26.11.2016
– curs 3 –

Sisteme liniare cu coeficienți constanți

$$y' = Ay + g(x) \quad (1)$$
$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

Cazul omogen: $g(x) \equiv 0 \Rightarrow \boxed{y' = Ay} \quad (2)$

Am făcut în curs 2 determinarea unui sistem fundamental de soluții folosind metoda valorilor proprii pentru A.

Cazul neomogen: $g(x) \not\equiv 0$.

$$y' = Ay + g(x)$$

Metoda 1: Propoziție 1: Dacă cunoaștem $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}^n$ soluție a sistemului (1), atunci prin schimbarea de variabilă

$$z = y - \varphi_0$$
$$\text{sau} \Updownarrow$$
$$y = z + \varphi_0 \quad (3)$$

se obține un sistem omogen: $z' = Az$.

Deci, soluția pt. (1) este:

$$y(x) = \underset{\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x)}{\underset{\parallel}{z(x)}} + \varphi_0(x), \quad \forall x \in I.$$

Dem: φ_0 soluție pt (1) $\Rightarrow \varphi_0'(x) = A\varphi(x) - g(x)$

Aplicăm schimbarea de variabilă $y = z + \varphi_0$ în (1)

și rezultă: $(z + \varphi_0(x))' = A(z + \varphi_0(x)) + g(x)$

$$z' + \underbrace{\varphi_0'(x)} = Az + \underbrace{\cancel{A\varphi_0(x) + g(x)}} \Rightarrow z' = Az,$$

sistem liniar omogen, pt care aplicăm metoda val. proprii

Metoda 2 (Metoda variației constantelor)

- Rezolvăm întâi sistemul liniar omogen atașat sistemului (1) :
$$\bar{y}' = A\bar{y} \quad (4)$$
Aplic. teoria de la sisteme omogene și obținem un sistem fundam. de soluții pt (4) $\Rightarrow$ $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$

$$\Rightarrow \bar{y}(x) = c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$$
sau
$$\bar{y}(x) = \phi(x)\, c, \quad c \in \mathbb{R}^n, \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$
unde $\phi(x) = \text{coloane}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ este matrice fundamentală de soluții $\Rightarrow \underbrace{\phi'(x) = A\phi(x)}$ (4')

- Aplicăm metoda variației constantelor : determinăm o funcție $c : I \to \mathbb{R}^n$ a.î.
$$y(x) = \phi(x)\, c(x) \quad (5)$$
să fie soluție a sistemului (1) $\Longrightarrow$
$$\Rightarrow (\phi(x)c(x))' = A\phi(x)c(x) + g(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underline{\phi'(x)}\, c(x) + \phi(x)c'(x) = A\phi(x)c(x) + g(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cancel{A\phi(x)c(x)} + \phi(x)c'(x) = \cancel{A\phi(x)c(x)} + g(x)$$
$$\Rightarrow \phi(x)c'(x) = g(x)$$
Cum ϕ este matrice fundamentală de soluții $\Rightarrow$
$$\Rightarrow \det(\phi(x)) \neq 0, \forall x \in I \Rightarrow \exists (\phi(x))^{-1} \; \forall x \in I$$
$\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{(\phi(x))^{-1}\phi(x)}_{I_n} c'(x) = (\phi(x))^{-1}(g(x)) \Rightarrow c'(x) = \underbrace{(\phi(x))^{-1} g(x)}_{\text{not. } h(x)}$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = h(x), \quad h(x) = \begin{pmatrix} h_1(x) \\ \vdots \\ h_n(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{c_j' = h_j(x)}_{\text{ec. de tip primitivă}}, \; j = \overline{1,n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow C_j(x) = \int h_j(x)\,dx \;, \; j = \overline{1,n}$.

$\qquad\qquad\;\; \| $

$\qquad\qquad H_j(x) + K_j$

Exemplu (vezi în cursul 2)

Fie sistemul: $(6)\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 + x \\ y_2' = y_1 + y_2 + 1 \end{cases}$

a) Scrieți sistemul în formă matricială

b) determinați mulțimea soluțiilor sistemului (6)

Soluție:

a) $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}}_{g(x)}$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(x) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

b) • $\boxed{\overline{y}' = A\overline{y}}$ $\xRightarrow[\text{(exemplu de la sisteme omogene)}]{\text{cursul 2}}$ $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ sistem fundamental de soluții

