11.04.2021

— curs 3 —

(5) Interpolare prin polinoame

Problema generală a interpolării (interpolarea Hermite) constă în:

(1)
- se dau punctele distincte (x_i) $i=\overline{1,n}$ și pentru fiecare $i=\overline{1,n}$ se dau $k_i \in \mathbb{N}^*$ puncte
$$(y_{ij}), \ j=\overline{1,k_i}$$
- se cere determinarea unui polinom de grad $\leq m-1$ unde $m=\sum_{i=1}^{n} k_i$, care să verifice:
$$p^{(j-1)}(x_i)=y_{ij}, \quad i=\overline{1,n}; j=\overline{1,k_i}$$

OBS: Dacă $k_i=1$, $\forall i=\overline{1,n}$, atunci spunem că avem interpolare Lagrange și prob. (1) se reduce la:

(2)
- se dau $(x_i)_{i=\overline{1,n}}$ și $(y_i)_{i=\overline{1,n}}$ $(y_i=y_{i1})$
- se cere determinarea unui polinom p de grad $\leq n-1$, care să verifice:
$$p(x_i)=y_i, \ i=\overline{1,n}.$$

Polinomul de interpolare Lagrange

Prop. 1: Polinomul Lagrange pentru problema de interpolare (2) este de forma:
$$p(x)=\sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x), \quad (3)$$
unde $(L_i)_{i=\overline{1,n}}$ sunt polinoamele Lagrange elementare definite prin:
$$L_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \quad i=\overline{1,n} \quad (4)$$

Dem: Avem:

grad $L_i = n-1$, $i=\overline{1,n}$

și $L_i(x_k)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{x_k-x_j}{x_i-x_j} = \begin{cases} 1, & k=i \\ 0, & k\neq i \ (\exists j\neq i \text{ ai } k=j). \end{cases}$

$\Rightarrow L_i(x_k) = \delta_{ik}, \quad i,k = \overline{1,n}$.

Verificăm cond (2):

$$p(x_k) = \sum_{i=1}^{n} y_i L_i(x_k) = \sum_{i=1}^{n} y_i \delta_{ik} = y_k \delta_{kk} = y_k.$$

<u>OBS</u>: Polinomul de interpolare Lagrange se poate obține direct din cond. (2), astfel:

notăm $p(x) = a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

cu $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.

Din (2) $\Rightarrow$ $p(x_i) = y_i \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n-1} x_i^{n-1} + \dots + a_1 x_i + a_0 = y_i, \quad i = \overline{1,n} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sistem liniar în $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, care matricial poate fi scris astfel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (5)$$

$\det M$ este determinant Vandermonde și avem:

$$\det M = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \neq 0 \quad \text{pt că } x_i \neq x_j \; \forall i \neq j,$$

deci, sistemul (5) are soluție <u>unică</u>.

<u>Exemplu pt interpolarea Lagrange</u>:

$n = 3$

$x_1 = 1, \quad y_1 = 4$

$x_2 = 2, \quad y_2 = 3$

$x_3 = 0, \quad y_3 = -1$

$p(x) = y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$

unde $L_1(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{3} \frac{x-x_j}{x_1-x_j} = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \cdot \frac{x-x_3}{x_1-x_3} = \frac{(x-2)(x-0)}{(1-2)(1-0)} =$

$= -x(x-2)$

$L_2(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{3} \frac{x-x_j}{x_2-x_j} = \frac{(x-1)(x-0)}{(2-1)(2-0)} = \frac{1}{2}x(x-1)$

$L_3(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 3}}^{3} \frac{x-x_j}{x_3-x_j} = \frac{(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)} = \frac{1}{2}(x-1)(x-2).$

Deci:
$$p(x) = -4x(x-2) + \frac{3}{2}x(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$$

Verif: $p(1) = -4\cdot 1(1-2) = 4 = y_1.$

Polinomul de interpolare Newton

Considerăm problema generală de interpolare:

$$(6) \begin{cases} (x_i)_{i=\overline{1,n}} \text{ distincte} \\ (y_{ij}),\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,k_i},\ k_i\in\mathbb{N}^* \end{cases}$$

Notăm $m = k_1 + k_2 + \dots + k_n$

$p(x; x_1, \dots, x_n; \underbrace{y_{1j}, \dots, y_{nj}}_{f}) \overset{not}{=} p(x)$ polinomul

de interpolare în cond: $p^{(j-1)}(x_i) = y_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,k_i}$ (7)

Fie f o funcție a.î. $\boxed{y_{ij} = f^{(j-1)}(x_i)}$!

Def: Numim diferența divizată a funcției f în punctele $x_1, \dots, x_k$ coeficientul lui x^{k-1}

în $p(x; x_1, \dots, x_k; f)$,

care se notează: $[x_1, \dots, x_k]f$ (8)

Obs: 1) $[x_1]f = f(x_1)$

(diferența divizată a unei funcții într-un punct coincide cu valoarea funcției în acel punct).

2) În general, $[x_i, \dots, x_k]f =$ coef lui x^{k-i} în

$p(x; x_i, \dots, x_k; f)$.

Prop. 2 : Pentru calculul diferențelor divizate sunt adevărate formulele:

1) diferența divizată $[x_i, \dots, x_k]f$ nu depinde de ordinea în care date punctele $x_i, \dots, x_k$.

2) dacă $x_i \neq x_k$ și $x_i \leq \dots \leq x_k$, atunci:

$$\boxed{[x_i, \dots, x_k]f = \frac{[x_{i+1}, \dots, x_k]f - [x_i, \dots, x_{k-1}]f}{x_k - x_i}} \quad (9)$$

3) Dacă $x_i = x_{i+1} = \dots = x_k$, atunci

$$\boxed{[\underbrace{x_i, \dots, x_i}_{\text{de } (k-i+1) \text{ ori}}] = \frac{f^{(k-i)}(x_i)}{(k-i)!}} \quad (10)$$

Obs: Dacă în (10) avem $k = i \Rightarrow [x_i]f = \frac{f^{(0)}(x_i)}{0!} = f(x_i)$

(derivata de ordin 0 a unei funcții este chiar funcția)

Prop. 3:

i) Forma ascendentă a polinomului de interpolare Newton este:

$$p_{11}(x) = [x_1]f + \underbrace{[x_1, x_2]f}\cdot(x - x_1) + \underbrace{[x_1, x_2, x_3]f}\cdot(x-x_1)(x-x_2) + \dots$$

$p(x; x_1, \dots, x_n; f)$

$$\dots + [x_1, x_2, \dots, x_n]f \cdot (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1}) \quad (11).$$

ii) Forma descendentă a polinomului de interpolare Newton este:

$$p(x) = [x_n]f + [x_{n-1}, x_n]f\cdot(x-x_n) + [x_{n-1}, x_{n-2}, x_n]f(x-x_n)(x-x_{n-1}) +$$
$$+ \dots + [x_1, x_2, \dots, x_n]f \cdot (x-x_n)(x-x_{n-1})\dots(x-x_2) \quad (12)$$

OBS: 1) în formă algebrică, în (11) și (12) se obține aceeași expresie pentru polinomul de interpolare.

