24.11.2019
— curs 2 —

Ecuații diferențiale implicite de ordinul întâi în $\mathbb{R}$

$$F(x, y, y^{(1)}) = 0 \quad (1)$$

unde $y^{(1)} = y' = \frac{dy}{dx}$.

Pt. ec. în forma (1) se încearcă o explicitare în funcție de y', adică să fie ecuație explicită ca ~~cele~~ acelea studiate în curs 1.

Presupunem că se poate explicita în funcție de y sau x $\Rightarrow$ $\underset{(2)}{y = h(x, y')}$ sau $\underset{(3)}{x = g(y, y')}$.

I: Cazul (2) $\boxed{y = h(x, y')}$

Se derivează în raport cu x $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y') + \frac{\partial h}{\partial y'}(x, y')\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Se notează $\underset{\frac{dy}{dx}}{y'} = p$ (p va fi parametru prin se exprima soluția parametrică:

$$\boxed{\begin{cases} y = y(p) \\ x = x(p) \end{cases} \quad (4)}$$

$$\Rightarrow p = \frac{\partial h}{\partial x}(x, p) + \frac{\partial h}{\partial p}(x, p) \cdot \frac{dp}{dx} \Rightarrow \left(\frac{\partial h}{\partial p}(x, p) \neq 0\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial h}{\partial x}(x, p)}{\frac{\partial h}{\partial p}(x, p)}}.$$

sau ec. răsturnată: $\boxed{\frac{dx}{dp} = \frac{\frac{\partial h}{\partial p}(x, p)}{p - \frac{\partial h}{\partial x}(x, p)}}$

Cazuri particulare:

i) Ecuația diferențială Lagrange: $\boxed{y = x\,\varphi(y') + \psi(y')}$ (5)

unde $h(x,y') = x\varphi(y') + \psi(y')$

Derivând $\Rightarrow$ $y' = 1\cdot\varphi(y') + x\cdot\varphi'(y')\cdot\frac{d}{dx}(y') + \psi'(y')\frac{d}{dx}(y')$

$\boxed{y'=p} \Rightarrow p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\,p' + \psi'(p)\,p'$; $p' = \frac{dp}{dx}$

$p - \varphi(p) = \left(x\varphi'(p) - \psi'(p)\right)\frac{dp}{dx} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{x\varphi'(p) - \psi'(p)}{p-\varphi(p)} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \underbrace{\frac{\varphi'(p)}{p-\varphi(p)}}_{a(p)}x + \underbrace{\frac{-\psi'(p)}{p-\varphi(p)}}_{b(p)} \Rightarrow$

ec. liniară în (p, x)

$\underset{\text{(prin integrare)}}{\Rightarrow}$ $x = x(p)$

y ca funcție de p se obține din ec. (5) $\Rightarrow$

$\Rightarrow y = x\varphi(p) + \psi(p) \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} y = x(p)\varphi(p) + \psi(p) \\ x = x(p) \end{cases}}_{\text{mult. soluțiilor}}$

(soluțiile sunt parametrice).

Exemplu: Fie ec. implicită:

$$y = x\cdot\underbrace{(y')^2}_{\varphi(y')} + \underbrace{(y')^3}_{\psi(y')}.$$

Ec. Lagrange $\underset{\text{derivare în raport cu } x}{\Longrightarrow}$ $y' = 1(y')^2 + x\cdot 2y'\cdot(y')' + 3(y')^2\cdot(y')' \Rightarrow$

$\underset{y'=p}{\Rightarrow} p = p^2 + x\cdot 2p\cdot p' + 3p^2\cdot p' \Rightarrow$

$\Rightarrow p(1-p) = (2px + 3p^2)\frac{dp}{dx}$ (6)

- dacă $p=0 \Rightarrow$ ec. (6) e adev.

$y' = 0 \Rightarrow y = C$, $C\in\mathbb{R}$.

se determină C a.î. y să verifice ec. inițială:

$C = x\cdot 0^2 + 0^3 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ avem soluția particulară $\boxed{y=0}$

- dacă $p\neq 0 \Rightarrow$ împărțim ec. (6) la p $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 1-p = (2x+3p)\dfrac{dp}{dx} \Rightarrow \quad \dfrac{dx}{dp} = \dfrac{2}{1-p}\,x + \dfrac{3p}{1-p}$. ec. liniară neomogenă în (p, x)

$\dfrac{d\bar{x}}{dp} = \dfrac{2}{1-p}\,\bar{x} \Rightarrow \bar{x} = C\,e^{A(p)}$

(ec. liniară omogenă atașată)

