28.03.2021
– curs 2 –

2.2. Metode iterative pentru rezolvarea sistemelor liniare (continuare)

Metoda Jacobi

$$Ax = b \quad , A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^n$$

$$x = J(A)x + c \quad , \quad (1) \begin{cases} c = D^{-1}b \\ J(A) = D^{-1}(L+U) \\ D = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) \\ L = (l_{ij}) \ ; \ l_{ij} = \begin{cases} 0, & i \le j \\ -a_{ij}, & i > j \end{cases} \\ U = (u_{ij}) \ ; \ u_{ij} = \begin{cases} -a_{ij}, & i < j \\ 0, & i \ge j \end{cases} \end{cases}$$

T1 (cond suficiente de convergență în met. Jacobi)

Dacă A este strict diag dominantă pe linii sau pe coloane, atunci metoda Jacobi converge.

Reciproca nu e adevarată.

Exemplu: Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2)

Arătați că deși A nu este strict diagonal dominantă, metoda Jacobi converge.

- pe linii: $|1| \not> |2| + |-2| \Rightarrow$ nu este strict diagonal dominantă pe linii
- pe coloane: $|1| \not> |1| + |2| \Rightarrow$ ——"—— ——"—— pe coloane.
- Calculăm $J(A)$: $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 \Rightarrow D^{-1} = I_3$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} ; \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{J}(A) = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

• Calculăm valorile proprii pt $\mathcal{J}(A)$:

$$\det(\lambda I_3 - \mathcal{J}(A)) = 0 \Rightarrow \det\left(\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - \cancel{4} + \cancel{4} + \cancel{4\lambda} - \cancel{2\lambda} - \cancel{2\lambda} = 0.$$

$$\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(\mathcal{J}(A)) = \max\{|\lambda_i| \mid \lambda_i \text{ val. proprie pt } \mathcal{J}(A)\} =$$
$$= 0 < 1 \xRightarrow[\text{T. cu cond nec. şi suf. de convergenţă}]{} \text{met. Jacobi converge pentru un sistem } Ax = b \text{ cu } A \text{ din (2) şi } b \in \mathbb{R}^n.$$

<u>Schema numerică</u> pentru metoda Jacobi este:

$$(3) \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x^{(m+1)} = \mathcal{J}(A) x^{(m)} + c \end{cases} \quad m \in \mathbb{N}$$

$$\left.\begin{array}{l} D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) \\ \text{Avem ipoteza } a_{ii} \neq 0, \ i = \overline{1,n} \end{array}\right\} \Rightarrow D^{-1} = \text{diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}}\right).$$

$$\mathcal{J}(A) = \text{diag}\left(\frac{1}{a_{11}}, \dots, \frac{1}{a_{nn}}\right) \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{J}(A) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Din $(3)_1$, pe componente $x^{(m+1)}$ este $x^{(m+1)} = \left(x_1^{(m+1)}, \dots, x_n^{(m+1)}\right)^t$

$$(5) \quad x_i^{(m+1)} = -\left(\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} \cdot x_j^{(m)} + b_i\right) / a_{ii}, \quad i = \overline{1,n}$$

Alg pt. met. Jacobi:

Intrare: $\begin{cases} n \in \mathbb{N}, & A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ b \in \mathbb{R}^n \\ \varepsilon > 0 & ;\ x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ (poate fi } 0_{\mathbb{R}^n} \in \mathbb{R}^n) \end{cases}$

Inițializarea: $x1 = x^{(0)}$ = iterația precedentă iterației curente.

$x2$ = iterația curentă.

$er = 2\varepsilon$

cât timp $(er > \varepsilon)$ execută

- calculează $x2$ pe componente folosind (5)
- calculează eroarea: $er = \| x2 - x1 \|$
- $x1 = x2$

Afișează $x1$. (aproximare cu eroarea ε pt soluția sistemului $Ax = b$).

Exemplu: Fie sistemul: $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{b}$

Scrieți 2 iterații cu metoda Jacobi, pornind cu $x^{(0)} = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Avem: $J(A) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; $\left. \begin{matrix} c = D^{-1} b \\ D = I_3 \end{matrix} \right| \Rightarrow c = b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = J(A) \cdot x^{(0)} + c = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = J(A)\, x^{(1)} + c = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = J(A)\, x^{(2)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{este soluția sistemului}}$$

Metoda Gauss-Seidel

$$Ax = b$$

$(D-L-U)x = b$, cu D, L, U la fel ca la metoda Jacobi.

$$(D-L)x = Ux + b$$

$\boxed{\text{Păstrăm ip } a_{ii} \neq 0,\ i=\overline{1,n}}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \det(D-L) = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists (D-L)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \underbrace{(D-L)^{-1}U}_{\mathcal{G}(A)} x + \underbrace{(D-L)^{-1}b}_{c} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \mathcal{G}(A)x + c \quad \text{cu} \quad \mathcal{G}(A) = (D-L)^{-1}U \qquad (6)$$

$$c = (D-L)^{-1}b.$$

Schema numerică în metoda Gauss-Seidel:

$$(7) \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^n \\ x_1^{(m+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}\left(-\displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{n} a_{ij}x_j^{(m)} + b_1\right) \\ x_i^{(m+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(-\displaystyle\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)} + b_i\right) \\ i = \overline{2,n} \end{cases}$$

OBS: Faptul că folosim în calculul comp $x_i,\ i=\overline{2,n}$, ale iteratei curente, componente din iterata curentă deja calculate, conduce la creșterea vitezei de convergență în metoda iterativă.

