} \left(\begin{matrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 1/2 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - \frac{1}{2}R_2]{}$$

$$\left(\overset{I}{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \;\middle|\; \overset{A^{-1}}{\begin{matrix} 5/6 & -1/6 \\ -2/3 & 1/3 \end{matrix}}\right)$$

Operațiile pe rânduri ce au dus pe A la I au transformat pe I în A^{-1}

De la $(A \mid I)$ am obținut $(I \mid A^{-1})$

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 5y = 2 \end{cases} \Rightarrow \underset{A}{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}} \underset{x}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \underset{=}{=} \underset{b}{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Dacă știm că A este inversabilă și am găsit A^{-1}

atunci: $\underset{\cdot A^{-1}}{Ax} = \underset{\cdot A^{-1}}{b} \Rightarrow A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Rightarrow$

$$x = (A^{-1} \cdot A) \cdot x = A^{-1}(Ax) = A^{-1} \cdot b$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 & -1/6 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13/6 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

• La ce este utilă A^{-1}?

<u>Obs</u>: În general, nu există reducere. Adică:

$$AB = AC \not\Rightarrow B = C \quad \text{DAR}$$

dacă A este inversabilă atunci $\exists$ reducere:

$$B = A^{-1}AB = A^{-1}AC = C$$

demonstrație ① => ④:

Fie $b \in F^n$. Luăm $x = A^{-1}b$

Atunci $Ax = A(A^{-1}b) = b$. Soluția este unică deoarece dacă x, y satisfac $Ax = b = Ay$ atunci $Ax = Ay$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}Ay \Rightarrow x = y$$

④ => ①:

Dacă pt orice b sistemul $Ax = b$ are o soluție atunci în mod particular:

$$A\underset{c_1}{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\underset{c_2}{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots\ldots, \quad A\underset{c_n}{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$ au soluții,

le numim C_i

Definim A^{-1} ce fiind matricea a cărei coloane sunt formate din C_i. Atunci într-adevăr A^{-1} este inversa, din moment ce $A A^{-1} = I$:

$$A A^{-1} = A \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} c_1 & c_2 & c_3 & & c_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} | & | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = I \quad \blacksquare$$

ideea demonstrației pt Thm

$$(A | I) \to (I | A^{-1})$$

$F_1(A) \to$ a fi o funcție pt prima operație pe rânduri

$$F_k(\ldots(F_2(F_1(A)))\ldots) = I$$

$$\Rightarrow F_k(\ldots(F_2(F_1(I))\ldots) = F_k(\ldots(F_2(F_1(A \cdot A^{-1}))\ldots)$$

putem înlocui F_1 cu o Matrice (Matrice Elementară)

$$= F_k(F_{k-1}(\ldots(F_2(F_1(A))\ldots) A^{-1} = I A^{-1} = A^{-1}$$

din moment ce F_i poate fi implementată de matrici ("matrice elementară")

Exerc: găsește o matrice E a.î. EA este A cu rândul R_j înlocuit de $3R_j$