2) Dacă $k_1 = \dots = k_n = 1$, atunci expresia polinomului Newton din (11) sau (12) coincide cu expresia polinomului Lagrange din (3).

Exemplu: Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2+1)$.

Se cere $p(x; \underbrace{-1, -1}, \underbrace{0, 0, 0}, \underbrace{1}, \underbrace{2}; f) \overset{not}{=} p(x)$

Avem:

$$\begin{cases} x_1 = -1 \; ; \; y_{11} = f(-1) \\ \qquad\qquad\; y_{12} = f^{(1)}(-1) \;, \; k_1 = 2 \\ x_2 = 0 \; ; \; y_{21} = f(0) \\ \qquad\qquad\; y_{22} = f^{(1)}(0) \;, \; k_2 = 3. \\ \qquad\qquad\; y_{23} = f^{(2)}(0) \\ x_3 = 1 \; ; \; y_{31} = f(1) \;, \; k_3 = 1 \\ x_4 = 2 \; ; \; y_{41} = f(2) \;, \; k_4 = 1 \end{cases}$$

Forma ascendentă a polinomului de interpolare este:

$$p(x) = [-1]f + [-1,-1]f \cdot (x+1) + [-1,-1,0]f \cdot (x+1)(x+1) +$$
$$+ [-1,-1,0,0]f \cdot (x+1)^2(x-0) + [-1,-1,0,0,0]f(x+1)^2(x-0)(x-0) +$$
$$+ [-1,-1,0,0,0,1]f(x+1)^2 \cdot (x-0)^3 +$$
$$+ [-1,-1,0,0,0,1,2]f(x+1)^2(x-0)^3 \cdot (x-1)$$

$$f^{(1)}(x) = (\ln(x^2+1))^{(1)} = \frac{1}{x^2+1}(x^2+1)^{(1)} = \frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow f^{(1)}(-1) = \frac{-2}{2} = -1$$
$$f^{(1)}(0) = 0.$$

$$f^{(2)}(x) = \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)^{(1)} = 2 \cdot \frac{x^2+1-x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2} \Rightarrow f^{(2)}(0) = \frac{2}{1} = 2$$

$$f(-1) = \ln(1+1) = \ln 2$$
$$f(0) = \ln(0+1) = \ln 1 = 0$$
$$f(1) = \ln(1+1) = \ln 2$$
$$f(2) = \ln(4+1) = \ln 5$$

$$[0,0,0]f = \frac{f^{(2)}(0)}{2!} = \frac{2}{2} = 1$$

$$[-1,-1]f \underset{(10)}{=} \frac{f^{(1)}(-1)}{1!} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$[-1,0]f \underset{(9)}{=} \frac{[0]f - [-1]f}{0-(-1)} = \frac{f(0)-f(-1)}{1} = -\ln 2$$

$$[0,0]f \underset{(10)}{=} \frac{f^{(1)}(0)}{1!} = 0 \; ; \; [-1,0,0]f \underset{10}{=} \frac{[0,0]f - [-1,0]f}{0-(-1)} = \frac{0-(-\ln 2)}{1} = \ln 2$$

x_i	-1	-1	0	0	0	1	2
$f(x_i)$	$\ln 2$	$\ln 2$	0	0	0	$\ln 2$	$\ln 5$
dif. div în 2 puncte	-1	$-\ln 2$	0	0	$\ln 2$	$\ln\frac{5}{2}$	
dif. div în 3 puncte	$1-\ln 2$	$\ln 2$	1	$\ln 2$	$\frac{\ln\frac{5}{2}-\ln 2}{2-0}=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}$		
	$2\ln 2-1$	$1-\ln 2$	$\ln 2-1$	$\frac{\frac{1}{2}\ln\frac{5}{4}-\ln 2}{2-1}=\frac{1}{2}\ln\frac{5}{16}$			
	$2-3\ln 2$	$\frac{1}{2}(2\ln 2-2)$	$\frac{\frac{1}{2}\ln\frac{5}{16}-\ln 2+1}{2-0}=\frac{1}{4}\ln\frac{5}{64}+\frac{1}{2}$				
	$\frac{1}{2}(4\ln 2-3)$	$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\ln\frac{5}{64}+\frac{1}{2}-\ln 2+1\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\ln\left(\frac{5}{1024}\right)$					
dif div în 7 puncte $[-1,-1,0,0,0,1,2]f$ →	$\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{12}\ln\frac{5}{1024}-2\ln 2\right)$						

Deci:

$$p(x;\ -1,-1,0,0,0,1,2;\ f) =$$
$$= \ln 2 + (-1)(x+1) + (1-\ln 2)(x+1)^2 + (2\ln 2-1)(x+1)^2 x +$$
$$+ (2-3\ln 2)(x+1)^2 x^2 + \frac{1}{2}(4\ln 2-3)(x+1)^2 x^3 +$$
$$+ \frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{12}\ln\frac{5}{1024}-2\ln 2\right)(x+1)^2 x^3 \cdot (x-1)$$

Interpolare prin funcţii spline (polinoame pe porţiuni) (prin polinoame de ac. grad pe porţiuni)

Fie $I=[a,b]$ şi $\Delta_n = (a=x_1<x_2<\ldots<x_n=b)$ o diviziune a intervalului $[a,b]$.

Def. Se numeşte spline de ordin $k\in\mathbb{N}^*$ asociat div. Δ_n pe I, o funcţie $s: I\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile:

(11) i) $s\Big|_{[x_i;\, x_{i+1}]}$ este polinom de grad k, $i=\overline{1,n-1}$

ii) $s \in C^{k-1}([a,b])$.

adică, s este polinom de grad k pe fiecare interval $[x_i, x_{i+1}]$, $i=\overline{1,n-1}$ și pe $[a,b]$ este de clasă $k-1$, adică, are derivate de ordin $\le k-1$, continue pe $[a,b]$.

