10.11.2019
-curs 1-

Pt. examen: La examen este voie cu o foaie A4 (fața-verso) cu formule, fără exemple, scrisă de mână și nefotocopiată

Ecuații diferențiale în $\mathbb{R}$

Def. O ecuație diferențială de ordin k, $k \in \mathbb{N}^*$ este de forma implicită:

$$F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k-1)}, y^{(k)}) = 0 \qquad (1)$$

unde $F : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ Conv: $y = y^{(0)}$

x = variabile independentă

y = variabile dependentă $y = y(x)$

În (1) se cere să determinăm pe y.

Forma explicită a ec. (1) este:

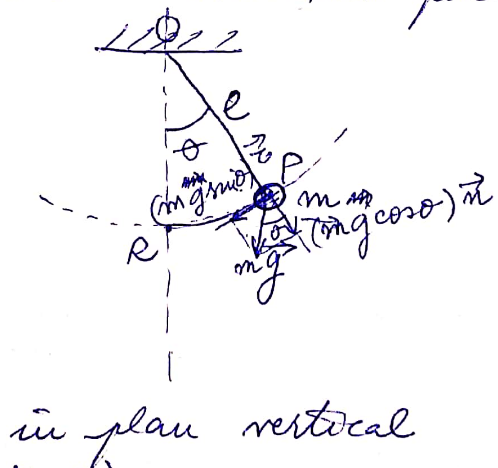
$$y^{(k)} = f(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k-1)}) \qquad (2)$$

Ec. (2) este liniară dacă:

$$f(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k-1)}) =$$

$$= a_0(x) y + a_1(x) y^{(1)} + \dots + a_{k-1}(x) y^{(k-1)}$$

Exemple ① ec. care descrie oscilațiile pendulului matematic:



mișcarea este în plan vertical

$\theta = \measuredangle(OP, \text{verticala})$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$$m l \ddot{\theta}\vec{\tau} = mg \sin\theta \vec{\tau} \quad \text{unde } \ddot{\theta} = \theta^{(2)} = \theta''$$

spațiu parcurs $= \widehat{PR} = \frac{2\pi l}{2\pi} \cdot \theta = l\theta$; θ = exprimat în radiani viteza $= \dot{\overline{l\theta}} = l\dot{\theta}$

acceleratia $= \ddot{\overline{l\theta}} = l\ddot{\theta}$

$\cancel{m}l\ddot{\theta} = \cancel{m}g\sin\theta \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$ (3)

$F(t,\theta,\dot{\theta},\ddot{\theta}) = 0.$

$\ddot{\theta} = \frac{g}{l}\sin\theta \;\Big|\cdot\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta}\dot{\theta} = \frac{g}{l}\dot{\theta}\sin\theta \Rightarrow \frac{\dot{\theta}^2}{2} = -\frac{g}{l}\cos\theta + C \;\Big|\cdot m$

$\frac{d^2}{dt^2}(\theta) = \frac{g}{l}\sin\theta$

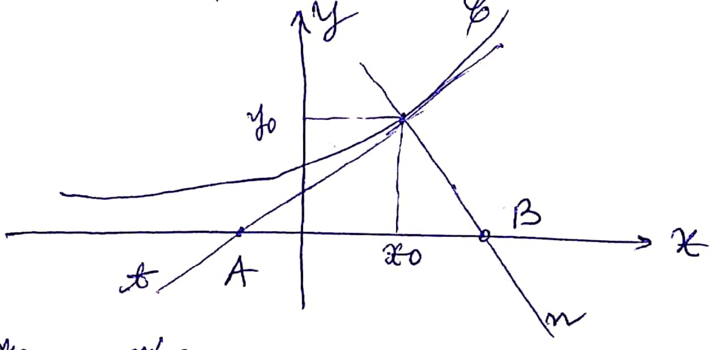
$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{\frac{m\dot{\theta}^2}{2}}_{\text{energia cinetica}} + \underbrace{\frac{mg\cos\theta}{l}}_{\text{energia potentiala}}}_{\text{integrala prima a energiei}} = \underbrace{Cm}_{\text{const.}}$$

Ec. (3) se poate liniariza:

$\sin\theta \simeq \theta$ (pt. valori mici ale lui θ exprimat in radiani).