$\begin{cases} \varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} \\ \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} -2e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi(x) = \begin{pmatrix} 2e^{3x} & -2e^{-x} \\ e^{3x} & e^{-x} \end{pmatrix}$

$\overline{y}(x) = \phi(x) \cdot C \;, \quad C \in \mathbb{R}^2$

• aplicăm variația constantelor: determinăm $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ a.î. $y(x) = \phi(x) C(x)$ soluție a sistemului (6)

$\xRightarrow[\text{de mai sus}]{\text{calculele}} \quad C'(x) = (\phi(x))^{-1} g(x)$

Calculăm $(\phi(x))^{-1}$: $\det\phi(x) = 2e^{3x} \cdot e^{-x} + 2e^{3x} \cdot e^{-x} = 4e^{2x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$(\phi(x))^t = \begin{pmatrix} 2e^{3x} & e^{3x} \\ -2e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}$; $(\phi(x))^* = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} e^{-x} & (-1)^{1+2}(-2e^{-x}) \\ (-1)^{2+1} e^{3x} & (-1)^{2+2} 2e^{3x} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow (\phi(x))^* = \begin{pmatrix} e^{-x} & 2e^{-x} \\ -e^{3x} & 2e^{3x} \end{pmatrix} \Rightarrow (\phi(x))^{-1} = \frac{1}{\det\phi(x)} (\phi(x))^* \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\Phi(x))^{-1} = \frac{1}{4e^{2x}} \begin{pmatrix} e^{-x} & 2e^{-x} \\ -e^{3x} & 2e^{3x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} e^{-3x} & \frac{1}{2} e^{-3x} \\ -\frac{1}{4} e^{x} & \frac{1}{2} e^{x} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} e^{-3x} & \frac{1}{2} e^{-3x} \\ -\frac{1}{4} e^{x} & \frac{1}{2} e^{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -\frac{1}{4} e^{-3x} \cdot x + \frac{1}{2} e^{-3x} \cdot 1 \\ C_2'(x) = -\frac{1}{4} e^{x} \cdot x + \frac{1}{2} e^{x} \cdot 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow C_1(x) = \int \left(-\frac{1}{4} e^{-3x} x + \frac{1}{2} e^{-3x} \right) dx = -\frac{1}{4} \int x \left(\frac{e^{-3x}}{-3} \right)' dx + \frac{1}{2} \int e^{-3x} dx =$$

$$= \frac{1}{12} \left[x e^{-3x} - \int x' \left(e^{-3x} \right) dx \right] + \frac{1}{2} \frac{e^{-3x}}{-3} =$$

$$= \frac{1}{12} \left(x e^{-3x} - \frac{e^{-3x}}{-3} \right) - \frac{1}{6} e^{-3x} + K_1 =$$

$$= \frac{1}{6} e^{-3x} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{6} - 1 \right) + K_1 = \frac{1}{6} \frac{(3x-5)}{6} e^{-3x} + K_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1(x) = \frac{(3x-5) e^{-3x}}{36} + K_1 .} \quad , K_1 \in \mathbb{R} .$$

La fel, calculăm $C_2(x)$ și apoi înlocuind în $y(x) = \Phi(x) C(x)$ obținem $y_1(x)$ și $y_2(x)$.

Ecuații diferențiale de ordin n

$$\begin{cases} F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (7) \\ \quad y \text{ - variabila dependentă} \\ F : \Delta \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{\text{de } (n+1) \text{ ori}} \to \mathbb{R} . \end{cases}$$

$$\boxed{y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)})} \quad (8)$$

$$f : G \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{\text{de } n \text{ ori}} \longrightarrow \mathbb{R} .$$

Ecuația în formă explicită (8) este liniară dacă

$$f(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n-1)}) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)} + b(x)$$

unde $a_i : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$

$b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Deci: ecuația diferențială liniară de ordin n are forma:

$$\boxed{y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)} + b(x)} \quad (9)$$

<u>Propoziția 2</u>: Ecuației (9) i se poate asocia un sistem liniar neomogen $z' = A(x) z + g(x)$ cu $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ și A și g date în (10).