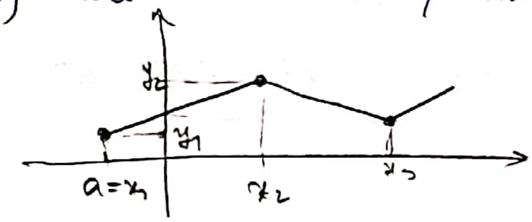
Notăm $S_k(\Delta_n)$ = mulțimea funcțiilor spline de ordin k pe Δ_n.

Cazurile cel mai des întâlnite sunt $k=1$ și $k=3$

Pt $\boxed{k=1}$, avem <u>spline-uri de ordinul întâi</u>:

$$S_1(\Delta_n) = \left\{ s:[a,b]\to\mathbb{R} \;\middle|\; s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ este polinom de gradul întâi și } s \in C^0([a,b]) \text{ (s continuă pe } [a,b]) \right\}.$$

<u>OBS</u>: $s \in S_1(\Delta_n)$ este o linie frântă



<u>Prop. 4</u>: $\forall s \in S_1(\Delta_n)$, s poate fi reprezentat în mod unic prin:

$$(12)\quad \boxed{s(x) = a_0 + a_1(x-x_1)_+ + a_2(x-x_2)_+ + \dots + a_{n-1}(x-x_{n-1})_+}$$

cu $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ unic determinate:

$$(13).\quad (u)_+(x) = \begin{cases} u(x), & \text{dacă } u(x) > 0 \\ 0, & \text{dacă } u(x) \le 0 \end{cases}$$

$$(x-x_i)_+ = \begin{cases} x-x_i, & x > x_i \\ 0, & x \le x_i \end{cases}, \quad i=\overline{1,n}$$

<u>Dem</u>: $\boxed{s(x_1) = a_0}$

Avem $s(x_2) = a_0 + a_1(x_2-x_1) \Rightarrow \boxed{a_1 = \dfrac{s(x_2)-a_0}{x_2-x_1}}$

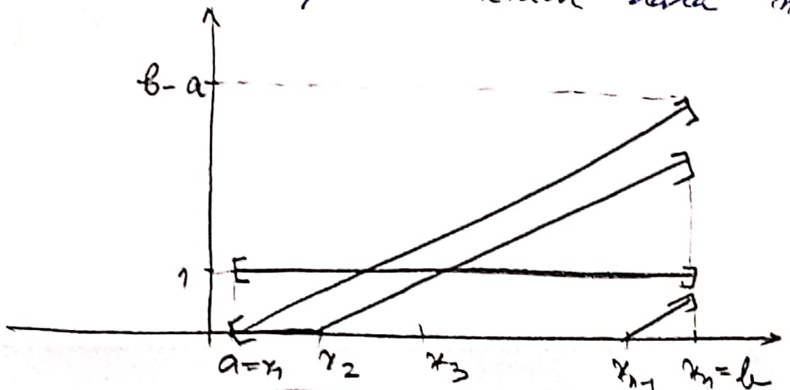
ş.a.m.d se determină unic $a_2, \dots, a_{n-1}$.

<u>Concluzie</u>: $\{1, (x-x_1)_+; (x-x_2)_+; \dots; (x-x_{n-1})_+\}$ este bază în $S_1(\Delta_n)$, ca subspațiu vectorial al sp. vect al funcțiilor continue definite pe $[a,b]$ și $\dim S_1(\Delta_n) = n$.

Deci:

$$\boxed{S_1(\Delta_n) = \{ s : [a,b] \to \mathbb{R},\ s(x) = a_0 + a_1 (x-x_1)_+ + \dots + a_{n-1}(x-x_{n-1})_+ \mid a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R} \}} \quad (14).$$

În general, se preferă ca elementele bazei unui spațiu de funcții să aibă suportul (adică închiderea mulțimii pe care funcția nu se anulează) cât mai mic în $[a,b]$. De exemplu, pt baza $\{1, (x-x_1)_+, \dots, (x-x_{n-1})_+\}$ această condiție nu este îndeplinită chiar dacă n crește.



$\text{supp } 1 = [a,b]$

$\text{supp } (x-x_1)_+ = \overline{\{x \mid (x-x_1)_+ \neq 0\}} = [a,b]$

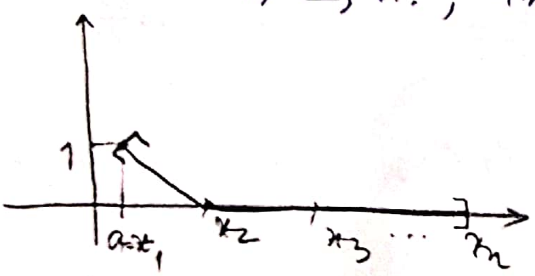
$\text{supp } (x-x_2)_+ = \overline{\{x \mid (x-x_2)_+ \neq 0\}} = [x_2, b]$

$\vdots$

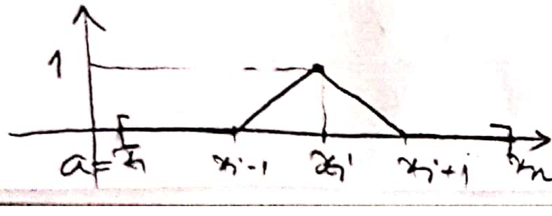
$\text{supp } (x-x_{n-1})_+ = [x_{n-1}, b]$

<u>Prop. 5</u>: Mulțimea funcțiilor $(H_i)_{i=\overline{1,n}}$ formează bază în $S_1(\Delta_n)$ ($\text{supp } H_i = [x_{i-1}, x_{i+1}]$, $i=\overline{2,n-1}$, $\text{supp } H_1 = [a, x_2]$, $\text{supp } H_n = [x_{n-1}, b]$)

unde $H_1, H_2, \dots, H_n$ sunt definite prin:

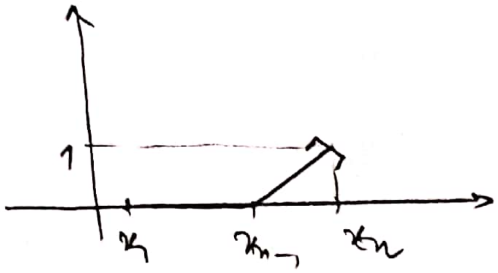


$$H_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, & x \in [x_1, x_2] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (15)$$



