C1 (1).

- Elemente de optimizare liniară

- Formularea problemei
- Formele standard, canonice
- Transformări ale acestor pb.
- Metoda simplex (primal)
  - Teoreme
  - Algoritmul de rezolvare.
    - cazul $B = I$ - primal admisibilă
    - cazul construirii unei Baze Primal Adm
- Dualitate
- TFD (Teorema fundamentală a dualității
- Teoreme ale ecarturilor complementare
- Metoda simplex dual
  - Teoreme
  - Algoritmul $B = I$ = dual admisibilă
    - cazul
    - cazul construim o Bază Dual Adm
- Problema transporturilor

$$\begin{cases} \inf(\sup) \, c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$c^T x$

$c \in \mathbb{R}^n = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

$x \geq 0 \Leftrightarrow x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0.$

Lucrăm cu vectori coloană $\big(\ \big)$

$a^1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, a^j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

②

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad a_i = \begin{pmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$A = (a^1\, a^2 \dots a^j \dots a^n) = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_i^T \\ \vdots \\ a_m^T \end{pmatrix}$$

Pb. de mai sus este o pl în formă <u>standard</u>

<u>forme canonice</u>:

forma canonică (inf) (minim)

$$\begin{cases} \inf c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Forma canonică (sup)

$$\begin{cases} \sup c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$c^T x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n = b_i \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \\ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = \overline{1,m}.$$

<u>forma generală</u>:

$$\min(\max)(c_1^T x^1 + c_2^T x^2 + c_3^T x^3)$$

$$\begin{cases} A_{11} x^1 + A_{12} x^2 + A_{13} x^3 \geq b_1 \\ A_{21} x^1 + A_{22} x^2 + A_{23} x^3 = b_2 \\ A_{31} x^1 + A_{32} x^2 + A_{33} x^3 \leq b_3 \\ x^1 \geq 0 \\ x^2 \text{ arbitrar} \\ x^3 \leq 0 \end{cases}$$

$$x^1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_7 \end{pmatrix} \geq 0$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ arb}$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \leq 0$$

Transformări pt a aduce o problemă la una din formele inițiale: standard sau canonică (3)

1) $a \in \mathbb{R}^n$, $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T$ $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$a^T x = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

O ineg de forma:

$$a^T x \le \alpha \iff \begin{cases} a^T x + y = \alpha \\ y \ge 0 \end{cases} \quad (y \in \mathbb{R})$$

O ineg de form

$$a^T x \ge \alpha \iff \begin{cases} a^T x - y = \alpha \\ y \ge 0 \end{cases}$$

O egalitate:

$$a^T x = \alpha \iff \begin{cases} a^T x \ge \alpha \\ -a^T x \ge -\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} a^T x \le \alpha \\ -a^T x \le -\alpha \end{cases}$$

2) $x \ge 0$; $x \le 0 \iff y \ge 0$ (unde $y = -x$).

x arbitrar: $x = x^1 - x^2$, $x^1, x^2 \ge 0$.

$x \in \mathbb{R}$.

$$-3 = \underset{\ge 0}{5} - \underset{\ge 0}{8} = 10 - 13$$

scrierea nu este unică

$x \in \mathbb{R}^3$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ arbitrar. $x = \underset{\ge 0}{x^1} - \underset{\ge 0}{x^2}$

$$x = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} = \underset{\ge 0}{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}} - \underset{\ge 0}{\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix}}$$

3) lucrăm cu pb de minim, (inf)

$\boxed{\sup f(x) = -(\inf(-f(x)))}$; $\inf f(x) = -(\sup(-f(x)))$.

Ex $\sup(\underbrace{3x_1 - 5x_2 + 4x_3}_{f(x)})$; refolo: $\inf(-3x_1 + 5x_2 - 4x_3)$

val $= -(-9) = 9$ -9

• Să considerăm $P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\}$

$$(1) \begin{cases} \inf c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

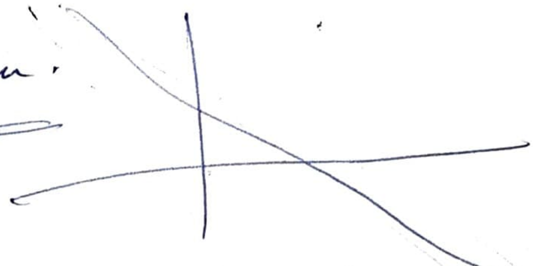
$x \geq 0$ – condiții de nenegativitate

$x \in P$ s.n. sol. posibilă, soluție admisibilă, program pt (1)

$a \in \mathbb{R}^n$ $\cancel{x} \in \mathbb{R}^n$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$a^T x = \alpha$ s.n. hiperplan.

$3x_1 + 7x_2 = 5$



$H_{a,\alpha} = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x = \alpha\}$

$a^T x \geq \alpha$; $S_+ = \{x \in \mathbb{R}^n / a^T x \geq \alpha\}$ semispații închise

$S_- = \{ \quad \leq \quad \}$

P = intersecție de hiperplane și de semispații închise.
tronson ; nu ; poliedru convex

• T principală a opt liniare

• $x^0 \in P$ este soluție optimă pt (1) dacă $c^T x^0 \leq c^T x$ $\forall x \in P$.

• Soluție de bază pt sistemul $Ax = b$

$x^0 = (x^0_1, x^0_2, \dots, x^0_j, \dots, x^0_n)^T$ este soluție de bază dacă coloanele din A ce corespund la $x^0_i \neq 0$ sunt liniar independente ($v^1, v^2, \dots, v^k \in \mathbb{R}^n$ lin. indep. dacă din $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j v^j = 0 \implies \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$.

$v^1, \dots, v^k$ liniar dependenți: $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ nu toate nule ($\sum_{i=1}^{k} |\lambda_i| > 0$, $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2 > 0$) : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v^i = 0$

Dacă B este o bază extrasă din A.

Sol x^0 este sol de bază nedegenerată dacă m-componentele nenule ale lui x^0 coincide cu rangul matricii A (ordinul cel mai mare al unui minor nenul ce se poate extrage din A)

$A = \left(\qquad \right)$

~~altf~~ Dacă x^0 are mai puține componente nenule decât rang A $\Longrightarrow$ x^0 s.n. sol. de bază degenerată

Noi pp. $A_{m\times n}$; rang $A = m < n$.
(Cazul $m > n$ se rezolvă ... Dualitate)
Dacă $m = n$; $\det A \neq 0$ (am pp. rang $A = m$)
$\Rightarrow$ $Ax = b$ este un sist comp. det. Cramer — nu prezintă interes pt optimizare (sol (aici) este unică!)
$x = A^{-1}b$

Enunț T principală opt lin

$A_{m,n}$, rang $A = m < n$.

(1) $\begin{cases} \inf c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\qquad P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$

a) Dacă $P \neq \emptyset \Rightarrow (\exists) x^0 \in P$ soluție de bază

b) Dacă $P \neq \emptyset$ și pb. (1) are optim finit $\Longrightarrow (\exists) x^0 \in P$ soluție optimă de bază.

$\leq C_n^m$ nr finit de sol de bază

În cazul pb (1) cu prop: rang $A = m < n$ avem: (6).

- x^0 sol bază nedegenerată dacă nr. componente nenule din x^0 este m
- x^0 sol bază degenerată dacă nr. componente nenule din x^0 este $< m$

Fie B o bază extrasă din A, $A_{m \times n} = (B_{m \times m} \vdots R_{m, n-m})$

$\mathcal{B} = \{ i, / a^i$ vector coloană în $B \}$

$\mathcal{R} = \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{B}$

$Ax = b \qquad (B\ R)\begin{pmatrix} x^B \\ x^R \end{pmatrix} = b, \quad x = \begin{pmatrix} x^B \\ x^R \end{pmatrix}$

$x^B = (x_i)_{i \in \mathcal{B}}$, variabile principale / de bază

$x^R = (x_j)_{j \in \mathcal{R}}$, var. secundare / nebazice.

Atunci

$Ax = b \Leftrightarrow (B \vdots R)\begin{pmatrix} x^B \\ x^R \end{pmatrix} = b \Leftrightarrow Bx^B + Rx^R = b$

$Bx^B = b - Rx^R \ / \cdot B^{-1}$ stg $\Leftrightarrow \boxed{x^B = B^{-1}b - B^{-1}Rx^R}$

vector

var. de bază

var. sec. nebaz.

Sol de bază asociată bazei B

este $x = \begin{pmatrix} \overline{x}^B \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{x}^B = B^{-1}b.$

$\overline{x}^B = (\overline{x}^B_i)_{i \in \mathcal{B}}.$

Def B este o bază primal admisibilă dacă
$B^{-1}b \geq 0.$

$B^{-1}R = B^{-1}(a^j)_{j \in \mathcal{R}} = (y^B_j)_{j \in \mathcal{R}}, \quad \boxed{y^B_j = B^{-1}a^j \in \mathbb{R}^m}$

$$x^B = \overline{x}^B - \sum_{j \in \mathcal{R}} \underbrace{y^B_j}_{\text{vect}} \cdot \underbrace{x_j}_{\text{scalar}}$$

formă echivalentă pt $Ax = b$

vect

$y^B_j = (y^B_{ij})_{i \in \mathcal{B}}.$

$$x_i = \overline{x}^B_i - \sum_{j \in \mathcal{R}} y^B_{ij} x_j, \quad i \in \mathcal{B}$$

7

$c^T x = (c_B^T, c_R^T)\begin{pmatrix} x^B \\ x^R \end{pmatrix} = c_B^T x^B + c_R^T x^R$.

$c_B = (c_i)_{i\in B}$, $c_R = (c_j)_{j\in R}$. $\quad c = \begin{pmatrix} c_B \\ c_R \end{pmatrix}$

$c^T x = \cancel{(B^{-1}b - B^{-1}Rx^R)x^B +}$

$= c_B^T(\underbrace{B^{-1}b}_{\bar{x}^B} - B^{-1}Rx^R) + c_R^T x^R =$

$= c_B^T \bar{x}^B - c_B^T B^{-1} R x^R + c_R^T x^R =$

$= c_B^T \bar{x}^B - (c_B^T B^{-1} R - c_R^T) x^R =$

$= \underbrace{c_B^T \bar{x}^B}_{\text{notăm } \bar{z}^B} - \sum_{j\in R} (\underbrace{c_B^T y_j^B}_{\text{not } z_j^B} - c_j) x_j$

$\bar{z}^B$ = valoarea fc. obiectiv $f(x) = c^T x$ corespunzătoare sol. de bază dată de baza B.