(T2) (cond nec și suf. de convergență în met. G-S).
Schema numerică (7) converge (adică, $\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x$, x soluția sistemului $Ax=b$)
dacă și numai dacă este îndeplinită una dintre condițiile:

$$(8)\quad \begin{cases} 1)\ \lim_{m\to\infty} \left(\mathcal{G}(A)\right)^m = O_n \\ 2)\ \text{să existe o normă matricială ai } \|\mathcal{G}(A)\| < 1 \\ 3)\ \rho(\mathcal{G}(A)) < 1 \end{cases}$$

(T3) (cond suficiente de convergență în metoda Gauss–Seidel)
Dacă A este strict diag dominantă pe linii sau pe coloane, atunci metoda Gauss-Seidel converge.
Reciproca nu este adevărată.
Exemplu: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $Ax = b$.

Deși, A nu este strict diag dominantă, metoda Gauss-Seidel converge.

$D-L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\det(D-L) = 2\cdot2\cdot2 = 8 \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists (D-L)^{-1}$

$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(D-L)^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; $(D-L)^* = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (D-L)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$(D-L)^*_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot$ determinantul ce rămâne din $(D-L)^t$ dacă eliminăm linia i și coloana j

$\mathcal{G}(A) = (D-L)^{-1}\cdot U = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{G}(A) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

obs că: $\|\mathcal{G}(A)\|_1 = \max\left\{0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}\right\} = 1 \nless 1$
La fel $\|\mathcal{G}(A)\|_\infty \nless 1$

Calculăm valorile proprii pt $G(A)$:

$$\det(\lambda I_3 - G(A)) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \lambda+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \lambda+\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(G(A)) = \max\{0, \tfrac{1}{2}\} = \tfrac{1}{2} < 1 \Rightarrow$$ met. G-S converge.

OBS: Pt exemplul considerat avem că (vezi cursul 1), că metoda Jacobi nu converge.

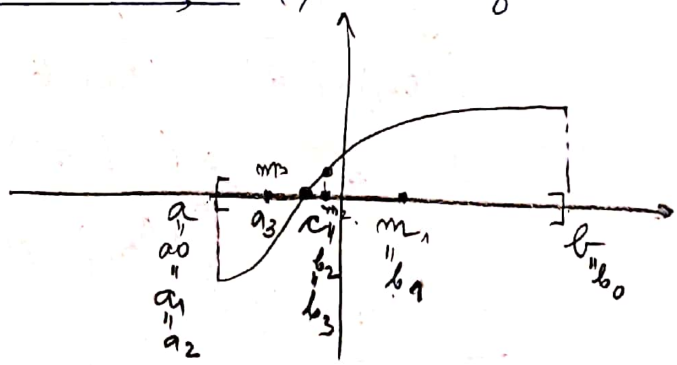
Temă: 1) Scrieți alg pentru metoda Gauss-Seidel.
2) Calculați $J(A)$ și $G(A)$ pentru $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Cele două metode sunt convergente?

③ Rezolvarea numerică a ecuațiilor în $\mathbb{R}$ (neliniare)

$\boxed{f(x)=0}$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuă.

Presupunem că se știe că ecuația $f(x)=0$ are o unică soluție în $[a,b]$: $\exists!\, c\in[a,b]$ a.î. $f(c)=0$.

(3.1) Metoda bisecției (pentru rez. ec. nelin. în $\mathbb{R}$)



Se bazează pe următorul rezultat de analiză:

$$\left.\begin{array}{l} f:[a,b]\to\mathbb{R} \text{ continuă} \\ f(a)\cdot f(b)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \exists\, c\in(a,b) \text{ a.î. } f(c)=0.$$

și se construiește un șir de intervale $[a_n, b_n]_{n\geq 0}$ astfel încât $c\in[a_n,b_n]$, $\forall n\geq 0$.

Avem: Se dau $[a_0,b_0]=[a,b]$ și $\varepsilon>0$. Se mai dau f

$er = |b_0 - a_0|$

cât timp $(er > \varepsilon)$ execută:

$m = \frac{a0+b0}{2}$;

dacă $(f(m) == 0)$ atunci

m este soluția căutată

scriem m și oprește execuția funcției.

altfel % $f(m) \neq 0$.

dacă $f(m) \cdot f(a0) < 0$, atunci:

$a1 = a0$

$b1 = m$

altfel % $f(m) \cdot f(a0) > 0$; $f(m) f(b0) < 0$.