$i=\overline{2,n-1}$

$$H_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (16)$$



$$H_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \quad (17)$$

<u>Dem</u>: Știm că din $S_1(\Delta_n) = n \Rightarrow$ dacă $\{H_1, \dots, H_n\}$ formează sistem liniar independent, atunci este bază în $S_1(\Delta_n)$:

Fie $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ a.î. $\alpha_1 H_1 + \dots + \alpha_n H_n = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_1 H_1(x) + \dots + \alpha_n H_n(x) = 0, \ \forall x \in [a, b]$. $(*)$

Arătăm că $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Obs că:
$$H_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \quad (18)$$

În $(*)$ pt $x = x_k$, $k = \overline{1,n} \Rightarrow$

$$\underbrace{\alpha_1 H_1(x_k)}_{\delta_{1k}} + \dots + \alpha_k \underbrace{H_k(x_k)}_{\delta_{kk}} + \dots + \alpha_n \underbrace{H_n(x_k)}_{\delta_{nk}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_k = 0, \ k = \overline{1,n}$$

Deci: $\{H_1, \dots, H_n\}$ este $S_1(\Delta_n)$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S_1(\Delta_n) = \left\{ s : [a,b] \to \mathbb{R} \ \middle| \ s(x) = \sum_{i=1}^{n} s(x_i) H_i(x) \right\}. \quad (19)$$

Interpolare cu funcții spline de ordinul întâi:

pentru $\begin{cases} (x_i)_{i=\overline{1,n}} \text{ distincte} \\ (y_i)_{i=\overline{1,n}} \end{cases}$, spline-ul de ordinul întâi care verifică $s(x_i) = y_i$:

este
$$s(x) = \sum_{i=1}^{n} y_i H_i(x) \quad (20)$$

Pentru $\boxed{k = 3}$, avem <u>spline-uri de ordin 3</u> sau <u>spline-uri cubice</u>:

$$S_3(\Delta_n) = \left\{ s : [a,b] \to \mathbb{R} \ \middle| \ s\big|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ este polinom de grad 3}, \ i = \overline{1,n-1} \text{ și } s \in C^2([a,b]) \right\}. \quad (21)$$

Determinarea spline-ului de ordinul 3 pentru interpolarea Lagrange : $\begin{cases} (x_i)_{i=\overline{1,n}} \text{ distincte} \\ (y_i)_{i=\overline{1,n}} \end{cases}$ a.î. $s(y_i) = x_i$, $s \in S_3(\Delta_n)$

Notăm pt $i \in \{\overline{1,n-1}\}$

$x \in [x_i, x_{i+1}]$: $c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, c_{4i}$ coef lui s pe $[x_i, x_{i+1}]$, adică :

$$\underline{s(x) = c_{1i} + c_{2i}(x-x_i) + \frac{c_{3i}}{2}(x-x_i)^2 + \frac{c_{4i}}{6}(x-x_i)^3}$$

Problema de interpolare este rezolvată dacă determină coef :

$c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, c_{4i}$, $i = \overline{1,n-1}$

Avem
$$\boxed{c_{1i} = s(x_i) = y_i \quad , i = \overline{1,n-1}} \quad (22)$$

Din derivare $\Rightarrow s'(x) = c_{2i} + c_{3i}(x-x_i) + \frac{c_{4i}}{2}(x-x_i)^2$

$x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{1,n-1} \Rightarrow$

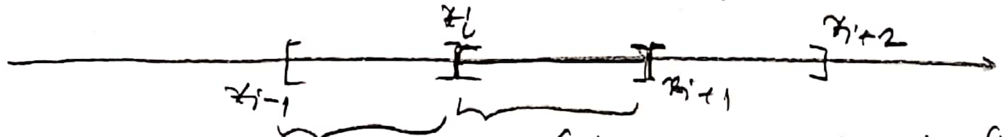
$\Rightarrow s'(x_i) = c_{2i} = s'(x_i+0)$ (derivată la dreapta în x_i).

Dar $s \in S_3(\Delta_n) \Rightarrow s \in C^2([a,b]) \Rightarrow$

$\Rightarrow s'(x_i+0) = s'(x_i-0) \overset{not}{=} s_i$, $i = \overline{1,n-1}$

Deci:
$$\boxed{c_{2i} = s_i, \quad i = \overline{1,n-1}} \quad (23)$$

Din cond ca în x_i : $s'(x_i-0) = s'(x_i+0)$ se obține un sistem din care se pot determina c_{3i}, c_{4i} :



$s(x) = c_{1i} + c_{2i}(x-x_i) + \frac{c_{3i}}{2}(x-x_i)^2 + \frac{c_{4i}}{6}(x-x_i)^3$

pt $x \in [x_i, x_{i+1}]$: $s'(x) = c_{2i} + c_{3i}(x-x_i) + \frac{c_{4i}}{2}(x-x_i)^2 \Big\} \Rightarrow$

pt x_{i+1}

$\Rightarrow \underbrace{s'(x_{i+1})}_{s_{i+1}} = \underbrace{c_{2i}}_{= s_i} + c_{3i}(x_{i+1}-x_i) + \frac{c_{4i}}{2}(x_{i+1}-x_i)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_{3i}(x_{i+1}-x_i) + \frac{c_{4i}}{2}(x_{i+1}-x_i)^2 = s_{i+1} - s_i$

Din s pt $x = x_{i+1} \Rightarrow \underbrace{s(x_{i+1})}_{y_{i+1}} = \underbrace{c_{1i}}_{s(x_i)=y_i} + \underbrace{c_{2i}}_{s_i}(x_{i+1}-x_i) + \frac{c_{3i}}{2}(x_{i+1}-x_i)^2 + \frac{c_{4i}}{6}(x_{i+1}-x_i)^3$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{3i}(x_{i+1}-x_i) + \frac{c_{4i}}{2}(x_{i+1}-x_i)^2 = s_{i+1}-s_i \\ \frac{c_{3i}}{2}(x_{i+1}-x_i)^2 + \frac{c_{4i}}{6}(x_{i+1}-x_i)^3 = y_{i+1}-y_i - s_i(x_{i+1}-x_i) \end{cases}$$

sistemul din care se determină c_{3i} și c_{4i} $\Rightarrow$ temă

$$\boxed{\begin{cases} c_{3i} = \frac{1}{x_{i+1}-x_i}\left[6\frac{(y_{i+1}-y_i)}{(x_{i+1}-x_i)} - (4s_i + 2s_{i+1})\right] \\ c_{4i} = \frac{6}{(x_{i+1}-x_i)^2}\left[(s_i+s_{i+1}) - \frac{2(y_{i+1}-y_i)}{x_{i+1}-x_i}\right] \end{cases}} \quad (24) \quad i=\overline{1,n-1}$$

Din (22), (23) și (24) se determină coef $c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, c_{4i}$ pt $i=\overline{1,n-1}$.

cu cond să determinăm $s_1, \dots, s_{n-1}$ din (23), adică valorile derivatelor lui s în $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$.

