de unde rezultă imediat (1.10.18).

$$G'''(1) = \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k^3 p_k - p_1 - 8p_2 - 3\sum_{k=1}^{\infty} k^2 p_k +$$

$$+ 3p_1 + 12p_2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} kp_k - 2p_1 - 4p_2 = M_3(\xi) - 3M_2(\xi) + 2M_1(\xi).$$

Ţinînd aici seama de (1.10.17) şi (1.10.18) obţinem (1.10.19).

În general momentul de ordinul r $M_r(\xi)$ se obţine utilizînd

$$G^{(r)}(1) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-r+1)p_k.$$

Relaţia (1.10.20) rezultă imediat din cele de mai sus, dacă ţinem seama că

$$D^2(\xi) = M_2(\xi) - [M_1(\xi)]^2.$$

În §1.12 vom prezenta unele teoreme referitoare la convergenţa şirurilor de funcţii generatoare.

§ 1.11. REPARTIŢII PROBABILISTICE CLASICE

Pentru conciziune vom suprima în cele ce urmează adjectivul probabilistic, înţelegînd prin repartiţie numai o repartiţie probabilistică.

Repartiţii discrete.

1° *Repartiţia binomială* (sau *repartiţia lui Bernoulli*) este o repartiţie discretă, numită adesea „schema urnei lui Bernoulli" deoarece se aplică în cazul a n extrageri independente una de alta a unei bile dintr-o urnă ce conţine un număr dat de bile de două culori. Independenţa extragerilor se asigură punînd de fiecare dată înapoi în urnă bila extrasă.

Pentru a stabili modelul acestei repartiţii vom lua un exemplu întîlnit în problemele de fiabilitate.

Fie c tranzistori de un anumit tip, dintre care a au defecţiuni, iar b nu au defecţiuni ($a + b = c$). Fie A evenimentul care constă din extragerea (la întîmplare) a unui tranzistor defect şi $\complement A$ evenimentul contrar. Avem

$$p = P(A) = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{c}$$

$$q = P(\complement A) = \frac{b}{a+b} = \frac{b}{c},\ p,\ q > 0,\ p + q = 1.$$

Efectuăm n astfel de extracţii independente şi notăm cu A_k evenimentul care constă din obţinerea a k tranzistori cu defecţiuni în n extracţii repetate. Evenimentele $\{A_k\}$, $(k = 0, 1, \ldots, n)$ formează un sistem complet de evenimente şi

$$P_n(k) = P(A_k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad (k = 0, 1, \ldots, n). \tag{1.11.1}$$

Repartiţia determinată de probabilităţile (1.11.1) se numeşte *repartiţia binomială de ordinul n şi parametru p*. Variabila aleatoare

$$\xi \begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & \ldots, & n \\ q^n, & C_n^1 p q^{n-1}, & C_n^2 p^2 q^{n-2}, & \ldots, & p^n \end{pmatrix}; \quad (q = 1 - p)$$

se numeşte *variabilă aleatoare binomială*. Mulţimea tuturor variabilelor aleatoare binomiale o notăm cu $B(p, n)$.

Fie ξ_k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$ o variabilă aleatoare care ia valorile 1 sau 0 după cum la extragerea de ordinul k a apărut evenimentul A sau $\complement A$. Atunci

$$\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_n \tag{1.11.2}$$

este o variabilă aleatoare care ia valoarea k dacă evenimentul A s-a produs de k ori. Din cele de mai sus rezultă că variabila aleatoare η are o repartiţie binomială de ordinul n şi parametru p.

Funcţia de repartiţie a repartiţiei binomiale este funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare η, adică

$$F(x) = P(\{\omega : \eta(\omega) < x\}) = \sum_{k=0}^{[x]-1} C_n^k p^k q^{n-k} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \leqslant 0; \\ q^n, & \text{dacă } 0 < x \leqslant 1; \\ \sum_{k=0}^{1} C_n^k p^k q^{n-k}, & \text{dacă } 1 < x \leqslant 2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k p^k q^{n-k}, & \text{dacă } n-1 < x \leqslant n; \\ 1, & \text{dacă } x > n. \end{cases}$$

Aici $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x. Graficul funcţiei $F(x)$ are n trepte corespunzătoare celor $n + 1$ puncte de discontinuitate.

Există tabele care dau valorile probabilităţilor $P_n(k)$ şi ale funcţiei de repartiţie $F(x)$ pentru n, k, p, x cunoscute. În fig. 1.11.1 sînt reprezentate diagramele pentru probabilităţile $P_n(k)$ corespunzătoare repartiţiilor binomiale $B(1\% ; 5)$, $B(1\% ; 50)$, $B(10\% ; 5)$, $B(10\% ; 50)$.

Exemplu. Într-un lot de condensatori electrici identici sînt 15% condensatori în afara limitelor de toleranţă. Care este probabilitatea de a găsi:

a) 2 condensatori, din 10, în afara limitelor de toleranţă?

b) Zero condensatori, din 10 şi respectiv din 20, în afara limitelor de toleranţă?

Soluţie. Se consideră experienţa extragerii unui condensator din lotul dat. Rezultatele posibile sînt: A — un condensator în afara limitelor de toleranţă; $\complement A$ — un condensator în intervalul de toleranţă. Avem $A \cap \complement A = \emptyset$, $A \cup \complement A = \Omega$. $P(A) = p = 0{,}15$; $P(\complement A) = q = 1 - p = 0{,}85$.

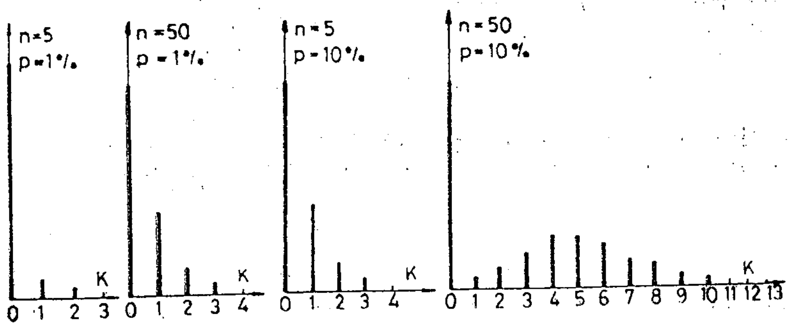

Fig. 1.11.1

a) Fie A_2 evenimentul de a extrage 2 condensatori, din 10, în afara limitelor de toleranţă. Avem

$$P(A_2) = C_{10}^2 p^2 q^8 = 45 \times 0{,}15^2 \times 0{,}85^8.$$

b) Analog, fie A_0 şi B_0 respectiv evenimentele de a extrage zero condensatori, dintr-un lot de 10 şi 20 condensatori. Avem

$$P(A_0) = C_{10}^0 p^0 q^{10} = 0{,}85^{10};$$

$$P(B_0) = C_{20}^0 p^0 q^{20} = 0{,}85^{20}.$$

Valoarea medie şi dispersia repartiţiei binomiale de ordinul n şi parametru p sînt date de formulele:

$$M(\xi) = np, \quad D^2(\xi) = npq. \tag{1.11.3}$$

Într-adevăr

$$M(\xi) = \sum_{k=1}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Pentru calculul sumei din membrul drept considerăm identitatea

$$(px + q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k x^k q^{n-k}$$

pe care o derivăm în raport cu x. Obţinem

$$np(px + q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k x^{k-1} q^{n-k}. \tag{1.11.4}$$

Luînd aici $x = 1$ şi ţinînd seama că $p + q = 1$ rezultă

$$\sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k q^{n-k} = np,$$

deci prima formulă (1.11.3) este adevărată.

Pentru a calcula dispersia $D^2(\xi)$ folosim egalitatea $D^2(\xi) = M_2(\xi) - [M(\xi)]^2$, unde

$$M_2(\xi) = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Dar, din (1.11.4) deducem

$$npx(px+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k p^k x^k q^{n-k}.$$

Derivind această identitate și luînd apoi $x = 1$ obținem

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k} = np + n(n-1)p^2,$$

deci $M_2(\xi) = np + n(n-1)p^2$. Cum $M(\xi) = np$ rezultă $D^2(\xi) = np + n(n-1)p^2 - n^2p^2 = np(1-p) = npq$, adică a doua relație (1.11.3).

Funcția caracteristică a repartiției binomiale este

$$\varphi(t) = M(e^{it\eta}) = \sum_{k=0}^{n} e^{ikt} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (pe^{it})^k q^{n-k} = (pe^{it}+q)^n. \qquad (1.11.5)$$

Cunoscînd funcția caracteristică putem determina, utilizînd relația (1.10.7), momentele variabilei aleatoare binomiale și deci putem regăsi pe această cale (1.11.3).

De asemenea folosind funcția caracteristică (1.11.5) se demonstrează că dacă variabilele aleatoare independente ξ și η aparțin respectiv mulțimilor $B(p, n_1)$ și $B(p, n_2)$, atunci $\xi + \eta$ aparține mulțimii $B(p, n_1 + n_2)$.

Observație. În general, în aplicații numărul n ia valori mari; în acest caz este dificil calculul probabilității $P_n(k)$ după relația (1.11.1). Dificultatea se înlătură folosind formula lui Stirling

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\cdot e^{u_n} \simeq n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \qquad (1.11.6)$$

unde $0 < u_n < \frac{1}{12n}$.

Într-adevăr, avem

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}.$$

Notînd aici $k = h_n + np$ rezultă

$$P_n(k) = \frac{n!}{(h_n+np)!(nq-h_n)!}p^{h_n+np}q^{nq-h_n}.$$

Folosind acum formula lui Stirling obţinem

$$P_n(k) = (2\pi npq)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{h_n^2}{2npq}\right], \tag{1.11.7}$$

care reprezintă *valoarea asimptotică a probabilităţii* $P_n(k)$.

Observăm că (1.11.7) are loc dacă $a \leqslant \frac{h_n}{\sqrt{n}} \leqslant b$, unde a şi b sînt constante.