A primitivă pt $a(p) = \dfrac{2}{1-p}$

$$\int \frac{2}{1-p}\,dp = -2\int \frac{1}{p-1}\,dp = \underbrace{-2\ln|p-1|}_{A(p)} + \mathscr{C}$$

$\Rightarrow A(p) = \ln \dfrac{1}{|p-1|^2} = \ln \dfrac{1}{(p-1)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \bar{x}(p) = C\,e^{\ln \frac{1}{(p-1)^2}} = C \cdot \dfrac{1}{(p-1)^2}$

Se aplică variația constantelor: determină o funcție C care depinde de p a.î. $x = C(p) \cdot \dfrac{1}{(p-1)^2}$ să verifice ec. liniară neomogenă:

$$\left(C(p)\cdot\frac{1}{(p-1)^2}\right)' = \frac{2}{1-p}\cdot C(p)\cdot\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{3p}{1-p} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(p)\cdot\frac{1}{(p-1)^2} + \cancel{C(p)\frac{-2}{(p-1)^3}} = \cancel{\frac{-2\cdot C(p)}{(p-1)^3}} + \frac{3}{-(p-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(p) = \frac{3}{-\cancel{(p-1)}}\cdot(p-1)^{\cancel{2}} \Rightarrow C'(p) = -3p+3 \Rightarrow$$

ec. de tip primitivă

$$\Rightarrow C(p) = \int(-3p+3)\,dp = -\frac{3p^2}{2} + 3p + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(p) = \frac{1}{(p-1)^2}\left(-\frac{3p^2}{2} + 3p + K\right), \; K\in\mathbb{R} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ mulț. soluțiilor parametrice:

$$\boxed{\begin{cases} x(p) = \dfrac{1}{(p-1)^2}\left(-\dfrac{3p^2}{2} + 3p + K\right) \\ y(p) = x(p)\cdot p^2 + p^3 \end{cases}, \; K\in\mathbb{R}}$$

p parametru

ii) <u>Ecuația Clairaut</u> (caz particular de ec. Lagrange): $\varphi(y') = y'$

$$\boxed{y = xy' + \varphi(y')} \quad (7)$$

derivăm în raport cu x $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{y'} = \cancel{y'} + x(y')' + \varphi'(y')\cdot(y')'$ $\Big/$ $\Rightarrow 0 = x\cdot p' + \varphi'(p)\cdot p' \Rightarrow$

dacă $\boxed{y' = p}$

$\Rightarrow p'(x + \varphi'(p)) = 0$

a) $x + \varphi'(p) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -\varphi'(p) \\ y = -\varphi'(p)\cdot p + \varphi(p) \end{cases}$

o soluție parametrică pt. ec. Clairaut

b) $p' = 0 \Rightarrow p = C_1 \Rightarrow y' = C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = C_1 x + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

C_1, C_2 sunt dependente:

$\cancel{C_1 x} + C_2 = \cancel{x\cdot C_1} + \varphi(C_1) \Rightarrow C_2 = \varphi(C_1)$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y = C_1 x + \varphi(C_1),\ C_1 \in \mathbb{R}}$

II. Cazul (3): $\boxed{x = g(y, y')}$

derivăm în raport cu x $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 = \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{y'} + \frac{\partial g}{\partial y'}\cdot\frac{d}{dx}(y')$$

notam $y' = p$

$\Rightarrow$ (8) $\boxed{1 = \frac{\partial g}{\partial y}(y,p)\cdot p + \frac{\partial g}{\partial p}(y,p)\cdot\frac{dp}{dx}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dp}{dx} = \frac{1 - \frac{\partial g}{\partial y}(y,p)\cdot p}{\frac{\partial g}{\partial p}(y,p)}}$$

sau ec rasturnată $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = x(p)$

dar x ca funcție de p rezultă din forma ec $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = g(y, p) \Rightarrow$ necesitatea de a determina $y = y(p)$

Înlocuim pe $\frac{dp}{dx}$ cu $\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot p$ $\Rightarrow$ (8)

$\Rightarrow 1 = \frac{\partial g}{\partial y}(y,p)\cdot p + \frac{\partial g}{\partial p}(y,p)\cdot p\cdot \frac{dp}{dy} \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dp} = \left(\frac{\partial g}{\partial y}(y,p) + \frac{\partial g}{\partial p}(y,p)\right)p} \Rightarrow y=y(p) \Rightarrow$

$\rightarrow$ soluția parametrică: $\begin{cases} y=y(p) \\ x = g(y(p), p) \end{cases}$ mulț. de sol. parametrice pt. ec.(3)

Temă (ec. Clairaut)