Punem $z_j^B = c_B^T y_j^B \Rightarrow$

$$\underset{\substack{\| \\ z(x)}}{z} = c^T x = \bar{z}^B - \sum_{j\in R} (z_j^B - c_j) \cdot x_j$$

Metoda simplex primal

- test pt verificarea optimalității sol de bază
- test de recunoaștere a infinitudinii ~~optimului~~ optimului
- regulă de a obține o nouă sol de bază îmbunătățită

(T1) (testul de infinitudine a optimului) Fie B bază primal admisibilă. Pp. că există $k \in R$ cu propr. $z_k^B - c_k > 0$ și $y_k^B \le 0$. Atunci (1) admite optim infinit.

(T2) (de îmbunătățire a soluției)

Lemă Dacă $C = (c^1\ c^2 \ldots c^r \ldots c^m)_{m\times m}$ nesingulară iar $D = (c^1 \ldots c^{r-1}\ d\ c^{r+1} \ldots c^m)$.

Avem că:

D este nesingulară $\Leftrightarrow \alpha_r = (C^{-1}d)_r \neq 0$.

Enunț T2: Fie B bază primal admisibilă. Pp. că există $k \notin B$ cu $z_k^B - c_k > 0$ și $y_k^B \nleq 0$. Atunci soluția de bază asociată bazei B obținută din B prin înlocuirea vectorului coloană a^l cu a^k, l fiind dat de

$$\frac{\overline{x}_l^B}{y_{lk}^B} = \min_{i / y_{ik}^B > 0} \left(\frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B} \right)$$

este cel puțin tot așa de bună ca soluția de bază asociată bazei B. Mai clar:

$$\overline{z}^{\tilde{B}} \leq \overline{z}^B$$

(vom scrie $\tilde{B} = (B \setminus \{a^l\}) \cup \{a^k\}$).

T3 (test de optimalitate) Fie B bază primal adm.

Dacă $z_j^B - c_j \leq 0 \ \forall j \Rightarrow$ sol de bază asociată bazei B este optimă

Algoritmul simplex primal

Pas 0: Se determină o bază B primal admisibilă;

Se calculează: $\overline{x}^B = B^{-1}b$, $y_j^B = B^{-1}a^j$; $\overline{z}^B = c_B^T \overline{x}^B$

$z_j^B - c_j = c_B^T y_j^B - c_j \longrightarrow P1$.

Pas 1 Testăm dacă $z_j^B - c_j \leq 0 \ \forall j$.

a) Dacă $z_j^B - c_j \leq 0 \ \forall j \Rightarrow$ STOP sol de bază asociată bazei B este optimă.

b) Dacă $\exists k : z_k^B - c_k > 0$, atunci $\Rightarrow$ Pas 2.

Pas 2 (Știm că $\underset{(\exists)}{\text{am}}$ $z_k^B - c_k > 0$) Dacă $\exists k : z_k^B - c_k > 0$ cu prop că $y_k^B \leq 0 \Rightarrow$ STOP pb admite opt infinit

În caz contrar $\Rightarrow$ Pas 3.

Pas 3 $(\exists)\ k:\ z_k^B - c_k > 0$ și $y_k^B \not\leq 0$.

variabila x_k intră în bază $\longrightarrow$ Pas 4

Pas 4 Alegem $l \in B$:

$$\frac{\overline{x}_l^B}{y_{lk}^B} = \min_{i/y_{ik}^B > 0} \left(\frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B}\right)$$

variabila x_l iese în bază (de fapt a^l!) $\rightarrow$ P5

Pas 5 Se consideră $\tilde{B} = (B \setminus \{a^l\}) \cup \{a^k\}$, și calculăm $\overline{x}^{\tilde{B}}$, $y_j^{\tilde{B}}$, $\overline{z}^{\tilde{B}}$, $z_j^{\tilde{B}} - c_j$. Apoi trecem la Pas 1 luând $\tilde{B}$ în loc de B

Obs: - corespunde la Metoda celor 2 faze.

1) Pas 0 - corespunde la criteriul opt finit.
2) Pas 1(a) are loc T3 - corespunde la criteriul de
3) Pas 2 (a) are loc T1 - coresp la infinitudine a opt
4) Pas 3: Se alege k: $z_k^B - c_k > 0$. În practică se obișnuiește k: $\max(z_j^B - c_j)$. Nu este esențial!

   Pas 3 - corespunde la criteriul de intrare în bază
5) Pas 4 - corespunde la cr. de ieșire din bază. Alegerea lui l ca $\min \frac{\overline{x}_i^B}{y_{ik}^B}$ este esențială!
6) Pas 5 - corespunde la Metoda de calcul a elementelor asociate $\tilde{B}$ - formule de schimbare a bazei

$\tilde{B} = (B \setminus a^{\ell}) \cup \{a^k\}$, $B^{-1} a^k = y^B_k$

$$\begin{cases} x_i = \bar{x}^B_i - \sum_{j \in R} y^B_{ij} \cdot x_j & i \in B \\ x_i = \bar{x}^{\tilde{B}}_i - \sum_{j \in \tilde{R}} y^{\tilde{B}}_{ij} \cdot x_j & , i \in \tilde{B} \end{cases}$$

$\tilde{B} = (B \setminus \{\ell\}) \cup \{k\}$

$\tilde{R} = (R \setminus \{k\}) \cup \{\ell\}$.

$$\bar{x}^{\tilde{B}}_k = \frac{\bar{x}^B_\ell}{y^B_{\ell k}} \quad , \quad y^{\tilde{B}}_{kj} = \frac{y^B_{\ell j}}{y^B_{\ell k}}.$$

$$\bar{x}^{\tilde{B}}_i = \bar{x}^B_i - \frac{y^B_{ik} \cdot \bar{x}^B_\ell}{y^B_{\ell k}} \quad , \quad y^{\tilde{B}}_{ij} = y^B_{ij} - \frac{y^B_{ik} \cdot y^B_{\ell j}}{y^B_{\ell k}}.$$

$$\bar{z}^{\tilde{B}} = \bar{z}^B - \frac{(z^B_k - c_k) \cdot \bar{x}^B_\ell}{y^B_{\ell k}} \quad , \quad z^{\tilde{B}}_j - c_j = (z^B_j - c_j) - \frac{(z^B_k - c_k) \cdot y^B_{\ell j}}{y^B_{\ell k}}.$$

T. simplex.

Pt Baza B ; VB = variabilele de bază (x^B)

VVB = valori variabile bază ($\bar{x}^B$)

	VB	VVB	c_1 x_1	c_2 x_2	...	c_j x_j	...	c_k x_k	...	c_ℓ x_ℓ	...	c_n x_n
c_B	x^B x_ℓ	$\bar{x}^B = B^{-1}b$	y^B_1	y^B_2		y^B_j						y^B_n
		$\bar{z}^B$	$z^B_1 - c_1$	$z^B_2 - c_2$		$z^B_j - c_j$						$z^B_n - c_n$
Tabel pt $\tilde{B}$ $c_{\tilde{B}}$	x_i x_k	$\bar{x}^{\tilde{B}}_i$ $\bar{x}^{\tilde{B}}_k$				$y^{\tilde{B}}_{ij}$						
		$\bar{z}^{\tilde{B}}$				$z^{\tilde{B}}_j - c_j$						

2 3 0 0

În această secțiune condițiile ~~ef~~ suficiente ~~ale~~ în vederea partiții unei k+1 ~~mul~~ ~~elemente~~ mulțimii pt p și o submulțime K de $k+1$ elemente a lui M. Avem, pt fiecare $t \in K$ o aplicație Ω_t ce implică I_t și J_t, unde J_t definește pt $t \in \{0,1,\dots,k\}$ o partiție pt q.

11

Teorema următoare prezintă șase condiții ~~ef~~ suficiente de eficiență cu ipoteze de cvasiconvexitate și/sau strict pseudoconvexitate pt Ω_t, Λ_t relativ la K și $M \setminus K$ or partiții ~~ef~~ din câte două elemente pt K or $M \setminus K$

Pt B	VB	VVB	x_j	$x_k \downarrow$
	x_i	$\bar{x}_i^B$	y_{ij}^B	y_{ik}^B
$\leftarrow$	x_e	$\bar{x}_e^B$	y_{ej}^B	y_{ek}^B
		$\bar{z}^B$	$z_j^B - c_j$	$z_k^B - c_k > 0$

$y_{ek}^B = \text{pivot}$

pt $\tilde{B}$	VB	VVB	x_j	x_k
				0
	x_i	$\bar{x}_i^{\tilde{B}}$	$y_{ij}^{\tilde{B}}$	0
	x_k	$\bar{x}_k^{\tilde{B}}$	$y_{kj}^{\tilde{B}}$	1
				0
		$\bar{z}^{\tilde{B}}$	$z_j^{\tilde{B}} - c_j$	0

? ≤ 0

$$+\sum_{t=1}^{m} \mathcal{F}\left(\bar{S},S^*;b(\bar{S},S^*)\sum_{j\in J_t} v_j^* DH_j(S^*)\right) \ge 0,\ \forall S \in \mathbf{F}$$

ii. pentru orice $i \in I_+ = I_+(u^*)$,

- functia $T \to G_i(S^*)F_i(T) - F_i(S^*)G_i(T) + \sum_{j\in J_0} v_j^* H_j(T)$ este strict $(\mathcal{F},b,\bar{\phi}_i,\bar{\rho}_i,\theta)$ –pseudounivexa in S^*,
- $\bar{\phi}_i$ este crescatoare cu $\bar{\phi}_i(0) = 0$;
- $T \to \sum_{j\in J_1} v_j^* H_j(T)$ este $(\mathcal{F},b,\tilde{\phi},\tilde{\rho},\theta)$ –cvasiunivexa in S^*,
- $\tilde{\phi}$ este crescatoare cu $\tilde{\phi}(0) = 0$,
- $\sum_{i\in I_+} u_i^* \bar{\rho}_i + \tilde{\rho} \ge 0$.

12.

Atunci S^* este o solutie eficienta a lui (P).