$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} - \frac{g}{l}\theta = 0.}$ (4)

② Se cer curbele $y = y(x)$ pt care in fiecare punct ~~tangenta~~ distanta intre punctul in care tg la curba intersecteaza axa Ox si punctul in care normala la curba intersecteaza axa Ox este de lungime constanta k.



$y_0 = y(x_0)$

$t: \; y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y_A = 0$

$-f(x_0) = f'(x_0)(x_A - x_0) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_A = x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)}$

(presupunem ca $y'(x_0) \neq 0$ $\forall (x_0, y_0) \in \mathcal{C}$)

$A\left(x_0 - \frac{y(x_0)}{y'(x_0)}, 0\right)$

panta normalei: $-\frac{1}{y'(x_0)} = -(y'(x_0))^{-1}$

ec. normalei: $y - y(x_0) = -(y'(x_0))^{-1}(x - x_0)$

$$B: \begin{cases} y_B = 0 \\ x_B = x_0 + y(x_0) \cdot y'(x_0) \end{cases}$$

$AB = k \Rightarrow \left| \cancel{x_0} + y(x_0)\, y'(x_0) - \cancel{x_0} + \frac{y(x_0)}{y'(x_0)} \right| = k \Rightarrow$

$|x_B - x_A| = k$

$(A, B \in Ox)$

$$\Rightarrow \boxed{\left| y y' + \frac{y}{y'} \right| = k}$$

ec. implicită în (x, y) de ordinul 1.

<u>Cazul $k=1$</u>: <u>ec. diferențiale de ordin 1 în $\mathbb{R}$</u>:

$$F(x, y, y^{(1)}) = 0 \qquad (4)$$

sau

$$\boxed{y^{(1)} = f(x, y)} \qquad (5) \quad ; y^{(1)} = y' = \frac{dy}{dx}$$

Cazuri în care ec. (5) poate fi integrată:

1) $f(x, y)$ depinde doar de $x \Rightarrow \boxed{y' = f(x)}$ (6)

(6) este ecuatia de tip primitivă $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y = \underbrace{\int f(x)\,dx}_{\text{mulțimea primitivelor lui } f} = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

<u>Exemplu</u>: Determinați mulț. soluțiilor ec:

$$y' = \underbrace{\frac{1}{x^2+4}}_{f(x)} ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$$y = \int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

<u>TABEL DE PRIMITIVE</u>:

1) $\int 1\,dx = x + C$; 2) $\int x^r\,dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$, $r \in \mathbb{R}$, $r \neq -1$

3) $\int x^{-1}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C,\quad x \neq 0,$

4) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

5) $\int e^x dx = e^x + C$

6) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int ctg\, x\, dx = \ln|\sin x| + C$

7) $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\, arctg \frac{x}{a} + C$

$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$

8) $\int \frac{x}{x^2\pm a^2} dx = \cancel{\sqrt{x^2 \pm a^2} + C}\ \frac{1}{2}\ln|x^2\pm a^2| + C$

$\int \frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} dx = \sqrt{x^2\pm a^2} + C$

$\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \cancel{\arcsin \frac{x}{a} + C}\ -\sqrt{a^2-x^2} + C$

<u>Operații cu primitive</u>:

$$\int(\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx.$$

<u>Metode de integrare</u>:

1) Integrarea prin părți:

$$\boxed{\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx}$$

2) Prima schimbare de variabilă:

$$\boxed{\int f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx = F(\varphi(x)) + C}$$ unde F este primitivă pt. f.