Să se determine mulțimea sol. ec.:

$$y = xy' + \left(\frac{y'-1}{y'+1}\right)^2 .$$

Problema Cauchy pentru ec. de ordinul întâi în $\mathbb{R}$

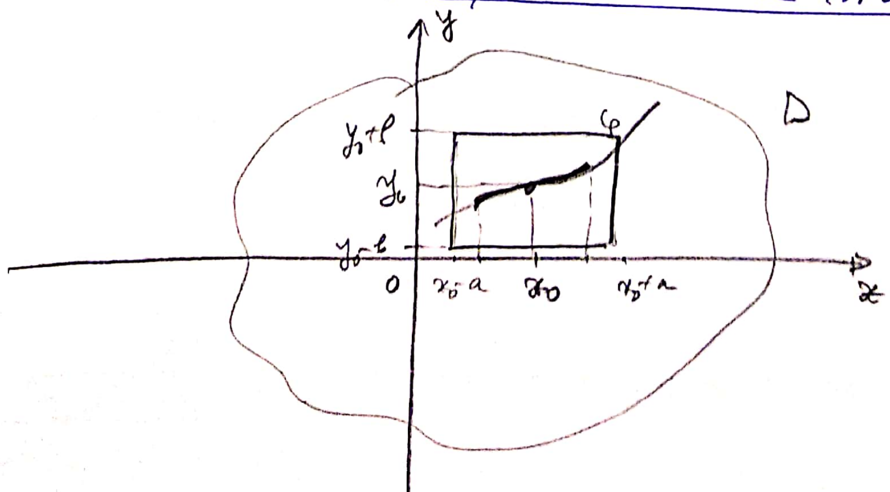
Teoremă de existență și unicitate a soluției pentru problemă Cauchy.

Problema Cauchy:

$$(9)\ \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \\ (x_0, y_0) \in D. \end{cases} (9)$$

unde $f : D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$(t_0, x_0) \in D$.

Teorema de existență și unicitate a soluției (TEU)



Def: O funcție $\varphi : I_\varphi \to \mathbb{R}$ este soluție pt(9) dacă:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt}(x) = f(x, \varphi(x)) \\ \varphi(x_0) = y_0 . \end{cases}$$

<u>Ipotezele TEU</u>: pentru problema Cauchy (9):

i) $\exists\, a, b > 0$ a.î. $\underbrace{[x_0-a,\, x_0+a] \times [y_0-b,\, y_0+b]}_{\overset{not}{=}\, D_{a,b}} \subset D$

ii) f continuă pe $D_{a,b}$ şi $M = \sup\limits_{(x,y)\in D_{a,b}} |f(x,y)|$

iii) f este funcţie Lipschitz în a doua variabilă, adică:

$$\exists L \geq 0 \text{ a.î. } |f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in D_{a,b}.$$

sau

$\exists\, \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pe $D_{a,b}$ şi să fie continuă

şi $L = \sup\limits_{(x,y)\in D_{a,b}} \left|\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|$

<u>Concluzia TEU</u>:

$$\forall\, 0<\alpha \leq \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\},\ \exists!\, \varphi : [x_0-\alpha,\, x_0+\alpha] \to [y_0-b,\, y_0+b]$$

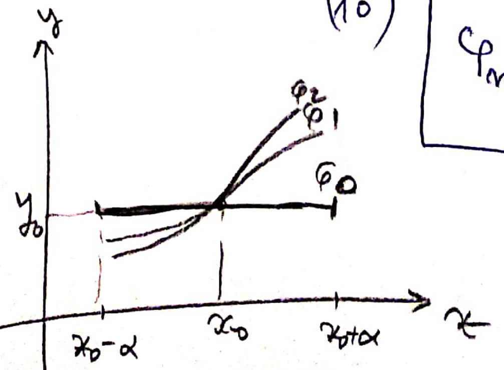
care este soluţie a prob. Cauchy (9).

<u>Demonstraţie</u> (schiţă)

Se construieşte un şir de funcţii $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ numit <u>şirul aproximaţiilor succesive</u> care converge punctual la o funcţie φ soluţie a prob. Cauchy şi despre care se arată că e unică cu această proprietate.

Şirul aproximaţiilor succesive este:

$$(10)\quad \boxed{\begin{aligned} &\varphi_0(x) = y_0 \\ &\varphi_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi_n(s))\,ds, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}}$$



Exemplu: Fie problema Cauchy: $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Să se calculeze $(\varphi_n)_{n \geq 0}$.

$f(x,y) = y$

$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x_0 = 0;\ y_0 = 1 \Rightarrow (0,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$\varphi_0(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x f(s, \varphi_0(s))\,ds = 1 + \int_0^x 1\,ds = 1 + s\Big|_0^x = 1 + x$

$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x f(s, \varphi_1(s))\,ds = 1 + \int_0^x (1+s)\,ds = 1 + \left(s + \frac{s^2}{2}\right)\Big|_0^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

Se poate dem. prin inducție că $\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ $\forall n \geq 1$

Verificarea a fost făcută pt φ_1, φ_2.

