Curs 2, EDDP, ID, 08.11.2020

Ecuații diferențiale implicite în $\mathbb{R}$, de ordinul întâi:

$$F(x,y,y')=0 \quad (1)$$

Explicitarea înseamnă $y'=f(x,y)$. (2)

Dacă (1) nu poate fi scrisă în forma (2) și, eventual, cu metodele de integrare să obținem mulțimea soluțiilor, atunci din (1) după o explicitare în raport cu x sau y se pot obține soluții parametrice.

Avem cazurile $y=h(x,y')^{(3)}$ sau $x=g(y,y')^{(4)}$.

Ca modalitate generală de obținere a soluțiilor parametrice pentru (3) și (4), se procedează astfel:

- notăm $y'=p$, p = parametru
- derivăm în raport cu x ec. (3) sau (4) și determinăm $x(p)$ sau $y(p)$.

I $\boxed{y=h(x,y')}$ (3)

unde h este funcție cunoscută, continuă și derivabilă. $h:\Delta\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

- $\boxed{y'=p} \xrightarrow{(3)} \underline{y=h(x,p)}$ (parte din soluția parametrică)

- derivăm ec (3):

$$y'=\frac{d}{dx}\Big(h(x,\underbrace{y'}_{y'(x)})\Big)$$

$$y'=\frac{\partial}{\partial x}h(x,y')+\frac{\partial}{\partial y'}\big(h(x,y')\big)\cdot\frac{dy'}{dx}$$

dar $y'=p \Rightarrow p=\frac{\partial}{\partial x}h(x,p)+\frac{\partial h}{\partial p}(x,p)\,\frac{dp}{dx} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dx}=\frac{p-\frac{\partial h}{\partial x}(x,p)}{\frac{\partial h}{\partial p}(x,p)}}$$ sau ecuația răsturnată:

$$\boxed{\frac{dx}{dp} = \frac{\frac{\partial h}{\partial p}(x,p)}{p - \frac{\partial h}{\partial x}(x,p)}} \cdot (5)$$

Din (5) $\Rightarrow x = x(p)$.
Deci, soluția parametrică este de forma:
$$\begin{cases} y = h(x,p) \\ x = x(p) \end{cases} \quad (6)$$

Cazuri particulare:

1) Ecuația diferențială implicită Lagrange

$$\boxed{y = x\varphi(y') + \psi(y')} \quad (7)$$

unde $\varphi, \psi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue și derivabile.

Avem: $y' = p$.
Derivăm ec (7):
$$y' = 1 \cdot \varphi(y') + x\varphi'(y')\cdot(y')' + \psi'(y')\cdot(y')' \Bigg] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = \varphi(p) + x\varphi'(p)p' + \psi'(p)p'$$
unde $p' = \frac{dp}{dx}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow p'(x\varphi'(p) + \psi'(p)) = p - \varphi(p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dx} = \frac{p - \varphi(p)}{x\varphi'(p) + \psi'(p)}}$$

Scriem ec. răsturnată:

$$\frac{dx}{dp} = \underbrace{\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}}_{= a(p)} x + \underbrace{\frac{\psi'(p)}{p-\varphi(p)}}_{b(p)}$$

ec. afină în variabile (p, x)
↑
variab independentă.

$\varphi(p) \neq p$

de unde deducem $x(p) \Rightarrow$ mulț. sol. parametrice:
$$\begin{cases} y = x\varphi(p) + \psi(p) \\ x = x(p) \end{cases}$$

Exemplu: Fie ecuația $y = x(y')^2 + (y')^3$

Se cere mulțimea soluțiilor ec.

Avem ec. Lagrange: $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$$\varphi(y') = (y')^2; \quad \psi(y') = (y')^3.$$

Avem: $y'=p \Rightarrow y = xp^2 + p^3$

Derivăm ec. $y' = \left(x(y')^2 + (y')^3\right)'$

$$y' = 1\cdot(y')^2 + x\cdot 2y'\cdot(y')' + 3(y')^2\cdot(y')'$$

Cum $y'=p \Rightarrow p = p^2 + \underline{x\cdot 2p\cdot p'} + \underline{3p^2 p'} \Rightarrow$

$$\Rightarrow p - p^2 = p'(2px + 3p^2)$$

$$\boxed{p(1-p) = p'p(2x+3p)}$$

• dacă $\underline{p=0}$, Cum $y'=p$ $\Rightarrow y'=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow y=C,\ C\in\mathbb{R}$. înloc în ec. dată $\Rightarrow$

$\Rightarrow C = x\cdot 0^2 + 0^3 \Rightarrow C=0 \Rightarrow \boxed{y(x)=0 \text{ e soluție}}$

• dacă $\underline{p\neq 0} \Rightarrow$ împărțim la p:

$$1-p = \frac{dp}{dx}(2x+3p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{2x+3p}{1-p}, \quad p\neq 1$$

• dacă $\underline{p=1} \Rightarrow y'=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = x+C$

înloc în ec.:

$\cancel{x}+C = \cancel{x\cdot 1^2} + 1^3$

$C=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y(x)=x+1}$ e soluție

$p\neq 1$

$$\underbrace{\frac{dx}{dp} = \overset{=a(p)}{\frac{2}{1-p}}x + \overset{=b(p)}{\frac{3p}{1-p}}}$$

ec. afină (liniară neomogenă), pe care o integrăm cu metoda variației constantelor:

$$\frac{d\bar{x}}{dp} = \underset{a(t)}{\frac{2}{1-p}}\bar{x} \Rightarrow \bar{x}(p) = C\cdot e^{A(p)}$$

ec. liniară omogenă atașată

aplicăm formula (18) (vezi curs 1)

$$x(p) = e^{A(p)}\int_{p_0}^{p} b(s)\,e^{-A(s)}\,ds + k e^{A(p)}$$

unde $A(p)$ prim. pt $a(p) = \frac{2}{1-p}$

și $b(p) = \frac{3p}{1-p}$.

Luăm $p_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Fie $\underline{p_0=2}$.