~~**Demonstratie**:~~

~~Dacă~~ În partea (a) a Teoremei 4.2.1, ~~fie~~ luăm: $J_1 = \underline{q}$, $J_0 = \underline{q}$, $m = q$ si $J_t = \{t\}$, $t \in \underline{q}$, $J_0 = \emptyset$, $J_t = \emptyset$ pentru $t = 2,3,\ldots,m$, obținem: ~~primul punct de Corolar~~

Cazul $\exists\ B = I = E$ bază primal admisibilă

~~Pb aducem la forma~~

$$\begin{cases} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$\underline{b \ge 0}$!   pp. $A = (\underbrace{I}_{=B}\ R)$

$B = I = E$ $B^{-1} = E$ $B^{-1}b = Eb = b \ge 0$

B primal admisibilă $\Rightarrow$ putem aplica alg SP

Ex 1. $\inf(2x_1 + 3x_2)$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 9 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

x_3, x_4 variabile ecart de compensare/egalizare

aducem la forma standard

$$\begin{cases} \inf(2x_1 + 3x_2) \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 9 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$b = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix} \ge 0$

$$\begin{array}{cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ A = & \multicolumn{4}{c}{\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}} & \end{array}$$

$B = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

	VB	VVB	$\overset{2}{x_1}$	$\overset{3}{x_2}$	$\overset{0}{x_3}$	$\overset{0}{x_4}$
0	x_3	9	3	5	1	0
0	x_4	10	4	2	0	1
		0	-2	-3	0	0

$\leq 0 \Rightarrow$ Th optim.

$$\bar{z}^B_{opt} = 0 \qquad \bar{x}_{opt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Ex2

$$\begin{cases} \inf(2x_1 - 3x_2) \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 9 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

	VB	VVB	$\overset{2}{x_1}$	$\overset{-3}{x_2}$	$\overset{0}{x_3}$	$\overset{0}{x_4}$	
0	x_3	9	3	5	1	0	$\min\left(\frac{9}{5}, \frac{10}{2}\right)$
0	x_4	10	4	2	0	1	
		0	-2	3	0	0	$\not\leq 0$
-3	x_2	9/5	3/5	1	1/5	0	
0	x_4	32/5	14/5	0	-2/5	1	
		$-\frac{27}{5}$	$-\frac{9}{5}-2$	0	$-\frac{3}{5}$	0	≤ 0 opt

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 9 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 = 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{50 - 9\cdot 2}{5} = \frac{50-18}{5}$$

$$z_{opt} = -\frac{27}{5}$$

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{5} \\ 0 \\ \frac{32}{5} \end{pmatrix}$$

Ex3

$$\begin{cases} \sup(-2x_1 + 3x_2) = \boxed{\inf(2x_1 - 3x_2)} \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 9 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Rezolvăm $\begin{cases} \inf(2x_1 - 3x_2) \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 9 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$ Ex2!

$$z_{opt} = -\left(-\frac{27}{5}\right) = \frac{27}{5}!$$

Gata!

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{9}{5} \\ 0 \\ \frac{32}{5} \end{pmatrix}$$ nu schimb!

Ex 4. $\sup(2x_1+3x_2) = -\boxed{\inf(-2x_1-3x_2)}$

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2 \le 9 \\ 4x_1+2x_2 \le 10 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \inf(-2x_1-3x_2) \\ 3x_1+5x_2 \le 9 \\ 4x_1+2x_2 \le 10 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \inf(-2x_1-3x_2) \\ 3x_1+5x_2+x_3 = 9 \\ 4x_1+2x_2+x_4 = 10 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

	VB	VVB	$\overset{-2}{x_1}$	$\overset{-3}{x_2}$	$\overset{0}{x_3}$	$\overset{0}{x_4}$	$\min\left(\frac{9}{3},\frac{10}{4}\right)$
0	x_3	9	3	5	1	0	
0	x_4	10	4	2	0	1	
		0	2	3	0	0	$\not\le 0$
0	x_3	$6/4$	0	$14/4$	1	$-3/4$	
-2	x_1	$10/4$	1	$2/4$	0	$1/4$	
		$-20/4$	0	2	0	$-1/2$	$\not\le 0$
-3	x_2	$3/7$	0	1	$4/14$	$-3/14$	
-2	x_1	$16/7$	1	0	$-1/7$	$5/14$	
		$-41/7$	0	0	$-4/7$	$-1/14$	≤ 0 opt

$\min\left(\frac{\frac{6}{4}}{\frac{14}{4}}, \frac{\frac{10}{4}}{\frac{2}{4}}\right) =$

$\min\left(\frac{6}{14}, \frac{10}{2}\right)$

$\dfrac{\frac{10}{4}\cdot\frac{14}{4} - \frac{6}{4}\cdot\frac{2}{4}}{\frac{14}{4}} =$

$\dfrac{5\cdot 14-6}{4\cdot 7} = \dfrac{70-6}{4\cdot 7} = \dfrac{64}{4\cdot 7} = \dfrac{16}{7}$

$-\dfrac{2}{4} \Big/ \dfrac{14}{4}$

$\dfrac{-9-32}{7} = -41$

$\dfrac{\frac{14}{4\cdot 4}\cdot 1 + \frac{3\cdot 2}{4\cdot 4}}{\frac{14}{4}}$ $\quad \dfrac{7+3}{4\cdot 7}$ $\quad \dfrac{10}{4\cdot 7}$ $\quad \dfrac{5}{14}$

$-3\cdot\dfrac{2}{7} + \dfrac{2}{7} = \dfrac{2}{7}(1-3) = -\dfrac{4}{7}$

$\dfrac{9}{14} - \dfrac{10}{14} = -\dfrac{1}{14}$

$x_{opt} = \begin{pmatrix} \frac{16}{7} \\ \frac{3}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad z_{opt} = -\left(-\dfrac{41}{7}\right) = \dfrac{41}{7}$

Ex. 5

$\inf(-2x_1-3x_2)$

$\begin{cases} x_1 \geq 5 \\ x_2 \geq 7 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - x_3 = 5 \\ x_2 - x_4 = 7 \geq 0 \text{ ok!} \\ x \geq 0 \end{cases}$ $A = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

VB	VVB	$\overset{-2}{x_1}$	$\overset{-3}{x_2}$	$\overset{0}{x_3}$	$\overset{0}{x_4}$
$-2\ x_1$	5	1	0	-1	0
$-3\ x_2$	7	0	1	0	-1
	-31	0	0	2	3

$\not\leq 0$

≤ 0 !

primeu de ...

STOP.

~~...~~ pb admite opt infinit

Cazul când trebuie să construim baza primal admisibilă

Metoda celor 2 faze

$\begin{cases} \inf(2x_1+3x_2) \\ 3x_1+5x_2 \geq 4 \\ 4x_1+2x_2 \leq 10 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x_1+5x_2-x_3 = 4 \geq 0! \\ 4x_1+2x_2+x_4 = 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ construim artificial

Avem (1) $\begin{cases} \inf c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ $A_{m,n}$, $rgA = m < n$.

$b \geq 0$

Construim

(1') $\begin{cases} \inf \sum_{i=1}^{m} x_i^a \\ Ax + E \cdot x^a = b \\ x, x^a \geq 0 \end{cases}$ $x^a = \begin{pmatrix} x_1^a \\ \vdots \\ x_m^a \end{pmatrix}$ vectorul variabilelor artificiale!

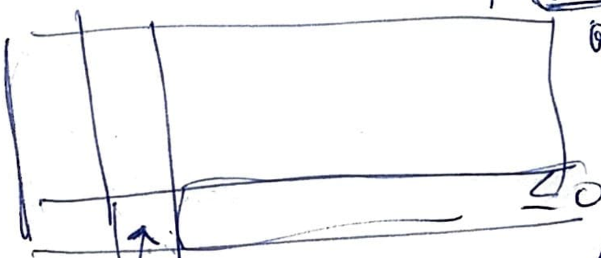
$\begin{pmatrix} \overset{x}{A} & \vdots & \overset{x^a}{E} \end{pmatrix}$

$\overset{\shortparallel}{B}$ unitara, $b \geq 0$, primal admisibila

Putem aplica alg!

Faza 1 Rezolvăm (1') cu S.P.

T final Faza 1 (pt (1')) rez. Optim:



putem avea ξ^B = val opt (1')

> 0 ⇒ (1) nu are programe STOP!

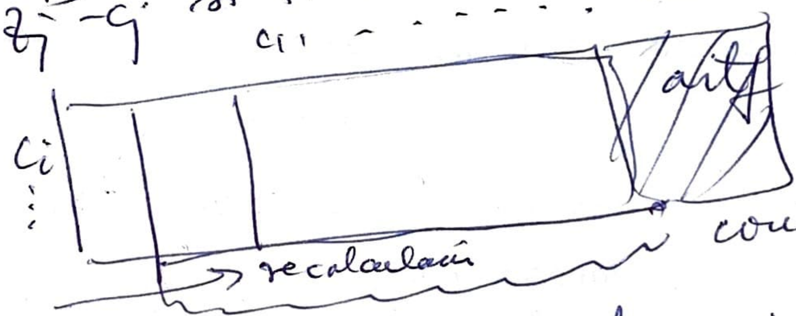
= 0

sistemul pb (1) este incompatibil

Dacă $\xi^B = 0$:

- dacă în T opt (1') ∄ v. artificiale de bază atunci suprimăm coloanele artif.; suprim. linia tip $z_j^B - c_j$ și Trecem la Faza 2:

fie Pb. inițial

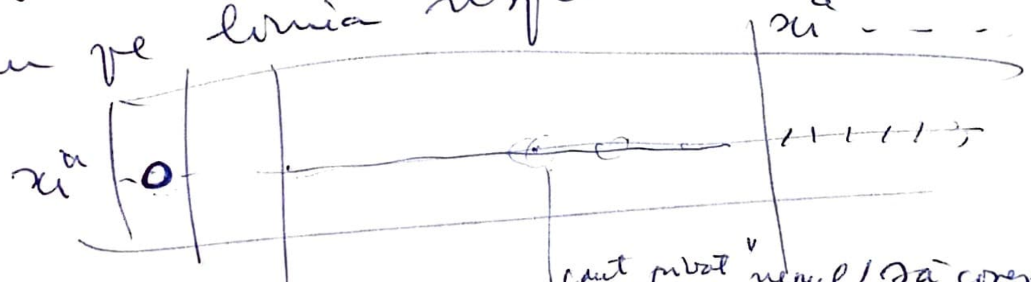


continuăm!

- dacă în T opt (1') ∃ v. ar de bază: încercăm să eliminăm ac. variabile
  - dacă se poate atunci ajungem în situația de mai sus.
  - dacă nu → rangul matricei A este mai mic cu un nr. dat de cele rămase în tabel. Atunci suprimăm și ajungem la un tabel simplificat – ca în cazul inițial – dacă se poate!

(cum pot elimina artificiale – dacă se poate)

∄ mergem pe linia respectivă



caut „pivot" nenul / să corespundă la variabile veritabile – nu artif.

Revenim la pb:

Construim (1')
$$\begin{cases} \inf (x_1^a + x_2^a) \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 + x_1^a = 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_4 + x_2^a = 10 \\ x \geq 0 \quad x^a \geq 0 \end{cases}$$

	VB	VVB	$\overset{0}{x_1}$	$\overset{0}{x_2}$	$\overset{0}{x_3}$	$\overset{0}{x_4}$	$\overset{1}{x_1^a}$	$\overset{1}{x_2^a}$	
1	x_1^a	4	3	5	-1	0	1	0	
1	x_2^a	10	4	2	0	$\boxed{1}$	0	1	
		14	7	7	-1	1	0	0	$\not\leq 0$
1	x_1^a	4	3	5	-1	0	1	0	
0	x_4	10	4	2	0	1	0	1	
		4	3	5	-1	0	0	-1	$\not\leq 0$
0	x_2	4/5	3/5	1	-1/5	0	1/5	0	
0	x_4	42/5	14/5	0	4/5	1	-2/5	1	
		0	0	0	0	0	-1	-1	≤ 0

$\min\left(\frac{4}{5}, \frac{10}{2}\right)$

opt Faza I

z_{opt} Faza 1 $= 0$.