2° *Repartiţia multinomială.* Să considerăm acum o urnă care conţine n_j bile de culoarea j, cu $1 \leqslant j \leqslant r$ şi $n = \sum_{j=1}^{r} n_j$. Să notăm cu A_j evenimentul care constă din extragerea unei bile de culoarea j $(1 \leqslant j \leqslant r)$ şi cu $p_j = P(A_j)$. Avem evident

$$p_j = \frac{n_j}{n_1 + n_2 + \ldots + n_r} = \frac{n_j}{n}$$

şi deci $\sum_{j=1}^{r} p_j = 1$.

Fie $B_{k_1, k_2, \ldots, k_r}$, evenimentul care constă din obţinerea, în urma a n extrageri repetate (cu punerea de fiecare dată în urnă a bilei extrase), a k_1 bile de culoarea 1, k_2 bile de culoarea 2, ..., k_r bile de culoarea r $\left(\sum_{j=1}^{r} k_j = n\right)$. Deoarece ordinea în care sînt extrase bilele nu interesează, obţinem

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_r) = P(B_{k_1, k_2, \ldots, k_r}) = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \ldots k_r!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{k_r}. \tag{1.11.8}$$

Repartiţia determinată de probabilităţile (1.11.8) se numeşte *repartiţie multinomială* (polinomială). Expresia din membrul drept al egalităţii (1.11.8) reprezintă termenul general al dezvoltării polinomului $(p_1 + \ldots + p_r)^n$; aceasta justifică numele repartiţiei.

Menţionăm că în fiabilitate se găsesc multe aplicaţii ale acestei repartiţii. De exemplu, o operaţie dată constituie o reuşită sau un eşec datorat unor defecţiuni de tipuri diferite independente unele de altele.

Fie în spaţiul euclidian r-dimensional vectorii liniar independenţi $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $e_r(0, 0, \ldots, 1)$ şi vectorul $k = (k_1, \ldots, k_r)$. Să considerăm variabilele aleatoare independente $\xi_1, \ldots, \xi_r$ care au fiecare ca valori vectorii $e_1, \ldots, e_r$ cu probabilităţile $p_1, \ldots, p_r$. Să notăm

$$\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_n.$$

Din cele de mai sus rezultă că probabilitatea ca vectorul aleator η să ia valoarea

$$k = k_1 e_1 + \ldots + k_r e_r, \quad \left(\sum_{j=1}^{r} k_j = n\right)$$

este egală cu $P_n(k_1, \ldots, k_r) \equiv P_n(k)$.

Funcția caracteristică a repartiției multinomiale se obține imediat dacă scriem vectorul aleator $\eta = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ sub forma

$$\eta = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_r e_r.$$

Avem

$$\varphi(t) = M[e^{i(t_1\alpha_1 + \ldots + t_r\alpha_r)}] = \sum_{k_1, \ldots, k_r} P_n(k_1, \ldots, k_r) e^{i(t_1 k_1 + \ldots + t_r k_r)} =$$

$$= \sum_{k_1, \ldots, k_r} \frac{n!}{k_1! \ldots k_r!} (p_1 e^{it_1})^{k_1} \ldots (p_r e^{it_r})^{k_r} = (p_1 e^{it_1} + \ldots + p_r e^{it_r})^n, \qquad (1.11.9)$$

unde $t = t_1 e_1 + \ldots + t_r e_r$.

Valoarea medie și dispersia repartiției multinomiale sînt date de

$$M(\alpha_j) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}\right)_{t=0} = np_j, \quad (1 \leqslant j \leqslant r) \qquad (1.11.10)$$

$$D^2(\alpha_j) = M_2(\alpha_j) - [M(\alpha_j)]^2 = \frac{1}{i^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_j^2}\right)_{t=0} - \frac{1}{i^2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t_j}\right)_{t=0}\right]^2 =$$

$$= n^2 p_j^2 + np_j - np_j^2 - n^2 p_j^2 = np_j(1 - p_j), \quad (1 \leqslant j \leqslant r). \qquad (1.11.11)$$

Observație. Expresia asimptotică a probabilității $P_n(k_1, \ldots, k_r)$ se determină înlocuind în (1.11.8) $k_j = h_j + np_j$, $(1 \leqslant j \leqslant r)$ și folosind formula lui Stirling (1.11.6). Pentru $a \leqslant \frac{h_j}{\sqrt{n}} \leqslant b\,(1 \leqslant j \leqslant r)$, a și b fiind constante arbitrare obținem

$$P_n(k_1, \ldots, k_r) = (2\pi n)^{\frac{1-r}{2}} \prod_{j=1}^{r} p_j^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\frac{h_j^2}{np_j}\right].$$

3° *Repartiția binomială cu exponent negativ.* Repartiția discretă în care valorilor $n, n+1, \ldots, (n \in N)$ li se atribuie corespunzător probabilitățile

$$P_{-n}(k) = C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n}, \quad k \geqslant n, \qquad q = 1 - p$$

se numește repartiție binomială cu exponent negativ.

Să considerăm un cîmp de probabilitate finit care constă în evenimentele A și $\complement A$, în afară de evenimentul sigur Ω și evenimentul imposibil $\varnothing$. Fie p probabilitatea evenimentului A și $q = 1 - p$ probabilitatea evenimentului $\complement A$. Numărul grupelor de forma $AA \ldots \complement AA \ldots \complement A\, \complement AA$ în care ultimul element este A şi care conţin pe A de n ori iar pe $\complement A$ de $k-n$ ori este C_{k-1}^{n-1}. Probabilitatea obţinerii unei astfel de grupe este $p^n q^{k-n}$. Deci probabilitatea ca evenimentul A să se producă în k experienţe independente de n ori este $C_{k-1}^{n-1} p^n q^{k-n} = P_{-n}(k)$.

Raţionînd în acelaşi mod ca în cazul repartiţiilor binomiale şi multinomiale găsim că *funcţia caracteristică* a repartiţiei binomiale cu exponent negativ este

$$\varphi(t) = \left[\frac{p e^{it}}{1 - q e^{it}}\right]^n.$$

Momentele se obţin imediat cu ajutorul funcţiei caracteristice. Avem

$$M_1(\xi) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{n}{p}$$

$$M_2(\xi) = \frac{1}{i^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{t=0} = \frac{n^2}{p^2} + \frac{nq}{p^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D^2(\xi) = M_2(\xi) - [M_1(\xi)]^2 = \frac{nq}{p^2}.$$

4° *Repartiţia hipergeometrică*. Fie $n, a, b, \in N$, cu $n < a + b$. Prin definiţie repartiţia hipergeometrică este o repartiţie discretă în care valorilor k, astfel încît $\max(0, n - b) \leqslant k \leqslant \min(n, a)$, li se atribuie probabilităţile

$$P_n(k; a, b) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}. \qquad (1.11.12)$$

Relaţia aceasta se obţine în modul următor: considerăm o urnă în care sînt a bile albe şi b bile negre. Din urnă se fac n extrageri succesive fără a pune bila extrasă înapoi. Notînd cu A_k evenimentul care constă din obţinerea a k bile albe în cele n extrageri, evenimentele $\{A_k\}$ ($\max(0, n-b) \leqslant k \leqslant \min(n, a)$) formează un sistem complet de evenimente. A determina probabilitatea $P(A_k) = P_n(k; a, b)$ revine la a determina numărul total de evenimente elementare ale cîmpului şi numărul de evenimente elementare favorabile lui A_k. Numărul total de evenimente elementare este egal cu numărul combinărilor ce se pot face cu cele $(a + b)$ bile din urnă luate cîte n. Numărul cazurilor favorabile este dat de numărul grupelor care se pot forma conţinînd fiecare k bile albe şi $n - k$ bile negre. Din cele a bile albe putem forma C_a^k grupe, care conţin fiecare k bile albe. Cu cele b bile negre putem forma C_b^{n-k} grupe, care conţin fiecare $n - k$ bile negre. Aşadar, există $C_a^k C_b^{n-k}$ grupe, care conţin fiecare k bile albe şi $n - k$ bile negre. Rezultă astfel (1.11.12), care defineşte repartiţia hipergeometrică.

Se verifică imediat că

$$\sum_{k=\max(0,\, n-b)}^{\min(n,\, a)} P_n(k; a, b) = 1$$

şi

$$P_n(0\,;\,a,\,b) = \frac{C_b^n}{C_{a+b}^n} = \frac{b(b-1)\ldots(b-n+1)}{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-n+1)}.$$

Exemplu. Se consideră un lot de 400 piese, care conţine 8% piese cu defecţiuni şi se cercetează numărul de piese cu defecţiuni dintr-un eşantion de 10 piese. Să se identifice legea de repartiţie a fenomenului aleator considerat (numărul de piese cu defecţiuni din eşantionul de 10 piese).

Soluţie. Un lot de c piese conţine a piese defecte şi b piese bune, unde $a + b = c$. În cazul nostru $a + b = c = 400$ şi $\frac{a}{c} = 0{,}08$, $\frac{b}{c} = 0{,}92$. Un eşantion de n piese conţine k piese defecte şi $n - k$ piese bune.

Cu cele b piese bune se pot obţine C_b^{n-k} eşantioane de $n - k$ piese bune, iar cu cele a piese defecte se obţin C_a^k eşantioane de k piese defecte. Există deci $C_a^k\,C_b^{n-k}$ eşantioane de cîte n piese, din care k sînt defecte. Rezultă

$$C_{a+b}^n\,P_n(k\,;\,a,\,b) = C_a^k\,C_b^{n-k},$$

unde $P_n(k\,;\,a,\,b)$ reprezintă probabilitatea ca în eşantionul de n piese, obţinut din lotul de $a + b$ piese, k piese să fie defecte. Recunoaştem aici o lege de repartiţie hipergeometrică (a se vedea (1.11.12)).