<u>Dem</u>: Alegem $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$ astfel

$$z_j = y^{(j-1)}, \; j = \overline{1,n} \Longleftrightarrow \begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = y^{(1)} \\ \vdots \\ z_n = y^{(n-1)} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_1' = y^{(1)} \\ z_2' = y^{(2)} \\ \vdots \\ z_{n-1}' = y^{(n-1)} \\ z_n' = y^{(n)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) \cdot y^{(i)} + b(x) \underset{i=j-1}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{j-1}(x) y^{(j-1)} + b(x) = \\ \qquad = \sum_{j=1}^{n} a_{j-1}(x) z_j + b(x) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = a_0(x) z_1 + a_1(x) z_2 + \dots + a_{n-1}(x) z_n + b(x) \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{A, g}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_0(x) & a_1(x) & a_2(x) & \cdots & a_{n-1}(x) \end{pmatrix}; \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix} \qquad (10)$$

<u>Cazul omogen</u>: $y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) y^{(i)}$ (11)

Conform (1) $\Rightarrow$ ec. (11) îi asociem sistemul $z' = A(x)z$ cu A dat de (10). $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Orice soluție φ a sistemului $z' = A(x)z$, $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ furnizează o soluție pt (11): $\psi_1(x) = \varphi_1(x)$

Proprietățile de la sisteme omogene se transmit ec. (11) astfel:

- spațiul soluțiilor ec. (11) este spațiu vectorial de dimensiune n, adică va fi suficient să găsim o bază de soluții, adică, un <u>sistem fundamental de soluții</u>, care va genera toate soluțiile.
- pentru a determina un sistem fundamental de soluții pentru (11) se poate proceda astfel

(I) Scriem sistemul asociat, determinăm s.f.s. pentru sistemul $z' = Az$ și reținem doar primele componente din fiecare soluție din s.f.s.

(II) Se determină un s.f.s. folosind, doar <u>în cazul coeficienților constanți</u> ($a_i(x) = a_i$, $i = \overline{1,n}$, $\forall x \in I$), rădăcinile ecuației caracteristice.

<u>Ecuația de ordin liniară omogenă cu coef constanți</u>.

$$\boxed{y^{(n)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)}} \qquad (12)$$

Ecuația caracteristică este:

$$\lambda^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i$$

$$\lambda^n = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{n-1}\lambda^{n-1} \quad (13)$$

OBS: $\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_2\lambda^2 - a_1\lambda - a_0$ coincide, mai puțin un semn multiplicativ, cu polinomul caracteristic asociat matricii A din sistemul $z' = Az$.
Rădăcinile ecuației caracteristice (13) sunt valorile proprii ale matricii A.

Pt. a scrie un s.f.s. pt (12) procedăm astfel:

- determinăm rădăcinile ec. (13):
  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ distincte
  cu multiplicitățile $m_1, \dots, m_k$.
  $(m_1 + \dots + m_k = n)$
- pentru $j = \overline{1,k}$ avem:

1) $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $m_j \geq 1$ $\Rightarrow$ se scriu m_j soluții în sistemul fundam.:

$$\varphi_i(x) = x^{i-1} \cdot e^{\lambda_j x}, \; i = \overline{1, m_j}$$

$$\left(\begin{aligned} &\varphi_1(x) = e^{\lambda_j x} \\ &\varphi_2(x) = x\, e^{\lambda_j x} \\ &\vdots \\ &\varphi_{m_j}(x) = x^{m_j - 1} e^{x} \end{aligned} \right)$$

2) $\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $m_j \geq 1$ $\Rightarrow$ ec. caract. are și rădăcina conjugată $\overline{\lambda_j}$ cu același ordin de multiplicitate $\Rightarrow$ se scriu în același timp soluții și pt λ_j și pt $\overline{\lambda_j}$ $\Rightarrow$ se scriu $2m_j$ soluții în s.f.s.

$\lambda_j = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$
$i = \sqrt{-1}$

$$\begin{cases} \varphi_{s1}(x) = Re\left(x^{s-1} e^{\lambda_j x}\right) \\ \varphi_{s2}(x) = Im\left(x^{s-1} e^{\lambda_j x}\right) \end{cases}, \quad s = \overline{1, m_j}$$

unde $e^{\lambda_j x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_{s1}(x) = x^{s-1} e^{\alpha x} \cos(\beta x) \\ \varphi_{s2}(x) = x^{s-1} e^{\alpha x} \sin(\beta x) \end{cases}, \quad s = \overline{1, m_j}$$

Exemplu: Fie ecuatia:

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y^{(2)} + 8y^{(1)} - 3y = 0.$$

sau

$$y^{(4)} = 3y - 8y^{(1)} - 8y^{(2)} - 4y^{(3)}$$

Se cere un s.f.s. și forma generală a soluției.