$a1 = m$

$b1 = b$

$er = |b1 - a1|$

$a0 = a1$

$b0 = b1$

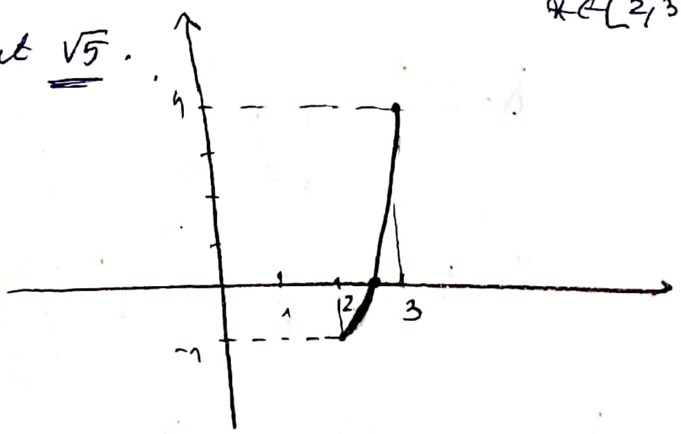
afișează a0 sau b0 sau $(a0+b0)/2$

Exemplu: Aplicați metoda bisecției pt $f: [2,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5$.

Se obține o aproximare a soluției pt ec $x^2 - 5 = 0$, $x \in [2,3]$

adică, o aprox. pt $\sqrt{5}$.

$[a0, b0] = [2,3]$



$[a0, b0] = [2,3]$

$m_1 = \frac{2+3}{2} = 2,5 = \frac{5}{2}$

$f(\frac{5}{2}) = \frac{25}{4} - 5 = \frac{5}{4}$

$f(2) = -1$

$f(3) = 4$

$\Rightarrow f(2) \cdot f(\frac{5}{2}) < 0 \Rightarrow [a1, b1] = [2, \frac{5}{2}]$

$m_2 = \frac{2+\frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4}$

$f(\frac{9}{4}) = \frac{81}{16} - 5 = \frac{81-80}{16} = \frac{1}{16}$

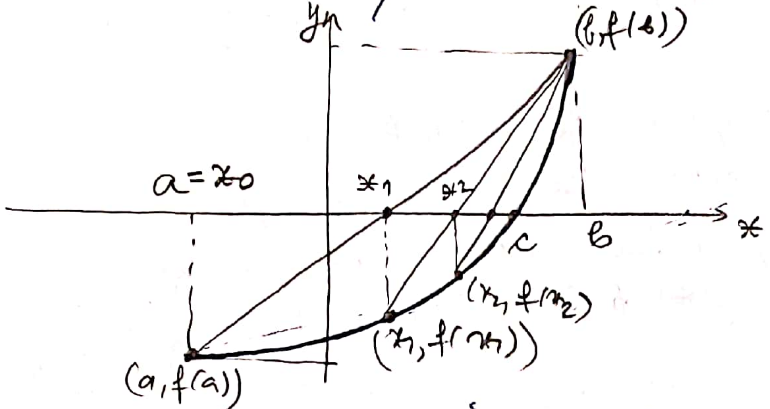
$f(\frac{9}{4}) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow [a2, b2] = [2, \frac{9}{4}]$.

Scanned with CamScanner

3.2 Metoda coardei (secantei).

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continuă.

Ecuația $f(x)=0$. Se consideră că $f(a)f(b)<0$.
Presupunem că f este de 2 ori derivabilă și că derivatele f', f'' au semn constant pe $[a,b]$.
Considerăm că $f'(x)>0$, $f''(x)>0$, $\forall x \in [a,b]$. (8) Deci, f este strict crescătoare și convexă.



În condițiile (8) construim șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ astfel:

$$\begin{cases} \boxed{x_0 = a} \\ \text{pt } n\geq 1, \text{ calculăm } x_n \text{ ca intersecția } \underbrace{\text{coardei între } (x_{n-1}, f(x_{n-1})) \text{ și } (b, f(b))}_{\text{cu axa } Ox} \end{cases}$$

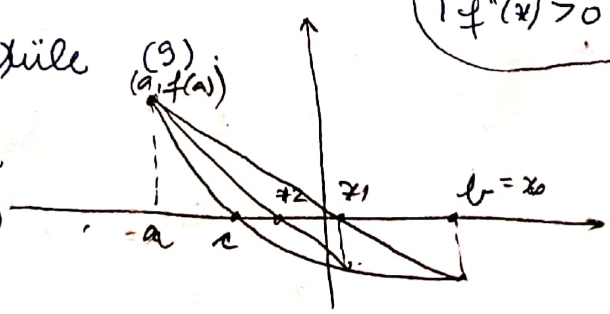
$$\frac{y-f(b)}{f(x_{n-1})-f(b)} = \frac{x-b}{x_{n-1}-b}$$

$$(y=0) \Rightarrow (x_{n-1}-b)\frac{(-f(b))}{f(x_{n-1})-f(b)} = x_n - b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x_n = b - \frac{f(b)(x_{n-1}-b)}{f(x_{n-1})-f(b)}, \ \forall n\geq 1} \qquad (9)$$

Obs: Dacă suntem în alt caz diferit de (8), de exemplu: $\begin{cases} f'(x)<0 \\ f''(x)>0 \end{cases}, \forall x\in[a,b]$ (10)

atunci recalculăm iterațiile (9).