Presupunem că $\varphi_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$ și dem că

$\varphi_{n+1}(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

Din recurență avem:

$\varphi_{n+1}(0) = 1 + \int_0^x f(s, \varphi_n(s))\,ds =$

$= 1 + \int_0^x \left(1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \dots + \frac{s^n}{n!}\right) ds = 1 + \left(s + \frac{s^2}{1!\,2} + \frac{s^3}{2!\cdot 3} + \dots + \frac{s^{n+1}}{n!(n+1)}\right)\Big|_0^x =$

$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

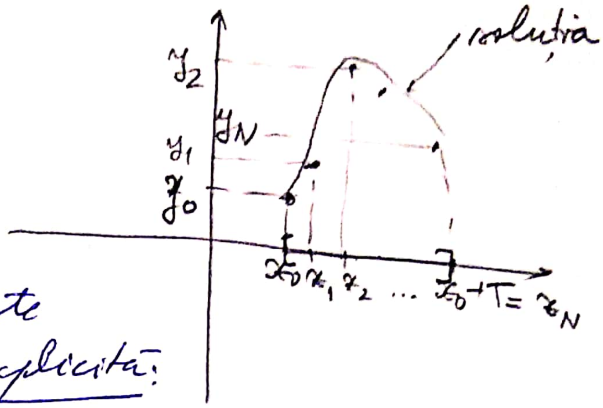
OBS: Pt problema dată soluția este $y(x) = e^x \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right),\ n \geq 0$ este șirul sumelor parțiale pt seria exponențială: $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!} = e^x$

și avem cond necesară de conv. a seriei: $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$.

Aproximarea numerică a soluției problemei Cauchy în $\mathbb{R}$

$$(11)\quad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$



Cea mai simplă aproximare numerică pentru prob. Cauchy este dată de metoda Euler explicită:

$$(12)\quad \begin{cases} y_0 \\ y_{n+1} = y_n + h_n f(x_n, y_n), \quad \forall n = \overline{0, N-1} \end{cases}$$

unde $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_0 + T = x_N$

$$h_n = x_{n+1} - x_n, \quad n = \overline{0, N-1}$$

Dacă punctele $x_0, x_1, \dots, x_0 + T = x_N$ sunt echidistante:

$$\begin{cases} h = \dfrac{\cancel{x_0} + T - \cancel{x_0}}{N} = \dfrac{T}{N} \\ x_j = x_0 + h \cdot j, \quad j = \overline{0, N} \end{cases}$$

T. de aproximare în metoda Euler

Ipoteze: i) – iii) din TEU

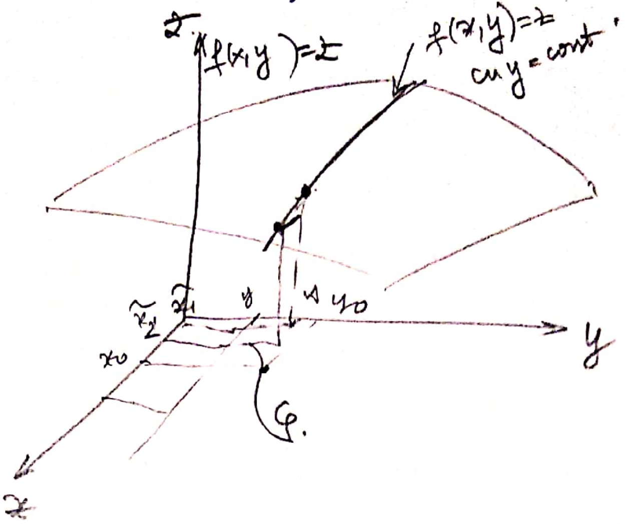
iv) f să fie funcție Lipschitz în prima variabilă: $\exists L_1 > 0$ a.î.

$$|f(\tilde{x}_1, y) - f(\tilde{x}_2, y)| \le L_1 |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2|, \quad \forall (\tilde{x}_1, y), (\tilde{x}_2, y) \in D_{a,b}$$

Pt. soluția $\varphi : I_\alpha \to \mathbb{R}$ a prob. Cauchy (11) și punctele (x_j, y_j), $j = \overline{0, N}$ obținute prin (12) avem: $\exists A > 0$ a.î.

$$\boxed{|\varphi(x_j) - y_j| < A \cdot h} \quad (13)$$

OBS: T. de ~~aprox~~ $\Rightarrow$ Metoda Euler este de ordin 1, adică aproximează soluția ~~[illegible]~~ cu eroare de ordinul h!