Exemple: 1) $y' = \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{f(x)}$

$$y = \int f(x)\,dx = \int \sqrt{x^2+1}\,dx = \int f(x)\cdot \underset{(x)'}{\overset{}{1}}\cdot dx =$$

$$= \int x'\sqrt{x^2+1}\,dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int x\left(\sqrt{x^2+1}\right)' dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'\,dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\cdot\cancel{2}x\,dx =$$

$$= x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = x\sqrt{x^2+1} - \int \frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x\sqrt{x^2+1} - \underbrace{\int \frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{\sqrt{x^2+1}}}\,dx}_{y} + \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y = x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+1} + \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right) + C}, \quad C\in\mathbb{R}$$

(3) Ec. omogenă: $y' = f(x,y)$

cu f funcție omogenă în x și y,

adică $f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y)$

sau $f(x,y) = g\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\boxed{y' = g\left(\frac{y}{x}\right)} \quad (7)$$

Algoritm de rezolvare: Se face schimbarea de variabilă.

$\boxed{\frac{y}{x} = z}$, adică $\boxed{(x,y) \xrightarrow{\boxed{y(x) = x\,z(x)}} (x,z)}$

Ec. (7) devine:

$$(xz)' = g(z)$$

$$1\cdot z + x\cdot z' = g(z) \Rightarrow \boxed{z' = \overset{a(x)}{\frac{1}{x}}\,\overset{b(z)}{(g(z) - z)}}$$

ec. dif. cu variabile separabile.

② Ec. cu variabile separabile.

$$y' = f(x)\cdot g(y)$$

sau $\boxed{y' = a(x)\cdot b(y)}$ (8)

Pt. determinarea mulțimii soluțiilor rezolvăm astfel:

1° rez. ec. $b(y)=0$ pentru a determina dacă există soluții staționare:

$$\exists\, y_j,\ j=\overline{1,k} \text{ a.î. } b(y_j)=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $y(x) = y_j$, $j=\overline{1,k}$ este soluție soluție staționară a ec. (8)

2° pt $b(y)\neq 0$, separăm variabilele:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)\cdot b(y) \Rightarrow \frac{dy}{b(y)} = a(x)\,dx$$

Determinăm B o primitivă pt $\frac{1}{b(y)}$, adică:

$$\int \frac{dy}{b(y)} = B(y) + C$$

și A o primitivă ~~pt~~ pentru $a(x)$:

$$\int a(x)\,dx = A(x) + C$$

O mulțime de soluții implicite pentru ec. (8) este dată prin: $\boxed{B(y) = A(x) + C}$

Exemplu: Fie ecuația $y' = \dfrac{x-y}{x+y}$.

Determinați soluția care verifică $y(0)=1$.

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

$$f(\alpha x,\alpha y) = \frac{\alpha x-\alpha y}{\alpha x+\alpha y} = \frac{\cancel{\alpha}(x-y)}{\cancel{\alpha}(x+y)} = \frac{x-y}{x+y} = f(x,y) \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ este funcție omogenă.

$$\boxed{(x,y) \xrightarrow[y=xz]{y(x)=xz(x)} (x,z)}$$

Ec. devine:

$$(xz)' = \frac{x-xz}{x+xz}$$

$$z+xz' = \frac{\cancel{x}(1-z)}{\cancel{x}(1+z)} \Rightarrow z' = \frac{1}{x}\left(\frac{1-z}{1+z} - \overset{1+z)}{z}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{a(x)}\ \underbrace{\frac{1-2z-z^2}{1+z}}_{b(z)} \quad \text{(ec. cu var separabile)}$$

• sol. staționare (pt. ec. în (x,z)): $b(z)=0 \Rightarrow \dfrac{-z^2-2z+1}{1+z}=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -z^2-2z+1=0 \quad \mid (-1)$$
$$z^2+2z-1=0$$

$$\Delta = 2^2-4\cdot 1(-1)=8$$

$$z_{1,2} = \frac{-2\pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{\cancel{2}(-1\pm\sqrt{2})}{\cancel{2}}$$

$z_1=-1+\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{y_1(x)=(-1+\sqrt{2})x}$ (9)

$z_2=-1-\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{y_2(x)=(-1-\sqrt{2})x}$ (10)

• $b(z)\neq 0 \Rightarrow z\in\mathbb{R}\setminus\{-1\pm\sqrt{2}\} \Rightarrow$ separăm variabilele $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dz}{\frac{1-2z-z^2}{1+z}} = \frac{1}{x}\,dx$$