Temă 1) Calculați formula pentru iterațiile (x_n) în cazul (10)
2) La fel pentru cazurile:

(11): $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ f''(x) < 0 \end{cases}$, $\forall x \in [a,b]$

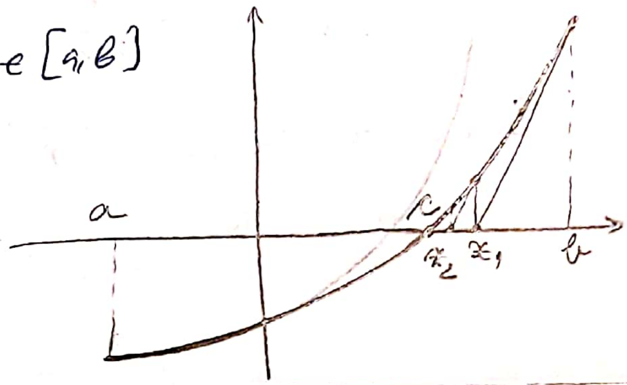
(12): $\begin{cases} f'(x) < 0 \\ f''(x) < 0 \end{cases}$, $\forall x \in [a,b]$.

3.3 Metoda Newton (metoda tangentei)

Ca și la metoda coardei considerăm unul dintre cazurile (8), (10), (11) sau (12) pentru funcția f.
Șirul iterațiilor $(x_n)_{n\geq 0}$ se obține ca intersecție a unei tangente la grafic cu axa Ox.

Considerăm $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ f''(x) > 0 \end{cases}$, $\forall x \in [a,b]$

Pornim cu $x_0 = b$ și pentru x_{n-1} cunoscut, calculăm x_n ca intersecția tangentei în $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ cu axa Ox.



Ec tangentei în $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ este:

$$y - f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x - x_{n-1})$$

pt $y=0 \Rightarrow -f(x_{n-1}) = f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}} \quad \forall n \geq 1, \quad (13)$$

În metodele coardei și tangentei se calculează iterații până când $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$, cu $\varepsilon > 0$ dat.

Temă: Scrieți formulele de calcul pt x_n în cazurile (10), (11) și (12). (diferă punctul de plecare).

Obs: Pentru metoda tangentei se poate scrie o generalizare cazul sistemelor neliniare: $f(x)=0$; $f: D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, adică avem ec cu m nec și m ec neliniare. $f=(f_1,\dots,f_m)$

Luăm $x^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ arbitrar.
Presupunem că se știe $\exists ! \, c \in \mathbb{R}^m$ ai $f(c) = 0$.
$c \in D$.

Pt x_{n-1} cunoscut, calculăm iterația următoare astfel:

$$x^{(n)} = x^{(n-1)} - \underbrace{\left(D_1 f(x^{(n-1)})\right)^{-1}}_{\in \mathcal{M}_m(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{f(x^{(n-1)})}_{\in \mathbb{R}^m} \quad (14)$$

unde

$$D_1 f(a) = \text{matricea derivatelor de ordinul întâi ale lui } f \text{ în } a = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(a) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(a) \end{pmatrix}$$

Dezavantajul acestei metode, metodei (14) (<u>Newton pt sisteme neliniare</u>) este că la fiecare iterație trebuie să calculeze o matrice inversă.

Pt. a elimina acest dezavantaj, simplificăm metoda astfel: Considerăm la fiecare iterație $(D_1 f(x^{(0)}))^{-1}$, metoda numindu-se astfel: metoda Newton simplificată:

$x^{(0)}$; $er = 2\varepsilon$
Calculăm $M = (D_1 f(x^{(0)}))^{-1}$
cât timp $(er > \varepsilon)$
  $x^{(n)} = x^{(n-1)} - M f(x^{(n-1)})$
  $er = \| x^{(n)} - x^{(n-1)} \|$
afișează $x^{(n)}$

<u>Exemplu</u>: Fie sistemul:

$$\begin{cases} 12 x_1^3 - 9x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ 27 x_2^3 - 16 x_2 + x_1 - 1 = 0 \end{cases} \quad (m = 2)$$

$D = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$,
Aplicați metoda Newton simplificată considerând $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Avem: $f : D \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$

$f_1(x_1,x_2) = 12x_1^3 - 9x_1 - x_2 + 1$

$f_2(x_1,x_2) = 27x_2^3 - 16x_2 + x_1 - 1$

$$D_1 f(\underbrace{x_1,x_2}_{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36x_1^2 - 9 & -1 \\ 1 & 81x_2^2 - 16 \end{pmatrix}$$

$$D_1 f(0,0) = \begin{pmatrix} -9 & -1 \\ 1 & -16 \end{pmatrix} ; \ \det(D_1 f(0,0)) = 9 \cdot 16 + 1 = 144 + 1 = 145 \neq 0.$$

$$(D_1 f(0,0))^t = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ -1 & -16 \end{pmatrix} ; \ (D_1 f(0,0))^* = \begin{pmatrix} -16 & 1 \\ -1 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (D_1 f(0,0))^{-1} = \frac{1}{145}\begin{pmatrix} -16 & 1 \\ -1 & -9 \end{pmatrix} \overset{not}{=} M$$