Acum $\int \frac{2}{1-p}\,dp = -2\int \frac{1}{p-1}\,dp = -2\ln|p-1| + C =$

$$= \ln (p-1)^{-2} + C = \ln \frac{1}{(p-1)^2} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A(p) = \ln \frac{1}{(p-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_2^p \frac{3s}{1-s} \cdot e^{-\ln\frac{1}{(s-1)^2}}\,ds = \int_2^p \frac{3s}{1-s}\, e^{\ln((s-1)^2)}\,ds =$$

$$= \int_2^p \frac{3s}{1-s}\cdot(s-1)^2\,ds = -3\int_2^p \frac{s}{\cancel{s-1}}(s-1)^{\cancel{2}}\,ds =$$

$$= -3\int_2^p (s^2-s)\,ds = -3\left(\frac{s^3}{3}-\frac{s^2}{2}\right)\Big|_2^p =$$

$$= -p^3 + \frac{3}{2}p^2 - \left(-8 + \frac{3\cdot 4^2}{2}\right) = -p^3 + \frac{3}{2}p^2 + 2$$

Deci:
$$x(p) = e^{\ln\frac{1}{(p-1)^2}}\cdot\left(-p^3+\frac{3}{2}p^2+2\right) + K\cdot e^{\ln\frac{1}{(p-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(p) = \frac{1}{(p-1)^2}\left(-p^3+\frac{3}{2}p^2+2\right) + \frac{K}{(p-1)^2}$$

Mult. sol. parametrice: $\begin{cases} y = xp^2 + p^3 \\ x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(-p^3+\frac{3}{2}p^2+\underline{2+K}\right) \end{cases}$; $K\in\mathbb{R}$

OBS. Dacă se poate elimina p între ec. sol. param. atunci rezultă soluția explicită $y = y(x)$

Deci: mult. sol. ec. date este:

$$\begin{cases} y(x) = 0 \\ y(x) = x+1 \\ \begin{cases} y = xp^2+p^3 \\ x = \frac{1}{(p-1)^2}\left(-p^3+\frac{3}{2}p^2+2+K\right) \end{cases}, K\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

2) <u>Ec. diferențială Clairaut</u> (caz particular de ec. Lagrange)

$$\boxed{y = xy' + \underbrace{\varphi(y')}_{\varphi(y')}} \quad (8).$$

Avem $\underline{y' = p}$. Derivăm ec. (8) $\Rightarrow y' = y' + x(y')' + \varphi'(y')\cdot(y')' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \cancel{p} = \cancel{p} + xp' + \psi'(p)p' \Rightarrow p'(x + \psi'(p)) = 0.$$

- $p' = 0 \Rightarrow p = C_1 \Rightarrow y' = C_1$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 \Rightarrow y(x) = C_1 x + C_2$$

$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

înloc în ec: $C_1\cancel{x} + C_2 = \cancel{x} C_1 + \psi(C_1)$

$\Rightarrow C_2 = \psi(C_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = C_1 x + \psi(C_1),\ C_1 \in \mathbb{R}}$$

- $x + \psi'(p) = 0 \Rightarrow x = \psi'(p) \Rightarrow$ o soluție

parametrică: $\boxed{\begin{cases} y = xp + \psi(p) \\ x = \psi'(p) \end{cases}}$

(II) $\boxed{x = g(y, y')}$ (4)

- notăm $y' = p \Rightarrow x = g(y,p)$. Pt. sol. param mai trebuie $y(p)$.
- derivăm (4) în raport cu x:

$$1 = \frac{\partial g}{\partial y}(y,y') \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{\partial g}{\partial y'}(y,y') \cdot \frac{d(y')}{dx}$$

$$1 = \frac{\partial g}{\partial y}(y,p) \cdot p + \frac{\partial g}{\partial p}(y,p) \cdot \frac{dp}{dx}$$

$$1 = \frac{\partial g}{\partial y}(y,p)\, p + \frac{\partial g}{\partial p}(y,p) \cdot \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow$$

"$y' = p$".

$$\Rightarrow 1 - \frac{\partial g}{\partial y}(y,p) \cdot p = \left(\frac{\partial g}{\partial p}(y,p) \cdot p\right) \cdot \frac{dp}{dy} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dp} = \frac{\frac{\partial g}{\partial p}(y,p) \cdot p}{1 - \frac{\partial g}{\partial y}(y,p)}}$$

ec. din care se obține $y = y(p)$?

$\rightarrow$ mult. de sol. parametrice $\begin{cases} x = g(y,p) \\ y = y(p) \end{cases}$

Scanned with CamScanner

Tema 1: Să se integreze ec. implicite următoare:

1) $yy' = x(y')^2+1$ $\left(\Leftrightarrow y = xy' + \frac{1}{y'}\right.$ ec. Clairaut$\left.\right)$

2) $y = (y')^2 - y'x + \frac{x^2}{2}$

3) $(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$ $\left(\Leftrightarrow x = \frac{(y')^3 + 8y^2}{4yy'}\right.$ cu cazuri part $y=0$, $y'=0$ $\left.\right)$

4) $y = -x + \left(\frac{y'+1}{y'-1}\right)^2$

5) $y = x(1+y') + (y')^2$

6) $y = xy' + \frac{1}{(y')^2}$

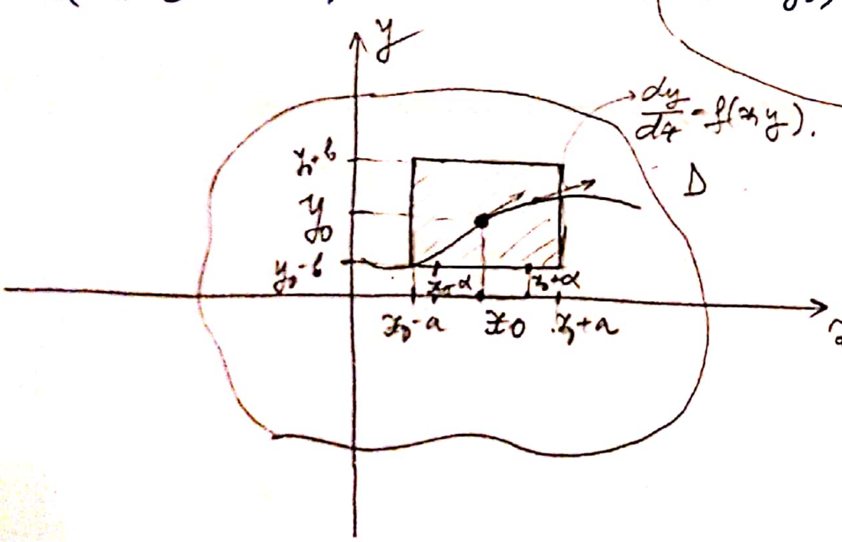
Problema Cauchy pentru ec. diferențiale în $\mathbb{R}$

Pt. ec. dif. $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$, spunem că se dă o problemă Cauchy, dacă se cere determinarea unei soluții a ec. care verifică cond. $x(t_0) = x_0$, adică:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (9) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (9')$$

unde $f : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(t_0, x_0) \in \Delta$. $(x_0, y_0) \in \Delta$.