Valorile $s_1, \dots, s_{n-1}, s_n$ se obțin din cond ca s să fie de clasă C^2 pe $[a,b]$, adică în $x_2, \dots, x_{n-1}$ să avem derivată continuă de ordin 2:

$$s''(x_i-0) = s''(x_i+0) \quad i=\overline{2,n-1}$$

x_{i-1} $\quad$ x_i $\quad$ x_{i+1}

$$s(x) = c_{1,i-1} + c_{2,i-1}(x-x_{i-1}) + \frac{c_{3,i-1}}{2}(x-x_{i-1})^2 + \frac{c_{4,i-1}}{6}(x-x_{i-1})^3$$

$$s(x) = c_{1i} + c_{2i}(x-x_i) + \frac{c_{3i}}{2}(x-x_i)^2 + \frac{c_{4i}}{6}(x-x_i)^3$$

$x \in [x_{i-1}, x_i]$: $s''(x) = c_{3,i-1} + c_{4,i-1}(x-x_{i-1}) \Rightarrow s''(x_i-0) = c_{3,i-1}+c_{4,i-1}(x_i-x_{i-1})$

$x \in [x_i, x_{i+1}]$: $s''(x) = c_{3i} + c_{4i}(x-x_i) \Rightarrow s''(x_i+0) = c_{3i}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{c_{3,i-1} + c_{4,i-1}(x_i-x_{i-1}) = c_{3i}}, \quad i=\overline{2,n-1} \Rightarrow$$

$$\overset{(24)}{\Rightarrow} \frac{1}{x_i-x_{i-1}}\left[6\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right) - (4s_{i-1}+2s_i)\right] + \frac{6}{(x_i-x_{i-1})^{\cancel{2}}}\left[(s_{i-1})+s_i - \frac{2(y_i-y_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right]\cdot\cancel{(x_i-x_{i-1})} =$$

$$= \frac{1}{x_{i+1}-x_i}\left[6\,\frac{(y_{i+1}-y_i)}{x_{i+1}-x_i} - (4s_i + 2\boxed{s_{i+1}})\right], \quad i=\overline{2,n-1}$$

Ordonând după s_{i-1}, s_i, s_{i+1} $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2}{x_i-x_{i-1}}s_{i-1} + \left(\frac{\overset{x_{i+1}-x_i}{4}}{x_i-x_{i-1}} + \frac{\overset{x_i-x_{i-1}}{4}}{x_{i+1}-x_i}\right)s_i + \frac{2}{x_{i+1}-x_i}s_{i+1} =$$

$$= \frac{-6(y_i-y_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})^2} + \frac{12(y_i-y_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})^2} + \frac{6(y_{i+1}-y_i)}{(x_{i+1}-x_i)^2} \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{x_{i+1}-x_i}{2}}{x_i-x_{i-1}}s_{i-1} + \frac{4(x_{i+1}-x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}s_i + \frac{\overset{x_i-x_{i-1}}{2}}{x_{i+1}-x_i}s_{i+1} =$$

$$= \frac{6}{(x_i-x_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}\left[\frac{(y_i-y_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})}(x_{i+1}-x_i) + \frac{(y_{i+1}-y_i)}{(x_{i+1}-x_i)}\cdot(x_i-x_{i-1})\right]\Bigg|:2$$

$$\Longrightarrow (25)\quad \boxed{(x_{i+1}-x_i)s_{i-1} + 2(x_{i+1}-x_{i-1})s_i + (x_i-x_{i-1})s_{i+1} = t_i}$$

$i=\overline{2,n-1}$

unde
$$t_i = 3\left[\frac{(y_i-y_{i-1})(x_{i+1}-x_i)}{x_i-x_{i-1}} + \frac{(y_{i+1}-y_i)(x_i-x_{i-1})}{x_{i+1}-x_i}\right]$$

(25) este sistem liniar pt determinarea valorilor $s_1,\dots,s_n$ adică a derivatelor spline-ului în $x_1,\dots,x_n$.
Dar în (25) avem doar $(n-2)$ relații. Pt. completarea sistemului (25) se impun cond. la capete (în $\underset{x_1}{a}$ și $\underset{x_n}{b}$).

Tipuri de cond la capete:

I) (26) $\boxed{\begin{matrix} s_1=\alpha \\ s_n=\beta \end{matrix}}$, α,β date

Obs: dacă $y_1,\dots,y_n$ sunt valorile unei funcții cunoscute, atunci luăm $\alpha=f'(x_1)$ și $\beta=f'(x_n)$ (dacă există).

II) (27) $\boxed{\begin{cases} s''(x_1)=A \\ s''(x_n)=B \end{cases}}$, A,B date $\Rightarrow$ Trebuie exprimate în funcție de $s_1,\dots,s_n$.

Prop: 6 i) Din $s''(x_1)=A$ se poate deduce:

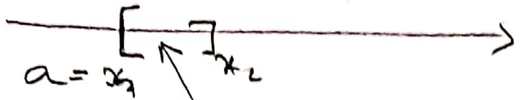
$$2s_1+s_2=t_1, \quad \text{cu } t_1 \text{ funcție de } y_1,\dots,y_n;\ x_1,\dots,x_n$$

ii) Din $s''(x_n)=B$ se deduce:

$$s_{n-1}+2s_n=t_n, \quad t_n \text{ cunoscut, funcție de } y_1,\dots,y_n,x_1,\dots,x_n.$$

Dem:

i)



$$s(x)=c_{11}+c_{21}(x-x_1)+\frac{1}{2}c_{31}(x-x_1)^2+\frac{1}{6}c_{41}(x-x_1)^2$$