Șirul de iterații $(x^{(n)})_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}^2$ cu met. Newton simplificată care converge la soluția sistemului este

$$\begin{cases} x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ x^{(n)} = x^{(n-1)} - M f(x^{(n-1)}), \ n \geq 1 \end{cases}$$

adică pe componente, avem:

$$\begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^{(n-1)} \\ x_2^{(n-1)} \end{pmatrix} - \frac{1}{145}\begin{pmatrix} -16 & 1 \\ -1 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12(x_1^{(n-1)})^3 - 9x_1^{(n-1)} - x_2^{(n-1)} + 1 \\ 27(x_2^{(n-1)})^3 - 16x_2^{(n-1)} + x_1^{(n-1)} - 1 \end{pmatrix}.$$

Pt sisteme neliniare, se poate folosi și <u>metoda contracției</u>:

avem $f : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$

$\exists !\, c \in D$ a.î. $f(c) = c$

f este contracție, adică $\exists\, L \in (0,1)$ a.î.

$$\| f(x) - f(y) \| < L \| x - y \| , \ \forall x, y \in D$$

În aceste condiții șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ construit astfel:

$$(15) \quad \begin{cases} x^{(0)} \in \mathbb{R}^m \text{ arbitrar} \\ x^{(m)} = f(x^{(m-1)}), \ \forall m \geq 1 \end{cases}$$

Pt. această metodă verificarea că f este contracție se poate face prin determinarea intervalului de mărginire pentru $(D_1 f(x))$ cu $x \in D$. Dacă $\sup\limits_{x \in D} \| D_1 f(x) \| = L \in (0,1)$, atunci f este contracție.

OBS: Met. contracției se aplică pentru sisteme scrise sub forma: $f(x) = x$

<u>Exemplu</u>: Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{10}(2x_1^3 - x_2 + 1) \\ x_2 = \frac{1}{15}(4x_2^3 + x_1 - 1) \end{cases}$$

pt. $D = [-1,1] \times [-1,1]$

Verificați dacă se poate aplica metoda contracției.

Avem $f: D \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$

$$f(x_1, x_2) = \left(\frac{1}{10}(2x_1^3 - x_2 + 1), \frac{1}{15}(4x_2^3 + x_1 - 1)\right)$$

Sistemul este $f(x) = x$.

Calculăm:

$$D_1 f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}(6x_1^2) & \frac{1}{10}(-1) \\ \frac{1}{15}(1) & \frac{1}{\cancel{15}\,5}(\cancel{12}\,4 x_2^2) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3x_1^2}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{15} & \frac{4x_2^2}{5} \end{pmatrix}$$

Alegem pt $\|D_1 f(x_1, x_2)\|$, norma $\|\cdot\|_\infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \|D_1 f(x_1, x_2)\|_\infty = \max\left\{\frac{3x_1^2}{5} + \frac{1}{10}, \frac{1}{15} + \frac{4x_2^2}{5}\right\} \le$$

avem $(x_1, x_2) \in [-1,1] \times [-1,1] \Rightarrow x_1^2 \in [0,1]$, $x_2^2 \in [0,1]$

$$\le \max\left\{\frac{3 \cdot 1}{5} + \frac{1}{10}, \frac{1}{15} + \frac{4 \cdot 1}{5}\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{7}{10}, \frac{13}{15}\right\} = \frac{13}{15} \in (0,1) \Rightarrow$$ se poate aplica met. contracției $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in D. \\ \begin{pmatrix} x_1^{(n)} \\ x_2^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\left(2\left(x_1^{(n-1)}\right)^3 - x_2^{(n-1)} + 1\right) \\ \frac{1}{15}\left(4\left(x_2^{(n-1)}\right)^3 + x_1^{(n-1)} - 1\right) \end{pmatrix}, \forall n \ge 1 \end{cases}$$

<u>Temă</u>: Cum se poate aplica metoda contracției pt. sisteme liniare?

(4) Aproximarea valorilor și vectorilor proprii pentru matrice pătratice simetrice de ordin n

OBS: Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrice simetrică, atunci A are toate valorile proprii reale.