Cu datele noastre avem

$$P_n(k\,;\,32,\,368) = \frac{C_{32}^k\,C_{368}^{10-k}}{C_{400}^{10}}, \qquad (k = 0,\,1,\,\ldots,\,10).$$

Menţionăm că repartiţia hipergeometrică joacă un rol esenţial în controlul calităţii produselor.

Funcţia generatoare a repartiţiei hipergeometrice este

$$G(z) = \sum_{k=0}^{n} P_n(k\,;\,a,\,b)z^k, \qquad |z| \leqslant 1. \tag{1.11.13}$$

Obţinem o expresie a funcţiei generatoare utilă pentru calculul momentelor, dacă exprimăm în (1.11.13) pe $P_n(k\,;\,a,\,b)$ în funcţie de $P_n(0\,;\,a,\,b)$. Din (1.11.12) avem

$$P_n(k\,;\,a,\,b) = \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)b(b-1)\ldots(b-n+k+1)n!}{k!(n-k)!(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-n+1)}$$

sau, ţinînd seama de expresia probabilităţii $P_n(0\,;\,a,\,b)$,

$$P_n(k\,;\,a,\,b) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot$$

$$\cdot\frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{(b-n+1)(b-n+2)\ldots(b-n+k)}\cdot P_n(0\,;\,a,\,b).$$

Aşadar,

$$G(z) = P_n(0; a, b) \sum_{k=0}^{n} z^k \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot$$

$$\cdot \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{(b-n+1)(b-n+2)\ldots(b-n+k)} =$$

$$= P_n(0; a, b)\left[1 + \frac{n}{1!}\frac{a}{b-n+1}z + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{a(a-1)}{(b-n+1)(b-n+2)}z^2 + \right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{(b-n+1)(b-n+2)\ldots b}z^n\right]. \qquad (1.11.14)$$

Folosind funcţia generatoare (1.11.14) găsim că *valoarea medie* şi *dispersia* variabilei aleatoare hipergeometrice ξ sînt

$$M(\xi) = \frac{na}{a+b} \qquad (1.11.15)$$

$$D^2(\xi) = \frac{nab(a+b-n)}{(a+b)^2(a+b-1)}. \qquad (1.11.16)$$

Observaţie. Să notăm $a + b = r$, $p = \frac{a}{r}$, $q = \frac{b}{r}$. Din (1.11.12) obţinem

$$P_n(k; a, b) = \frac{rp(rp-1)\ldots(rp-k+1)\,rq(rq-1)\ldots(rq-n+k+1)}{r(r-1)\ldots(r-n+1)} \cdot$$

$$\cdot \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

de unde, în ipoteza că p şi q rămîn constante,

$$\lim_{r\to\infty} P_n(k; a, b) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

ceea ce arată că atunci cînd numărul tuturor bilelor din urnă creşte nemărginit probabilitatea $P_n(k; a, b)$ tinde către probabilitatea $P_n(k)$, ce defineşte repartiţia binomială. Acest rezultat este firesc deoarece extragerea unei bile din urnă influenţează cu atît mai puţin compoziţia urnei cu cît numărul iniţial de bile din urnă este mai mare.

5° *Repartiţia Poisson.* Repartiţia discretă determinată de probabilităţile

$$P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad (1.11.17)$$

unde $k = 0, 1, \ldots$ şi $\lambda > 0$ este un număr dat, se numeşte *repartiţia Poisson de parametru* λ. Variabila aleatoare

$$\xi \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & k & \ldots \\ e^{-\lambda} & \frac{\lambda}{1!} e^{-\lambda} & \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} & \ldots & \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \ldots \end{pmatrix}$$

se numeşte variabilă aleatoare Poisson.

Observăm că dacă $\lambda < 1$, probabilităţile $P(k; \lambda)$ $(k = 0, 1, \ldots; \lambda > 0)$ sînt descrescătoare; dacă $\lambda = 1$ avem $P(0; 1) = P(1; 1) = e^{-1}$, iar celelalte valori ale lui $P(k; 1)$, $(k = 2, 3, \ldots)$ sînt descrescătoare; dacă $\lambda > 1$ repartiţia Poisson are un maximum, sau două dacă λ este un număr întreg. În fig. 1.11.2 prezentăm graficele pentru $P(k; \lambda)$ în cazurile: $\lambda = 0{,}5$; $\lambda = 1$; $\lambda = 1{,}5$.

Relaţia (1.11.17) se poate obţine pornind de la repartiţia binomială. Pentru aceasta se notează în (1.11.1) $np = \lambda$ şi se trece la limită pentru $n \to \infty$, menţinînd λ constant. Într-adevăr, avem

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k} = 1; \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}.$$

Repartiţia Poisson mai este cunoscută sub numele de *legea evenimentelor rare*, deoarece se întîlneşte în cazul evenimentelor rare. În teoria fiabilităţii este frecvent utilizată, aşa cum vom vedea în capitolele 10—12.

Din (1.11.17) deducem că

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(k; \lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

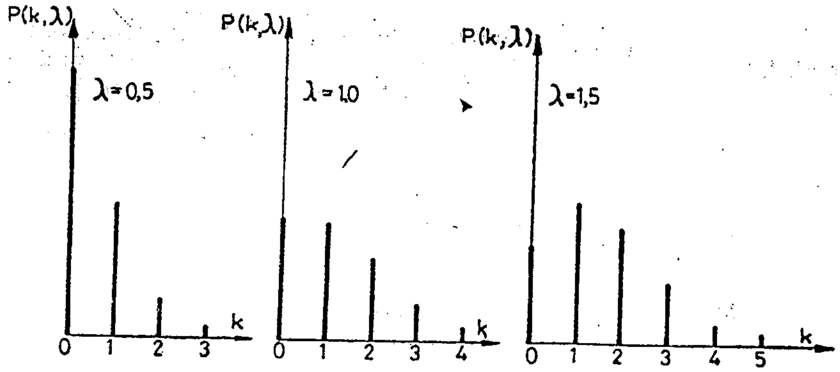

Fig. 1.11.2

Funcţia de repartiţie a repartiţiei Poisson este

$$F(x) = \sum_{k=0}^{[x]-1} P(k\,;\lambda) = \sum_{k=0}^{[x]-1} \frac{\lambda^k}{k\,!} e^{-\lambda},$$

iar *funcţia caracteristică* are expresia

$$\varphi(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} \frac{\lambda^k}{k\,!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)} \tag{1.11.18}$$

Cu ajutorul funcţiei caracteristice se demonstrează imediat că suma a două variabile aleatoare Poisson este tot o variabilă aleatoare Poisson. Fie ξ şi η două variabile aleatoare independente care au repartiţii Poisson cu parametrii λ şi μ respectiv. Funcţia caracteristică a sumei lor, în baza relaţiei 1.11.18) şi a proprietăţii (1. 10.5), este

$$\varphi(t,\lambda)\,\varphi(t,\mu) = e^{\lambda(e^{it}-1)} \cdot e^{\mu(e^{it}-1)} = e^{(\lambda+\mu)(e^{it}-1)} = \varphi(t, \lambda+\mu),$$

adică variabila aleatoare $\xi+\eta$ are repartiţia Poisson cu parametrul $\lambda+\mu$.

Valoarea medie şi dispersia repartiţiei Poisson cu parametrul λ sînt date de

$$M(\xi) = \lambda,\quad D^2(\xi) = \lambda. \tag{1.11.19}$$

Într-adevăr, avînd în vedere (1.11.17), deducem

$$M(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k\,!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)\,!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda\,;$$

$$M(\xi^2) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k}{k\,!} e^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k + k) \frac{\lambda^k}{k\,!} e^{-\lambda} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k\,!} e^{-\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k\,!} e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

De aici

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - [M(\xi)]^2 = \lambda.$$

Observăm că momentele şi momentele centrate de un ordin oarecare r (în particular, valoarea medie şi dispersia) se mai pot calcula utilizînd funcţia caracteristică (1.11.18). Avem astfel, în concordanţă cu (1.10.7),

$$M_1(\xi) = M(\xi) = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{1}{i}\,[\lambda\, i\, e^{it} e^{\lambda(e^{it}-1)}]_{t=0} = \lambda$$

$$M_2(\xi) = \frac{1}{i^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)_{t=0} = \lambda^2 + \lambda$$

$$M_3(\xi) = \frac{1}{i^3}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial t^3}\right)_{t=0} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

. . . .

Pentru momentele centrate obținem

$$m_1(\xi) = M_1[\xi - M(\xi)] = \lambda - \lambda = 0$$
$$m_2(\xi) = M_1[(\xi - M(\xi))^2] = M_2(\xi) - [M_1(\xi)]^2 = \lambda$$
$$m_3(\xi) = M_1[(\xi - M(\xi))^3] = M_3(\xi) - 3M_2(\xi)[M_1(\xi)]^2 + 2[M_1(\xi)]^2 = \lambda$$
. . . .

Este interesant să reținem că momentele $M_1(\xi)$, $m_2(\xi)$ și $m_3(\xi)$ ale repartiției Poisson sînt egale, avînd valoarea comună λ.

Repartiții continue.

1°) *Repartiția uniformă*. Funcția de repartiție a cărei densitate de repartiție este

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{pentru } x \in [a, b] \\ 0, & \text{pentru } x \notin [a, b] \end{cases} \qquad (1.11.20)$$

se numește *funcție de repartiție uniformă* pe $[a, b]$.

Variabila aleatoare ξ care are funcția de repartiție uniformă pe $[a, b]$ se numește *uniformă* pe $[a, b]$.