$, B(z).$

$$\int\frac{1+z}{1-2z-z^2}\,dz = \frac{1}{-2}\int\frac{-2(1+z)}{1-2z-z^2}\,dz = -\frac{1}{2}\int\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\,dz = -\frac{1}{2}\ln\left|-z^2-2z+1\right| + C$$

$$\varphi(z) = -z^2-2z+1$$
$$\varphi'(z) = -2z-2 = -2(z+1)$$

$$\int \frac{1}{z}\,dz = \underbrace{\ln|z|}_{A(z)} + c$$

Multimea sol implicite: $-\frac{1}{2}\ln|-z^2-2z+1| = \ln|x| + \ln c$, $c>0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln|z^2+2z-1| = \ln(c|x|) \quad \Big|\cdot(-2)$$

$$\ln|z^2+2z-1| = -2\ln(c|x|)$$

$$\Rightarrow \ln|z^2+2z-1| = \ln(c|x|)^{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |z^2+2z-1| = \frac{1}{c^2x^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^2+2z-1 = \underbrace{\left(\pm\frac{1}{c^2}\right)}_{c_1\in\mathbb{R}^*}\cdot\frac{1}{x^2} \Rightarrow \boxed{z^2+2z-1 = c_1\frac{1}{x^2},\ c_1\in\mathbb{R}^*} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{x^2} + 2\frac{y}{x} - 1 = c_1\frac{1}{x^2},\ c_1\in\mathbb{R}^*} \quad (11)$$

Mult solutiilor = (9) ∪ (10) ∪ (11)

Solutia care verifica: $y(0)=1$

Avem: (9) $\Rightarrow y_1(0)=0\neq 1 \Rightarrow y_1$ nu e solutie

(10) $\Rightarrow y_2(0)=0\neq 1 \Rightarrow y_2$ nu e solutie

(11) $\Rightarrow (11)\cdot x^2 \Rightarrow \boxed{y^2+2yx-x^2=c_1,\ c_1\in\mathbb{R}}$

$$(\underbrace{y(0)}_{1})^2 + 2\underbrace{y(0)}_{1}\cdot 0 - 0^2 = c_1 \Rightarrow \boxed{c_1=1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ o solutie implicita: $\boxed{y^2+2yx-x^2=1}$

(o conica in planul xOy.

④ Ec. dif reductibile la ec. omogena sau cu var. separabile

(12) $\boxed{y' = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)}$, $\alpha,\beta,\gamma,a,b,c\in\mathbb{R}$ a.i.

$|a| + |\alpha| > 0$ (a și α nu sunt zero simultan)

$|b| + |\beta| > 0$ (b și β —— " ——)

Obs: 1) Dacă $a = \alpha = 0 \Rightarrow$ ec. (12) : $y' = f\left(\frac{by+c}{\beta y+\gamma}\right)$

ec. cu var separabile

2) Dacă $b = \beta = 0 \Rightarrow$ ec. (12). $y' = f\left(\frac{ax+c}{\alpha x+\gamma}\right)$

ec. de tip primitivă.

Prop. 1 Dacă $\boxed{d = a\beta - \alpha b = 0}$, atunci prin schimbarea de variabile:

$ax + by = z$ dacă $b \neq 0$

sau $\alpha x + \beta y = z$ dacă $\beta \neq 0$.

se obține o ec. cu var. separabile în (x, z).

Dem: Presup $b \neq 0$: $ax + by = z \Rightarrow y = \frac{z - ax}{b}$

$$\boxed{(x,y) \xrightarrow[y(x) = \frac{z(x) - ax}{b}]{} (x, z)}$$

Ec. (12) $\Rightarrow \left(\frac{z - ax}{b}\right)' = f\left(\frac{ax + \cancel{b}\left(\frac{z - ax}{\cancel{b}}\right) + c}{\alpha x + \beta\left(\frac{z - ax}{b}\right) + \gamma}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{b}(z' - a) = f\left(\frac{(\cancel{ax} + z - \cancel{ax} + c)\, b}{\underbrace{b\alpha x + \beta z - a\beta x}_{0 \cdot x} + b\gamma}\right)$$

$$z' = \underbrace{a + b f\left(\frac{(z + c) b}{\beta z + b\gamma}\right)}_{g(z)} \rightarrow \text{ ec. cu var. sep.}$$