Teorema de existență și unicitate (TEU) a soluției problemei Cauchy.

Fie prob. Cauchy $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ (9)

unde $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$.

Presupunem îndeplinite ipotezele:

i) f este continuă în ambele variabile.

ii) $\exists\, a, b > 0$ aî $D_{a,b} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$

$D_{a,b} \subset D$.

și notăm $M = \sup\limits_{(x,y) \in D_{a,b}} |f(x,y)|$

iii) f este funcție Lipschitz în a doua variabilă, adică: $\exists\, L > 0$ aî $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L |y_1 - y_2|$ $\forall (x,y_1), (x,y_2) \in D_{a,b}$

Concluzia: $\forall \alpha \in \left(0, \min\{a, \frac{b}{M}\}\right)$,

$\exists!\, \varphi : \underbrace{[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]}_{I_\alpha} \to [y_0 - b, y_0 + b]$

soluție a prob. Cauchy (9), adică:

$$\begin{cases} \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), & \forall x \in I_\alpha \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Propoziția 1 (reprezentarea sub formă integrală a soluției prob. Cauchy (9)):

Următoarele afirmații sunt echivalente:

a) $\varphi : I \to \mathbb{R}$ soluție a prob (9);

b) $\forall x \in I$: $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))\, ds$. (10)

obs (propoziția 2) Ipoteza iii) din TEU poate fi înlocuită cu: f să fie derivabilă în raport cu y și $\frac{\partial f}{\partial y}$ să fie funcție continuă.

Dem : Presupunem că $\frac{\partial f}{\partial y}$ este funcție continuă.

Notăm, pt $x \in [x_0-a, x_0+a]$, funcția:

$$g_x : [y_0-b, y_0+b] \to \mathbb{R}$$

$$g_x(y) = f(x,y) \Rightarrow g_x \text{ este continuă și derivabilă pe } [y_0-b, y_0+b]$$

Aplic. t. Lagrange funcție g_x pe $[y_1, y_2] \subset [y_0-b, y_0+b]$, $y_1 < y_2$

$$\Rightarrow \exists\, c \in (y_1, y_2) \text{ a.î.: } g_x(y_2) - g_x(y_1) = g_x'(c)(y_2-y_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x,y_2) - f(x,y_1) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,c)(y_2-y_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x,y_2) - f(x,y_1)| = \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,c)\right|}_{\leq L} |y_2-y_1|$$

Cum $\frac{\partial f}{\partial y}$ funcție continuă $\Rightarrow$ notăm $L = \sup\limits_{(x,y)\in D_{a,b}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow |f(x,y_2) - f(x,y_1)| \leq L|y_2-y_1| \Rightarrow f \text{ este funcție Lipschitz în raport cu a doua variab.}$$

$\forall (x,y_1), (x,y_2) \in D_{a,b}$

Dem TEU (pașii demonstrației) Fie $\alpha \in \left(0, \min\left(a, \frac{b}{M}\right)\right)$.

(P1). Se consideră un șir de funcții, numit șirul aproximațiilor succesive (Picard): $(\varphi_n)_{n\geq 0}$

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi_n : \underbrace{[x_0-\alpha, x_0+\alpha]}_{=I_\alpha} \to \mathbb{R} \\ \varphi_0(x) = y_0, \ \forall x \in I_\alpha \\ \varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_n(s))\, ds, \ \forall x \in I_\alpha. \end{cases}$$

despre care arătam că $\varphi_n(x) \in [y_0-b, y_0+b]$

$\forall x \in I_\alpha, \forall n \in \mathbb{N}$,

adică: $G_{\varphi_n} \subset D_{a,b}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$G_{\varphi_n} = \{(x, \varphi_n(x)) \mid x \in I_\alpha\}$$

(P2) Se arată că $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ este șir Cauchy, adică se arată, prin inducție, că are loc inegalitatea:

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq \frac{M L^n |x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\downarrow (n\to\infty)$$
$$0$$

de unde rezultă că $\exists\, \varphi : I_\alpha \to [y_0 - b, y_0 + b]$

$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x), \forall x \in I_\alpha \\ \text{Din (11)} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi$ verifică formula de reprezentare integrală a soluției prob. Cauchy (9) $\Rightarrow \varphi$ este soluția prob. Cauchy (9)

(P3) Arăt că φ obținut ca limita a șirului $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ este unica soluție a problemei Cauchy.

Exemplu: Fie problema Cauchy: $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

a) Verificați ipotezele TEU.

b) Arătați că șirul aproximațiilor succesive este

$$\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}, \forall n \in \mathbb{N}$$

c) Arătați că soluția problemei Cauchy date este: $y(x) = e^x$.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(x,y) = y \quad ; x_0 = 0, \; y_0 = 1.$

i) f este continuă în ambele variabile.

ii) Alegem $a, b > 0$. Obținem $\Delta_{a,b} = [-a, a] \times [1-b, 1+b]$.

$$M = \sup_{(x,y)\in \Delta_{a,b}} |f(x,y)| = \sup_{y \in [1-b, 1+b]} |y| = 1+b$$

iii) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 1$ funcție continuă

$$L = \sup_{(x,y)\in \Delta_{a,b}} \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = 1$$

b) $\varphi_0(x)=1$.