∄ v-artificiale in bază ⟹ Putem trece la (FII).

$\inf (2x_1 + 3x_2)$

	VB	VVB	$\overset{2}{x_1}$	$\overset{3}{x_2}$	$\overset{0}{x_3}$	$\overset{0}{x_4}$	
3	x_2	4/5	3/5	1	-1/5	0	
0	x_4	42/5	14/5	0	4/5	1	
		12/5	$\frac{9}{5} - 2 = -\frac{1}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	0	≤ 0

$z_{opt} = \frac{12}{5}$ $\quad x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4/5 \\ 0 \\ 42/5 \end{pmatrix}$

Dacă la o iterație o v. artif părăsește baza putem să o suprimăm — suprimăm coloana resp.!

Ex

$$\begin{cases} \inf(2x_1+3x_2) \\ 3x_1+5x_2 \geq 40 \\ 4x_1+2x_2 \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1+5x_2-x_3=40 \\ 4x_1+2x_2+x_4=4 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

FI $\inf x_1^a$

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2-x_3+x_1^a=40 \\ 4x_1+2x_2+x_4=4 \\ x\geq 0,\ x_1^a\geq 0 \end{cases} \geq 0 \qquad \bar{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1^a \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\min\left(\frac{40}{5}, \frac{4}{2}\right)=2$

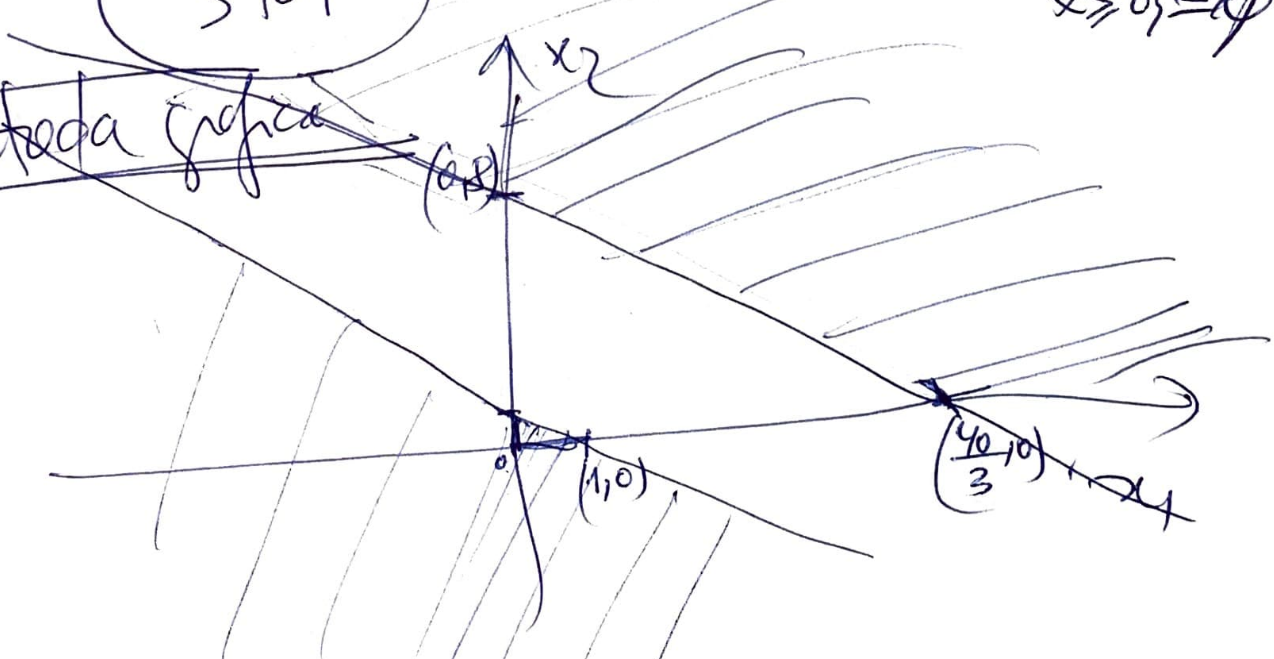
	VB	VVB	x_1 (0)	x_2 (0)	x_3 (0)	x_4 (0)	x_1^a (1)	
1	x_1^a	40	3	5	-1	0	1	←
0	x_4	4	4	2	0	1	0	
		40	3	5	-1	0	0	$\not\leq 0$
1	x_1^a	30	-7	0	-1	$-5/2$	1	
0	x_2	2	2	1	0	$1/2$	0	
		30	-7	0	-1	0	0	≤ 0

Tabel FI optim!

$\bar{f}_{opt}=30>0 \implies$ Pb. nu are programe
nu are sol. posibile
adică $P=\{x\in\mathbb{R}^n / Ax=b,\ x\geq 0\}=\emptyset$

STOP

Metoda grafică



$F_X(y) = P_\theta(X<y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ \frac{y}{\theta}, & y\in[0,\theta] \\ 1, & y>\theta \end{cases}$

$M_\theta(X) = \int_0^\theta \frac{x}{\theta}\,dx = \frac{\theta}{2}$

$D_\theta^2(X) = \int_0^\theta \frac{x^2}{\theta}\,dx = \frac{\theta^2}{4} = \frac{\theta^2}{12}$

Ex $\inf(2x_1+x_2)$

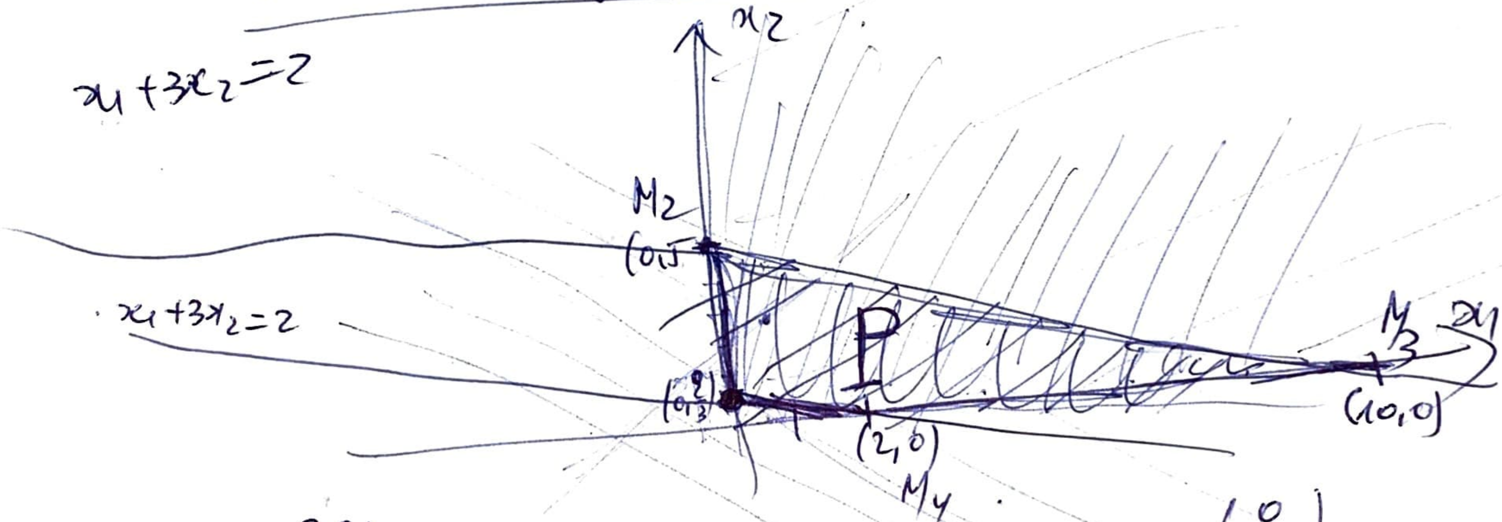
$x_1+3x_2 \geq 2$

$2x_1+4x_2 \leq 20$

$x \geq 0$

sol SZP — vârfuri!

Cu metoda grafică:



$2x_1+4x_2=20$

$C(0,\frac{2}{3})$ $\quad X=\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix}$

$z = 2x_1+x_2=0$

$x_2=1$

$2\cdot 0+1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}=z_{opt}$

$M_1(0,\frac{2}{3})$, $M_2(0,5)$, $M_3(10,0)$, $M_4(2,0)$

$\boxed{z(M_1)} = 2\cdot 0+1\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$z(M_2) = 2\cdot 0+1\cdot 5=5$

$z(M_3) = 2\cdot 10+1\cdot 0=20$

$z(M_4) = 2\cdot 2+1\cdot 0=4$

$\to \min = \frac{2}{3}$

Ex

$$\min(2x_1 + x_2 + x_3)$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \geq 0$$

$$A = \begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1^a & x_2^a & x_3^a \end{array}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

F_1 $\min(x_1^a + x_2^a + x_3^a)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_1^a = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_2^a = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_3^a = 8 \end{cases} \qquad \geq 0.$$

$x \geq 0, \ x^a \geq 0$

			0	0	0	1	1	1	
	VB	VVB	$x_1 \downarrow$	x_2	x_3	x_1^a	x_2^a	x_3^a	$\min\left(\frac{3}{1}, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}\right) = \frac{5}{2}$
1	x_1^a	3	1	1	1	1	0	0	
1	$\leftarrow x_2^a$	5	$\boxed{2}$	1	2	0	1	0	
1	x_3^a	8	3	2	3	0	0	1	
		16	6	4	6	0	0	0	$\not\leq 0$
1	$\leftarrow x_1^a$	1/2	0	$\boxed{1/2} \downarrow$	0	1	$-1/2$	0	$\min\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}, \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right) = \min(1, 5, 1) = 1$
0	x_1	5/2	1	1/2	1	0	1/2	0	
1	x_3^a	1/2	0	1/2	0	0	$-3/2$	1	
		1	0	1	0	0	-3	0	$\not\leq 0$.
0	x_2	1	0	1	0	2	-1		
0	x_1	2	1	0	1	-1	1		
1	x_3^a	0	0	0	0	-1	-1	1	
		0	0	0	0	-2	-2	0	≤ 0 opt F1.

$\bar{z}_{opt} F1 = 0$

Trecem la F_2

$\exists$ v. artificiale în bază: x_3^a
încercăm să eliminăm

$\nexists$ elemente nenule! $\Rightarrow$ nu se poate elimina din bază $\Rightarrow$ suprimăm din tabel —

rang $A = 3 - 1 = 2$.

$\downarrow$ artif. x_3^a suprimat.

mg dr. este $2 * 10,39167 - 9,99036 =$

$= 10,79298$.

21

Dc. disp nec $\Rightarrow I = [9,99036 ; 10,792]$

la nivel de α.