Prop. 2: Dacă $\boxed{d = a\beta - \alpha b \neq 0}$, atunci prin schimbarea de variabile $\begin{cases} x = t + x_0 \\ y = z + y_0 \end{cases}$ se obține o ec. omogenă, unde (x_0, y_0) este soluția sistemului:

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma=0 \end{cases}, \text{ adică } \begin{cases} ax_0+by_0+c=0 \\ \alpha x_0+\beta y_0+\gamma=0 \end{cases}$$

<u>Deci</u>:

$$(x,y) \xrightarrow{\begin{cases} x=t+x_0 \\ y(x)=z(t(x))+y_0 \end{cases}} (t,z)$$

$$\begin{cases} x=t+x_0 \\ y(x)=z(t(x))+y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=x-x_0 \\ z(t)=y(x(t))-y_0 \end{cases}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dz}{dt}\cdot 1=\frac{dz}{dt}$$

$$t=x-x_0 \Rightarrow \frac{dt}{dx}=1$$

Ec. (12) devine:

$$\frac{dz}{dt}=f\left(\frac{a(t+x_0)+b(z+y_0)+c}{\alpha(t+x_0)+\beta(z+y_0)+\gamma}\right)$$

$$\frac{dz}{dt}=f\left(\frac{at+\cancel{ax_0}+bz+\cancel{by_0}+\cancel{c}}{\alpha t+\cancel{\alpha x_0}+\beta z+\cancel{\beta y_0}+\cancel{\gamma}}\right)$$

$$\frac{dz}{dt}=f\left(\frac{\cancel{t}\left(a+b\frac{z}{t}\right)}{\cancel{t}\left(\alpha+\beta\frac{z}{t}\right)}\right) \Rightarrow \frac{dz}{dt}=f\left(\frac{a+b\frac{z}{t}}{\alpha+\beta\frac{z}{t}}\right)$$

ec. omogenă în (t,z)

<u>Exemple (temă)</u>: 1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{2x+2y+3}$.

2) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y-4}{2x-y}$

<u>⑤ Ecuatia liniara</u>:

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=a(x)y+b(x)} \quad (13)$$

unde $a,b: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcții continue

Ec. (13) este liniară omogenă dacă $\underline{b(x)=0}$.

Prop. 3. Mulț soluțiilor ec. liniare omogene ~~...~~

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a(x)\, y}, \quad (14)$$

este : $x(t) = C e^{A(x)}$, $C \in \mathbb{R}$, unde A este o primitivă pt. a.

Dem: (14) este ec. cu var. separabile : $\begin{cases} b_1(y) = y \\ a_1(x) = a(x) \end{cases}$

- $b_1(y) = 0 \Rightarrow \boxed{y = 0}$
- $b_1(y) \neq 0 \Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx} = a(x)\, y$$

$$\frac{dy}{y} = a(x)\, dx \Rightarrow \ln|y| = A(x) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |y| = e^{A(x) + C}$$

$$|y| = e^{A(x)} \cdot e^{C}$$

$$y = \underbrace{\pm e^{C}}_{C_1} e^{A(x)} = C_1 e^{A(x)}, \quad C_1 \in \mathbb{R}^*$$

dar $y = 0$ e sol staționară. $\Rightarrow \boxed{y = C_1 e^{A(x)},\ C_1 \in \mathbb{R}}$

Prop 4: Dacă $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ este o soluție a ec. (13),

adică : $\varphi_0'(x) = a(x)\, \varphi_0(x) + b(x)$, $\forall x \in I$,

atunci mulț sol ec. (13) se scrie :

$$y(x) = C \cdot e^{A(x)} + \varphi_0(x), \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dem: În ec. (13) se face schimbarea de variabile :

$$(x, y) \xrightarrow[y(x) = z(x) + \varphi_0(x)]{y = z + \varphi_0} (x, z)$$

și ec. (13) devine : $z'(x) + \varphi_0'(x) = a(x) \cdot (z + \varphi_0) + b(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow z' + \cancel{\varphi_0'(x)} = a(x)\cdot z + \cancel{a(x)\cdot\varphi_0(x) + b(x)}$