$f(x,y)=z$ sup. în $\mathbb{R}^3$ (x,y,z)

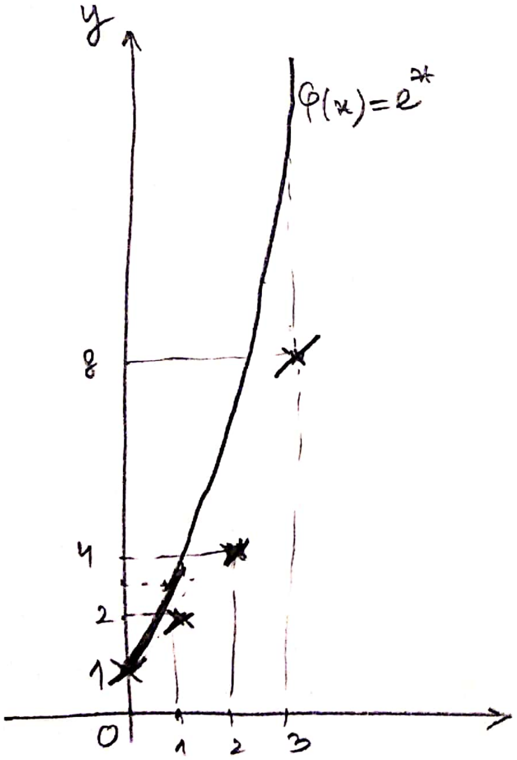
Exemplu de aplicare a met. Euler:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0)=1 \end{cases}$$

Calculăm y_0, y_1, y_2, y_3 (pentru $N=3$) folosind metoda Euler pentru puncte x_j echidistante în $[\underset{x_0}{0}, \underset{x_0+T}{3}]$

$N=3$

$h = \frac{3-0}{3} = 1 \Rightarrow x_0=0,\ x_1=1,\ x_2=2,\ x_3=3.$



$y_0=1$

$y_1 = y_0 + 1 \cdot \overbrace{f(x_0,y_0)}^{=y_0} =$

$= 1+1\cdot 1 = 2$

$y_2 = y_1 + 1\cdot \underbrace{f(x_1,y_1)}_{y_1} = 4.$

$y_3 = y_2 + 1\cdot \underbrace{f(x_2,y_2)}_{y_2} = 4+1\cdot 4 = 8$

Sisteme de ecuații diferențiale de ordinul întâi

Un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întâi înseamnă:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f(x, y)} \qquad (14)$$

unde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$; $f = (f_1, \dots, f_n)$

$$y = (y_1, \dots, y_n)$$

Pe componente (14) se scrie:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, (y_1, \dots, y_n)) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, (y_1, \dots, y_n)) \end{cases} \qquad (15)$$

$\boxed{\text{OBS}}$: Un sistem de tipul (15) poate fi asociat unei ec. diferențiale de ordin n în forma explicită:

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n-1)})$$

Se notează:

$$\begin{cases} z_1 = y \\ z_2 = y^{(1)} \\ \vdots \\ z_{n-1} = y^{(n-2)} \\ z_n = y^{(n-1)} \end{cases} \xRightarrow{\text{prin derivare}} \begin{cases} z_1' = y^{(1)} \\ z_2' = y^{(2)} \\ \vdots \\ z_{n-1}' = y^{(n-1)} \\ z_n' = y^{(n)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1' = z_2 = f_1(x, (z_1, \dots, z_n)) \\ z_2' = z_3 \\ \vdots \\ z_{n-1}' = z_n \\ z_n' = f(x, (z_1, z_2, \dots, z_n)) \end{cases}$$

De exemplu: Pt ec. de la pendulul matematic:

$$\ddot{\theta} = \underbrace{\frac{g}{l} \sin\theta}_{f(t, \theta, \dot{\theta})}$$

$$\begin{cases} z_1 = \theta \\ z_2 = \dot{\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = \frac{g}{l} \sin z_1 \end{cases} ; \quad \begin{matrix} f_1(t, (z_1, z_2)) = z_2 \\ f_2(t, (z_1, z_2)) = \frac{g}{l} \sin z_1 \end{matrix}$$

Def: O <u>problemă Cauchy</u> pentru sistemul (15) înseamnă să căutăm o soluție pentru (15) și care să verifice:

$$\begin{cases} y_1(x_0) = y_{01} \\ \vdots \\ y_n(x_0) = y_{0n} \end{cases}$$

unde $(x_0, (y_{01}, \dots, y_{0n})) \in D$.