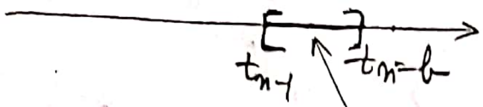
$$s''(x)=c_{31}+c_{41}(x-x_1) \Rightarrow s''(x_1)=c_{31} \xRightarrow{(24)\text{ pt } i=1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x_2-x_1}\left[6\,\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}-(4s_1+2s_2)\right]=A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6(y_2-y_1)}{x_2-x_1}-2(2s_1+s_2)=A(x_2-x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2s_1+s_2=\underbrace{\frac{3(y_2-y_1)}{x_2-x_1}-\frac{A}{2}(x_2-x_1)}_{t_1}.$$

ii)



$$s(x)=c_{1,n-1}+c_{2,n-1}(x-x_{n-1})+\frac{c_{3,n-1}}{2}(x-x_{n-1})^2+\frac{c_{4,n-1}}{6}(x-x_{n-1})^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s''(x)=c_{3,n-1}+c_{4,n-1}(x-x_{n-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s''(x_n)=c_{3,n-1}+c_{4,n-1}(x_n-x_{n-1}) \xRightarrow{(24)\text{ pt } i=n-1}$$

(temă) $\Rightarrow s_{n-1}+2s_n=t_n$

$$\text{cu } t_n=\frac{3(y_n-y_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}+\frac{B}{2}(x_n-x_{n-1})$$

III) Luăm pt s_1 și s_n derivatele polinomului de interpolare în $\begin{cases}x_1,x_2,x_3\\ y_1,y_2,y_3\end{cases}$, resp. $\begin{cases}x_{n-2},x_{n-1},x_n\\ y_{n-2},y_{n-1},y_n\end{cases}$ (28)

adică: $s_1 = p'(x_1)$ unde $p = p(x; x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3)$

Temă: Scrieți polinomul Lagrange în x_1, x_2, x_3, resp. în x_{n-2}, x_{n-1}, x_n și calculați apoi $p'(x_1)$, resp $p'(x_n)$.

(IV) Dacă funcția de interpolare pe care o determinăm poate fi periodică, atunci se pot impune cond la capete de forma

$$\boxed{\begin{cases} s_1 = s_n \\ s_1''(x_1) = s_n''(x_n) \end{cases}} \quad (29)$$

Obs: Cond (29) se impun doar dacă $y_1 = y_n$.

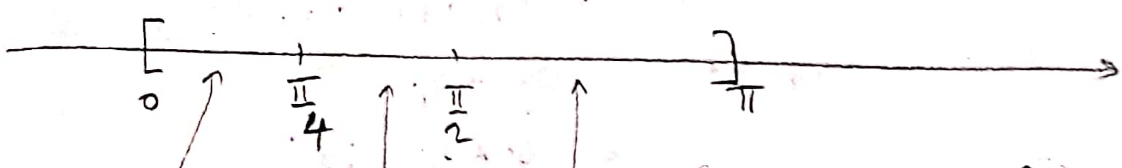
Exemplu de exercițiu (temă).

Fie $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

Fie $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{\pi}{4}$, $x_3 = \frac{\pi}{2}$, $x_4 = \pi$

$$\Delta_4 = \left(0 < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} < \pi\right)$$

• Luând $s_1 = f'(0)$ ..., $s_4 = f'(\pi)$ (adică, cond la capete (26)) să se scrie spline-ul de ordin 3.



$s(x) = c_{11} + c_{21} x + \frac{c_{31}}{2} x^2 + \frac{c_{41}}{2} x^3$

$s(x) = c_{12} + c_{22}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} c_{32}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{c_{42}}{6}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3$

$s(x) = c_{13} + c_{23}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{c_{33}}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{c_{43}}{6}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3$

Avem
$$\begin{cases} y_1 = f(x_1) = 1 \\ y_2 = f(x_2) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y_3 = f(x_3) = 0 \\ y_4 = f(x_4) = -1 \end{cases}$$

• Din (25) $\Rightarrow$ sistem pt s_2, s_3

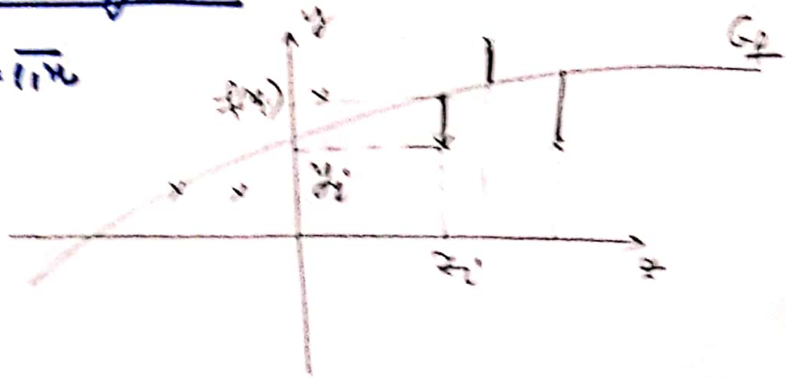
(s_1 și s_4 se înloc din $f'(0) = s_1 = 0$

$f'(\pi) = s_4 = 0$.)

• Coef $c_{11}, c_{21}, \dots, c_{42}$ (12 coef) se determină din (22), (23) și (24).

(6) Curbe de regresie

(x_i, y_i) $i=\overline{1,n}$



Pt $f: D \to \mathbb{R}$

$x_1, \dots, x_n \in D$.

f are expresie dată care depinde de k parametri $p_1, \dots, p_k$

Se aplică metoda celor mai mici pătrate pt determinarea parametrilor $p_1, \dots, p_k$, adică se determină $p_{10}, \dots, p_{k0}$ care să minimizeze funcția $\mathcal{F}: D \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$\mathcal{F}(\underbrace{p_1, \dots, p_k}_{p}) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - y_i\right)^2 \quad (30)$$

Pt. a determina $p_{10}, \dots, p_{k0}$ care să minimizeze $\mathcal{F}$,

- determinăm pt $\mathcal{F}$ punctele critice, rezolvând sistemul

$$\left\{ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_i}(p) = 0, \ i=\overline{1,k} \right. \quad (31)$$

- analizăm punctele critice pt a găsi pe cel de minim.

De exemplu, pentru funcția f se pot considera:

1) $f(x) = p_2 x + p_1$

2) $f(x) = p_n x^{n-1} + p_{n-1} x^{n-2} + \dots + p_2 x + p_1$

3) $f(x) = p_1 e^{x p_2}$

4) $f(x) = p_1 x^{p_2}$

5) $f(x) = p_1 \sin x + p_2 \cos x$.