$\Rightarrow z' = a(x)\cdot z$, adică z verifică ec. liniară omogenă ~~ata~~ atașată ec. (13) : $\frac{d\bar{y}}{dx} = a(x)\cdot\bar{y} \overset{prop. 3}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow z(x) = C\cdot e^{A(x)} \underset{s.v.}{\Longrightarrow} y(x) = C\cdot e^{A(x)} + \varphi_0(x)$; q.e.d.

Dacă nu știu o soluție φ_0 a ec. (13), atunci se aplică metoda variației constantelor :

- integrăm ec. liniară omogenă atașată ec (13) :

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = a(x)\bar{y} \Rightarrow \bar{y}(x) = Ce^{A(x)}$$

$A =$ prim. pt. a.

- determinăm funcția $C : I \to \mathbb{R}$ a.î.

$$y(x) = C(x)\cdot e^{A(x)}$$

să fie soluție a ec (13) $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \left(C(x)e^{A(x)}\right)' = a(x)\cdot C(x)\cdot e^{A(x)} + b(x)$$

$$\Rightarrow C'(x)\cdot e^{A(x)} + \cancel{C(x)\cdot e^{A(x)}\cdot a(x)} = \cancel{a(x)C(x)e^{A(x)}} + b(x)$$

$$\Rightarrow C'(x)\cdot e^{A(x)} = b(x) \quad \Big|\cdot e^{-A(x)}$$

$$C'(x) = \underbrace{b(x)\cdot e^{-A(x)}}$$

ec. de tip primitivă $\Big\} \Rightarrow C(x) = \int b(x)e^{-A(x)}\,dx + K$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \left(\int b(x)e^{-A(x)}dx + K\right)e^{A(x)}},$$

Exemplu: Fie ecuația : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1}y + 2x+1$

$a, b : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$

$a(x) = \frac{1}{x+1}$; $b(x) = 2x+1$. Se cere soluția care verifică $y(0) = 1$.

• ec. liniară omogenă atașată este: $\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{1}{x+1} \cdot \bar{y} \xrightarrow[\text{prop. 3}]{}$

$\Rightarrow \bar{y}(x) = C \cdot e^{A(x)}$

A primi pt a: $\int a(x)\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx = \underline{\ln|x+1|} + C$

$\Rightarrow A(x) = \ln|x+1| \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\bar{y}(x)} = C \cdot e^{\ln|x+1|} = C|x+1| = \underline{C(x+1)}$

$|x+1| = \pm(x+1)$

semnul îl preia constanta C.

• aplicăm var. constantelor: determinăm $C : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ a.î. $y(x) = C(x) \cdot (x+1)$ să fie soluție a ec. liniare inițiale

$\Rightarrow \left(C(x)(x+1)\right)' = \frac{1}{\cancel{x+1}} \cdot C(x)\cancel{(x+1)} + 2x+1$

$C'(x)(x+1) + \cancel{C(x) \cdot 1} = \cancel{C(x)} + 2x+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow C'(x) = \frac{2x+1}{x+1}$ ec. de tip primitivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{C(x)} = \int \frac{2x+1}{x+1}\,dx = \int \frac{2(x+1)-1}{x+1}\,dx =$

$= \int \frac{2\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+1}}\,dx - \int \frac{1}{x+1}\,dx = \underline{2x - \ln(x+1)} + K$

Deci: $\boxed{y(x) = (2x - \ln(x+1) + K)(x+1)}$

dar $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = (0 - \ln 1 + K) \cdot 1 \Rightarrow \boxed{K = 1}$

6 Ec. Bernoulli.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x) \cdot y^{\alpha}} \quad (15)$$

unde $a; b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcții continue

$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

OBS: $\alpha = 0 \Rightarrow$ (15) este ec. liniară neomogenă

$\alpha = 1 \Rightarrow$ (15) este ec. liniară omogenă.