Soluție: Scriem ecuatia caracteristică:

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda - 3\lambda^0 = 0 \quad (y = y^{(0)})$$

	λ^4	λ^3	λ^2	λ^1	λ^0
	1	4	8	8	-3
-1	1	3	5	3	0
-1	1	2	3	0	
~~-1~~	~~1~~	~~1~~	~~2~~		

$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ m_1 = 2 \end{array}}$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

$$\Delta = 4 - 12 = -8$$

$$\lambda_{2,3} = \frac{-2 \pm i 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm i\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \lambda_2 = -1 + i\sqrt{2}, \ m_2 = 1 \\ \lambda_3 = -1 - i\sqrt{2} = \overline{\lambda_2}, \ m_3 = 1 \end{array}}$$

$$\begin{array}{l} \lambda_1 = -1 \\ m_1 = 2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1(x) = x^0 e^{\lambda_1 x} = e^{-x} \\ \varphi_2(x) = x^1 e^{\lambda_1 x} = x e^{-x} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_2 = -1 + i\sqrt{2} \\ \lambda_3 = \overline{\lambda_2}, \ m_2 = m_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \varphi_3(x) = Re\left(x^0 e^{\lambda_2 x}\right) = e^{-x} \cos(x\sqrt{2}) \\ \varphi_4(x) = Im\left(x^0 e^{\lambda_2 x}\right) = e^{-x} \sin(x\sqrt{2}) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ S.f.s : $\{ e^{-x}, xe^{-x}, e^{-x}\cos(x\sqrt{2}), e^{-x}\sin(x\sqrt{2}) \} \Rightarrow$

$\rightarrow$ $\forall$ soluție a ec. este de forma:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 e^{-x}\cos(x\sqrt{2}) + C_4 e^{-x}\sin(x\sqrt{2})$$

$$C_1, C_2, C_3, C_4 \in R.$$

<u>Cazul neomogen pt ec. dif. liniare de ordin n cu coeficienți constanți</u>

$$\boxed{y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j y^{(j)} + b(x)} \quad (14)$$

$$a_0, \ldots, a_{n-1} \in R$$
$$b : I \subset R \to R$$

<u>Metoda 1</u>:

<u>Propoziție</u>: Dacă pt. ec. (14) cunoaștem o soluție $\varphi_0 : I \to R$,

$$\varphi_0^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \varphi_0^{(j)}(x) + b(x), \quad \forall x \in I$$

atunci prin s.v.: $y = z + \varphi_0$,

se obține pt z o ecuație liniară omogenă

$$z^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^{(j)}$$

care se rezolvă ca în cazul omogen cu coeficienți constanți.

<u>Dem. ex!</u>

<u>Metoda a 2-a</u>: metoda variației constantelor:

- pt (14) scriem ec. dif. de ordin n omogenă liniară atașată:

$$\bar{y}^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \bar{y}^{(j)} \quad (15)$$

pentru care determinăm $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ s.f.s. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{y}(x) = C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x), \quad C_1, \ldots, C_n \in R.$

- Aplicăm metoda variației constantelor: determinăm $C_1, \dots, C_n : I \to \mathbb{R}$ a.î.

$$y(x) = C_1(x)\varphi_1(x) + \dots + C_n\varphi_n(x)$$

să fie soluție a ec. (14).

Știu că ec. (14) i-am asociat sistemul $\underline{z' = Az} + g(x)$ cu A și g date în (10). $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ un s.f.s pt $\bar{z}' = A\bar{z}$ este $\left\{ \begin{pmatrix} \varphi_j \\ \varphi_j^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi_j^{(n-1)} \end{pmatrix} \right\}_{j=\overline{1,n}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\bar{z}(x) = \underset{\substack{\parallel \\ \text{coloane}\left(\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \vdots \\ \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}\right)}}{\phi(x)}\, c$, $c \in \mathbb{R}$.

La variația const în sistem $\Rightarrow$ $z(x) = \phi(x) \cdot C(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\underline{\phi(x)\, C'(x) = g(x)}$ $\Rightarrow$ sistem liniar algebric pt $C_1', \dots, C_n'$:

$$\boxed{\begin{cases} C_1'\varphi_1(x) + \dots + C_n'\varphi_n(x) = 0 \\ C_1'\varphi_1^{(1)}(x) + \dots + C_n'\varphi_n^{(1)}(x) = 0 \\ \vdots \\ C_1'\varphi_1^{(n-2)}(x) + \dots + C_n'\varphi_n^{(n-2)}(x) = 0 \\ C_1'\varphi_1^{(n-1)}(x) + \dots + C_n'\varphi_n^{(n-1)}(x) = f(x) \end{cases}} \quad (16) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $C_j'(x) = h_j(x)$, $j = \overline{1,n}$ $\Rightarrow$ $C_j(x) = \int h_j(x)\,dx = H_j(x) + K_j$, $j = \overline{1,n}$

<u>Exemplu</u>: Fie ecuația:

$$y^{(3)} = y - 3y^{(1)} + 3y^{(2)} + \underline{e^x}.$$

Se cere mulțimea soluțiilor ec.