Funcția de repartiție uniformă pe $[a, b]$ este

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \text{pentru } x \leqslant a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{pentru } a < x \leqslant b \\ 1 & , \text{pentru } x > b. \end{cases} \qquad (1.11.21)$$

Într-adevăr

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Pentru $x \leqslant a$, $F(x) = 0$, deoarece în acest caz $f(t) = 0$.
Dacă $a < x \leqslant b$ avem

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} f(t) dt + \int_{a}^{x} f(t)\, dt = \int_{a}^{x} f(t) dt$$

deoarece, pentru $t < a$ $f(t) = 0$ și deci

$$\int_{-\infty}^{a} f(t) dt = 0.$$

Ținînd seama de (1.11.20) rezultă

$$F(x) = \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\, dt = \frac{x-a}{b-a}.$$

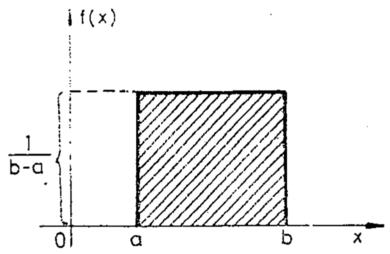

Fig. 1.11.3

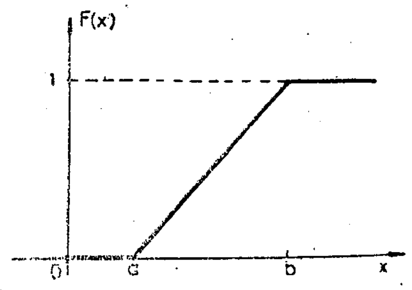

Fig. 1.11.4

În sfîrşit, dacă $x > b$ putem scrie

$$F(x) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\mathrm{d}t + \int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{b}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}t = 1,$$

deoarece, pentru $t < a$ şi $t > b$, $f(t) = 0$.

Graficele funcţiilor $f(x)$ şi $F(x)$ ale repartiţiei uniforme sînt date în fig. 1.11.3 şi 1.11.4 respectiv.

Valoarea medie şi *dispersia* variabilei aleatoare ξ, uniformă pe $[a, b]$ sînt

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2},\quad D^2(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}. \tag{1.11.22}$$

Într-adevăr, ţinînd seama de (1.11.20), avem

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{a}^{b} xf(x)\mathrm{d}x + \int_{b}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{a}^{b} xf(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x\,\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}.$$

Apoi

$$M(\xi^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x^2\mathrm{d}x = \frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

De aici şi din rezultatul precedent deducem

$$D^2(\xi) = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

în fig.

] sînt

.11.22)

Deoarece $b > a$ rezultă

$$D(\xi) = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

2° *Repartiția normală.* Variabila aleatoare ξ urmează o repartiție normală de parametri m şi σ^2 dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0, \qquad (1.11.23)$$

unde $x \in R$. Variabila aleatoare ξ se numeşte *normală* de parametri m şi σ^2 dacă are funcția de repartiție normală. Vom nota prin $N(m, \sigma^2)$ repartiția normală cu parametri m şi σ^2.

Funcția de repartiție a repartiției normale $N(m, \sigma^2)$ este

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt. \qquad (1.11.24)$$

Valoarea medie şi *dispersia* repartiției $N(m, \sigma^2)$ sînt date de

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = m$$

$$D^2(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x) dx = \sigma^2.$$

Într-adevăr, ținînd seama de (1.11.23), avem

$$M(\xi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Facem schimbarea de variabilă $t = \frac{x-m}{\sigma}$, de unde $x = t\sigma + m$, $dx = \sigma dt$. Aşadar

$$M(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (t\sigma + m) e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{m}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Prima integrală din partea dreaptă a egalității este nulă, funcția $te^{-\frac{t^2}{2}}$ fiind impară, iar limitele de integrare fiind simetrice față de origine.

A doua integrală este integrala lui Poisson şi este egală cu $\sqrt{2\pi}$. Prin urmare $M(\xi) = m$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

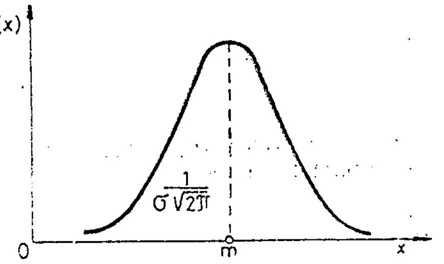

Fig. 1.11.5

Dispersia lui ξ este

$$D^2(\xi) =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \, dx,$$

iar după efectuarea schimbării de variabilă $y = \dfrac{x - m}{\sigma}$, rezultă

$$D^2(\xi) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy.$$

Integrala din partea dreaptă se calculează prin părţi luînd $u = y$ şi $dv = = ye^{-\frac{y^2}{2}} dy$. După efectuarea calculelor obţinem $D^2(\xi) = \sigma^2$ şi deci $D(\xi) = \sigma$.

Am arătat astfel că parametrii m şi σ^2 ai repartiţiei normale reprezintă respectiv valoarea medie şi dispersia variabilei aleatoare normale. Totodată rezultă că funcţia de repartiţie a unei variabile aleatoare normale este perfect determinată de valoarea medie şi dispersia variabilei.

Reprezentarea grafică a funcţiei $f(x)$ (fig. 1.11.5) arată că f este simetrică faţă de paralela la axa Oy dusă prin punctul de abscisă m de pe axa Ox. În punctul $x = m$ funcţia f admite un maxim $f(m) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

Punctele de abscisă $m \pm \sigma$ sînt puncte de inflexiune, graficul fiind concav dacă $m - \sigma < x < m + \sigma$ şi convex dacă $x < m - \sigma$ sau $x > m + \sigma$. Graficul funcţiei f se numeşte *curba normală* sau *curba lui Gauss*. Cu cît σ este mai mic cu atît ordonata punctului de maximum al curbei normale este mai mare (m rămînînd constant). În fig. 1.11.7 se pot vedea trei curbe normale (I, II, III) pentru $m = 0$; $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Schimbarea lui m, în ipoteza că σ rămîne constant, revine la o translaţie a curbei normale, forma ei rămînînd neschimbată (fig. 1.11.6).

Momentele centrate de ordin impar ale variabilei aleatoare ξ repartizate $N(m, \sigma^2)$ sînt nule, iar momentele de ordin par $(2k)$ au valoarea

$$m_{2k}(\xi) = m_{2k} = \frac{(2k)!}{k!\,2^k} \sigma^{2k}. \quad (1.11.25)$$

Într-adevăr, dacă $r = 2k + 1$ avem

$$m_{2k+1} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^{2k+1} f(x) \, dx = 0,$$

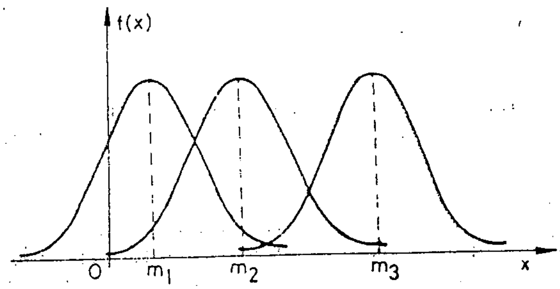

Fig. 1.11.6

deoarece

$$(x-m)^{2k+1}f(x) = (x-m)^{2k+1}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]$$

este o funcţie impară.

Dacă $r = 2k$, atunci

$$m_{2k} = \int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^{2k}f(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m)^{2k}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x.$$

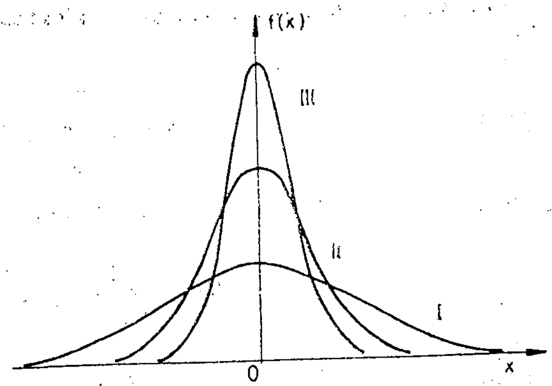

Fig. 1.11.7

Efectuînd substituţia $\frac{x-m}{\sigma} = t$, obţinem

$$m_{2k} = \frac{\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^{2k}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = \frac{\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^{2k-1}\mathrm{d}\left(-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\right) =$$

$$= \frac{\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}}\left[-t^{2k-1}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty} + (2k-1)\int_{-\infty}^{\infty}t^{2k-2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t\right] =$$

$$= (2k-1)\frac{\sigma^{2k}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}t^{2k-2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t = (2k-1)\sigma^2 m_{2k-2}.$$

Are loc deci formula de recurenţă

$$m_{2k} = (2k-1)\,\sigma^2 m_{2k-2}.$$

Dînd aici lui k valorile $k-1, \ldots, 2, 1$ şi ţinînd seama că $m_0 = 1$ rezultă (1.11.25).

Asimetria şi excesul pentru repartiţia normală $N(m, \sigma^2)$ rezultă imediat. Avem, ţinînd seama de (1.8.1), (1.8.2) şi (1.11.25),

$$A_s = \frac{m_3}{\sigma^3} = 0, \quad E = \frac{m_4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

În faptul că asimetria şi excesul repartiţiei $N(m, \sigma^2)$ sînt egale cu zero îşi are originea cunoscutul procedeu al statisticii descriptive de a considera aceste caracteristici drept criterii pentru stabilirea normalităţii unor legi ce descriu fenomene de masă. În aplicarea în practică a acestui criteriu trebuie totuşi să ţinem seama că $A_s = E = 0$ constituie o condiţie necesară, dar nu suficientă pentru normalitate.