Deci: (PC) pentru sistem este:

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x,(y_1,\dots,y_n)) \\ \vdots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x,(y_1,\dots,y_n)) \\ y_1(x_0) = y_{01} \\ \vdots \\ y_n(x_0) = y_{0n} \end{cases}$$

unde $f = (f_1, \dots, f_n) : D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
$(x_0, (y_{01}, \dots, y_{0n})) \in D$.

Exemplu: Pt sistemul asociat pendulului matematic avem:

exemplu de prob. Cauchy în $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = \dfrac{g}{\ell}\sin z_1 \\ z_1(0) = \theta_0 \\ z_2(0) = 0 \end{cases}$$

$f: D \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$f(t,(z_1,z_2)) = \left(z_2, \dfrac{g}{\ell}\sin z_1\right)$

<u>TEU pt (16)</u>

Ipoteze: i) $\exists\, a>0,\ b_1, \dots, b_n > 0$ a.î.:

$$\underbrace{[x_0-a, x_0+a]\times[y_{01}-b_1, y_{01}+b_1]\times\dots\times[y_{0n}-b_n, y_{0n}+b_n]}_{D_{a,b_1,\dots,b_n}} \subset D$$

ii) f continuă pe $D_{a,b_1,\dots,b_n}$ și $M = \sup\limits_{(x,y)\in D_{a,b_1,\dots,b_n}} \|f(x,y)\|$

unde $\|\cdot\|$ este o normă în $\mathbb{R}^n$.

iii) f să fie funcție Lipschitz în a doua variabilă: $\exists L>0$ a.î.

$$\| f(x,\overbrace{(y_1,\dots,y_n)}^{y}) - f(x,\overbrace{(z_1,\dots,z_n)}^{z})\| \le$$
$$\le L \|(y_1,\dots,y_n)-(z_1,\dots,z_n)\|$$
$$\forall (x,y),(x,z)\in D_{a,b_1,\dots,b_n}$$

sau

f să fie derivabilă în raport cu a doua variabilă și derivata continuă:

$$\frac{Df}{Dy}=\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n}\end{pmatrix} \text{ și } L=\sup_{(x,y)\in D_{a,b_1,\dots,b_n}} \left\|\frac{Df}{Dy}\right\|,$$

unde $\|\cdot\|$ este o normă pt. matrice de ordin n.

Concluzia TEU:

$\forall \alpha\le \min\left\{a,\frac{b_1}{M},\dots,\frac{b_n}{M}\right\}$, $\exists!\, \varphi:[x_0-\alpha,x_0+\alpha]\to D_{b_1,\dots,b_n}$

$D_{b_1,\dots,b_n}=[y_{01}-b_1,y_{01}+b_1]\times\dots\times[y_{0n}-b_n,y_{0n}+b_n]$,

soluție a prob. Cauchy (16).

Pt. construcția soluției φ se folosește șirul aproximațiilor succesive: $\left(\varphi_k=(\varphi_{k1},\dots,\varphi_{kn})\right)_{k\ge 0}$ definit prin:

$$\begin{cases} \varphi_0(x)=(y_{01},\dots,y_{0n})\\ \underbrace{\varphi_k(x)}_{(\varphi_{k1}(x),\dots,\varphi_{kn}(x))}=(y_{01},\dots,y_{0n})+\displaystyle\int_{x_0}^{x}\left(f_1(s,\underbrace{\varphi_{k-1}(s)}_{(\varphi_{k-1,1}(s),\dots,\varphi_{k-1,n}(s))}),\dots,f_n(s,\varphi_{k-1}(s))\right)ds \end{cases}$$

$\forall k\ge 0$

$$\Leftrightarrow \varphi_{kj}(x)=y_{0j}+\int_{x_0}^{x} f_j(s,(\varphi_{k-1,1}(s),\dots,\varphi_{k-1,n}(s)))\,ds$$

$j=\overline{1,n}$

Metoda Euler pentru sistemul (16)

$$\begin{cases} [x_0, x_0+T] \; ; \; h = \frac{T}{N} \; ; \; x_j = x_0 + j \cdot h, \; j = \overline{0,N} \\ y_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ \vdots \\ y_{0n} \end{pmatrix} \\ y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k), \; k = \overline{0, N-1} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_{k+1,1} \\ \vdots \\ y_{k+1,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{k,1} \\ \vdots \\ y_{k,n} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} f_1(x_k, (y_{k,1}, \dots, y_{k,n})) \\ \vdots \\ f_n(x_k, (y_{k,1}, \dots, y_{k,n})) \end{pmatrix}$$

Rezolvarea sistemelor de ec. diferențiale folosind integrale prime.