<u>Soluția</u>: $\bar{y}^{(3)} = \bar{y} - 3\bar{y}^{(1)} + 3\bar{y}^{(2)} \Rightarrow \lambda^3 = \lambda^0 - 3\lambda + 3\lambda^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^3 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 1,\ m_1 = 3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ s.f.s: $\begin{cases} \varphi_1(x) = x^0 e^{\lambda x} = e^x \\ \varphi_2(x) = x e^x \\ \varphi_3(x) = x^2 e^x \end{cases} \Rightarrow \bar{y}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x$

$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$

Aplicăm met. variației constantelor $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ determinăm $C_1, C_2, C_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î.:

$$\begin{cases} C_1' \cdot \varphi_1(x) + C_2' \varphi_2(x) + C_3' \varphi_3(x) = 0 \\ C_1' \varphi_1'(x) + C_2' \varphi_2'(x) + C_3' \varphi_3'(x) = 0 \\ C_1' \varphi_1''(x) + C_2' \varphi_2''(x) + C_3' \varphi_3''(x) = e^x . \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x + C_3' x^2 e^x = 0 \quad | : e^x \\ C_1' (e^x)' + C_2' (x e^x)' + C_3' (x^2 e^x)' = 0 \\ C_1' (e^x)'' + C_2' (x e^x)'' + C_3' (x^2 e^x)'' = e^x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1' + C_2' x + C_3' x^2 = 0 . \\ C_1' e^x + C_2' (1+x) e^x + C_3' (2x + x^2) e^x = 0 \quad | : e^x \\ C_1' e^x + C_2' (2+x) e^x + C_3' (2 + 4x + x^2) e^x = e^x \quad | : e^x . \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1' + C_2' x + C_3' x^2 = 0 \\ C_1' + C_2'(1+x) + C_3' (2x + x^2) = 0 \\ C_1' + C_2'(2+x) + C_3' (2 + 4x + x^2) = 1 \end{cases} \overset{(-)}{\Rightarrow} \begin{cases} C_2' + C_3'(2x) = 0 \\ C_2' + C_3'(2x+2) = 1 . \end{cases}$$

$\overset{(-)}{\Rightarrow} C_3' \cdot 2 = 1 \Rightarrow \boxed{C_3' = \frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{C_3 = \frac{1}{2} x + K_3}$

$C_2' + \frac{1}{2} \cdot 2x = 0 \Rightarrow \boxed{C_2' = -x} \Rightarrow \boxed{C_2 = -\frac{x^2}{2} + K_2}$

$C_1' + (-x) \cdot x + \frac{1}{2} x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1' = + \frac{1}{2} x^2} \Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{x^3}{6} + K_1}$

$\Rightarrow y(x) = C_1(x) \cdot e^x + C_2(x) x e^x + C_3(x) \cdot x^2 e^x =$

$= \left(\frac{x^3}{6} + K_1\right) e^x + \left(-\frac{x^2}{2} + K_2\right) x e^x + \left(\frac{1}{2} x + K_3\right) \cdot x^2 e^x =$

$= K_1 e^x + K_2 x e^x + K_3 x^2 e^x + e^x \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2}\right)$

$\frac{x^3}{6} e^x = \tilde{y}(x) .$

Ecuații diferențiale de ordin n reductibile la ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți

Dacă ecuația diferențială liniară de ordin n este de forma:

$$x^n y^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j y^{(j)} + f(x), \quad (17) \quad x \neq 0$$

$a_j(x)$; $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$

atunci prin schimbarea de variabilă $\boxed{|x| = e^t}$ (18)

se obține o ec. liniară de ordin n în (t, z)

unde $\boxed{y(x) = z(t(x))}$ (19)

Deci:

$$(x, y) \xrightarrow{|x| = e^t} (t, z)$$

ec. (17)

(ec. Euler liniară)