Def: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\lambda \in \mathbb{C}$ este valoare proprie pentru A dacă

$$\exists v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0_{\mathbb{R}^n} \text{ a.î. } Av = \lambda v. \qquad (16)$$

(P1) Valorile proprii ale matricii A sunt rădăcinile polinomului caracteristic:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) \qquad (17)$$

(4.1) Metoda rotațiilor (Jacobi)

constă în construirea unui șir de matrice care converge la o matrice diagonală, având pe diagonală valorile proprii ale matricii simetrice A.

$$(18) \quad \begin{cases} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A_m)_{m \geq 0} \text{ a.î. } \lim\limits_{m \to \infty} A_m = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{cases}$$

unde $A_0 = A$

$$A_m = U_m^t A_{m-1} U_m, \quad m \geq 1$$

cu U_m o matrice de rotație de forma:

$$U_m = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & & & \downarrow p & & \downarrow q & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ p \to \\ \\ q \to \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \cos\theta & \cdots & \sin\theta & \\ & & & \vdots & 1 & & \\ & & & & \ddots & 1 & \\ & & & -\sin\theta & \cdots & \cos\theta & \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad (19)$$

$p, q \in \{\overline{1,n}\}$

cu θ astfel încât să avem:

$$a_{pq}^{(m-1)} \neq 0 \text{ și } a_{pq}^{(m)} = 0. \quad (20)$$

<u>Deducem $\theta \in (0, \pi)$</u>

<u>Din (20)</u>:

$$0 = a_{pq}^{(m)} = (\underbrace{U_m^t A_{m-1}} U_m)_{pq} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (U_m^t A_{m-1})_{pj} (U_m)_{jq} =$$

pe coloana q din U_m avem doar 2 elem nenule $(U_m)_{pq}$, $(U_m)_{qq}$

$$= \underbrace{(U_m^t A_{m-1})_{pq}} \underbrace{(U_m)_{qq}} + \underbrace{(U_m^t A_{m-1})_{pp}} (U_m)_{pq} =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} (U_m^t)_{pj} (A_{m-1})_{jq}\right) \cos\theta + \left(\sum_{j=1}^{n} (U_m^t)_{pj} (A_{m-1})_{jp}\right) \sin\theta =$$

$$= \left((U_m^t)_{pp} (A_{m-1})_{pq} + (U_m^t)_{pq} (A_{m-1})_{qq}\right) \cos\theta +$$

$$+ \left((U_m^t)_{pp} (A_{m-1})_{pp} + (U_m^t)_{pq} (A_{m-1})_{pq}\right) \sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \left(\underline{(\cos\theta) \cdot a_{pq}^{(m-1)}} + (-\sin\theta)\, a_{qq}^{(m-1)}\right) \cos\theta +$$

$$+ \left((\cos\theta)\, a_{pp}^{(m-1)} + \underline{(-\sin\theta)\, a_{pq}^{(m-1)}}\right) \sin\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{pq}^{(m-1)} \underbrace{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)}_{\cos 2\theta} + \underbrace{(\sin\theta\cos\theta)}_{\frac{1}{2}\sin 2\theta} \left(a_{pp}^{(m-1)} - a_{qq}^{(m-1)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{a_{pq}^{(m-1)}}_{\neq 0} (\cos 2\theta) - \frac{1}{2} (\sin 2\theta) \underbrace{\left(a_{qq}^{(m-1)} - a_{pp}^{(m-1)}\right)} = 0.$$

• dacă $\boxed{a_{qq}^{(m-1)} = a_{pp}^{(m-1)}}$, atunci $\left.\begin{array}{l}\cos 2\theta = 0 \\ \text{cum } \theta \in (0, \pi)\end{array}\right| \Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$

• dacă $\boxed{a_{qq}^{(m-1)} \neq a_{pp}^{(m-1)}}$ $\Rightarrow a_{pq}^{(m-1)} (\cos 2\theta) = \frac{1}{2} (\sin 2\theta) \left(a_{qq}^{(m-1)} - a_{pp}^{(m-1)}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}}_{tg 2\theta} = \frac{2a_{pq}^{(m-1)}}{a_{qq}^{(m-1)} - a_{pp}^{(m-1)}} \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{pq}^{(m-1)}}{a_{qq}^{(m-1)} - a_{pp}^{(m-1)}}\right)}$$

În concluzie:

$$\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{dacă } a_{pp}^{(m-1)} = a_{qq}^{(m-1)} \\ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{2a_{pq}^{(m-1)}}{a_{qq}^{(m-1)} - a_{pp}^{(m-1)}}\right) \end{cases} \quad (21).$$

Alg pt. metoda rotațiilor

Intrare: $n \in \mathbb{N}^*$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simetrică; $\varepsilon > 0$.

Inițializare: $A_0 = A$

$er = 2\varepsilon$; $m = 0$; $Q = I_n$.

cât timp $(er > \varepsilon)$ execută

- $m = m + 1$
- calculăm A_m și er
  - alegem $(p,q) \in \{(i,j) \mid i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{i+1, n}\}$ a.î. (corespunde unui element nediagonal, aflat deasupra diagonalei)

    $$|a_{pq}^{(m-1)}| = \max_{\substack{i=\overline{1,n-1} \\ j=\overline{i+1,n}}} |a_{ij}^{(m-1)}|$$

    sau, în cazuri particulare, alegem (p,q) a.î. $a_{pp}^{(m-1)} = a_{qq}^{(m-1)}$.
  - calculăm θ folosind (21),
  - formăm matricea U:

    $$\begin{cases} U = I_n \\ U_{pp} = \cos\theta; \quad U_{qq} = \cos\theta \\ U_{pq} = \sin\theta; \quad U_{qp} = -\sin\theta. \end{cases}$$
  - calculăm $A_m = U^t A_{m-1} U$; $Q = Q \cdot U$
  - calculăm $er = \left(2 \cdot \sum_{i=\overline{1,n-1};\, j=\overline{i+1,n}} |a_{ij}^{(m)}|^2\right)^{1/2}$