Fie sistemul:

$$(16) \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y) \\ \vdots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y) \end{cases}, \quad y = (y_1, \dots, y_n)$$

$$f = (f_1, \dots, f_n) : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Def: O funcție $F : D \to \mathbb{R}$ se numește integrală primă pentru (16) dacă este constantă de-a lungul oricărei soluții, adică:

$\forall \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : I_\varphi \to \mathbb{R}^n$ soluție a sistemului (16)

$\exists\, C_\varphi \in \mathbb{R}$ (constantă) a.î. $F(x, (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))) = C_\varphi, \; \forall x \in I_\varphi$.

Exemplu:

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = \frac{g}{\ell} \sin z_1 \end{cases} \quad \text{asociat ec. } \ddot{\theta} = \frac{g}{\ell} \sin\theta \quad \Big|\cdot \dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} - \frac{g}{\ell}\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right)' + \frac{g}{\ell}(\cos\theta)' = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{\ell}\cos\theta\right)' = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}\dot{\theta}^2}_{\text{ec. cinetică}} + \underbrace{\frac{g}{\ell}\cos\theta}_{\text{energie potențială}} = \text{const}$$

$$f(t, (z_1, z_2)) = \left(z_2, \frac{g}{\ell} \sin z_1\right)$$

$$\underbrace{F(t, (z_1, z_2)) = \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{g}{\ell} \cos z_1}_{\text{energia totală se conservă}}$$

Propoziție (Criteriu pentru integrale prime)

$F: D \to \mathbb{R}$ este integrală primă pt (16) $\Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k}(x,y)\cdot f_k(x,y) = 0 \quad, \forall (x,y) \in D. \tag{17}$$

Dem:

F integrală primă pt (16) $\Longleftrightarrow$ F constantă de-a lungul oricărei soluții pt (16) $\Longleftrightarrow \frac{dF}{dx}(x, \underset{y(x)}{\underset{\parallel}{y}}) = 0 \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial y_k}(x,y)\cdot \underbrace{\frac{dy_k}{dx}(x,y)}_{\overset{(16)}{=}\, f_k(x,y)} = 0. \Longleftrightarrow (17)$$

Exemplu: $F(t, z_1, z_2) = \frac{1}{2} z_2^2 + \frac{g}{\ell}\cos z_1$

Verificăm (17):

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0\ ;\quad \frac{\partial F}{\partial z_1} = -\frac{g}{\ell}\sin z_1\ ;\quad \frac{\partial F}{\partial z_2} = \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2} z_2 = z_2$$

Avem:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z_1}\cdot \underbrace{f_1(t,z)}_{= z_2} + \frac{\partial F}{\partial z_2}\cdot \underbrace{f_2(t,z)}_{= \frac{g}{\ell}\sin z_1} =$$

$$= -\left(\frac{g}{\ell}\sin z_1\right) z_2 + z_2 \cdot \frac{g}{\ell}\sin z_1 = 0$$

Rezolvarea sistemelor cu ajutorul integralelor prime: folosind integralele prime, înlocuim în sistem o parte dintre variabile a.î. să obținem din sistem ec. independente sau să reducem dimensiunea sistemului:

Exemplu: Fie sistemul

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{y_1}{y_1^2+y_2^2} & f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = \dfrac{y_2}{y_1^2+y_2^2} & f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}, \quad (x, (y_1, y_2)) \in \underbrace{(0,\infty)\times(0,\infty)^2}_{D}$$

a) Arătați că $F : D \to \mathbb{R}$

$$F(x,(y_1,y_2)) = -2x + y_1^2 + y_2^2$$

este integrală primă pt sistemul dat.

b) Determinați soluția sistemului folosind integrala primă.

a) $\frac{\partial F}{\partial x} = -2$; $\frac{\partial F}{\partial y_1} = 2y_1$; $\frac{\partial F}{\partial y_2} = 2y_2$

Calculăm expresia din (17)

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} \cdot f_1(x,(y_1,y_2)) + \frac{\partial F}{\partial y_2} \cdot f_2(x,(y_1,y_2)) =$$

$$= -2 + 2y_1 \cdot \frac{y_1}{y_1^2+y_2^2} + 2y_2 \cdot \frac{y_2}{y_1^2+y_2^2} = -2 + \frac{2\cancel{(y_1^2+y_2^2)}}{\cancel{y_1^2+y_2^2}} = 0$$

b) F integrală primă $\Rightarrow F(x,(y_1,y_2)) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y_1^2 + y_2^2 = C_1 + 2x \Rightarrow$ în sistem $\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \frac{y_1}{C_1+2x} \\ \frac{dy_2}{dx} = \frac{y_2}{C_1+2x} \end{cases}$ $\Rightarrow$ am obținut 2 ec. liniare pt fiecare comp y_1, y_2

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{y_1}{C_1+2x} \Rightarrow y_1 = C_2 \cdot e^{A_1(x)}$$