$$\varphi_1(x)=1+\int_0^x f(s,\varphi_0(s))\,ds=1+\int_0^x \varphi_0(s)\,ds=1+\int_0^x 1\,ds=$$

$$=1+s\Big|_0^x=1+x=1+\frac{x}{1!}$$

Presupunem adevarat pentru n:

$$\varphi_n(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$$ și dem că

e adev. pt $n+1$, adică:

$$\varphi_{n+1}(x)=1+\frac{x}{1!}+\frac{x}{2!}+\dots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Calculăm φ_{n+1} pornind de la relația de recurență:

$$\varphi_{n+1}(x)=1+\int_0^x f(s,\varphi_n(s))\,ds=1+\int_0^x \varphi_n(s)\,ds=$$

$$=1+\int_0^x\left(1+\frac{s}{1!}+\frac{s^2}{2!}+\dots+\frac{s^n}{n!}\right)ds=$$

$$=1+\left(s+\frac{s^2}{1!\cdot 2}+\frac{s^3}{2!\cdot 3}+\dots+\frac{s^{n+1}}{n!(n+1)}\right)\Bigg|_0^x=$$

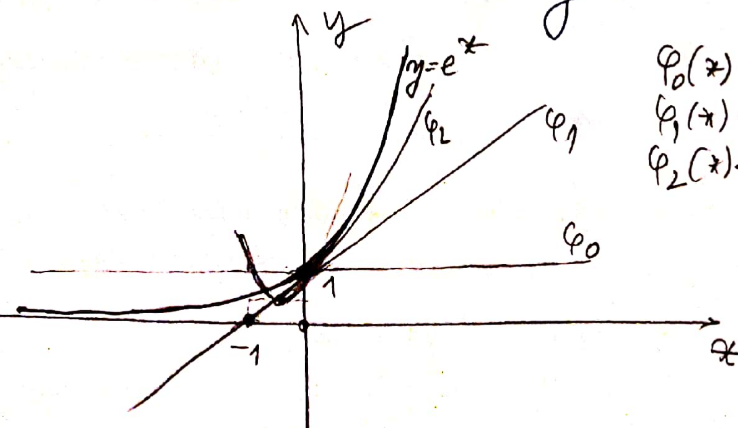
$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

c) $\dfrac{dy}{dx}=y$ ec. liniară omogenă $\Big|\Rightarrow y(x)=C\cdot e^{A(x)}$; $a(x)=1\Rightarrow \int 1\,dx=\underbrace{x}_{A(x)}+C \Big|\Rightarrow$

$\Rightarrow y(x)=Ce^x$, $C\in\mathbb{R}$

C se determină din cond inițială $y(0)=1\Big\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow 1=C\cdot e^0\Rightarrow C=1\Rightarrow y(x)=e^x.$$



$\varphi_0(x)=1$

$\varphi_1(x)=1+x$

$\varphi_2(x)=1+x+\dfrac{x^2}{2}$

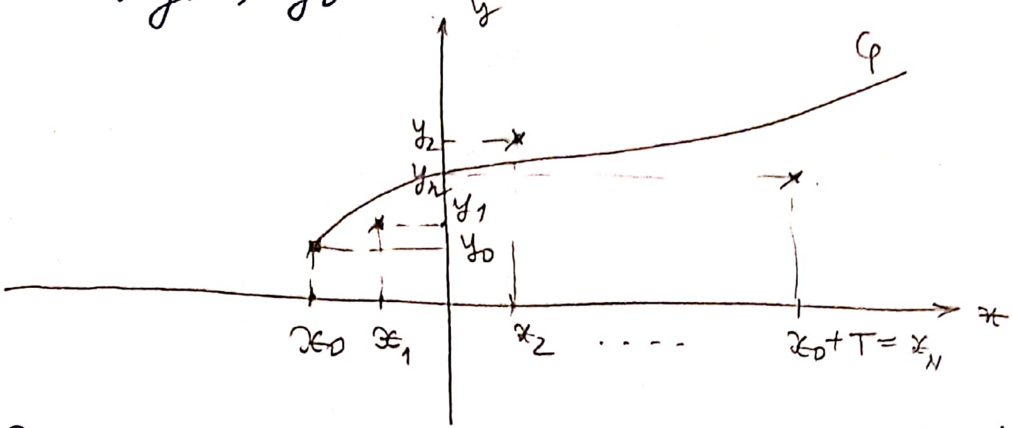
$V\left(-\dfrac{1}{2\cdot\frac{1}{2}},-\dfrac{-1}{4\cdot\frac{1}{2}}\right)$

$V\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

Scanned with CamScanner

Metode numerice pentru integrarea aproximativă a problemelor Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), & x \in [x_0, x_0+T]. \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (12)$$



Presupunem îndeplinite cond (ipotezele) din TEU. Fie φ soluția.
Se consideră o diviziune a intervalului $[x_0, x_0+T]$:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = x_0+T$$

și determinăm $y_0, y_1, y_2, \dots, y_N$ aproximări pentru soluția φ a problemei Cauchy, astfel încât

$$|\varphi(x_j) - y_j| = O(h^k)$$

unde $h = \max\limits_{j=0,N-1} \underbrace{(x_{j+1} - x_j)}_{h_j}$, $j = \overline{0,N-1}$

iar $k \in \mathbb{N}^*$, k = ordinul metodei de aproximare.

O schemă numerică într-un pas este de forma:

$$(13) \begin{cases} y_0 \text{ (din problema Cauchy)}. \\ y_{j+1} = y_j + h_j \cdot \phi(h_j, x_j, y_j), \quad j = \overline{0,N-1} \end{cases}$$

unde $\phi : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se definește în funcție de f și de derivatele lui f.

Cea mai simplă schemă numerică (13) este <u>metoda Euler</u> în care $\phi(h,x,y) = f(x,y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_0 \\ y_{j+1} = y_j + h_j f(x_j, y_j), \quad j = \overline{0,N-1} \end{cases} \quad (14)$$

Teorema de aproximare (metoda Euler)

Presupunem că $h_j = h = \text{const}$, $h = \frac{T}{N}$

$x_j = x_0 + jh$, $j = \overline{0,N}$ (diviziune echidistantă)

Considerăm $(y_j)_{j=\overline{0,N}}$ aproximări obținute prin metoda Euler:
$$\begin{cases} y_0 \\ y_{j+1} = y_j + h f(x_j, y_j), \; j = \overline{0, N-1} \end{cases}$$

În aceste condiții $\exists A > 0$ astfel încât:
$$|\varphi(x_j) - y_j| < A \cdot h, \quad \forall j = \overline{0,N} \qquad (15)$$

adică, metoda Euler este de ordinul $k = 1$.