Afișează A_m, Q

OBS: Se poate lucra doar cu 2 matrice, $(A0, A1)$:

$$\begin{cases} A0 \\ A1 = U^t A0 \cdot U \\ \text{după ce calculăm eroarea } A0 \leftarrow A1 \end{cases}.$$

OBS: În alg de mai sus se poate obține o matrice care pe coloane să aibă aproximările vectorilor proprii pt. A:

$$A_0 = A$$
$$A_1 = U_1^t A_0 U_1$$
$$\vdots$$
$$A_m = U_m^t \underbrace{A_{m-1}} U_m = \underbrace{U_m^t U_{m-1}^t} A_{m-2} \underbrace{U_{m-1} U_m} =$$
$$= \dots = \underbrace{U_m^t U_{m-1}^t \cdots U_1^t}_{Q_m^t} A_0 \underbrace{U_1 \cdots U_{m-1} U_m}_{Q_m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{A_m}_{\substack{\text{tinde la} \\ \text{matricea } diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}} = Q_m^t A_0 Q_m \Rightarrow Q_m A_m = A_0 Q_m \Rightarrow$$

$$U_m^t U_m = I_n \Downarrow Q_m^t Q_m = I_n$$

$$\Rightarrow A_0 \cdot \underbrace{\lim_{m \to \infty} (\text{coloana } j \text{ din } Q_m)} = \lambda_j \cdot \underbrace{\lim_{m\to\infty} (\text{coloana } j \text{ din } Q_m)}$$

$\underline{A_0 v_j = \lambda_j v_j} \Rightarrow v_j$ este un vector propriu pt λ_j.

Exemplu (pt. metoda rotațiilor)

Fie matricea
$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Aplicați metoda rotațiilor pentru a obține aproximări ale valorilor proprii și ale vectorilor proprii pt. A. Arătați că algoritmul se termină într-un număr finit de pași.

Avem: $A_0 = A$.

Alegem $\boxed{p=1,\ q=2}$ pt că $a_{11}^{(0)} = a_{22}^{(0)} = a \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$ (cf. (21)) $\Rightarrow U_1 = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4} & 0 \\ -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow U_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1 = U_1^t A_0 U_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix} U_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b) & \frac{\sqrt{2}}{2}(b-a) & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) & \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) & \cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}b \\ b & b & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(a-b) & 0 & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(a+b) & \sqrt{2}b \\ 0 & \cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & \underline{\underline{0}} & 0 \\ \underline{0} & a+b & \sqrt{2}b \\ 0 & \sqrt{2}b & a+b \end{pmatrix}$$

Avem doar de ales: $\boxed{p=2,\ q=3}$; $a_{pp}^{(1)} = a+b$

$a_{qq}^{(1)} = a+b \Rightarrow$

$\to \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} & +\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & -\sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\to A_2 = U_2^t A_1 U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & \sqrt{2}b \\ 0 & \sqrt{2}b & a+b \end{pmatrix} U_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)-b & b-\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)+b & b+\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(a+b)-\frac{\sqrt{2}}{2}b-\frac{\sqrt{2}}{2}b+\frac{1}{2}(a+b) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}(a+b)+\frac{\sqrt{2}}{2}b\right)2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\to A_2 = \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 \\ 0 & a+b-\sqrt{2}b & 0 \\ 0 & 0 & a+b+\sqrt{2}b \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ val proprii: $\begin{cases} \lambda_1 = a-b \\ \lambda_2 = a+b-\sqrt{2}b \\ \lambda_3 = a+b+\sqrt{2}b. \end{cases}$

iar matricea vect. proprii:

$$Q = U_1 U_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \end{array}$$

verificăm: $A v_1 = \lambda_1 v_1$

$$A v_1 = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(b-a) \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} \underbrace{(a-b)}_{\lambda_1} =$$

$$= \lambda_1 \cdot v_1$$

P2 Localizarea valorilor proprii pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (nu neapărat simetrice)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