Metoda 1: cu variația constantelor:

- ec. liniară omogenă atașată ec (15) este:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = a(x)\cdot \bar{y} \overset{prop.3}{\Rightarrow} \bar{y} = C e^{A(x)} \text{ cu}$$

A primitivă pt a

- variația const: determinăm $C: I \to \mathbb{R}$ a.î. $y(x) = C(x)\cdot e^{A(x)}$ să fie soluție pt ec.(15):

$$\left(C(x)\cdot e^{A(x)}\right)' = a(x)\cdot C(x)\cdot e^{A(x)} + b(x)\left(C(x)\, e^{A(x)}\right)^{\alpha}$$

$$\Rightarrow C'(x)\, e^{A(x)} + \cancel{C(x)\, e^{A(x)}\cdot \underbrace{A'(x)}_{a(x)}} = \cancel{a(x)\, C(x)\, e^{A(x)}} + b(x)\, C^{\alpha}(x)\, e^{\alpha A(x)} \Big/ : e^{A(x)}$$

$$\Rightarrow C'(x) = C^{\alpha}_{(x)}\cdot b(x)\cdot e^{(\alpha-1)A(x)}$$

$$C' = \underbrace{C^{\alpha}}_{b_1(C)}\ \underbrace{b(x)\, e^{(\alpha-1)A(x)}}_{a_1(x)} \Rightarrow \text{pt } C \text{ avem ec cu variabile separabile} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ C se determină cu alg de la ec cu var. separabile.

(7) Ec. Riccati:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)} \quad (16)$$

unde $a, b, c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcții continue.

OBS: (Cazuri particulare)
1) a, b, c funcții constante $\Rightarrow$ (16) e ~~și~~ ec. cu variabile separabile.
2) $c(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow$ ec. Bernoulli cu $\alpha = 2$
3) $a(x) = 0, \forall x \in I \Rightarrow$ ec. liniară neomogenă.

Prop. 5: Dacă $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ soluție a ec. 16, $\varphi_0'(x) = a(x)\varphi_0^2(x) + b(x)\varphi_0(x) + c(x)$, atunci prin schimbarea de variabilă $y = z + \varphi_0$

$$(x, y) \xrightarrow{y(x) = z(x) + \varphi_0(x)} (x, z)$$

ec. (16) devine o ec. Bernoulli cu $\alpha = 2$

Dem: (16) devine:

$$\left(z+\varphi_0(x)\right)' = a(x)\left(z+\varphi_0(x)\right)^2 + b(x)\left(z+\varphi_0(x)\right) + c(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' + \cancel{\varphi_0'(x)} = a(x)z^2 + \underline{a(x)\cdot 2z\varphi_0(x)} + \cancel{a(x)\varphi_0^2(x)} +$$

$$+ \underline{b(x)\cdot z} + \cancel{b(x)\varphi_0(x)} + \cancel{c(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' = \underbrace{\left(2a(x)\varphi_0(x) + b(x)\right)}_{a_1(x)} z + \underbrace{a(x)}_{b_1(x)} \cdot \underbrace{z^2}_{z^2}.$$

$$\Rightarrow \boxed{z' = a_1(x)z + b_1(x)z^2} \quad \text{ec. Bernoulli pt } \alpha = 2$$

Exemplu: Fie ec: $\quad y' = y^2 - \frac{4}{x}y + \frac{2}{x^2}$, $x > 0$. (19)

(Riccati, $a(x) = 1$; $b(x) = -\frac{4}{x}$, $c(x) = \frac{2}{x^2}$
$a, b, c : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$)

a) Verificați că $\varphi_0(x) = \frac{1}{x}$ este soluție a ecuației:

b) Determinați mulț. sol. ecuației.

a) $\varphi_0(x) = \frac{1}{x}$ soluție a ec. (19) $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x}\right)' = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{4}{x}\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$ Adevărat

b) Efectuăm schimbarea de variabilă.