Arătăm că $x y^{(1)}, x^2 y^{(2)}, \dots, x^{n-1} y^{(n-1)}, x^n y^{(n)}$

se scriu ca sume de z și derivatele lui z cu coeficienți constanți. Avem:

- $\underline{y(x) = z(t(x))}, \Rightarrow y = z$
- $y'(x) = z'(t(x)) \cdot t'(x)$

$$|x| = e^t \Leftrightarrow t = \ln|x| = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ \ln(-x), & x < 0 \end{cases} = t(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t'(x) = \begin{cases} (\ln x)', & x > 0 \\ (\ln(-x))', & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{-x}(-1), & x < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$t'(x) = \frac{1}{x}, \ \forall x \neq 0$$

$$y'(x) = z'(t(x)) \cdot \frac{1}{x} \quad | \cdot x \Rightarrow x y' = z'$$

- $y''(x) = \left(z'(t(x)) \cdot \frac{1}{x}\right)' = z''(t(x)) t'(x) \cdot \frac{1}{x} + z'(t(x)) \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow y''(x) = z''(t(x)) \cdot \frac{1}{x^2} - z'(t(x)) \cdot \frac{1}{x^2} \quad | \cdot x^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 y''(x) = z''(t(x)) - z'(t(x)) \Rightarrow \boxed{x^2 y'' = z'' - z'}$

<u>Temă</u>: 1) Analog, determinați $x^3 y'''$, $x^4 y^{(4)}$.

2) Aplicați s.v. de mai sus ec.:

$$x^2 y'' - 2y = x^2 + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

<u>Soluție</u>:

$$x^2 y'' = 2 \cdot y + x^2 + \frac{1}{x}$$

Forma generală pt $n=2$ $\Rightarrow x^2 y'' = c_0 \cdot x^0 y^{(0)} + c_1 x^1 y^{(1)} + b(x)$ $\Rightarrow$

$c_0 = 2$, $c_1 = 0$, $b(x) = x^2 + \frac{1}{x}$

$(x, y) \xrightarrow[|x| = e^t]{} (t, z)$

$x > 0 \Rightarrow x = e^t \Leftrightarrow t = \ln x$

Avem: $y(x) = z(t(x))$

$x y'(x) = z'(t(x)) \Rightarrow xy' = z'$

$x^2 y'' = z'' - z'$

$\Rightarrow z'' - z' = 2z + \cancel{x^2 + \frac{1}{x}}\ e^{2t} + \frac{1}{e^t} \Rightarrow$

$\Rightarrow z'' = \underbrace{2z + z'}_{} + \cancel{x^2 + \frac{1}{x}}\ e^{2t} + e^{-t}.$

$z'' = 2z + z' + e^{2t} + e^{-t}$ ec. cu coef constanți

Ecuații cu derivate parțiale

Pentru o funcție $u : \Delta \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$ se poate defini derivata de oricâte ori în raport cu fiecare variabilă.

Definiții: 1) Numim multiindice un vector $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, a cărui lungime este $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

2) Pentru un multiindice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ~~...~~ definim derivata de ordin $|\alpha|$ în raport cu x_1 de α_1 ori, ... și cu x_n de α_n ori și notăm această derivată prin:

$$\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n} u = \partial^\alpha u$$

Exemple: $\boxed{|\alpha| = 0} \Rightarrow \alpha = (0, 0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{N}^n} \Rightarrow \dfrac{\partial^0 u}{\partial x_1^0 \dots \partial x_n^0} = u$

$\boxed{|\alpha| = 1} \Rightarrow \alpha = (1, 0, \dots, 0) \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \partial_1 u = \partial^{(1,0,\dots,0)} u$

$\vdots$

$\alpha = (0, 0, \dots, 0, 1) \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = \partial_n u$

$\boxed{|\alpha| = 2} \Rightarrow \alpha = (2, 0, \dots, 0) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \partial_1^2 u$

$\vdots$

$\alpha = (0, 0, \dots, 0, 2) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \partial_n^2 u$

$\alpha = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots, 0, \overset{j}{1}, 0, \dots, 0) \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \partial_i \partial_j u$

Definiție. Se numește ecuație cu derivate parțiale de ordin k $(k \in \mathbb{N}^*)$, ecuația de forma:

$$\boxed{F\left(x, \left(\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)_{|\alpha| \le k}\right) = 0} \qquad (20)$$

sau $F(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \le k}) = 0$ (21)

Ecuatia (20) este <u>liniară</u> dacă se scrie sub forma:

$$\sum_{\substack{|\alpha| \le k \\ \alpha \in \mathbb{N}^*}} a_\alpha(x)\, \partial^\alpha u = f(x). \quad (22)$$

cu $a_\alpha : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^*$, $|\alpha| \le k$.