FII $\max(2x_1 + x_2 + x_3)$

	VB	VVB	$\overset{2}{x_1}$	$\overset{1}{x_2}$	$\overset{1}{x_3}$
1	x_2	1	0	1	0
2	x_1	2	1	0	$\boxed{1}$
		5	0	0	1 $\not\leq 0$
1	x_2	1	0	1	0
1	x_3	2	1	0	1
		3	-1	0	0 ≤ 0 opt F_{II}

$z_{opt} = 2$. $x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

~~Sol II~~

$$\cancel{P = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 1-a_1-a_2 \\ 0 & b_1 & 1-b_1 \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix}}$$

~~$\lambda_1 = 1.$~~

Dualitate

Forma generală

~~inf (sup)~~

$\min(\max)\left(c_1^T x^1 + c_2^T x^2 + c_3^T x^3\right)$	$\max(\min)\left((b^1)^T u^1 + (b^2)^T u^2 + (b^3)^T u^3\right)$
$A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + A_{13}x^3 \geq b^1$	$u^1 \geq 0.\ (\leq 0)$
$A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + A_{23}x^3 = b^2$	u^2 arb.
$A_{31}x^1 + A_{32}x^2 + A_{33}x^3 \leq b^3$	$u^3 \leq 0.\ (\geq 0)$
$x^1 \geq 0$	$A_{11}^T u^1 + A_{21}^T u^2 + A_{31}^T u^3 \leq c_1\ (\geq)$
x^2 arbitrar	$A_{12}^T u^1 + A_{22}^T u^2 + A_{32}^T u^3 = c_2$
$x^3 \leq 0$	$A_{13}^T u^1 + A_{23}^T u^2 + A_{33}^T u^3 \geq c_3\ (\leq)$

max aceleași sens

max! sens invers

Fie forma standard (inf)
$$\begin{cases} \inf c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{cases} \sup b^T u \\ u \text{ arb.} \\ A^T u \leq c \end{cases}\right\} \text{duala.}$$

forma standard (sup)
$$\begin{cases} \sup c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \inf b^T u \\ u \text{ arb.} \\ A^T u \geq c \end{cases} \quad \underline{\text{duala}}$$

~~1. note~~
~~2. prezente~~
~~3. invătat~~

forme canonice:

forma canonică (inf)

$$\begin{cases} \inf c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{duala}} \begin{cases} \sup b^T u \\ u \geq 0 \\ A^T u \leq c \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sup b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases}$$ ~~duala~~

forma canonică (sup)

$$\begin{cases} \sup c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \cancel{\sup} \inf b^T u \\ u \geq 0 \\ A^T u \geq c \end{cases} \quad \begin{cases} \inf b^T u \\ A^T u \geq c \\ u \geq 0 \end{cases}$$ duala

~~duala unei pb în formă canonică este o pb în formă canonică~~

~~duala dualei este problema primală!~~

Fie Prob (1) $\begin{cases} \inf c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ $A_{m \times n}$ ~~$rg A = m < n$.~~

duala (2) vezi mai sus

(TFD) Fie probleme primală P = mulțimea sol posibile

duala D = - - -

Numai una din afirmațiile de mai jos are loc pt problemele (1), (2) duale:

(a1) $P \neq \emptyset$, $D \neq \emptyset$ $\Longrightarrow$ ambele au sol. optime iar valorile optime ale funcțiilor obiectiv coincid.

(dacă ambele probleme au programe atunci - - -)

(a2) $P \neq \emptyset$, $D = \emptyset$ sau $P = \emptyset$, $D \neq \emptyset$ | atunci problema care admite programe admite optim infinit (dacă una din probleme are programe atunci acea problemă are optim infinit) 24

(a3) $P=\emptyset$, $D=\emptyset$ (nici una din probleme nu are programe).

Nu putem avea:

- una opt finit — ~~alta~~ duala ⟨ nu are progr. sau are opt infinit.

- ~~nu putem~~ ambele opt infinit.

Din faptul că o problemă nu are programe

$\Longrightarrow$ ⟨ duala nu are progr. **sau** duala are programe dar are optim infinit

(1) $\begin{cases} \inf c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} \sup b^T u \\ \boxed{A^T} u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases}$

Pp. admit programe. Fie (conform TFD) x^0 ~~opt~~ (1) u^0 ~~opt~~ (2) ~~opt~~ ... prog. adm.

~~Atunci~~

T slabă a ecarturilor complementare

x^0 opt (1), u^0 opt (2) $\Longleftrightarrow u^{0T}(Ax^0-b)+x^{0T}(c-A^Tu^0)=0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} u^{0T}(Ax^0-b)=0 \\ x^{0T}(c-A^Tu^0)=0. \end{cases}$

$\sum_{i=1}^{m} \underbrace{u_i^0}_{\geq 0}\underbrace{(Ax^0-b)_i}_{\geq 0}=0.$

$\Downarrow_0 \quad \forall i$

$\exists i: u_i^0 > 0 \Rightarrow (Ax^0-b)_i=0.$

②

T. tare a ecarturilor complementare

Fie: (1), (2) de la T. slabă

(∃) $\overline{x}$ opt (1) astfel ca;

$\overline{u}$ opt (2)

$$A\overline{x} - b + \overline{u} > 0.$$

$$c - A^T\overline{u} + \overline{x} > 0.$$

C2 Metoda de rezolvare simplex dual

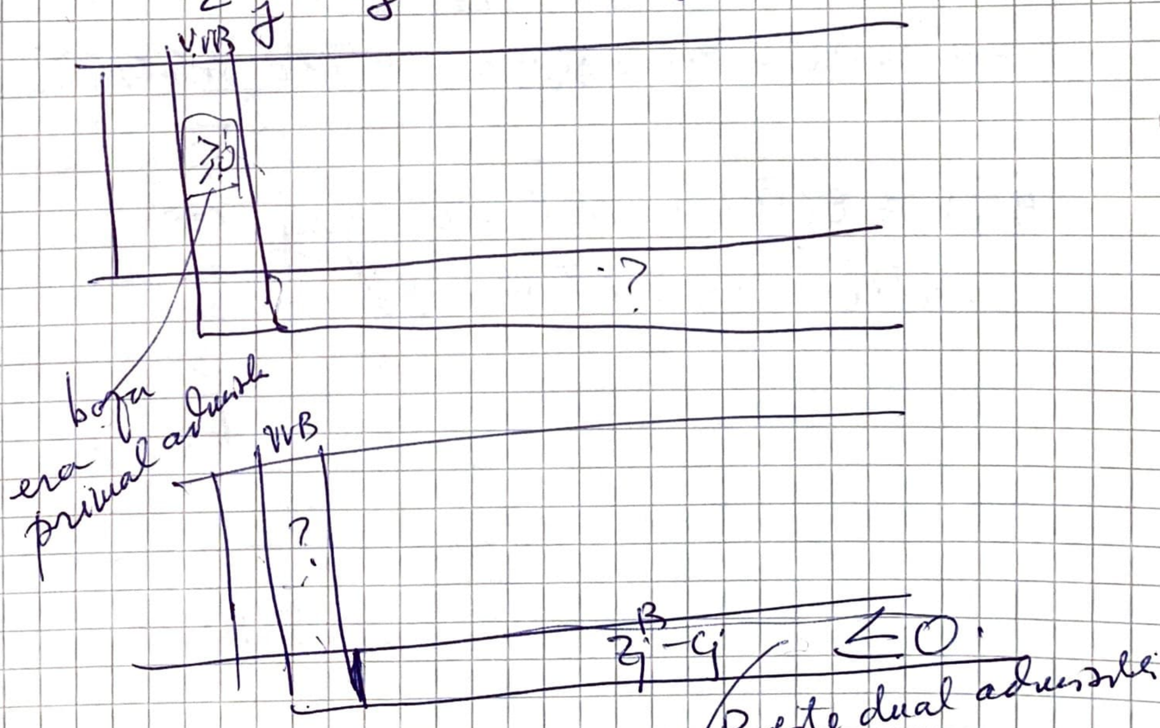
A_{mn} $m<n$

Fie (1) $\begin{cases} \inf c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ A_{mn} $rg A = m < n$.

Fie B o bază extrasă din A.

Spunem că B este dual admisibilă dacă

$$z_j^B - c_j \leq 0 \ (\forall) j.$$



(T1) (test de optimalitate)

Fie B dual admisibilă. Dacă $\overline{x}_i^B \geq 0 \ \forall i \in B$ atunci ~~B este~~ soluția de bază asociată bazei B este optimă.

(T2) (test de recunoaștere a incompatibilității sistemului (1))

Fie B bază dual admisibilă. Dacă există $i \in B$: $\overline{x}_i^B < 0$ și $y_{ij}^B \geq 0 \ (\forall) j \Rightarrow P = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax = b, x \geq 0\} = \emptyset$

adică ~~pb.~~ (1) nu are programe.

(T3) (regula de îmbunătățire a soluției).

Fie B bază dual admisibilă și $l \in B$ cu $\overline{x}_l^B < 0$. Alegem $k \in R$:

$$\frac{z_k^B - c_k}{y_{lk}^B} = \min_{j / y_{lj}^B < 0} \frac{z_j^B - c_j}{y_{lj}^B}$$

și construim $\tilde{B} = (B \setminus \{a^l\}) \cup \{a^k\}$.

Atunci avem că $\tilde{B}$ este o bază dual admisibilă și $\overline{z}^B \leq \overline{z}^{\tilde{B}}$.

Algoritmul simplex dual

Fie $\begin{cases} \inf c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\quad rg A_{m \times n} = m < n$.

Pas 0. Se determină o bază B dual admisibilă și se calculează:

$\overline{x}^B = B^{-1} b$, $y_j^B = B^{-1} \cdot a^j$, $z_j^B = c_B^T y_j^B$, $\overline{z}^B = c_B^T \overline{x}^B$

$\longrightarrow$ Pas 1.

Pas 1 a) Dacă $\overline{x}^B \geq 0 \Rightarrow$ STOP Pb este optimă iar $x = \begin{pmatrix} \overline{x}^B \\ 0 \end{pmatrix}$, sol de bază asociată bazei B, este optimă; Val optimă a funcției obiectiv este $\overline{z}^B$, altfel avem

b) $\overline{x}^B \ngeq 0 \Rightarrow (\exists)\, l \in B : \overline{x}^B_l < 0 \longrightarrow P2$.

Pas 2 a) dacă $y^B_{lk} \geq 0\ \forall k \Rightarrow$ STOP Pb. nu are programe ($P = \emptyset$)

b) altfel, fie $k \in R$ cu prop:

$$\frac{z^B_k - c_k}{y^B_{lk}} = \min_{j / y^B_{lj} < 0} \frac{z^B_j - c_j}{y^B_{lj}} \longrightarrow P3.$$

Pas 3 Construim $\tilde{B} = (B \setminus \{a^l\}) \cup \{a^k\} \longrightarrow$

Pas 4 luăm $\tilde{B}$ în loc de B și $\longrightarrow$ **P1**.