Funcția caracteristică a variabilei aleatoare ξ repartizate $N(m, \sigma^2)$ se obține din

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\,dx$$

unde $f(x)$ este dată de (1.11.23). Avem

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $\frac{x-m}{\sigma} = u$ rezultă

$$\varphi(t) = e^{itm} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\sigma u - \frac{u^2}{2}} \cdot du = e^{itm} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(u-it\sigma)^2}{2} - \frac{t^2\sigma^2}{2}}\,du =$$

$$= e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(u-it\sigma)^2}{2}}\,du.$$

Punînd în ultima integrală $y = u - it\sigma$, obținem

$$\varphi(t) = e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy = e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi}$$

adică

$$\varphi(t) = e^{itm - \frac{t^2\sigma^2}{2}}. \qquad (1.11.26)$$

Utilizînd funcția caracteristică se demonstrează că dacă $a_1, \ldots, a_n$ sînt constante, iar $\xi_1, \ldots, \xi_n$ sînt variabile aleatoare independente repartizate $N(m_k, \sigma_k^2)$, $(1 \leqslant k \leqslant n)$ atunci variabila aleatoare $\xi = a_1\xi_1 + \ldots + a_n\xi_n$ este repartizată $N\left(\sum_{k=1}^{n} a_k m_k, \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sigma_k^2\right)$.

Repartiția normală redusă. Variabila aleatoare η urmează o *repartiție normală redusă* dacă densitatea sa de repartiție este

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in R. \qquad (1.11.27)$$

Observăm că $g(x)$ se obține din $f(x)$ (formula (1.11.23)) dacă $m = 0$ și $\sigma = 1$. Deci variabila aleatoare η are repartiția $N(0, 1)$. Avem evident $M(\eta) = 0$ și $D^2(\eta) = 1$.

Funcţia de repartiţie a variabilei η este

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} g(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}} \mathrm{d}u. \tag{1.11.28}$$

Deoarece pentru orice $u > 0$, $g(u)$ este simetrică faţă de dreapta $m = 0$ rezultă că $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Valorile funcţiei Φ, numită *funcţia lui Laplace*, sînt tabelate (vezi tabela A_1 din anexa A) şi cu ajutorul lor se determină probabilitatea evenimentelor ce privesc orice variabilă aleatoare normală.

Fie ξ o variabilă aleatoare repartizată $N(m, \sigma^2)$ şi fie numerele $a < b$ date. Avem

$$P(a < \xi < b) = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right). \tag{1.11.29}$$

Într-adevăr

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Punînd $u = \dfrac{x-m}{\sigma}$ obţinem

$$P(a < \xi < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\frac{b-m}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u - \int_{-\infty}^{\frac{a-m}{\sigma}} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\right]$$

şi ţinînd seama de (1.11.28) egalitatea (1.11.29) este demonstrată.

Observăm că, pentru orice $\alpha > 0$, din relaţia (1.11.29) obţinem

$$P(m - \alpha < \xi < m + \alpha) = P(|\xi - m| < \alpha) = \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\alpha}{\sigma}\right).$$

Dar $\Phi\left(-\dfrac{\alpha}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(\dfrac{\alpha}{\sigma}\right)$, deci

$$P(|\xi - m| < \alpha) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) - 1. \tag{1.11.30}$$

Din această formulă rezultă următoarea regulă: dacă variabila aleatoare ξ are repartiţia $N(m, \sigma^2)$ atunci $|\xi - m| < 3\sigma$ cu o probabilitate foarte apropiată de 1.

Într-adevăr, dacă în (1.11.30) luăm $\alpha = 3\sigma$ rezultă

$$P(|\xi - m| < 3\sigma) = 2\Phi(3) - 1.$$

În tabela valorilor funcţiei lui Laplace Φ găsim $\Phi(3) = 0,9987$ şi deci

$$P(|\xi - m| < 3\sigma) = 2 \cdot 0,9987 - 1 = 0,9974,$$

ceea ce susţine afirmaţia că $|\xi - m|$ nu depăşeşte 3σ. Cu alte cuvinte, probabilitatea ca abaterea, în valoare absolută, a variabilei aleatoare ξ repartizate $N(m, \sigma^2)$ să depăşească 3σ este $1 - 0,9974 = 0,0026 = 0,26\%$.

Exemple. 1° Să considerăm un ansamblu statistic (populaţie) de rezistenţe ale căror valori sînt repartizate după o lege normală $N(x; 200\Omega, 64\Omega^2)$. Luînd la întîmplare 100 dintre aceste rezistenţe le controlăm una cîte una. Care este probabilitatea de a se abate cu mai mult de 8 ohmi de la valoarea nominală de 200 ohmi?

Soluţie. Să notăm cu ξ variabila aleatoare normală considerată. Trebuie să determinăm mai întîi probabilitatea $P(200 - 8 < \xi < 200 + 8)$, adică $p = P(m - \sigma < \xi < m + \sigma)$. Dar această probabilitate este cunoscută: $p = 2\Phi(1) - 1$, conform formulei (1.11.30). Din tabela valorilor lui Φ găsim $\Phi(1) = 0,8413$ şi deci $p = 0,6826$. De aici $q = 1 - p = 1 - 0,6826 = 0,3174 = 31,74\%$.

2° Acelaşi exemplu de mai sus, cu o toleranţă de ± 10 ohmi (fig. 1.11.8).

Soluţie. Toleranţa nu mai este un multiplu de σ, dar problema revine (ca şi mai sus) la calculul ariei situată sub curbă între $x_1 = 200 - 10 = 190$ şi $x_2 = 200 + 10 = 210$, adică la calculul probabilităţii $P(x_1 < \xi < x_2)$. Avem

$$P(x_1 < \xi < x_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{210 - 200}{8}\right) -$$

$$- \Phi\left(\frac{190 - 200}{8}\right) = \Phi(1,25) - \Phi(-1,25) = 2\Phi(1,25) - 1.$$

Utilizînd tabela A_1 din anexa A găsim $\Phi(1,25) = 0,8944$, deci

$$p = P(190 < \xi < 210) = 2 \cdot 0,8944 - 1 = 0,7888,$$

iar

$$q = 1 - p = 1 - 0,7888 = 0,2112 = 21,12\%.$$

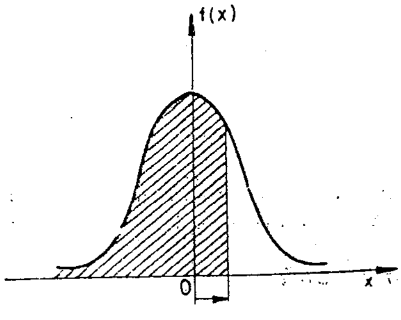

Fig. 1.11.8

Acest număr este evident mai mic decît cel din exemplul precedent, întrucît toleranţele controlului sînt mai mari.

Observaţii. o_1) Fie ξ o variabilă aleatoare repartizată $N(m, \sigma^2)$. Variabila aleatoare $\eta = \frac{\xi - m}{\sigma}$ (numită *variabilă aleatoare redusă*) este repartizată $N(0, 1)$.

Într-adevăr, avem

$$M(\eta) = \frac{1}{\sigma}[M(\xi) - m] = \frac{1}{\sigma}(m - m) = 0$$

$$M(\eta^2) = \frac{1}{\sigma^2}[M(\xi^2) - 2mM(\xi) + m^2] = \frac{1}{\sigma^2}(m^2 + \sigma^2 - 2m^2 + m^2) = 1$$

şi deci $D^2(\eta) = \sigma^2 = 1$.

o$_2$) Expresia asimptotică (1.11.7) a probabilităţilor $P_n(k)$ ne sugerează faptul că repartiţia binomială este asimptotic normală. Se demonstrează că funcţia caracteristică a variabilei aleatoare reduse

$$\frac{\eta - np}{\sqrt{npq}}$$

unde η este dată prin (1.11.2), tinde către funcţia caracteristică a repartiţiei normale reduse $N(0, 1)$.

Cu alte cuvinte

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \lim_{n\to\infty} M\left[e^{it\frac{\eta - np}{\sqrt{npq}}}\right] = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Acest rezultat ne permite să scriem pentru valori mari ale lui n

$$P(a\sqrt{npq} < \eta - np < b\sqrt{npq}) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Observăm că pentru valori mici ale lui n (pentru un număr mic de experienţe) această aproximaţie este aplicabilă numai dacă p şi q au valori foarte apropiate.

o$_3$) Abaterea redusă $\frac{\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ a variabilei aleatoare ξ care are repartiţia Poisson cu parametrul λ, este asimptotic normală $N(0, 1)$ pentru $\lambda \to \infty$.

Într-adevăr funcţia caracteristică a abaterii reduse este

$$\psi(t, \lambda) = M\left(e^{it\frac{\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}}}\right) = e^{-it\sqrt{\lambda}}\, M\left(e^{it\frac{\xi}{\sqrt{\lambda}}}\right) = e^{-it\sqrt{\lambda}}\, \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{\lambda}}, \lambda\right),$$

unde $\varphi(t, \lambda)$ are expresia (1.11.18). După efectuarea calculelor obţinem

$$\lim_{\lambda\to\infty} \psi(t, \lambda) = e^{-\frac{t^2}{2}},$$

care este funcţia caracteristică a repartiţiei normale $N(0, 1)$.

În practică, repartiţiile binomială şi Poisson se asimilează unei repartiţii normale reduse $N(0, 1)$ în următoarele condiţii:

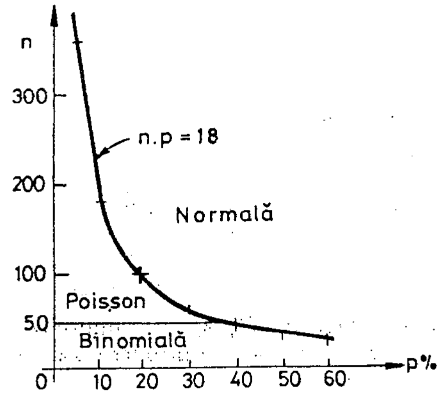

Fig. 1.11.9

1° pentru repartiția binomială dacă $n \geqslant 50$ și $np \geqslant 18$; se ia ca variabilă aleatoare redusă (ameliorată) variabila $\dfrac{\xi + 0{,}5 - np}{\sqrt{npq}}$ asimptotic normală $N(0, 1)$;

2° pentru repartiția Poisson dacă $\lambda \geqslant 18$; variabila redusă (ameliorată) este în acest caz $\dfrac{\xi + 0{,}5 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ asimptotic normală $N(0, 1)$.