Pt cazul 1): $f(x) = p_2 x + p_1 \Rightarrow \mathcal{F}(p_1, p_2) = \sum_{i=1}^{n} (p_2 x_i + p_1 - y_i)^2$

$\Rightarrow$ sistemul punctelor critice este:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_1}(p_1,p_2)=0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{F}}{\partial p_2}(p_1,p_2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n}(p_2 x_i + p_1 - y_i)\cdot 1 = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n}(p_2 x_i + p_1 - y_i)\cdot x_i = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n p_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) p_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) p_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) p_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{cases} \to \text{sistem liniar în } p_1, p_2 :$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{pmatrix} \qquad (32)$$

$$\det M = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

Ineg. Cauchy-Buniakovski-Schwartz:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2$$

$\forall a_1, \dots a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$,

pt $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, $b_i = x_i$

cum $x_i \neq x_j$, $i \neq j$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} 1\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) > \left(\sum_{i=1}^{n} 1\cdot x_i\right)^2 \Rightarrow \det M > 0, \ \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ sist (32) are soluție unică: (p_{10}, p_{20}).

<u>Prop.</u> Fie $(p_{10}, \dots, p_{k0})$ punct critic pentru $\mathcal{F}$.
Dacă $\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(p_1, \dots, p_k)$ este poz. definită, adică, determinanții de colț sunt pozitivi (>0), atunci $(p_{10}, \dots, p_{k0})$ este punct de minim local pt $\mathcal{F}$.

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(p_1, \dots, p_k) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p_i \partial p_j}(p_1, \dots, p_k)\right)_{i,j=\overline{1,k}}$$

Pt exemplu 1) de functie f avem:

$$\mathcal{H}_{\mathcal{F}}(p_1,p_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p_1^2}(p_1,p_2) & \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p_1 \partial p_2}(p_1,p_2) \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p_1 \partial p_2}(p_1,p_2) & \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p_2^2}(p_1,p_2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_{\mathcal{F}}(p_1,p_2) = \begin{pmatrix} 2n & 2\sum_{i=1}^{n} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n} x_i & 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix} = 2M$$

Det. de colț:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 2n > 0 \\ \Delta_2 = \det(2M) = 2^2 \det M = 4 \underbrace{\det M}_{>0} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow.$$

$\Rightarrow (p_{10}, p_{20})$ sol. a sist (32) este punct de minim local pentru $\mathcal{F}$

Temă: Determinați punctul de minim pt $\mathcal{F}$ asociat funcției polinom de grad $m-1$ (21).

Ex. de exercițiu: Pt punctele $x_1 = 1$; $x_2 = -3$; $x_3 = 0$: $x_4 = 5$
$y_1 = 2$; $y_2 = 4$; $y_3 = 2$; $y_4 = -2$
determinați o funcție de regresie de forma $f(x) = ax$ (m.c.m.m.p)

7. Integrarea numerică

Avem de calculat $\int_a^b f(x)dx$ cu $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilă.

Ca metodă generală: pe $[a,b]$ se determină pt f un polinom de interpolare sau spline-ul de interpolare pt f în $x_1, \dots, x_n \in [a,b]$ distincte, și în loc să integrăm f, integrăm polinomul sau spline-ul de interpolare pe $[a,b]$. Deci:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \simeq \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)} \quad (33)$$

O primă aproximare poate fi suma Riemann:

$$\Delta_n = (a = x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} = b)$$

$$(\xi_i),\ i=\overline{1,n}\ ,\quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$\left.\begin{array}{l} \sigma_{\Delta_n}(f,\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\underbrace{(x_{i+1}-x_i)}_{c_i} \\ \text{Știm că } \lim\limits_{\|\Delta_n\|\to 0} \sigma_{\Delta_n}(f,\xi) = \int_a^b f(x)\,dx \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$$

Def: Formula de aproximare: $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum\limits_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$

este de ordin $k \in \mathbb{N}^*$ dacă este exactă pentru polinoame până la gradul $k-1$, adică:

$$(34)\ \begin{cases} \int_a^b 1\,dx = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \\ \int_a^b x\,dx = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \cdot x_i \\ \vdots \\ \int_a^b x^{k-1}\,dx = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i\, x_i^{k-1} \end{cases}$$

Obs: Determinarea coef. $c_1, \dots, c_n$ din (34) conduce la:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i = b-a \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i = \dfrac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c_i x_i^{k-1} = \dfrac{b^k-a^k}{k}. \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & & & \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_n^{k-1} \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{R})} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ \frac{b^2-a^2}{2} \\ \vdots \\ \frac{b^k-a^k}{k} \end{pmatrix}$$

pt $k=n \Rightarrow$ det. matricii sist este Vandermonde și are

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \neq 0 \,, \quad x_i \neq x_j, \ i \neq j.$$

Aproximarea integralei $\int_a^b f(x)\,dx$ se poate aproximând

$f(x)$ – polinomul Lagrange $= \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot L_i(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \underbrace{\int_a^b L_i(x)\,dx}_{c_i}.$$

Exerciții ① Determinați o formulă de integrare numerică pentru $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x^2+1}\,dx$.

a) Folosind polinomul de interpolare pentru $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$, în punctele $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{\pi}{6}$; $x_3 = \frac{\pi}{4}$.

b) determinând coeficienții c_1, c_2, c_3 a.î.:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x^2+1}\,dx \simeq \left(c_1 \cdot f(0) + c_2 f\left(\frac{\pi}{6}\right) + c_3 f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

a) Fie $p(x) = f(0)\,L_1(x) + f\left(\frac{\pi}{6}\right) L_2(x) + f\left(\frac{\pi}{4}\right) L_3(x)$

forma Lagrange a polinomului de interpolare $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x^2+1}\,dx \simeq f(0) \int_0^{\frac{\pi}{4}} L_1(x)\,dx + f\left(\frac{\pi}{6}\right) \int_0^{\frac{\pi}{4}} L_2(x)\,dx + f\left(\frac{\pi}{4}\right) \int_0^{\frac{\pi}{4}} L_3(x)\,dx.$$

b) Întâi determinăm c_1, c_2, c_3 aî

$$\begin{cases} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dx = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 + c_3 \cdot 1 \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,dx = c_1 0 + c_2 \cdot \frac{\pi}{6} + c_3 \cdot \frac{\pi}{4} \\ \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\,dx = c_1 \cdot 0^2 + c_2 \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + c_3 \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2+c_3=\frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{6}c_2+\frac{\pi}{4}c_3=\frac{\pi^2}{32} \\ \frac{\pi^2}{36}c_2+\frac{\pi^2}{16}c_3=\frac{\pi^3}{64\cdot 3} \end{cases}$$

(7) Se dă o formulă de integrare numerică și se cere determinarea ordinului.
Se dă formula:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{c_1=c_2}\Big(f\big(\underbrace{\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{6}}_{x_1}\big)+f\big(\underbrace{\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{6}}_{x_2}\big)\Big)$$

Determinați ordinul metodei. Verificați că metoda este de ordin 4 (adică, este exactă pentru polinoame până la gradul 3).