Obs 1) Pas 0. revine la „metoda de determinare a unei baze dual admisibilă" (prin urmare să fie cu proprietatea $z^B_j - c_j \leq 0\ \forall j$)

2) P1 (a) este criteriul de optimalitate.

3) P1 (b) reprezintă criteriul de ieșire din bază (de obicei: $l : \overline{x}^B_l = \min_i \overline{x}^B_i (<0)$, nu este esențial!)

4) P2 (a) de fapt aici ar trebui: dacă există $i \in B : \overline{x}^B_i < 0$ și $y^B_{ik} \geq 0\ \forall k$ atunci pb nu are programe; $P_2(a)$ este criteriul de incompatib al sist $Ax = b$, $x \geq 0$.

5) Pas 2 b criteriul de intrare în bază.

1) este esențial să luăm k: ... = min ...

6) P3, P4. formulele de schimbare a bazei din B în $\tilde{B}$.

Esențial pt rezolvare:

Pb să fie în formă standard $\inf c^T x$, $Ax = b$, $x \geq 0$.

dar nu mai e necesar să impunem $b \geq 0$!

Ar fi bine să găsim $B = E = I$

Aplicații

Cazul 1 $\begin{cases} (\exists)\ B = I = E \text{ care este dual admisibilă:} \\ z_j^B - c_j \leq 0 \ \forall j \end{cases}$

Ex1 $\begin{cases} \inf(2x_1 + 3x_2) \\ 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \inf(2x_1 + 3x_2) \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \quad \vert -1 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_4 = 20 \quad \vert -1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{cases} \inf(2x_1 + 3x_2) \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ -4x_1 - 5x_2 + x_4 = -20 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

noua:
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \{a^3, a^4\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

	VB	VVB	2 x_1	3 x_2	0 x_3	0 x_4
0	x_3	−4	−3	−1	1	0
0	x_4	−20	−4	−5	0	1
		0	−2	−3	0	0

$l = 4$ ≤ 0

$\Rightarrow B$ dual admisibilă $\Rightarrow$ pot aplica s.d.

Alegem k: $\frac{z_k^B - c_k}{y_{4k}^B} = \min_{j \mid y_{4j}^B < 0} \frac{z_j^B - c_j}{y_{4j}^B}$

$\min\left\{\frac{-2}{-4}, \frac{-3}{-5}\right\} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right\} = \frac{1}{2}$

$y_{41}^B = -4 = \text{pivot}$

	VB	VVB	$\overset{2}{x_1}$	$\overset{3}{x_2}$	$\overset{0}{x_3}$	$\overset{0}{x_4}$
0	x_3	11	0	11/4	1	$-3/4$
2	x_1	5	1	5/4	0	$-1/4$
		10	0	$-1/2$	0	$-1/2$

știam ≤ 0.

$\frac{(-4)(-4)-(-20)(-3)}{-4} = \frac{4\cdot 4 - 60}{-4} = \frac{4-15}{-1} = \frac{-11}{-1} = 11$

$\frac{-4\cdot(-1) - (-3)(-5)}{-4} = \frac{4-15}{-4} = \frac{-11}{-4} = \frac{11}{4}$ | $\frac{\cancel{-4\cdot 0} - (-3)\cdot 1}{-4} = -\frac{3}{4}$

$\frac{5}{2} - 3 = \frac{5-6}{2} = -\frac{1}{2}$

$\geq 0 \Rightarrow$ Gata!
Tabel optim

$x^0_{opt} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix}$, $z_{opt} = 10$

sol opt de bază

Ex 2
$$\begin{cases} \inf(2x_1 + 3x_2) \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{standard}]{\text{Construim forma}} \begin{cases} \inf(2x_1 + 3x_2) \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_4 = 20 \mid \cdot(-1) \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} \inf(2x_1 + 3x_2) \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -4x_1 - 5x_2 + x_4 = -20 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$B = E$

c_B	VB	VVB	$\overset{2}{x_1}$	$\overset{3}{x_2}$	$\overset{0}{x_3}$	$\overset{0}{x_4}$
0	x_3	4	3	1	1	0
0	x_4	-20	$\boxed{-4}$	-5	0	1
		0	-2	-3	0	0
0	x_3	-11	0	$-11/4$	1	$3/4$
2	x_1	5	1	$5/4$	0	$-1/4$
		10	0	$-1/2$	0	$-1/2$
3	x_2	4	0	1	$-4/11$	$-3/11$
2	x_1	0	1	0	$5/11$	$1/11$
		12	0	0	$-2/11$	$-7/11$

$\leq 0 \Rightarrow B$ dual admisibilă

$\min\left\{\frac{-2}{-4}, \frac{-3}{-5}\right\} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right\} = \frac{1}{2}$

$$\frac{4\cdot(-4) - (-20)\cdot 3}{-4} = 4 - 15 = -11$$

$$\frac{-4\cdot 1 - 3\cdot(-5)}{-4} = \frac{4-15}{4} = -\frac{11}{4}$$

$$\frac{5\left(-\frac{11}{4}\right) - (-11)\cdot\frac{5}{4}}{-\frac{11}{4}} \qquad 5-5=0$$

$\frac{5}{2} - 3$

$$\frac{-\frac{11}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4}\cdot\frac{3}{4}}{-\frac{11}{4}} \qquad \frac{11-15}{-4\cdot 11}$$

$$\frac{\frac{11}{4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}{-\frac{11}{4}} = -\frac{14}{2\cdot 11} = -\frac{7}{11}$$

$-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{11}$

optim

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$z_{opt} = 12$

Ex 3

$$\begin{cases} \inf(2x_1 + 3x_2) \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 20 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\inf(2x_1 + 3x_2)$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 \\ -5x_1 - 2x_2 + x_4 = -20 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{cccc} & & x_3 & x_4 \\ \end{array}$$
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

	VB	VVB	x_1^2 ↓	x_2^3	x_3^0	x_4^0	
0	x_3	4	2	3	1	0	
0 ←	x_4	−20	−5	−2	0	1	
		0	−2	−3	0	0	≤ 0 B dual adm
0	x_3	−4	0	11/5	1	2/5	
2	x_1	4	1	2/5	0	−1/5	
		8	0	−11/5	0	−2/5	

$\min\left\{\frac{-2}{-5}, \frac{-3}{-2}\right\} = \frac{2}{5}$

$\frac{-20+40}{-5}$

$\frac{20}{-5} = -4$

$\frac{-15+4}{-5}$

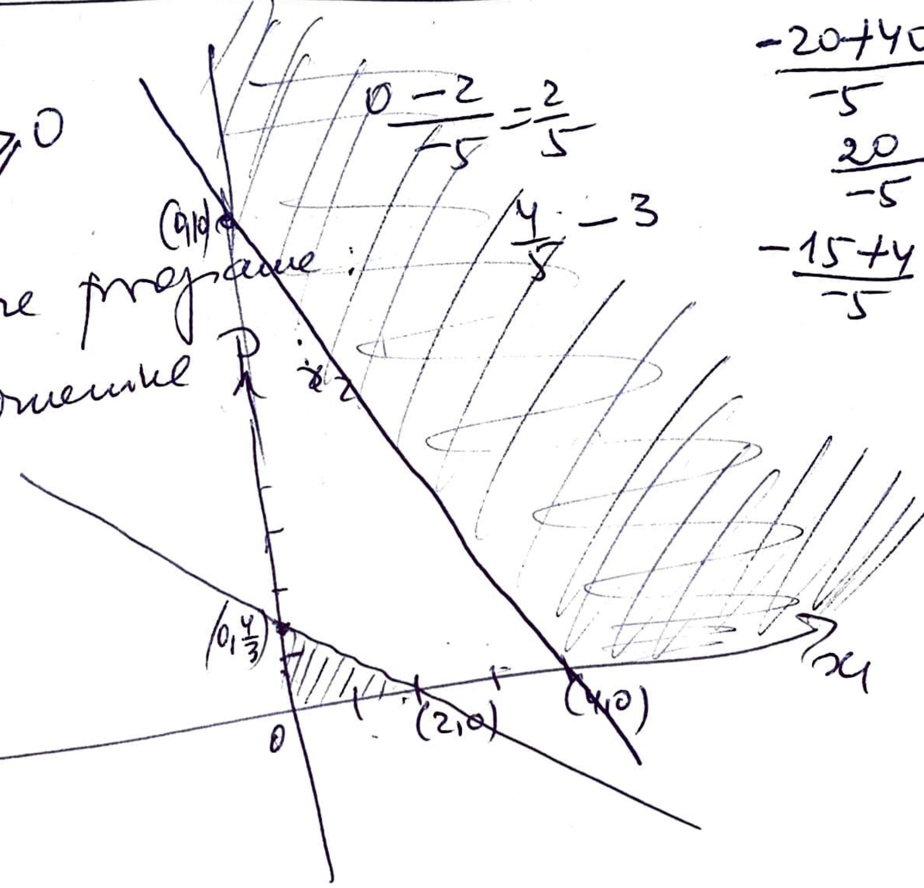
$\frac{0-2}{-5} = \frac{2}{5}$

$\frac{4}{5} - 3$

$\bar{x}_3 < 0$ și $y_{3j}^B \geq 0$

$\Longrightarrow$ pb nu are programe.

Grafic pt domeniul P



$2x_1 + 3x_2 = 4$

$5x_1 + 2x_2 = 20$

Cazul 2 ∄ B bază unitară care să fie dual admisibilă

Ex 1
$$\begin{cases} \inf(2x_1 - 3x_2) \\ 3x_1 + x_2 \geq 4 \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ x \geq 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{forma standard}} \begin{cases} \inf(2x_1 - 3x_2) \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_4 = 20 \\ x \geq 0 \end{cases} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{matrix}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} \inf (2x_1 - 3x_2) \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ -4x_1 - 5x_2 + x_4 = -20 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc} -3 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

			2	−3	0	0
	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	−4	−3	−1	1	0
0	x_4	−20	−4	−5	0	1
		0	−2	$\boxed{3}$	0	0

$\nleq 0$

B nu e dual admisibilă pt că $z_2^B - c_2 > 0$!

Metoda pt determinarea unei baze dual admisibile

(rezolvarea Pas 0 de la algoritm s.d)

Avem
$$\begin{cases} \inf c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}, \quad A = (B \mid R), \quad \underset{I}{\overset{\|}{B}}$$

VB	VVB	x_1 …	… x_k …	x_0
	b	B	R	0
x_0	M		1 pivot	1
		0 0	$z_j^B - c_j$ (unele > 0)	0

Construim pb:

$$(1') \begin{cases} \inf c^T x \\ Ax = b \\ \sum\limits_{j / z_j^B - c_j > 0} x_j + x_0 = M \\ x \geq 0, \ x_0 \geq 0 \end{cases}$$

alegem k : $z_k^B - c_k = \max$!