Figura 1.11.9, în care am pus în evidență cele trei repartiții, ilustrează cele de mai sus.

3° *Repartiția lognormală.* Variabila aleatoare ξ urmează o repartiție lognormală dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (1.11.31)$$

unde a și σ^2 sînt respectiv valoarea medie și dispersia logaritmului lui ξ. Dacă punem

$$\eta = \frac{1}{\sigma}(\ln \xi - a)$$

rezultă

$$\xi = e^{a+\sigma\eta},$$

variabila aleatoare η fiind repartizată $N(0, 1)$.

Valoarea medie a variabilei aleatoare ξ este dată de

$$M(\xi) = \int_0^\infty x f(x)\, dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $\dfrac{\ln x - a}{\sigma} = u$ și efectuînd calculele rezultă

$$M(\xi) = e^{a + \frac{\sigma^2}{2}}. \qquad (1.11.32)$$

Din

$$D^2(\xi) = \int_0^\infty (x - M(\xi))^2 f(x)\, dx,$$

unde $M(\xi)$ şi $f(x)$ sînt date respectiv prin (1.11.32) şi (1.11.31) rezultă

$$D^2(\xi) = e^{2a+\sigma^2(e^{\sigma^2}-1)} \tag{1.11.33}$$

Importanţa acestei repartiţii rezidă în principal în următoarele două caracteristici.

C_1) Dacă $x = 0$, $f(x) = 0$, ceea ce este convenabil în cazul variabilei aleatoare timp; repartiţia normală nu are această proprietate.

C_2) Fie $\xi_1, \ldots, \xi_n$ variabile aleatoare lognormale independente; produsul $\xi_1\xi_2 \ldots \xi_n$ este o variabilă aleatoare lognormală. Într-adevăr, dacă o variabilă aleatoare ξ este lognormală, variabila aleatoare $\ln \xi$ este normală şi rezultatul de mai sus decurge din proprietatea de aditivitate a variabilelor aleatoare independente.

4° *Repartiţia gamma.* Variabila aleatoare ξ urmează o repartiţie gamma de parametru α, dacă densitatea sa de repartiţie este dată de

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x} & \text{dacă } x > 0 \\ 0 & \text{dacă } x \leqslant 0, \end{cases} \tag{1.11.34}$$

pentru orice $\alpha > 0$. Notăm repartiţia gamma cu $\gamma(\alpha)$.

Funcţia caracteristică a variabilei aleatoare ξ care urmează o repartiţie gamma este

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_\alpha(x)\,dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{itx}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} e^{-x(1-it)}\, x^{\alpha-1}\,dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)}{(1-it)^\alpha},$$

adică

$$\varphi_\xi(t) = (1 - it)^{-\alpha}. \tag{1.11.35}$$

Momentul de ordinul r al variabilei aleatoare ξ avînd densitatea de repartiţie (1.11.34) este

$$M_r(\xi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} x^{r+\alpha-1}\, e^{-x}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{1.11.36}$$

Dacă variabilele aleatoare independente ξ şi η au respectiv repartiţiile $\gamma(\alpha)$ şi $\gamma(\beta)$, atunci $\xi + \eta$ are repartiţia $\gamma(\alpha + \beta)$.

Într-adevăr, folosind (1.11.35) şi ţinînd seama că variabilele aleatoare ξ şi η sînt independente avem

$$\varphi_{\xi+\eta}(t) = \varphi_\xi(t) + \varphi_\eta(t) = (1 - it)^{-(\alpha+\beta)}.$$

5° *Repartiția beta.* Variabila aleatoare ξ urmează o repartiție beta de parametri m, n $(m, n > 0)$ dacă are densitatea de repartiție

$$f_{m,n}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{m-1}(1-x)^{n-1}}{B(m, n)}, & \text{dacă } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, & \text{dacă } x < 0 \text{ sau } x > 1. \end{cases} \tag{1.11.37}$$

Notăm repartiția beta cu $\beta(m, n)$. În expresia (1.11.37) $B(m, n) = \dfrac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$, unde $\Gamma(\alpha)$ reprezintă, ca și în cazul repartiției de la 4°, funcția Euler de speța a doua

$$\boxed{\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx, \ \alpha > 0.}$$

Momentul de ordinul r al variabilei aleatoare ξ avînd repartiția $\beta(m, n)$ este

$$M_r(\xi) = \frac{1}{B(m, n)} \int_0^1 x^{r+m-1}(1-x)^{n-1}\, dx = \frac{1}{B(m, n)} B(m+r, n) =$$

$$= \frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)} \cdot \frac{\Gamma(m+r)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n+r)}$$

sau

$$M_r(\xi) = \frac{\Gamma(m+n)\,\Gamma(m+r)}{\Gamma(m)\,\Gamma(m+n+r)}.$$

În particular

$$M_1(\xi) = \frac{m}{m+n}, \quad M_2(\xi) = \frac{m(m+1)}{(m+n)(m+n+1)}. \tag{1.11.38}$$

De aici obținem

$$D^2(\xi) = \frac{mn}{(m+n)^2(m+n+1)}. \tag{1.11.39}$$

Fie ξ și η două variabile aleatoare independente cu repartițiile $\gamma(m)$ și $\gamma(n)$ respectiv. Se demonstrează că variabila aleatoare $\zeta = \dfrac{\xi}{\xi + \eta}$ are repartiția $\beta(m, n)$ (pentru demonstrație a se vedea [134]).

6° *Repartiția exponențială negativă.* Variabila aleatoare ξ urmează o repartiție exponențială negativă dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \ \lambda > 0;\ 0 \leqslant x < \infty. \tag{1.11.40}$$

$\int_0^x f(x)dx = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{-\lambda} e^{-\lambda t}\Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$

Funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare ξ care are o repartiţie exponenţială negativă este

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & \text{dacă } x > 0 \\ 0, & \text{dacă } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Funcţia caracteristică are expresia

$$\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it} \tag{1.11.41}$$

ceea ce rezultă imediat din definiţia funcţiei φ şi din (1.11.40). Avem

$$\varphi(t) = \int_0^\infty e^{itx} f(x)\,dx = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda - it)x}\,dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}\, e^{-(\lambda - it)x}\Big|_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

Momentele repartiţiei exponenţiale negative se determină utilizînd (1.11.41) şi relaţia $M_r(\xi) = \frac{1}{i^n}\left(\frac{d^n \varphi}{dt^n}\right)_{t=0}$. Găsim

$$M_1(\xi) = \frac{1}{\lambda},\quad M_2(\xi) = \frac{2}{\lambda^2},\quad D^2(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}. \tag{1.11.42}$$

Exemplu. Durata de viaţă T a unui tub de radio dintr-un lot omogen este o variabilă aleatoare. Presupunem că probabilitatea ca un tub să fie activ, după un interval de timp τ de la intrarea sa în funcţiune, este dată de

$$P(T > \tau) = e^{-\lambda\tau},$$

unde $\lambda > 0$ este un parametru.

a) Admitem că durata medie de viaţă este de 1000 ore. Care este probabilitatea ca patru tuburi de acest tip utilizate într-un echipament să iasă din funcţiune în 2000 de ore?

b) Putem alege între două tipuri de tuburi. Primul are o durată medie de viaţă de 1000 ore şi costă k lei, iar al doilea are o durată medie de viaţă de 2000 ore şi costă $2k$ lei; pentru securitate, oricare din cele două tipuri de tuburi sînt înlocuite atunci cînd probabilitatea de supravieţuire (fiabilitatea) este 0,30. Care este tipul de tub cel mai avantajos, în ipoteza că toate tuburile urmează legi de repartiţie independente unele de altele?

Soluţie a) Din enunţ rezultă că

$$\frac{1}{\lambda} = 1000 \text{ ore}$$

şi

$$P(T < \tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}.$$

Introducem acum evenimentele:
$A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ — tubul A_i iese din funcţiune în intervalul de timp (0 ore—2000 ore). Avem

$$P(A_i) = P(T < 2000) = 1 - e^{-\lambda\tau}|_{\tau=2000}$$

şi din ipoteza de independenţă a legilor de repartiţie rezultă

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{4} A_i\right) = \prod_{i=1}^{4} P(A_i) = (1 - e^{-\lambda\tau})^4_{\tau=2000}.$$

Dar $A = \bigcap_{i=1}^{4} A_i$ este evenimentul ca 4 tuburi să iasă din funcţiune în 2000 ore, deci

$$P(A) = \left(1 - e^{-\frac{1}{1000}\cdot 2000}\right)^4 = (1 - e^{-2})^4.$$

b) Fie $\frac{1}{\lambda_1} = 1000$ ore şi $\frac{1}{\lambda_2} = 2000$ ore duratele medii de viaţă ale tuburilor de tipul 1 şi 2 respectiv.
Avem

$$P(T_1 > \tau) = e^{-\lambda_1\tau};\ P(T_2 > \tau) = e^{-\lambda_2\tau}$$

unde variabilele aleatoare T_1 şi T_2 reprezintă durata de viaţă a unui tub de tipul 1 şi de tipul 2, respectiv. Să notăm $p = 0{,}30$. Atunci $p = e^{-\lambda_1\tau_1} = e^{-\lambda_2\tau_2}$, adică duratele de utilizare a tuburilor vor fi respectiv.

$$\tau_1 = -\frac{\ln p}{\lambda_1},\ \tau_2 = -\frac{\ln p}{\lambda_2}.$$

Notînd respectiv cu c_1 şi c_2 preţurile fiecăruia din cele două tipuri de tuburi, preţurile pe ora de utilizare vor fi

$$r_1 = \frac{c_1}{\tau_1} = -\frac{\lambda_1 c_1}{\ln p},\ r_2 = \frac{c_2}{\tau_2} = -\frac{\lambda_2 c_2}{\ln p}$$

şi raportul

$$r = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\lambda_1 c_1}{\lambda_2 c_2}$$

ne permite să spunem care din cele două tipuri de tuburi este cel mai avantajos. În cazul nostru $r = 1$.