(8) Aproximarea soluției problemei Cauchy în R
Se dă prob. Cauchy

$$(35)\quad \begin{cases} \frac{dx}{dt}=f(t,x) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$$

$f: D\subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t_0,x_0)\in D$, care îndeplinește cond. de existență și unicitate a soluției. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists!\ \varphi$ soluție a problemei.

(8.1) Metoda Euler:

$t\in[t_0,t_0+T]$

$t_0<t_1<t_2<\dots<t_n=t_0+T$

$t_j-t_{j-1}=h_{j-1}$, $j=\overline{1,n}$

Se determină $(x_j)_{j=\overline{0,n}}$ conform schemei numerice:

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{j+1}=x_j+h_j\cdot f(t_j,x_j) \end{cases} \quad \forall j=\overline{0,n-1}$$

La metoda Euler: $|\varphi(t_j)-x_j|<A\cdot h=O(h)\Rightarrow$
$\Rightarrow$ metoda Euler explicită este de ordin 1.

(8.2) Metoda Runge-Kutta

O metodă Runge-Kutta presupune să avem:

- $q \in \mathbb{N}^*$
- un tabel de constante

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_q & a_{q1} & \cdots & a_{qq} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_q \end{array}$$

sau

$$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,q}} \; ; \; C = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & c_q \end{pmatrix} = diag(c_1, \dots, c_q)$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q .$$

- formulele de integrare numerică:

$$(37) \begin{cases} \int_0^{c_i} \psi(x)\,dx \simeq \sum_{j=1}^{q} a_{ij} \psi(c_j) , \quad i=\overline{1,q} \\ \int_0^1 \psi(x)\,dx \simeq \sum_{j=1}^{q} b_j \cdot \psi(c_j) \end{cases}$$

- schema numerică R-K constă determinarea aprox. sol φ a prob. (35) în $t_0, t_1, \dots, t_n \in [t_0, t_0+T]$ astfel:

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{i+1} = x_i + h_i \sum_{j=1}^{q} b_j f(t_{i,j} ; x_{i,j}) , \quad i=\overline{0,n-1} \end{cases}$$

unde

$$t_{ij} \in [t_i , t_{i+1}]$$

$$t_{i,j} = t_i + c_j \cdot (t_{i+1} - t_i) = t_i + c_j h_i , \quad j=\overline{1,q}$$

iar $(x_{i,j})_{j=\overline{1,q}}$ sunt valori intermediare care se ~~se~~ determină prin rezolvarea sistemului:

$$(36) \left\{ x_{i,j} = x_i + h_i \sum_{k=1}^{q} a_{jk} f(t_{i,k} ; x_{i,k}) \right. , \quad j=\overline{1,q}$$

în general neliniar, în nec. $(x_{ij})_{j=\overline{1,q}}$

OBS: Dacă A este strict inferior triunghiulară, atunci met. R-K este explicită, pt că în sistemul (36) fiecare x_{ij} se exprimă din câte o ecuație, adică:

dacă: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ a_{q1} & a_{q2} & a_{q3} \cdots & 0 \end{pmatrix}$, atunci (36) devine:

$$\begin{cases} x_{i,1} = x_i \\ x_{i,2} = x_i + h_i \cdot a_{21} f(t_{i,1}; x_{i,1}) \\ x_{i,3} = x_i + h_i \left(a_{31} f(t_{i,1}; x_{i,1}) + a_{32} f(t_{i,2}; x_{i,2}) \right) \\ \vdots \\ x_{iq} = x_i + h_i \sum\limits_{k=1}^{q-1} a_{qk} f(t_{i,k}; x_{i,k}) \end{cases}$$

Prop.: Ordinul metodei R-K este cu 1 mai mult decât ordinul metodelor de integrare (37). (adică, dacă ordinul metodei R-K este p, atunci ordinul met. de integrare (37) este p-1).

Metoda Runge-Kutta clasică se definește pentru $q=4$ și tabelul de constante:

0	0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
1	0	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{i+1} = x_i + h_i \Big(\frac{1}{6} f(t_{i,1}; x_{i,1}) + \\ \quad + \frac{1}{3} f(t_{i,2}; x_{i,2}) + \\ \quad + \frac{1}{3} f(t_{i,3}; x_{i,3}) + \\ \quad + \frac{1}{6} f(t_{i,4}; x_{i,4}) \Big), \quad i = \overline{0, n-1} \end{cases}$$

unde:

$$\begin{cases} t_{i,1} = t_i + 0 \cdot h_i \\ t_{i,2} = t_i + \frac{1}{2} h_i \\ t_{i,3} = t_i + \frac{1}{2} h_i \\ t_{i,4} = t_i + h_i = t_{i+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{i,1} = x_i \\ x_{i,2} = x_i + h_i \cdot \frac{1}{2} f(t_{i,1}; x_{i,1}) \\ x_{i,3} = x_i + h_i \frac{1}{2} f(t_{i,2}; x_{i,2}) \\ x_{i,4} = x_i + h_i \, 1 \cdot f(t_{i,3}; x_{i,3}). \end{cases}$$

<u>Ex</u>: 1) Dată o metodă R–K să se scrie schema numerică.

2) Arătați că pt $q=1$, există α ai tabelul de constante $\begin{array}{c|c} \alpha & \alpha \\ \hline & 1 \end{array}$ pentru metoda R–K să conducă metoda Euler.

3) Pt $q=2$, determinați constantele din tabelul

$$\begin{array}{c|cc} c_1 & a_{11} & a_{12} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} \\ \hline & b_1 & b_2 \end{array}$$

a.i. metoda R–K asociată să fie de ordin 4. (adică formulele (37) să fie de ordin 3).

<u>Pt. examen</u>
- timp 2 ore
- max'un 9 ex.
- Consultații, 14.05.2021, ora 16^{00}
- pt e-mail: pmiulia@fmi.unibuc.ro.

radu.georgescu@s.unibuc.ro.