Important

facem o iterație pivotare $\Rightarrow$ un nou tabel.

Noul tabel va avea $z_j^{\tilde{B}} - c_j \leq 0$, are baza dual admisibilă $\longrightarrow$ putem aplica alg s.d. la problema ! (1')

Putem avea:

α) pb $(1')$ <u>nu</u> are programe $\Rightarrow$ (1) <u>nu</u> are programe.

Gata

β) pb $(1')$ <u>are opt finit</u> $\Rightarrow$ avem două cazuri pt pb (1).

β_1) x_0 <u>nu</u> apare ca variabilă de bază în t. optim al pb $(1')$. Atunci avem că (1) are optim finit. Soluția pt (1) se obține prin neglijarea lui x_0.

β_2) x_0 apare ca variabilă de bază în t. optim de la $(1')$. Atunci:

– dacă valoarea funcției obiectiv corespunzătoare tb. opt $(1')$ depinde de M $\Rightarrow$ în general pb (1) are opt infinit/ . . .

– dacă val. f-ei obiectiv $(1')$ optim <u>nu</u> depinde de M $\Rightarrow$ (1) are optim finit iar sol pt (1) se obține renunțând la x_0.

Continuare <u>Ex 1</u> de mai sus

	VB	VVB	x_1	$x_2 \downarrow$	x_3	x_4	x_0
0	x_3	-4	-3	-1	1	0	0
0	x_4	-20	-4	-5	0	1	0
0	x_0	M	0	$\boxed{1}$	0	0	1
		0	-2	3	0	0	0

La pb inițială adaugăm restricția:

$$\begin{cases} \boxed{x_2 + x_0 = M} \\ x_0 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (1') \begin{cases} \inf(2x_1 - 3x_2) \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = -4 \\ -4x_1 - 5x_2 + x_4 = -20 \\ x_2 + x_0 = M \\ x_0 \geq 0 \end{cases}$$

c_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0
			2	-3	0	0	0
0	x_3	$-4+M$	-3	0	1	0	1
0	x_4	$-20+5M$	-4	0	0	1	5
-3	x_2	M	0	1	0	0	1
		$-3M$	-2	0	0	0	$-3 \leq 0$

noua bază este duală admis. $\Rightarrow$ pot aplica S.d.

M este suficient de Mare!

$\geq 0 \Rightarrow$ Tb optim pt (1')

Val. fc. obiectiv depinde de M $\Rightarrow$ pb are opt ∞

Ex 2

$$\inf(3x_1 - 2x_2)$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{forma stan}}$

$$\inf(3x_1 - 2x_2)$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = 5 \quad / \cdot (-1) \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\inf(3x_1 - 2x_2)$$
$$\begin{cases} -4x_1 - x_2 + x_3 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 10 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$B = E$

c_B	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0
			3	-2	0	0	
0	x_3	-5	-4	-1	1	0	0
0	x_4	10	1	1	0	1	0
0	x_0	M	0	$\boxed{1}$	0	0	1
		0	-3	2	0	0	0

adaug restricția
$x_2 + x_0 = M$
$x_0 \geq 0$

VB	VVB	$\overset{3}{x_1}$	$\overset{-2}{x_2}$	$\overset{0}{x_3}$	$\overset{0}{x_4}$	$\overset{0}{x_0}$
x_3	$-5+M$	-4	0	1	0	1
x_4	$10-M$	1	0	0	1	-1
x_2	M	0	1	0	0	1
	$-2M$	-3	0	0	0	-2 ≤ 0
$0\ x_3$	5	-3	0	1	1	0
$0\ x_0$	$M-10$	-1	0	0	-1	1
$-2\ x_2$	10	1	1	0	1	0
	-20	-5	0	0	-2	0

negativ! (M e mare)

B dual admis. aplic s.d.

$$\frac{(-5+M)(-1)-(10-M)\cdot 1}{-1}=\frac{5-\cancel{M}-10+\cancel{M}}{-1}=\frac{-5}{-1}=5$$

$$\frac{M(-1)-(10-M)\cdot 1}{-1}=\frac{-\cancel{M}-10+\cancel{M}}{-1}=10$$

≥ 0 Tb optim (1')

x_0 este în T_{opt} $\Longrightarrow$ (1) are optim finit – renunț la x_0

$\Longrightarrow$ sol optimă este (deasupra) $x=\begin{pmatrix}0\\10\\5\\0\end{pmatrix}$, $z_{opt}=-20$

EX 3

$$\begin{cases}\inf(-2x_1-3x_2)\\ x_1+2x_2\geq 2\\ 3x_1+4x_2\leq 24\\ x\geq 0\end{cases} \xrightarrow{F\ standard} \begin{cases}\inf(-2x_1-3x_2)\\ x_1+2x_2-x_3=2 \quad /\cdot(-1)\\ 3x_1+4x_2+x_4=24\\ x\geq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\inf(-2x_1-3x_2)\\ -x_1-2x_2+x_3=-2\\ 3x_1+4x_2+x_4=24\\ x\geq 0\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$B=E$

	VB	VVB	$\overset{-2}{x_1}$	$\overset{-3}{x_2}$	$\overset{0}{x_3}$	$\overset{0}{x_4}$	$\overset{0}{x_0}$
0	x_3	-2	-1	-2	1	0	0
0	x_4	24	3	4	0	1	0
0	x_0	M	1	$\boxed{1}$	0	0	1
		0	2	3	0	0	

(36)

S

≤ 0 nu dual adm.

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_i^*[G_i(S^*)F_i(S^*) - F_i(S^*)G_i(S^*)] \geq 0.$$

Atunci S^* este o solutie eficienta a lui (P). max.!

adaug restricția

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_0 = M \\ x_0 \geq 0 \end{cases}$$

	VB	VVB	$\overset{-2}{x_1}$	$\overset{-3}{x_2}$	$\overset{0}{x_3}$	$\overset{0}{x_4}$	$\overset{0}{x_0}$
0	x_3	$-2+2M$	1	0	1	0	2
0	x_4	$24-4M$	-1	0	0	1	$\boxed{-4}$ pivot
-3	x_2	M	1	1	0	0	1
		$-3M$	-1	0	0	0	-3

≤ 0 dual adm. sd

<0 pt că M ef. mare

$$\min\left\{\frac{-1}{-1}, \frac{-3}{-4}\right\} = \min\left\{1, \frac{3}{4}\right\} = \frac{3}{4}$$

	VB	VVB	$\overset{-2}{x_1}$	$\overset{-3}{x_2}$	$\overset{0}{x_3}$	$\overset{0}{x_4}$	$\overset{0}{x_0}$
0	x_3	10	1/2	0	1	1/2	0
0	x_0	$-6+M \geq 0$	1/4	0	0	$-1/4$	1
-3	x_2	6	3/4	1	0	1/4	0
		-18	$-1/4$	0	0	$-3/4$	0

$$\frac{(-2+2M)(-4) + (24-4M)\cdot 2}{-4} = -2 + \cancel{2M} + 12 - \cancel{2M} = 10$$

$$\frac{-4+1}{-4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{M(-4) + (24-4M)\cdot 1}{-4} = \cancel{M} + 6 - \cancel{M} = 6$$

T opt

eliminam x_0

$-\frac{9}{4} + 2$

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z_{opt} = -18$$

$\inf(-2x_1-3x_2)$

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \le 2 \\ 3x_1+4x_2 \ge 24 \\ x \ge 0 \end{cases}$$

forma stand.

$$\begin{cases} \inf(-2x_1-3x_2) \\ x_1+2x_2+x_3=2 \\ 3x_1+4x_2-x_4=24 \quad /-1 \\ x\ge 0 \end{cases}$$

$$A=\begin{array}{cccc} & & x_3 & x_4 \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\inf(-2x_1-3x_2)$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=2 \\ -3x_1-4x_2+x_4=-24 \\ x\ge 0 \end{cases}$$

	VB	VVB	-2 x_1	-3 x_2	0 x_3	0 x_4	x_0
0	x_3	2	1	2	1	0	0
0	x_4	-24	-3	-4	0	1	0
0	x_0	M	1	$\boxed{1}$	0	0	1
		0	2	3	0	0	0

max

atașăm restricția

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_0=M \\ x_0\ge 0 \end{cases}$$

negativ

	VB	VVB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_0
	x_3	$2-2M$	$\boxed{-1}$	0	1	0	-1
	x_4	$-24+4M$	1	0	0	1	4
	x_2	M	1	1	0	0	1
		$-3M$	-1	0	0	0	-3
	x_1	$-2+2M$	1	0	-1	0	1
>0	x_4	$-22+2M$	0	0	1	1	3
>0	x_2	$2-M$	0	1	1	0	5
<0			0	0	-1	0	-4

$\min\left(\frac{-1}{-1}, \frac{-3}{-1}\right)=1$

$-3 \le 0$ duală admisibilă sd.

≤ 0

$\ge 0.$

$$\frac{(-24+4M)(-1)-2+2M}{-1} = \frac{-M-2+2M}{-1} = \frac{-2+M}{-1}$$

$$=\frac{24-4M-2+2M}{-1}$$

$$=\frac{-2M+22}{-1} = -22+2M$$

$\boxed{\text{Avem } \overline{x}_2^B<0,\ M \text{ mare} \Rightarrow 2-M<0}$ dar linia $(y^B_{2j})_j=(0,1,1,0,5)\ge 0$

$\Rightarrow$ pb (1') nu are program

$\Rightarrow$ (1) nu are program incompatibil sist (1)

Ex

$$\begin{cases} \inf(2x_1 - x_2) \\ x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Să scriem pb. în formă canonică (inf)

b) Să scrie duala pt canonica obținută

c) Să rezolvăm pb de la (b) cu metodele: grafic, S.P, S.D.

d) Rez pb. inițiale-primala cu: grafic, SP, SD.