7° *Repartiţia Weibull.* Acest model matematic „acoperă" un număr destul de mare de repartiţii ale duratelor de viaţă. Se utilizează cu foarte bune rezultate în studiul uzurii materialelor, al repartiţiilor defecţiunilor tuburilor cu vid, avînd o importanţă deosebită în fiabilitate în general.

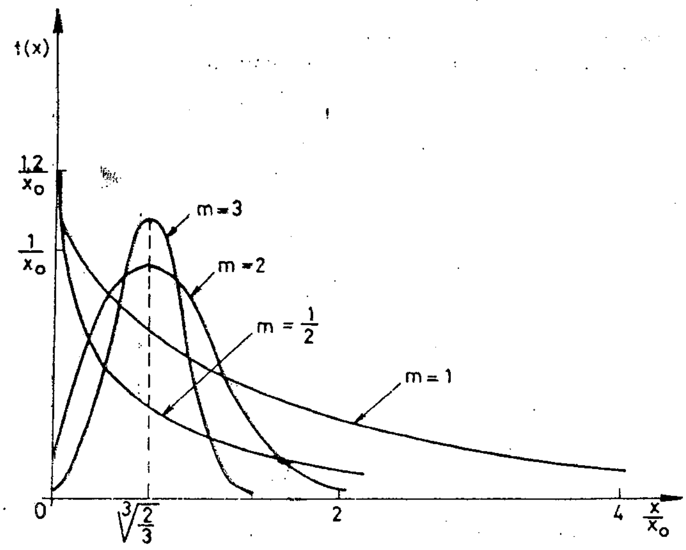

Fig. 1.11.10

Variabila aleatoare ξ are repartiţia Weibull dacă densitatea sa de repartiţie este

$$f(x) = \frac{m}{x_0}\left(\frac{x-u}{x_0}\right)^{m-1} e^{-\left(\frac{x-u}{x_0}\right)^m} \qquad (1.11.43)$$

unde $x_0 > 0$; $m > 0$; $0 \leqslant u \leqslant x < \infty$. Pentru $x < u$, $f(x) = 0$.

În figura 1.11.10 sînt reprezentate graficele densităţii de repartiţie (1.11.43) pentru $u = 0$ şi pentru diferite valori ale lui m($m = \frac{1}{2}$; $m = 1$; $m = 2$; $m = 3$).

Funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare ξ repartizate Weibull este

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x-u}{x_0}\right)^m}, & \text{dacă } x \geqslant u,\ u \geqslant 0 \\ 0, & \text{dacă } x < u,\ u \geqslant 0. \end{cases}$$

Din (1.11.43) rezultă că pentru $u = 0$ şi $m = 1$, repartiţia Weibull coincide cu repartiţia exponenţială negativă definită prin (1.11.40). Dacă $m \geqslant 3$ repartiţia Weibull tinde către repartiţia normală.

Momentul de ordinul r al variabilei aleatoare ξ repartizate Weibull, în cazul $u = 0$, este dat de

$$M_r(\xi) = \frac{m}{x_0^m}\int_0^{\infty} x^r x^{m-1} e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^m} dx.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $\left(\frac{x}{x_0}\right)^m = y$ rezultă

$$M_r(\xi) = x_0^r \int_0^\infty y^{\frac{r}{m}} e^{-y} dy = x_0^r \Gamma\left(\frac{r}{m} + 1\right), \quad (m > 0).$$

De aici găsim că

$$M(\xi) = x_0 \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right) \tag{1.11.44}$$

$$D^2(\xi) = x_0^2 \left\{\Gamma\left(\frac{2}{m} + 1\right) - \left[\Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)\right]^2\right\}. \tag{1.11.45}$$

Pentru $u > 0$ găsim $M(\xi) = u + x_0 \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right)$.

8° *Repartiția Erlang.* Variabila aleatoare ξ este repartizată Erlang dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \frac{(\lambda k)^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda k x}$$

$$\lambda > 0;\ k \geqslant 1;\ 0 \leqslant x < \infty. \tag{1.11.46}$$

Pentru $k = 1$ obținem $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, adică densitatea de repartiție a repartiției exponențiale negative. Pentru $\lambda k = 1$ repartiția Erlang coincide cu repartiția gamma de parametru $\frac{1}{\lambda}$.

Momentul de ordinul r al variabilei aleatoare ξ repartizată Erlang este dat de

$$M_r(\xi) = \frac{(\lambda k)^k}{\Gamma(k)} \int_0^\infty x^{r+k-1} e^{-\lambda k x} dx.$$

Efectuînd schimbarea de variabilă $\lambda k x = y$ rezultă

$$M_r(\xi) = \frac{1}{(\lambda k)^r \Gamma(k)} \int_0^\infty y^{r+k-1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(k + r)}{(\lambda k)^r \Gamma(k)}.$$

În particular

$$M_1(\xi) = M(\xi) = \frac{1}{\lambda} \tag{1.11.47}$$

$$M_2(\xi) = \frac{k + 1}{k \lambda^2}$$

$$D^2(\xi) = \frac{1}{k \lambda^2}. \tag{1.11.48}$$

9° *Repartiția* χ^2. Variabila aleatoare ξ urmează o repartiție χ^2 cu n *grade de libertate* și cu parametrul $\sigma\,(\sigma > 0)$, dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,x^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-\frac{x}{2\sigma^2}},\quad x\in[0,\ \infty),\ n\in N. \tag{1.11.49}$$

Funcția caracteristică a variabilei aleatoare ξ repartizată χ^2 cu n grade de libertate este

$$\varphi(t) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1}\,e^{itx}\,e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}\,dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty x^{\frac{n}{2}-1}\,e^{-\frac{1-2it\sigma^2}{2\sigma^2}x}\,dx.$$

După efectuarea calculelor obținem

$$\varphi(t) = (1 - 2it\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}. \tag{1.11.50}$$

De aici

$$\frac{d\varphi}{dt} = in\sigma^2(1 - 2it\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-1}$$

. . . .

$$\frac{d^r\varphi}{dt^r} = i^r n(n+2)\ldots(n+2r-2)\sigma^{2r}(1-2it\sigma^2)^{-\frac{n}{2}-r}.$$

Momentele repartiției χ^2 rezultă din relațiile de mai sus. Avem

$$M_1(\xi) = \frac{1}{i}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = n\sigma^2 \tag{1.11.51}$$

$$M_2(\xi) = \frac{1}{i^2}\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right)_{t=0} = n(n+2)\sigma^4$$

. . . .

$$M_r(\xi) = \frac{1}{i^r}\left(\frac{d^r\varphi}{dt^r}\right)_{t=0} = n(n+2)\ldots(n+2r-2)\sigma^{2r}.$$

Dispersia este

$$D^2(\xi) = M_2(\xi) - [M_1(\xi)]^2 = 2n\sigma^4. \tag{1.11.52}$$

Folosind funcția caracteristică se arată că dacă variabila aleatoare ξ are repartiția χ^2 cu n grade de libertate și parametrul σ, atunci variabila $\frac{\xi - n\sigma^2}{\sigma^2\sqrt{2n}}$ este asimptotic normală pentru $n \to \infty$.

Forma curbei reprezentative a densității de probabilitate a repartiției χ^2 depinde de n și σ. În fig. 1.11.11 sînt reprezentate funcțiile $f(x)$ pentru $\sigma = 1$ și pentru diverse valori ale lui n.

În general se constată că pentru $n \geqslant 25$ graficul densității de repartiție a repartiției χ^2 se apropie foarte mult de cel al densității de repartiție a legii normale.

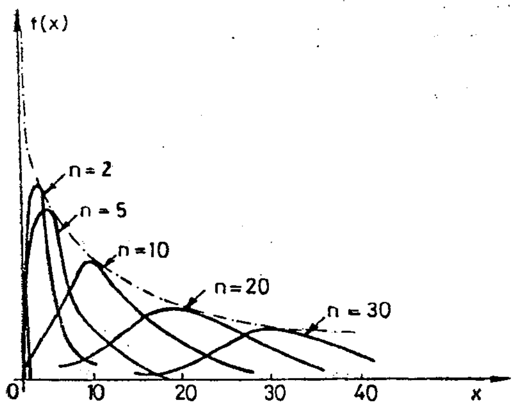

Fig. 1.11.11

Dacă variabilele aleatoare independente ξ_1 și ξ_2 sînt repartizate χ^2 cu n_1, respectiv n_2 grade de libertate și cu parametrul σ, atunci variabila aleatoare $\xi_1 + \xi_2$ este repartizată χ^2 cu $n_1 + n_2$ grade de libertate și parametrul σ.

Într-adevăr

$$\varphi_{\xi_1+\xi_2}(t) = \varphi_{\xi_1}(t)\varphi_{\xi_2}(t) = (1 - 2it\sigma^2)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}$$

în baza relației (1.11.50).

Demonstrăm următoarea teoremă, pe care o vom folosi mai departe. *Fie ξ_k, $(k = 1, \ldots, n)$, n variabile aleatoare independente, fiecare avînd repartiția $N(0, \sigma)$. Variabila aleatoare*

$$\eta = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^2 \tag{1.11.53}$$

este repartizată χ^2 cu n grade de libertate și parametrul σ.

Pentru demonstrație determinăm, mai întîi, funcția de repartiție a variabilei ξ_k^2. Avem

$$F(x) = P(\xi_k^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi_k < \sqrt{x}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy.$$

De aici

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}}$$

iar

$$\varphi_{\xi_k^2}(t) = M(e^{it\xi_k^2}) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1-2it\sigma^2}{2\sigma^2}x} dx = (1 - 2it\sigma^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Deoarece variabilele aleatoare ξ_k $(k = 1, \ldots, n)$, sînt independente rezultă că funcţia caracteristică a variabilei aleatoare η definită prin (1.11.53) este

$$\varphi_\eta(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{\xi_k^2}(t) = (1 - 2it\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}.$$

Recunoaştem în acest rezultat expresia funcţiei caracteristice a unei variabile aleatoare repartizate χ^2 cu n grade de libertate şi parametrul σ; deci teorema este demonstrată.