<u>Exemplu</u>: $\boxed{k=1}$

$$\sum_{|\alpha| \le 1} a_\alpha(x)\, \partial^\alpha u = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{(0,\dots,0)}(x)\, u + a_{(1,0,\dots,0)}(x)\, \partial_1 u + \dots + a_{(0,\dots,0,1)}(x)\, \partial_n u = f(x)$$

$$\Rightarrow \boxed{a_0(x) u + a_1(x)\, \partial_1 u + \dots + a_n(x)\, \partial_n u = f(x)}$$

Ecuatia (20) este <u>cvasiliniară</u> dacă este de forma:

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha\left(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \le k-1}\right) \partial^\alpha u = f\left(x, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \le k-1}\right)$$

<u>Exemplu</u> 1) $\boxed{k=1} \Rightarrow \sum_{|\alpha|=1} a_\alpha(x,u)\, \partial^\alpha u = f(x,u) \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_0(x,u)\, u + a_1(x,u)\, \partial_1 u + \dots + a_n(x,u)\, \partial_n u = f(x,u)$$

2) $\boxed{k=2} \Rightarrow \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u) \cdot \partial^\alpha u =$

$$= f(x, u, \partial_1 u, \dots, \partial_n u).$$

În cazul $\boxed{n=2}$.

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x, u, \partial_1 u, \partial_2 u)\, \partial^\alpha u = f(x, u, \partial_1 u, \partial_2 u) \\ &\left.\begin{aligned} n&=2 \\ |\alpha|&=2 \end{aligned}\right| \Rightarrow \alpha = (2,0) \text{ sau } \alpha = (0,2) \text{ sau } \alpha = (1,1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{(2,0)}(x, u, \partial_1 u, \partial_2 u) \cdot \partial_1^2 u + a_{(0,2)}(x, u, \partial_1 u, \partial_2 u)\, \partial_2^2 u +$$
$$+ a_{(1,1)}(x, u, \partial_1 u, \partial_2 u)\, \partial_1 \partial_2 u = f(x, u, \partial_1 u, \partial_2 u)$$

Cazuri particulare de ec. cu derivate parțiale care se reduc la integrarea unor ec. diferențiale.

1) $\partial_1 u = 0 \Rightarrow u = C_1 + f(x_2, \dots, x_n)$

$u : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

f arbitrară

2) $\partial_1 \partial_2 u = 0$

$u : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_2} u}_{v}\Big) = 0.$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_1} = 0 \underset{1)}{\Longrightarrow} v = C_1 + f(x_2, \dots, x_n)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_2} u = C_1 + f(x_2, \dots, x_n) \Rightarrow u = \int \big(C_1 + f(x_2, \dots, x_n)\big)\, dx_2$$

$$\Rightarrow u = C_1 x_2 + \int f(x_2, \dots, x_n)\, dx_2 =$$

$$= C_1 x_2 + F(x_2, \dots, x_n)$$

F ~~arbitrară~~ (oarecare)
arbitrară

3) $\underline{n=2}$: $\partial_1 u + \partial_2 u = 0$.

o funcție $u(x_1, x_2) = f(x_1 - x_2)$ verifică ecuația: $\forall f$ derivabilă

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f'(x_1 - x_2) \cdot 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = f'(x_1 - x_2)(-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$$

Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi, liniare

$$a_0(x) u + a_1(x)\partial_1 u + \dots + a_n(x)\partial_n u = f(x).$$

În general, ec. liniară cu ΔP de ordin întâi este de forma:

$$\boxed{a_1(x)\partial_1 u + \dots + a_n(x)\partial_n u = g(x, u)} \quad (23).$$

Cazul omogen: $g(x, u) = 0 \Rightarrow$

$$\boxed{a_1(x)\partial_1 u + \dots + a_n(x)\partial_n u = 0}. \quad 24$$

Ec. (24) i se asociază sistemul caracteristic:

$$\frac{dx_1}{a_1(x)} = \frac{dx_2}{a_2(x)} \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x)} = dt \quad (25)$$

sau

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(x) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(x) \end{cases} \quad (26) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_1(x) \\ \vdots \\ a_n(x) \end{pmatrix}$$