Exemplu:
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = y, \quad x \in [0,1] \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$x_0 = 0$, $x_0 + T = 1 \Rightarrow T = 1$

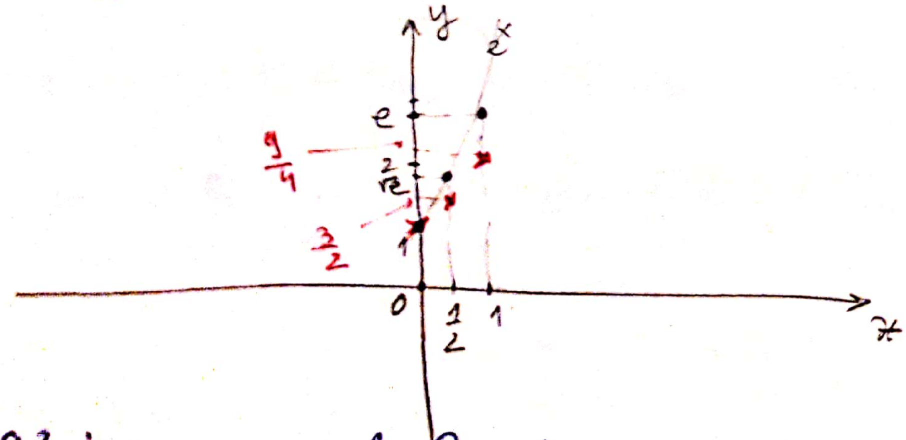
$N = 2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$

$f(x,y) = y$

$y_0 = 1$

$y_1 = y_0 + h f(x_0, y_0) = 1 + \frac{1}{2} \cdot y_0 = \frac{3}{2}$

$y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot y_1 = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$.



Tema 2: 1) Pentru prob. Cauchy:

a) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = x + y \\ y(0) = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$

să se rezolve cerințele:

i) verificați ipotezele TEU

ii) Determinați $(\varphi_n)_{n\geq 0}$;

iii) Determinați soluția fiecărei probleme.

iv) pt $x\in[0,1]$, $N=2$ calculați aproximatiile y_0, y_1, y_2 cu metoda Euler.

2) Fie problema Cauchy:
$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x\cos y, \quad (x,y)\in \underbrace{[-1,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]}_{D} \\ y(0)=\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

i) arătați că verifică TEU.

ii) determinați soluția problemei.

iii) Calculați $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ din șirul aproximațiilor succesive.

Sisteme de ecuații diferențiale de ordinul întâi

Fie:
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (15)$$

cu $f: D\subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $f=(f_1,\dots,f_n)$
și $y=(y_1,\dots,y_n)$ = vectorul funcției necunoscute, sistem de ecuații diferențiale, care poate fi scris pe componente sub forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x,(y_1,\dots,y_n)) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x,(y_1,\dots,y_n)) \end{cases} \qquad (16)$$

Exemplu 1) Pt. ecuația diferențială de ordin n, în forma explicită:
$$y^{(n)} = f(x,y,y^{(1)},\dots,y^{(n-1)})$$
se poate asocia un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întâi cu n necunoscute (adică, de forma (16)), astfel:

$z_1 = y$; $z_2 = y^{(1)}$; ... ; $z_{n-1} = y^{(n-2)}$; $z_n = y^{(n-1)}$

$z = (z_1,\dots,z_n)$

Derivând, rezultă:

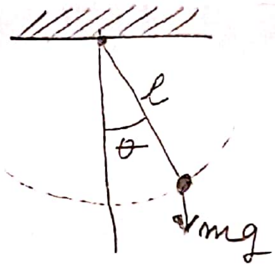
$$\begin{cases} z_1' = y^{(1)} = z_2 \quad \leftarrow f_1(x,z) \\ z_2' = y^{(2)} = z_3 \quad \leftarrow f_2(x,z) \\ \vdots \\ z_{n-1}' = y^{(n-1)} = z_n \\ z_n' = y^{(n)} = f(x, \underbrace{z_1, z_2, \dots, z_n}_{z}) \quad \leftarrow f_n(x,z). \end{cases}$$

Deci sistemul în variab. indep. x și variab. dependentă $z = (z_1, \dots, z_n)$, este:

$$\begin{cases} \frac{dz_1}{dx} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dx} = z_3 \\ \vdots \\ \frac{dz_n}{dx} = f(x, (z_1, \dots, z_n)) \end{cases} \qquad (17)$$

Exemplu 2) Ec. de mișcare a pendulului matematic este:

$$\theta'' = \frac{g}{\ell} \sin\theta$$



θ = variab. dependentă

t = variab. independentă

$$f(t, \theta, \theta') = \frac{g}{\ell} \sin\theta$$

Pt sistem:

$$\begin{cases} z_1 = \theta \\ z_2 = \theta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1' = \theta' = z_2 \\ z_2' = \theta'' = \frac{g}{\ell} \sin z_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = z_2 \\ \frac{dz_2}{dt} = \frac{g}{\ell} \sin z_1 \end{cases}$$

Problema Cauchy pentru sisteme de ecuații diferențiale

$$(18) \quad \begin{cases} \frac{dy_j}{dx} = f_j(x, (y_1, \dots, y_n)), \; j = \overline{1,n} \\ y_j(x_0) = y_{0j}, \; j = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$(x_0, (y_{01}, \dots, y_{0n})) \in \Delta$$

TEU pt (18) are loc în următoarele ipoteze:

i) f continuă în ambele variabile x și $y=(y_1,\dots,y_n)$

ii) $\exists\, a>0,\ b_1,\dots,b_n>0$ a.î.:

$$D_{a,b_1,\dots,b_n}=[x_0-a,x_0+a]\times[y_{01}-b_1;y_{01}+b_1]\times\dots\times[y_{0n}-b_n;y_{0n}+b_n]$$

$$D_{a,b_1,\dots,b_n}\subset\Delta.$$

notăm $$M=\sup_{(x,y)\in D_{a,b_1,\dots,b_n}}|f(x,\underbrace{(y_1,\dots,y_n)}_{y})|$$

iii) $\exists\, L>0$ a.î.

$$\|f(x,y)-f(x,z)\|\le L\,\|y-z\|,$$

$\forall (x,y),(x,z)\in D_{a,b_1,\dots,b_n}$

unde $y=(y_1,\dots,y_n)$; $z=(z_1,\dots,z_n)$

iar $\|\cdot\|$ este o normă în $\mathbb{R}^n$.