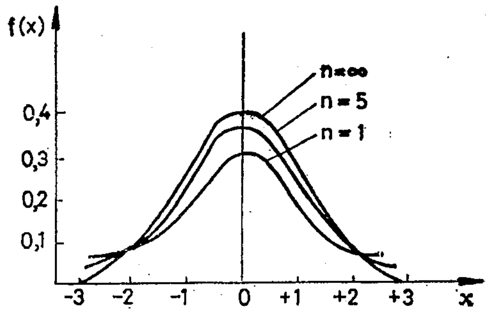

Fig. 1.11.12

10° *Repartiţia Student*. Variabila aleatoare ξ este repartizată Student cu n grade de libertate dacă are densitatea de repartiţie

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad x \in R,\ n \in N. \qquad (1.11.54)$$

Graficul acestei funcţii, pentru diferite valori ale lui n, este reprezentat în fig. 1.11.12.

Momentele repartiţiei Student se determină imediat folosind (1.11.54). Deoarece densitatea de repartiţie (1.11.54) este o funcţie pară, valoarea medie a variabilei ξ repartizată Student este zero. Rezultă că momentele obişnuite coincid cu momentele centrate. Avem

$$m_{2r+1}(\xi) = m_{2r+1} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2r+1}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx = 0.$$

Apoi

$$m_{2r}(\xi) = m_{2r} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_{-\infty}^{\infty} x^{2r}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx.$$

Efectuînd schimbarea de variabilă $\frac{x^2}{n} = u$ obţinem

$$m_{2r} = \frac{n^r}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\Gamma\left(r + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2} - r\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad r < \frac{n}{2}.$$

Însă

$$\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)=\left(r-\frac{1}{2}\right)\left(r-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\left(r-\frac{1}{2}\right)\left(r-\frac{3}{2}\right)\cdots\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)=\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-r\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-r\right)$$

şi deci

$$m_{2r}=\frac{n^r\cdot 1\cdot 3\ldots(2r-1)}{(n-2)(n-4)\ldots(n-2r)},\ \left(r<\frac{n}{2}\right).$$

În particular

$$m_2=D^2(\xi)=\frac{n}{n-2}. \tag{1.11.55}$$

Se arată că dacă variabila aleatoare ξ are repartiţia Student cu n grade de libertate, atunci ξ este asimptotic normală $N(0, 1)$ pentru $n \to \infty$.

Teoremele care urmează ne arată diverse modalităţi de a ajunge la repartiţia Student.

Dacă ζ şi η sînt două variabile aleatoare independente, iar ζ are repartiţia $N(0, \sigma)$ şi η are repartiţia χ^2 cu n grade de libertate şi parametru σ, atunci variabila aleatoare

$$\xi=\frac{\zeta}{\sqrt{\frac{\eta}{n}}} \tag{1.11.56}$$

are repartiţia Student cu n grade de libertate.

Observaţie. Deoarece η este repartizată χ^2 cu n grade de libertate şi parametrul σ, înseamnă că se poate pune sub forma (1.11.53). Din (1.11.56) rezultă că variabila aleatoare

$$\frac{\zeta}{\sqrt{\frac{\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2}{n}}}$$

este repartizată Student cu n grade de libertate.

Dacă $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sînt variabile aleatoare independente repartizate $N(0, 1)$, atunci variabila aleatoare

$$\xi=\sqrt{n(n-1)}\,\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\zeta_k}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\zeta_i-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\zeta_k\right)^2}}$$

este repartizată Student cu $(n-1)$ grade de libertate.

11. *Repartiția Snedecor.* Variabila aleatoare ξ este repartizată Snedecor cu m, n grade de libertate, dacă are densitatea de repartiție

$$f(x) = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}},$$

$$x \in [0, \infty)\,;\ m,\ n \in N. \tag{1.11.57}$$

Momentele repartiției Snedecor se calculează direct. Avem

$$M_r(\xi) = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty x^{r+\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}} \mathrm{d}x.$$

Făcînd schimbarea de variabilă $\frac{m}{n}\,x = u$ și ținînd seama că

$$\int_0^\infty x^{a-1}(1+x)^{-(a+b)}\mathrm{d}x = B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

obținem

$$M_r(\xi) = \left(\frac{n}{m}\right)^r \frac{\Gamma\left(r+\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-r\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},\ \left(r<\frac{n}{2}\right).$$

Însă

$$\Gamma\left(r+\frac{m}{2}\right) = \left(\frac{m}{2}+r-1\right)\left(\frac{m}{2}+r-2\right)\cdots\frac{m}{2}\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\cdots\left(\frac{n}{2}-r\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-r\right)$$

și deci

$$M_r(\xi) = \left(\frac{n}{m}\right)^r \frac{m(m+2)\ldots(m+2r-2)}{(n-2)(n-4)\ldots(n-2r)}.$$

În particular

$$M_1(\xi) = M(\xi) = \frac{n}{n-2},\ (n>2) \tag{1.11.58}$$

$$M_2(\xi) = \frac{n^2}{m}\frac{m+2}{(n-2)(n-4)},\ (n>4)$$

$$D^2(\xi) = \frac{2n^2}{m}\frac{m+n-2}{(n-2)^2(n-4)}. \tag{1.11.59}$$

Din (1.11.58) se observă că valoarea medie a repartiției Snedecor este independentă de m.

Enunțăm și aici două teoreme care ne oferă căi de a ajunge la repartiția Snedecor.

Dacă ζ_1 și ζ_2 sînt două variabile aleatoare independente repartizate χ^2 cu m grade de libertate și parametrul σ, respectiv cu n grade de libertate și parametrul σ, atunci variabila aleatoare

$$\xi = \frac{\frac{\zeta_1}{m}}{\frac{\zeta_2}{n}} = \frac{n\zeta_1}{m\zeta_2} \tag{1.11.60}$$

este repartizată Snedecor cu m, n grade de libertate.

Observație. Dacă $\eta_1, \ldots, \eta_m$ și $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ sînt $m + n$ variabile aleatoare independente repartizate $N(0, \sigma)$, atunci variabila aleatoare

$$\frac{n}{m} \frac{\sum_{k=1}^{m} \eta_k^2}{\sum_{i=1}^{n} \zeta_i^2}$$

este repartizată Snedecor cu m, n grade de libertate.

Dacă ξ este o variabilă aleatoare repartizată Student cu n grade de libertate, atunci variabila aleatoare ξ^2 este repartizată Snedecor cu 1, n grade de libertate.

12° *Repartiția Fischer.* Variabila aleatoare ξ urmează repartiția Fischer cu m, n grade de libertate dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(z) = 2\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{mz}\left(1 + \frac{m}{n}e^{2z}\right)^{-\frac{m+n}{2}}, \tag{1.11.61}$$

$$z \in R;\ m, n \in N.$$

Dacă η este o variabilă aleatoare avînd repartiția Snedecor cu m, n grade de libertate, atunci variabila aleatoare

$$\xi = \frac{1}{2} \ln \eta$$

este repartizată Fischer cu m, n grade de libertate.

Într-adevăr, funcția de repartiție a variabilei aleatoare ξ este

$$F(z) = P(\xi < z) = P\left(\frac{1}{2}\ln\eta < z\right) = P(\eta < e^{2z}) =$$

$$= \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{e^{2z}} y^{\frac{m}{2}-1}\left(1+\frac{m}{n}y\right)^{-\frac{m+n}{2}} dy$$

în baza egalității (1.11.57). De aici rezultă că $f(z) = \frac{dF(z)}{dz}$ are expresia (1.11.61) și cu aceasta teorema este demonstrată.

Dacă η este o variabilă aleatoare avînd repartiția Snedecor cu m, n grade de libertate, atunci variabila aleatoare $\left(1+\frac{m}{n}\eta\right)^{-1}$ *are repartiția* $\beta\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$, *sau variabila aleatoare* $m\eta(n+m\eta)^{-1}$ *are repartiția* $\beta\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$.

13° *Repartiția Cauchy.* Variabila aleatoare ξ are repartiția Cauchy $C(a, b)$ dacă densitatea sa de repartiție este

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{a^2+(x-b)^2}, \quad a > 0 \qquad x \in R. \tag{1.11.62}$$

Repartiția $C(a, b)$ este unimodală și simetrică față de dreapta $x = b$. Modul și mediana repartiției $C(a, b)$ sînt egale cu b. Cvartilele sînt egale cu $a \pm b$.

Repartiția $C(a, b)$ nu admite momente sau momente centrate.

Funcția caracteristică corespunzătoare variabilei aleatoare ξ cu repartiția $C(a, b)$ este

$$\varphi(t) = e^{itb+a|t|}.$$

Dacă variabila aleatoare ξ are repartiția C(a, b), *atunci variabila aleatoare* $\lambda\xi + \mu$ *are repartiția* $C(|\lambda|a, \lambda b + \mu)$.

Într-adevăr, avem

$$\varphi_{\lambda\xi+\mu}(t) = M(e^{it(\lambda\xi+\mu)}) = e^{it\mu} M(e^{it\lambda\xi}) = e^{it\mu}\varphi_\xi(t\lambda) = e^{it\mu}e^{it\lambda b - a\lambda|t|} = e^{it(\mu+\lambda b)-a\lambda|t|},$$

ceea ce demonstrează teorema.

Dacă variabilele aleatoare independente $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *au repartițiile* $C(a_k, b_k)$, $(k = 1, \ldots, n)$, *atunci variabila aleatoare* $\sum_{k=1}^{n} \xi_k$ *are repartiția* $C\left(\sum_{k=1}^{n} a_k, \sum_{k=1}^{n} b_k\right)$.