<u>Def</u>: Pt un sistem de ecuații diferențiale $x' = f(t,x)$, numim <u>integrală primă</u> o funcție $F: \Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ care este constantă de-a lungul oricărei soluții a sistemului, adică: $\forall \varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ soluție pt $x' = f(t,x)$

$$\exists\, C_\varphi \in \mathbb{R} \text{ a.î. } F(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) = C_\varphi \quad \forall t \in I.$$

<u>Propoziție 1.</u>
1) Dacă $u : \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este soluție pt (24), atunci u este integrală primă pt. (25).
2) Dacă F este integrală primă pt (25), atunci este soluție pt (24)

<u>Exemplu</u>: Fie ecuația $\partial_1 u + \partial_2 u = 0$. în $\mathbb{R}^2$. $(n=2)$

Sistemul caract este: $\dfrac{dx_1}{1} = \dfrac{dx_2}{1}$ pt ca $a_1(x) = 1$, $a_2(x) = 1$

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{dx_2} = 1 \Rightarrow X_1 = X_2 + C \Rightarrow \underbrace{X_1 - X_2}_{} = C \Rightarrow$$

$\Rightarrow \varphi_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ integrală primă a sist. caract $\Rightarrow$

$$\Rightarrow u(x_1, x_2) = f(\varphi_1(x_1, x_2)) \Rightarrow \underline{u(x_1, x_2) = f(x_1 - x_2)}$$

<u>Propoziția 2</u>: Dacă pentru sistemul (25) caracteristic găsim $n-1$ integrale prime $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ independente, atunci soluția ec. (24) este:

$$u(x_1, \ldots, x_n) = f(\varphi_1(x_1, \ldots x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1 \ldots, x_n))$$

cu f oarecare.

Exemplu: Folosind prop 1 și 2 determinați forma generală a soluției ec:

$$\partial_1 u + x_1 \partial_2 u + x_1 x_2 \partial_3 u + \dots + x_1 x_2 \dots x_{n-1} \partial_n u = 0$$

$a_1(x) = 1$

$a_2(x) = x_1$, $x = (x_1, \dots, x_n)$

$a_3(x) = x_1 x_2$

$\vdots$

$a_n(x) = x_1 x_2 \dots x_{n-1}$

Sistemul caract se scrie:

$$\frac{dx_1}{1} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{x_1 x_2} = \dots = \frac{dx_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-2}} = \frac{dx_n}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}$$

$x_1 dx_1 = dx_2$

$\frac{x_1^2}{2} = x_2 + C_1$

$\underbrace{\frac{x_1^2}{2} - x_2}_{\varphi_1(x)} = C_1$

$\Rightarrow$

$x_2 dx_2 = dx_3$

$\frac{x_2^2}{2} = x_3 + C_2$

$\underbrace{\frac{x_2^2}{2} - x_3}_{\varphi_2(x)} = C_2$

$\Downarrow$

$x_{n-1} dx_{n-1} = dx_n$

$\frac{x_{n-1}^2}{2} = x_n + C_{n-1}$

$\underbrace{\frac{x_{n-1}^2}{2} - x_n}_{\varphi_{n-1}(x)} = C_{n-1}$

Cf. prop. 2 $\Rightarrow$ $u(x_1, \dots, x_n) = f\left(\frac{x_1^2}{2} - x_2, \frac{x_2^2}{2} - x_3, \dots, \frac{x_{n-1}^2}{2} - x_n\right)$

Exemple de operatori cu derivate parțiale

1) $\operatorname{div} u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}$ = divergența lui $u = (u_1, \dots, u_n)$

2) $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$ = laplacean

3) $\nabla u = \left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_1}}_{u_1}, \dots, \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_n}}_{u_n}\right)$ = gradientul lui u.
(nabla)

OBS: $\boxed{\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)}$

Temă: Forma canonică pentru ecuații cu derivate parțiale de ordin 2 cvasiliniare:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\,\partial_i\partial_j u = f(x,\partial_1 u,\partial_2 u,\dots,\partial_n u)$$

în cazul $n=2$:

$$\underbrace{a_{11}(x)}_{a(x)}\,\partial_1^2 u + \overbrace{\left(a_{12}(x)+a_{21}(x)\right)}^{2b(x)}\,\partial_1\partial_2 u + \overbrace{a_{22}(x)}^{c(x)}\,\partial_2^2 u =$$

$$= f(x,\partial_1 u,\partial_2 u).$$

și tipul ecuației.

(pag. 27-35 în partea a II-a de material pt EDDP)