$$(x, y) \xrightarrow{y = z + \frac{1}{x}} (x, z)$$

$$\left(z + \frac{1}{x}\right)' = \left(z + \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{4}{x}\left(z + \frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z' - \cancel{\frac{1}{x^2}} = z^2 + \underline{2z\cdot\frac{1}{x}} + \cancel{\frac{1}{x^2}} - \underline{\frac{4}{x}z} - \cancel{\frac{4}{x^2}} + \cancel{\frac{2}{x^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z' = \frac{-2}{x}z + 1\cdot z^2} \quad \text{ec. Bernoulli cu } a_1(x) = \frac{-2}{x};\ b_1(x) = 1$$

Ec. liniară omogenă atașată: $\bar z' = \frac{-2}{x}\bar z \overset{prop3}{\Rightarrow} \bar z(x) = c \cdot e^{A(x)}$

cu A_1 primitivă pt a_1:

$$\int a_1(x)dx = -2\int \frac{1}{x}dx = -2\ln|x| + K = -\ln|x|^{-2} + K = \underbrace{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{A_1(x)} + K$$

$$\Rightarrow \bar{z} = C \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} = C \cdot \frac{1}{x^2}$$

var. constantelor $\Rightarrow$ determinăm $C : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$

a.î. $\boxed{z(x) = C(x) \cdot \frac{1}{x^2}}$ sol. a ec. Bernoulli:

$$\left(C(x)\cdot\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x}\cdot C(x)\cdot\frac{1}{x^2} + \left(C(x)\frac{1}{x^2}\right)^2$$

$$C'(x)\cdot\frac{1}{x^2} + \cancel{C(x)\left(\frac{-2}{x^3}\right)} = \cancel{\frac{-2}{x^3}C(x)} + C^2(x)\cdot\frac{1}{x^4} \quad \Big/ \cdot x^2$$

$$C' = C^2\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{dC}{dx} = \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{a_2(x)}\cdot\underbrace{C^2}_{b_2(C)}$$ ec. cu var. separabile.

$b_2(C) = 0 \Rightarrow C^2 = 0 \Rightarrow \boxed{C = 0} \Rightarrow z(x) = 0 \Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{1}{x}}$ (19) bis

$b_2(C) \neq 0 \Rightarrow$ separăm variabilele: $\frac{dC}{C^2} = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int C^{-2}dC = \int x^{-2}dx + K$$

$$\Rightarrow \frac{C^{-1}}{-1} = \frac{x^{-1}}{-1} + K \Rightarrow -\frac{1}{C} = -\frac{1}{x} + K \Rightarrow C = \frac{-1}{-\frac{1}{x} + K}$$

$$\Rightarrow C(x) = \frac{-x}{Kx - 1};\ K \in \mathbb{R}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(x) = \frac{-\cancel{x}}{Kx-1}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}} \Rightarrow \boxed{z(x) = \frac{-1}{x(Kx-1)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \frac{-1}{x(Kx-1)} + \frac{1}{x},\ K \in \mathbb{R}} \quad (20)$$

Mulț. sol. ec. (19) este $(19)_{bis} \cup (20)$.

<u>Prop. 6</u> Dacă în ec. Bernoulli $\boxed{\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)y^{\alpha}}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$,

se efectuează schimbarea de variabilă

$$(x, y) \xrightarrow{y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}} (x, z)\ ,$$

atunci obținem o ec. liniară neomogenă.

Deci: $$\left(z^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)' = a(x)\cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(x)\cdot\left(z^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)^{\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\, z^{\frac{1}{1-\alpha}-1}\cdot z' = a(x)\, z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(x)\cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\, z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\cdot z' = a(x)\cdot z^{\frac{1}{1-\alpha}} + b(x)\cdot z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad \Big| : z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha}\, z' = a(x)\cdot z^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} + b(x) \quad \Big| \cdot (1-\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = (1-\alpha)a(x)\cdot z + (1-\alpha)\, b(x) \Rightarrow$$ ec. liniară omogenă.

Temă: ex. din materialul de pe moodle.

- ec. implicite
- prob Cauchy, TEU
- sisteme de ec dif., în general, cu int. prime
- sisteme liniare
- EDP.
  - de ord întâi
  - de ord. doi.