A_1 o primitivă pt $a_1(x) = \frac{1}{C_1+2x}$

$$\int \frac{1}{2x+C_1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+\frac{C_1}{2}}\,dx = \underbrace{\frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{C_1}{2}\right|}_{A_1(x)} + K$$

$$y_1(x) = C_2 \cdot e^{\ln\left|x+\frac{C_1}{2}\right|^{\frac{1}{2}}} = C_2\sqrt{\left|x+\frac{C_1}{2}\right|}$$

La fel pentru $y_2 \Rightarrow y_2(x) = C_3\sqrt{\left|x+\frac{C_1}{2}\right|}$

Cum sistemul este în $\mathbb{R}^2 \Rightarrow C_1, C_2, C_3$ sunt dependente (doar 2 independente)

Trebuie să avem: $y_1^2 + y_2^2 = C_1 + 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underbrace{C_2^2}_{\geq 0}\Big|\underbrace{x+\frac{C_1}{2}}_{\geq 0}\Big| + \underbrace{C_3^2}_{\geq 0}\Big|\underbrace{x+\frac{C_1}{2}}_{\geq 0}\Big| = C_1 + 2x$$

$$C_2^2\left(x+\frac{C_1}{2}\right) + C_3^2\left(x+\frac{C_1}{2}\right) = C_1 + 2x$$

$$\underbrace{(C_2^2+C_3^2)}\,x + \underbrace{\frac{C_1}{2}(C_2^2+C_3^2)} = 2x + \underbrace{C_1}$$ identificând coeficienții $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{C_2^2+C_3^2=2} \\ \frac{C_1}{2}(C_2^2+C_3^2)=C_1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C_2^2+C_3^2=2}$$

Sisteme de ecuații diferențiale liniare

Cazul omogen

$$(18)\quad \begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \dots + a_{1n}(x)y_n & = f_1(x,(y_1,\dots,y_n)) \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + \dots + a_{2n}(x)y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + \dots + a_{nn}(x)y_n \end{cases}$$

sau

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(x) & \dots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

sau

$$\boxed{y' = A(x)y} \quad \text{cu} \quad A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j=\overline{1,n}}\,; \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

În ipoteza că $a_{ij} : I \to \mathbb{R}$ continue și derivabile $\forall i,j=\overline{1,n}$ $\Rightarrow$ sunt îndeplinite cond din TEU $\Rightarrow$ $\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ are soluție unică $\forall (x_0,y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$

Notăm cu S_A = mulțimea soluțiilor sistemului (18)

<u>Propoziție</u>: a) $(S_A, +, \cdot)$ este spațiu vectorial real.
adunarea · înmulțirea cu scalari

b) $\dim S_A = n$.

<u>Dem</u>:

a) $\begin{rcases} \forall \varphi_1, \varphi_2 \in S_A \\ \forall \alpha \in R \end{rcases} \Rightarrow$ arătăm că $\varphi_1 + \varphi_2 \in S_A$
$\alpha \varphi_1 \in S_A$

Fie $\varphi_1, \varphi_2 \in S_A \underset{(18)}{\Rightarrow}$

$$\varphi_1'(x) = A(x)\varphi_1(x)$$
$$\varphi_2'(x) = A(x)\varphi_2(x)$$
$$\overline{\hspace{6em}}(+)$$
$$(\varphi_1(x)+\varphi_2(x))' = A(x)(\varphi_1(x)+\varphi_2(x)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi_1+\varphi_2 \in S_A$$

$$(\alpha\varphi_1)'(x) = \alpha\varphi_1'(x) = \alpha \cdot A(x)\varphi_1(x) = A(x)(\alpha\varphi_1)(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha\varphi_1 \in S_A$$

b) Fie $x_0 \in I$.

$\mathcal{F}_{x_0}: R^n \to S_A$

$\mathcal{F}_{x_0}(y_0) = \varphi$; $\varphi \in S_A$ sol. a PC : $\begin{cases} y' = A(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Se arată că (temă!) $\mathcal{F}_{x_0}$ este izomorfism de spații vectoriale

$\begin{rcases} \text{Cum } \dim R^n = n \end{rcases} \Rightarrow \dim S_A = n$

<u>Consecință</u>: Cum $\dim S_A = n \Rightarrow \exists$ cel puțin o bază de funcții soluție pt (18) în S_A, care generează toate soluțiile din S_A.

<u>Def</u>: 1) O bază $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset S_A$ s.n. <u>sistem fundamental de soluții</u>.

2) Numim <u>matrice fundamentală de soluții</u>, matricea $\Phi(x) = \text{coloane}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x))$ cu $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ sistem fundamental de soluții.