38

Soluție

forma canonică (inf) este

$$\begin{cases} \inf c^T x \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{duala} \quad \begin{cases} \sup b^T u \\ A^T u \leq c \\ u \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \inf(2x_1 - x_2) \\ x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ -3x_1 - x_2 \geq -4 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad c = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

duala este

$$\begin{cases} \sup (1 \ \ -4)\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ u_1, u_2 \geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sup(u_1 - 4u_2) \\ u_1 - 3u_2 \leq 2 \\ 2u_1 - u_2 \leq -1 \\ u_1, u_2 \geq 0 \end{cases} = -\inf(-u_1 + 4u_2)$$

$$\begin{cases} \inf(-u_1 + 4u_2) \\ (d_1) \quad u_1 - 3u_2 \leq 2 \\ (d_2) \quad 2u_1 - u_2 \leq -1 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

$u_1 - 3u_2 = 2$

$u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = 2$

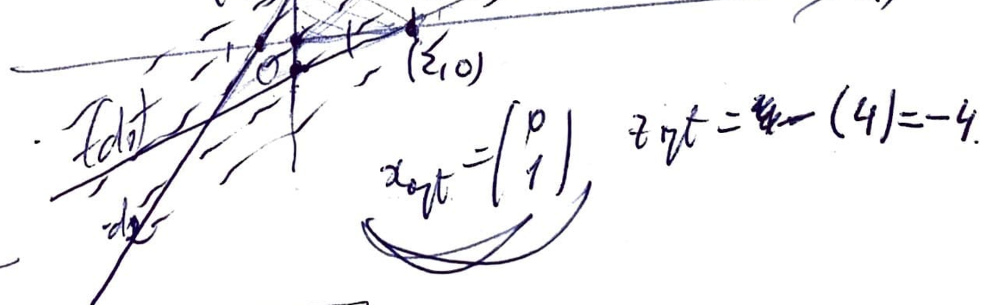
$u_1 = 0 \Rightarrow u_2 = -\frac{2}{3}$

$2u_1 - u_2 = -1$

$u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{2}$

$u_1 = 0 \quad u_2 = 1$

metoda grafică



$x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad z_{opt} = -(4) = -4$

$z = \boxed{-u_1 + 4u_2 = 0}$

$$\begin{cases} \inf(-u_1+4u_2) \\ u_1 - 3u_2 + u_3 = 2 \\ 2u_1 - u_2 + u_4 = -1 \quad / \cdot(-1) \\ u \geq 0 \end{cases}$$

rezolvare cu simplex primal

$Ax=b \quad b\geq 0$
$x \geq 0$

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_1^a \end{array}$$
$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} \inf(-u_1+4u_2) \\ u_1 - 3u_2 + u_3 = 2 \\ -2u_1 + u_2 - u_4 = 1 \quad b \geq 0 \\ u \geq 0 \end{cases}$$

Faza 1 $\quad \min u_1^a$

$$\begin{cases} u_1 - 3u_2 + u_3 = 2 \\ -2u_1 + u_2 - u_4 + u_1^a = 1 \\ u \geq 0,\ u_1^a \geq 0 \end{cases}$$

	VB	VVB	u_1 (0)	u_2 (0)	u_3 (0)	u_4 (0)	u_1^a (1)	
0	u_3	2	1	−3	1	0	0	
1	u_1^a	1	−2	$\boxed{1}$	0	−1	1	
		1	−2	1	0	−1	0	$\not\leq 0$ aplic S. primal
0	u_3	5	−5	0	1	−3	3	
0	u_2	1	−2	1	0	−1	1	
		0	0	0	0	0	−1	≤ 0 T opt S. Primal F1

$\bar{z}_{opt} = 0$ $\nexists$ v. art. în bază $\Rightarrow$ Pot trece la F2
am construit bază primal adm.

Faza 2 $\quad \inf(-u_1+4u_2)$

	VB	VVB	u_1 (−1)	u_2 (4)	u_3 (0)	u_4 (0)	
0	u_3	5	−5	0	1	−3	
4	u_2	1	−2	1	0	−1	
		4	−7	0	0	−4	≤ 0 T opt F2

Sol opt (bază) $\quad z_{opt} = -(4) = -4$

! era de sup maxim.

$$x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Rezolvare cu simplex dual

Avem problema:

$$\begin{cases} \inf(-u_1+4u_2) \\ u_1-3u_2+u_3=2 \\ 2u_1-u_2+u_4=-1 \\ u\geq 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} Ax=b \\ x\geq 0 \end{cases}$ (!) nu trebuie $b\geq 0$ obligatoriu

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$B=E$ FB!

	VB	VVB	$\overset{-1}{u_1}$	$\overset{4}{u_2}$	$\overset{0}{u_3}$	$\overset{0}{u_4}$	$\overset{0}{u_0}$
0	u_3	2	1	-3	1	0	0
0	u_4	-1	2	-1	0	1	0
0	u_0	M	1	0	0	0	1
		0	1 ≥ 0	-4	0	0	0
0	u_3	2-M	0	-3	1	0	-1
0	u_4	-1-2M	0	-1	0	1	-2
-1	u_1	M	1	0	0	0	1
		-M	0	-4	0	0	-1
0	u_3	5/2	0	-5/2	1	-1/2	0
0	u_0	$\frac{1+2M}{2}$	0	1/2	0	-1/2	1
-1	u_1	-1/2	1	-1/2	0	1/2	0
		-1/2	0	-9/2	0	-1/2	0

nu e dual adm. baza

adaugăm restricția $\begin{cases} u_1+u_0=M \\ u_0\geq 0 \end{cases}$

$\min\left\{\frac{-4}{-1}, \frac{-1}{-2}\right\}=\frac{1}{2}$

≤ 0 Baza dual admisibilă $\Rightarrow$ pot aplica s.d.

$$\frac{(2-M)(-2)-(-1)(-1-2M)}{-2}=\frac{-4+\cancel{2M}-1-\cancel{2M}}{-2}$$

$$\frac{M(-2)-1(-1-2M)}{-2}=\frac{-\cancel{2M}+1+\cancel{2M}}{-2}=-\frac{1}{2}.$$

	VB	VVB	$\overset{-1}{u_1}$	$\overset{4}{u_2}$	$\overset{0}{u_3}$	$\overset{0}{u_4}$	$\overset{0}{u_0}$
0	u_3	5	-5	0	1	-3	0
0	u_0	M	1	0	0	0	1
4	u_2	1	-2	1	0	-1	0
		4	-7	0	0	-4	0

≥ 0 Gata!

$$\frac{\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\frac{1+2M}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}}=\frac{\cancel{1}+2M-\cancel{1}}{2}$$

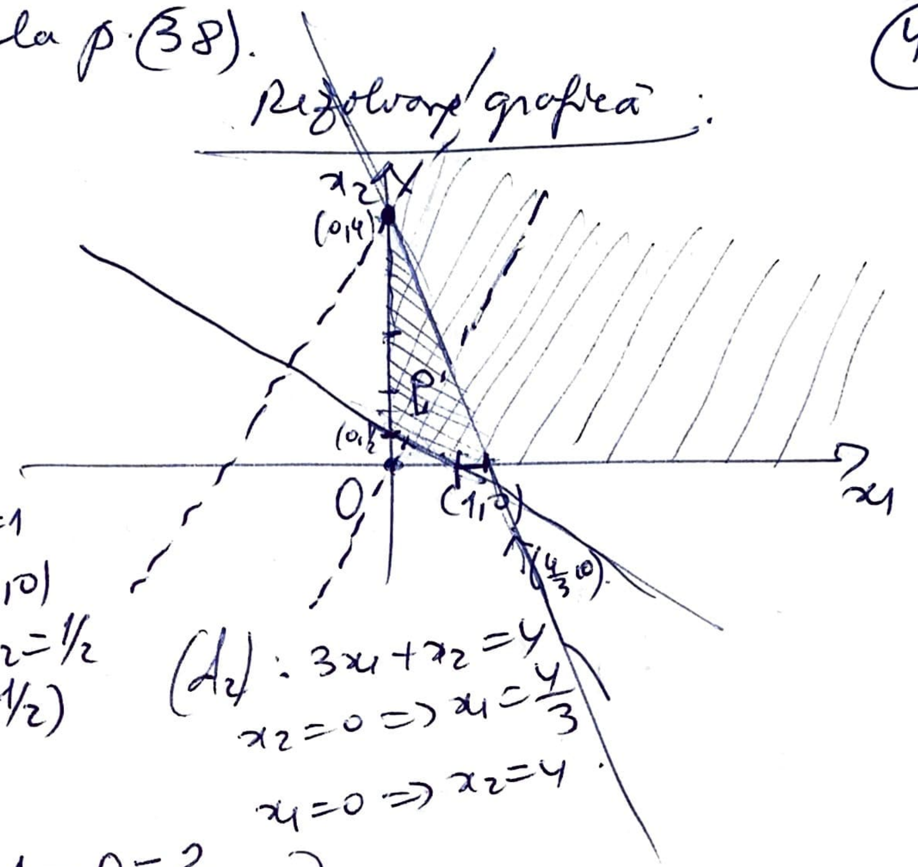
$$x_{opt}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad z_{opt}=(-)4=-4$$

! de la pb inițială max duala!

Pb. primală este la p. (38).

$$\begin{cases} \inf(2x_1 - x_2) \\ x_1 + 2x_2 \geq 1 \\ 3x_1 + x_2 \leq 4 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Rezolvare grafică:



(d_1) $x_1 + 2x_2 = 1$

$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$
$\Rightarrow (1,0)$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1/2$
$(0, 1/2)$

(d_2): $3x_1 + x_2 = 4$
$x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{4}{3}$
$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 4$

$$\left.\begin{matrix} A_1(1,0) \\ A_2(\frac{4}{3},0) \\ A_3(0,\frac{1}{2}) \\ A_4(0,4) \end{matrix}\right\} \quad \left.\begin{matrix} z(A_1) = 2\cdot 1 - 0 = 2 \\ z(A_2) = 2\cdot\frac{4}{3} - 0 = \frac{8}{3} \\ z(A_3) = 2\cdot 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ z(A_4) = 2\cdot 0 - 4 = -4 \end{matrix}\right\}$$

min = −4 pt A_4 care are coord. 0, 4

$x_1 = 0$
$x_2 = 4$
$x_{opt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\boxed{z_{opt} = -4}$

$z = \boxed{2x_1 - x_2 = 0}$

$x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$x_2 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$

$(1, 2)$

Rezolvare cu simplex primal

$\boxed{Ax = b \quad b \geq 0 \\ x \geq 0}$

$$\begin{cases} \inf(2x_1 - x_2) \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x \geq 0 \end{cases} \geq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} x_1^a \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

baza

Faza I
$$\begin{cases} \min x_1^a \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_1^a = 1 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ x \geq 0,\ x_1^a \geq 0 \end{cases}$$

42

	VB	VVB	x_1^0	x_2^0	x_3^0	x_4	x_1^a
1	x_1^a	2	1	2	-1	0	1
0	x_4	1	3	1	0	1	0
		2	1	2	-1	0	0
0	x_2	1	1/2	1	-1/2	0	1/2
0	x_4	0	5/2	0	1/2	1	-1/2
		0	0	0	0	0	-1

$\min\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{1}\right) = 1$

≤ 0 opt faza 1

Faza 2 $\min(2x_1 - x_2)$

	VB	VVB	x_1^2	x_2^{-1}	x_3^0	x_4^0
-1	x_2	1	1/2	1	-1/2	0
0	x_4	0	5/2	0	$\boxed{1/2}$	1
		-1	-5/2	0	1/2	0
	x_2	1		1	0	
	x_3	0	5	0	1	2
		-1	-5	0	0	-1

$\dfrac{-\frac{5}{4} - \frac{5}{4}}{\frac{1}{2}} \quad \frac{-5}{2}$