Concluzie: $\forall \alpha\in\left(0,\min\left(a,\frac{b}{M}\right)\right)$,

$\exists\ \varphi:[x_0-\alpha,x_0+\alpha]\to\underbrace{[y_{01}-b_1;y_{01}+b_1]\times\dots\times[y_{0n}-b_n;y_{0n}+b_n]}_{\subset\mathbb{R}^n}$

soluție a prob. Cauchy (18).

Obs: Pt. un sistem dat, determinarea constantei L se face folosind derivata (Jacobi) în raport cu $(y_1,\dots,y_n)$:

$$\frac{Df}{Dy}=\frac{D(f_1,\dots,f_n)}{D(y_1,\dots,y_n)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial y_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\end{pmatrix}$$

Avem: $$L=\sup_{(x,y)\in D_{a,b_1,\dots,b_n}}\left\|\frac{\partial f}{\partial y}\right\|.$$

Exemplu: Pt. sistemul asociat mișcării pendulului matematic avem: $f_1(t,(z_1,z_2))=z_2$

$f_2(t,(z_1,z_2))=\frac{g}{\ell}\sin z_1$ $\Rightarrow$

$$\frac{Df}{Dz} = \frac{D(f_1, f_2)}{D(z_1, z_2)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \frac{\partial f_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1} & \frac{\partial f_2}{\partial z_2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell}\cos z_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale folosind integrale prime.

Considerăm sistemul în forma (16).

Definiție: O funcție $F : D \to \mathbb{R}$ se numește integrală primă pentru sistemul (16) dacă este constantă de-a lungul oricărei soluții a sistemului, adică:

$$(19) \quad \begin{cases} \forall \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : I_\varphi \to \mathbb{R}^n \text{ soluție a sistemului (16)} \\ \exists\, C_\varphi \in \mathbb{R} \text{ a.î. } F(x, \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)) = C_\varphi,\ \forall x \in I_\varphi \end{cases}$$

Propoziția 3 (Criteriul pentru integrale prime)

$F : D \to \mathbb{R}$ este integrală primă pentru (16) $\iff$

$$(20) \quad \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \underset{(y_1,\dots,y_n)}{y}) + \sum_{k=1}^{n} f_k(x, (y_1, \dots, y_n)) \cdot \frac{\partial F}{\partial y_k}(x, y)}_{\frac{dF}{dx}} = 0.$$

$$\frac{dF}{dx} = 0.$$

Dem: F integrală primă $\iff$ F constantă de-a lungul oricărei soluții $\iff \frac{dF}{dx}(x, \underset{(y_1,\dots,y_n)}{y}) = 0 \iff$, $y_k = y_k(x)$

$$\iff \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k}(x,y) \cdot \underbrace{\frac{dy_k}{dx}}_{\overset{(16)}{=} f_k(x, y_1, \dots, y_n)} = 0. \iff$$

$$\iff \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k}(x,y) \cdot f_k(x,y)) = 0 \iff (20) \text{ e adev!}$$

Exemplu de integrală primă pt. sistemul asociat ec. de mișcare a pendulului matematic:

$$\begin{cases} z_1' = z_2 & f_1 \\ z_2' = \frac{g}{\ell}\sin z_1 & f_2 \end{cases}$$

Fie $F(t,(z_1,z_2)) = \frac{1}{2}z_2^2 + \frac{g}{\ell}\cos z_1$.

Arătăm că F este integrală primă a sistemului:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial z_1} = -\frac{g}{\ell}\sin z_1 \quad ; \quad \frac{\partial F}{\partial z_2} = \cancel{\frac{1}{2}}\cancel{2}z_2 = z_2$$

Calculăm (din (20)):

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,z) + \frac{\partial F}{\partial z_1}(t,z)\cdot f_1(t,z) + \frac{\partial F}{\partial z_2}(t,z) f_2(t,z) =$$

$$= 0 + \left(-\frac{g}{\ell}\sin z_1\right) z_2 + z_2 \cdot \frac{g}{\ell}\sin z_1 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ F integrală primă pt sistemul dat.

Obs:

$$\theta'' = \frac{g}{\ell}\sin\theta \quad \Big| \cdot \theta'$$

$$\theta''\theta' - \frac{g}{\ell}\theta'\sin\theta = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}(\theta')^2\right)' + \left(\frac{g}{\ell}\cos\theta\right)' = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}(\theta')^2 + \frac{g}{\ell}\cos\theta\right)' = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}(\theta')^2 + \frac{g}{\ell}\cos\theta\right) = const$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(\theta')^2 + \frac{g}{\ell}\cos\theta = \frac{k}{m} \quad \Big| \cdot m$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}m(\theta')^2}_{E_c} + \underbrace{\frac{mg\cos\theta}{\ell}}_{E_p} = \underline{k} \Rightarrow$$ energia sistemului se conservă.

Dacă cu ajutorul integralei prime înlocuim o parte dintre variabilele $(y_1,\dots,y_n)$ dependente, atunci se poate reduce dimensiunea sistemului.

Exemplu: Fie sistemul

$$\begin{cases} y_1' = \frac{y_1}{y_1^2+y_2^2} \\ y_2' = \frac{y_2}{y_1^2+y_2^2} \end{cases} \qquad (x,(y_1,y_2)) \in (0,\infty)\times(0,\infty)^2 = D$$

a) Arătați că $F: D \to \mathbb{R}$, $F(x,(y_1,y_2)) = -2x + y_1^2 + y_2^2$ este integrală primă a sistemului

b) Determinați soluția sistemului folosind integrala primă a sistemului.

a) Verificăm relația (20):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2 \; ; \; \frac{\partial F}{\partial y_1} = 2y_1 \; ; \; \frac{\partial F}{\partial y_2} = 2y_2$$

Avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \underbrace{f_1(x,y)} \frac{\partial F}{\partial y_1}(x,y) + \underbrace{f_2(x,y)} \frac{\partial F}{\partial y_2}(x,y) =$$

$$= -2 + \frac{y_1}{y_1^2+y_2^2} \cdot 2y_1 + \frac{y_2}{y_1^2+y_2^2} \cdot 2y_2 =$$

$$= -2 + \frac{1}{\cancel{y_1^2+y_2^2}} \cdot 2(\cancel{y_1^2+y_2^2}) = -2+2=0 . \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ F este integrală primă a sistemului dat.

b) F integrală primă $\Rightarrow$ $F(x, y_1, y_2) = C_1$, când $y(y_1, y_2)$ verifică sistemul.

$$\Rightarrow -2x + y_1^2 + y_2^2 = C_1 \Rightarrow y_1^2 + y_2^2 = C_1 + 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = \dfrac{y_1}{2x+C_1} \\ \dfrac{dy_2}{dx} = \dfrac{y_2}{2x+C_1} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ am obținut un sistem format din două ecuații independente (una doar în (x, y_1) și una în (x, y_2))

Obs că fiecare ec este liniară omogenă $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y_1(x) = C_2 \cdot e^{A(x)}$$

A primitivă pt $a(x) = \dfrac{1}{2x+C_1}$

$$\int \frac{1}{2(x+\frac{C_1}{2})} dx = \frac{1}{2} \ln\left|x+\frac{C_1}{2}\right| + K =$$

$$= \ln\sqrt{x+\frac{C_1}{2}} + K =$$

$$= \ln\sqrt{2x+C_1} - \underbrace{\ln\sqrt{2} + K} \Rightarrow \boxed{A(x) = \ln\sqrt{2x+C_1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1(x) = C_2\sqrt{2x+C_1} \;, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

La fel, din a doua ec: $\boxed{y_2(x) = C_3\sqrt{2x+C_1}, \; C_1, C_3 \in \mathbb{R},}$

Numărul de constante independente trebuie să fie egal cu numărul de ec (= nr. de componente ale funcției necunoscute).
Legătura între constante se obține înlocuind în integrala primă: $F(x, y_1, y_2) = C_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -2x + \left(C_2\sqrt{2x+C_1}\right)^2 + \left(C_3\sqrt{2x+C_1}\right)^2 = C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x + 2xC_2^2 + C_1C_2^2 + 2xC_3^2 + C_1C_3^2 = C_1 \Rightarrow$$

$$\forall x \in (0, \infty)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(-2+2C_2^2+2C_3^2\right)}x + C_1\underbrace{\left(C_2^2+C_3^2\right)} = C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2+2\left(C_2^2+C_3^2\right)=0 \\ C_1\left(C_2^2+C_3^2\right)=C_1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C_2^2+C_3^2=1}$$

Soluția sistemului va fi:

$$\begin{cases} y_1(x) = C_2\sqrt{2x+C_1} \\ y_2(x) = C_3\sqrt{2x+C_1} \\ \text{cu } C_2^2+C_3^2=1 \end{cases}$$

Tema 3: 1) Fie sistemul:
$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 - y_3 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3 - y_1 \\ \dfrac{dy_3}{dx} = y_1 - y_2 \end{cases}$$

Să se arate că $F(x, (y_1, y_2, y_3)) = y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1$ este integrală primă a sistemului dat.

2) Fie sistemul
$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{y_1}{y_1^2+y_2^2} \\ y_2' = -\dfrac{y_2}{y_1^2+y_2^2} \end{cases}$$

a) Arătați că $F_1(x, y_1, y_2) = y_1y_2$ este integrală primă a sistemului.
b) Folosiți integrala primă de la punctul a) și determinați soluția sistemului:

Sisteme de ecuații diferențiale liniare

Sistemul (10) : $\frac{dy_j}{dx} = f_j(x, (y_1, \dots, y_n))$, $j = \overline{1,n}$

este liniar dacă funcțiile $f_1, \dots, f_n$ sunt liniare în raport cu $y_1, \dots, y_n$, adică:

$$f_j(x, (y_1, \dots, y_n)) = a_{j1}(x) y_1 + \dots + a_{jn}(x) y_n$$

$j = \overline{1,n}$.

Deci, sistemul se scrie:

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}(x) y_1 + \dots + a_{1n}(x) y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}(x) y_1 + \dots + a_{nn}(x) y_n \end{cases}$$

sau, în formă matriceală:

$$(22) \quad \begin{pmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}}_{A(x)} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\frac{dy}{dx} = A(x) y$$

unde $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j = \overline{1,n}}$

$a_{ij} : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

<u>Observație</u>: (23) În ipoteza că a_{ij}, $i,j = \overline{1,n}$ sunt funcții continue și derivabile, atunci problema Cauchy:

$$\begin{cases} y' = A(x) y \ , \ (x,y) \in I \times \mathbb{R}^n \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$

are soluție unică.

Notăm S_A = mulțimea soluțiilor sistemului $y' = A(x)y$

Propoziție:

a) $(S_A, +, \cdot)$ este spațiu vectorial real.

adunarea funcțiilor

înmulțirea funcțiilor cu scalari

b) Dacă $(a_{ij}(x))_{i,j=\overline{1,n}}$ sunt funcții continue și derivabile, atunci $\dim_{\mathbb{R}} S_A = n$

Dem:

a) $S_A = \{ \varphi : I \to \mathbb{R}^n \mid \varphi$ soluție a sistemului $y' = A(x)y$ adică $\varphi' = A(x)\varphi \}$.

$(S_A, +)$ grup comutativ (e.n = funcția zero

+ prop. înmulțirii cu scalari:

$$\begin{cases} 1)\ \alpha\varphi + \alpha\psi = \alpha(\varphi+\psi) \\ 2)\ \alpha\varphi + \beta\varphi = (\alpha+\beta)\varphi \\ 3)\ \alpha(\beta\varphi) = (\alpha\beta)\varphi \\ 4)\ 0\cdot\varphi = 0 \\ 5)\ 1\cdot\varphi = \varphi \end{cases}$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\varphi, \psi \in S_A$.

Verificăm că:

1) $\forall \varphi, \psi \in S_A$ avem $\varphi + \psi \in S_A$

2) $\forall \varphi \in S_A$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ avem $\alpha\varphi \in S_A$.

1) $\varphi, \psi \in S_A \Rightarrow \begin{cases} \varphi' = A(x)\varphi \\ \psi' = A(x)\psi \end{cases}$

Avem $(\varphi+\psi)' = \varphi' + \psi' = A(x)\varphi + A(x)\psi =$
$= A(x)(\varphi+\psi) \Rightarrow \varphi + \psi \in S_A$

2) $\varphi \in S_A \Rightarrow \varphi' = A(x)\varphi$

$\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha\varphi)' = \alpha\varphi' = \underset{\in \mathbb{R}}{\alpha} A(x)\cdot\varphi = A(x)\cdot(\alpha\varphi) \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha\varphi \in S_A$.

b) Pt. a arăta că $\dim_{\mathbb{R}} S_A = n$, este suficient să arătăm că există o funcție bijectivă de la $\mathbb{R}^n$ la S_A. Fie $x_0 \in I$ și fie $\mathcal{F}_{x_0} : \mathbb{R}^n \to S_A$ definită prin

$\mathcal{F}_{x_0}(y_0)$ = soluția φ a prob. Cauchy $\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ (24)

din obs (23) $\Rightarrow$ $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n$, $\exists ! \varphi$ sol a prob. Cauchy (24)

De asemenea, $\forall \varphi$ soluție din S_A, $\exists\, y_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 = \varphi(x_0)$ a.î. φ sol. a prob. $\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_0) = \varphi(x_0) \end{cases}$

În concluzie, $\mathcal{F}_{x_0}$ este funcție bijectivă de la $\mathbb{R}^n$ la S_A.

Cum $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^n = n$ $\Big\} \Rightarrow$ $\underline{\dim_{\mathbb{R}} S_A = n}$

<u>Consecință</u>: Dacă avem $\dim_{\mathbb{R}} S_A = n$, atunci există cel puțin o bază în S_A, adică există $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ soluții în S_A, care generează toate soluțiile din S_A.

<u>Def</u>. O bază în S_A se numește <u>sistem fundamental de soluții</u>.

Fie $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset S_A$ bază. Avem $\varphi_j = {}^t(\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jn}) = \begin{pmatrix} \varphi_{j1} \\ \vdots \\ \varphi_{jn} \end{pmatrix}$

Matricea: $\phi(x)$ = coloane $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ se numește <u>matrice fundamentală de soluții</u>.

<u>Propoziția 5</u>: Dacă ϕ este matrice fundamentală de soluții, atunci $\det \phi(x) \neq 0$, $\forall x \in I$, adică, $\exists (\phi(x))^{-1}$, $\forall x \in I$.

Algoritm de rezolvare a sistemelor liniare omogene, $y' = A(x)y$, cu coeficienți constanți

$A(x) = A \in M_n(\mathbb{R})$

$a_{ij}(x) = \text{const.}$

Sistemul se scrie $\boxed{y' = Ay}$ (25)

Algoritmul de determinare a unui sistem fundam. de soluții pt (25)

1) Se determină valorile proprii ale matricii A, adică, rezolvăm ec:

$$\underbrace{\det(A - \lambda I_n)}_{\parallel} = 0.$$

$P_A(\lambda)$ = polinomul caracteristic asociat matricii A

Notăm $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valorile proprii distincte cu multiplicități $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$, adică:

$$P_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

$$m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$$

2) Pt $j = \overline{1,k}$, pentru fiecare valoare proprie λ_j se determină m_j soluții pentru sistemul fundamental de soluții. Avem cazurile:

Cazul 1: $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $m_j = 1$

Cazul 2: $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $m_j > 1$

Cazul 3: $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $m_j = 1$

Cazul 4: $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $m_j > 1$

Cazul 1: $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{R}, m_j = 1}$ $\Rightarrow$ determinăm $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ a.î. $Au = \lambda_j u$, adică u este vector propriu asociat valorii proprii λ_j $\Rightarrow$ o soluție în sistemul fundam. de soluții: $\boxed{\varphi_1(x) = e^{\lambda_j x} u}$

Cazul 2 $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{R},\ m_j > 1}$ $\Rightarrow$ determinăm vectorii $p_0, p_1, \dots, p_{m_j-1} \in \mathbb{R}^n$ nu toți nuli, astfel încât $\varphi(x) = \left(\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s \cdot x^s\right) e^{\lambda_j x}$ să fie soluție a sistemului $y' = Ay$ $\Rightarrow$ se obțin m_j sisteme de vectori $\left(p_0^{(r)}, \dots, p_{m_j-1}^{(r)}\right)_{r=\overline{0, m_j-1}}$ deci rezultă m_j soluții de forma:

$$\boxed{\varphi_r(x) = \left(\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s^{(r)} x^s\right) e^{\lambda_j x},\ r = \overline{0, m_j-1}}$$

Cazul 3 $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ m_j = 1}$ $\Rightarrow$ determinăm $u \in \mathbb{C}^n, u \neq 0_{\mathbb{C}^n}$ a.î. $Au = \lambda_j u$ și scriem 2 soluții în sistemul fundamental:

$\varphi_1(x) = Re\left(e^{\lambda_j x} u\right)$

$\varphi_2(x) = Im\left(e^{\lambda_j x} u\right)$

(corespunzătoare pt λ_j și $\overline{\lambda_j}$).

Cum $P_A(\lambda)$ polinom cu coef reale $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\overline{\lambda_j}$ este valoare proprie între cele distincte și are aceeași multiplicitate ca λ_j

Cazul 4 $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ m_j > 1}$ – la fel ca și cazul 2 dar cu $p_0, \dots, p_{m_j-1} \in \mathbb{C}^n$ nu toți nuli $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ se scriu $2 \cdot m_j$ soluții în sist. fundam.:

$$\varphi_r(x) = Re\left(\left(\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s^{(r)} x^s\right) e^{\lambda_j x}\right),\ r = \overline{0, m_j-1}$$

$$\tilde{\varphi}_r(x) = Im\left(\quad\right),\ r = \overline{0, m_j-1}$$

Tema 4: Determinați un sistem fundamental de soluții pentru sistemul $\begin{cases} y_1' = 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$