Notam

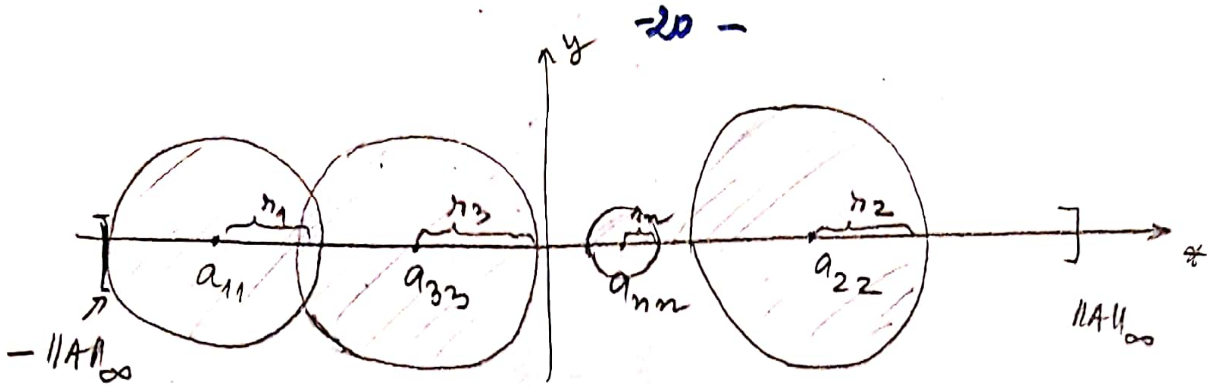
$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad , \quad R_i = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq r_i \}$$
$i = \overline{1,n}$

$$c_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} |a_{ij}| \quad ; \quad C_j = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{jj}| \leq c_j \}$$
$j = \overline{1,n}$

Au loc afirmațiile:

a) Valorile proprii ale matricei A se află în $\bigcup_{i=1}^{n} R_i$ și în $\bigcup_{j=1}^{n} C_j$.

b) Dacă există $i_0 \in \{\overline{1,n}\}$ a.î. $R_{i_0} \cap R_i = \emptyset$, $i = \overline{1,n}$, $i \neq i_0$, atunci în R_{i_0} se află o singură valoare proprie.
Analog pt. C_j: dacă $\exists\, j_0 \in \{\overline{1,n}$ a.î. $C_{j_0} \cap C_j = \emptyset$, $j = \overline{1,n}$, atunci în C_{j_0} se află o singură val. proprie



<u>Consecință</u>: Dacă A este simetrică, atunci toate valorile proprii ale lui A (despre care știm că sunt reale) se află în intervalul $(-\|A\|_\infty, \|A\|_\infty)$

<u>Temă</u>: Aplicați metoda rotațiilor pentru următoarele matrice:

a) $A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & 3\sqrt{3} \\ -2 & 8 & 2\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 11 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$

4.2 Metoda bisecției pentru determinarea valorilor proprii pentru o matrice tridiagonală simetrică

Fie
$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ c_1 & b_2 & c_2 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & b_3 & c_4 \dots 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots c_{n-2} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & c_{n-1} & b_n \end{pmatrix} = (a_{ij}) \qquad (22)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} b_i, & i = j \\ c_i, & j-i=1, \ j>i, \ i=\overline{1,n-1} \\ c_j, & i-j=1, \ i>j, \ j=\overline{1,n-1} \end{cases} \qquad (23)$$

Pt. matricea A sau pentru șirurile $b_1, \dots, b_n$ și $c_1, \dots, c_{n-1}$ se definește <u>șirul de polinoame Sturm</u>, astfel:

$$(24)\quad \begin{cases} p_0(\lambda) = 1 \\ p_1(\lambda) = b_1 - \lambda \\ p_i(\lambda) = (b_i - \lambda)\, p_{i-1}(\lambda) - c_{i-1}^2 \cdot p_{i-2}(\lambda) \end{cases}$$

Presupunem că $c_i \neq 0$, $i = \overline{2, n}$, $i = \overline{1, n}$

(P3) Șirul de polinoame (24) are proprietățile:

1) $p_j(\lambda) = \det(A_j - \lambda I_j)$, $j = \overline{1, n}$

unde $A_j = (a_{pr})_{p, r = \overline{1, j}} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & 0 \\ c_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{j-1} \\ 0 & & c_{j-1} & b_j \end{pmatrix}$

(deci, $p_n(\lambda) = \det(\underset{A}{\underset{\parallel}{A_n}} - \lambda I_n)$ este polinomul caracteristic pt A)

2) $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \underbrace{p_j(\lambda)}_{} = +\infty$, $j = \overline{1, n}$

$\det(A_j - \lambda I_j) = (-1)^j \cdot \lambda^j \longrightarrow (-1)^j (-\infty)^j = (+\infty)^j = +\infty$

3) dacă $p_j(\lambda_0) = 0$, atunci $p_{j-1}(\lambda_0) \cdot p_{j+1}(\lambda_0) < 0$, $j = \overline{1, n-1}$

4) p_j are j rădăcini reale și diferite, care $\lambda_k^{(j)}$, $k = \overline{1, j}$, separă cele $j+1$ rădăcini (reale și diferite) ale lui p_{j+1}: $\lambda_k^{(j+1)}$, $k = \overline{1, j+1}$.

<u>Exemplu</u>: $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$b_1 = 1$, $b_2 = -2$; $b_3 = 3$

$c_1 = c_2 = 1$

$p_0(\lambda) = 1$

$p_1(\lambda) = 1 - \lambda$

$p_2(\lambda) = (-2 - \lambda)\, p_1(\lambda) - 1^2 p_0(\lambda) = (-2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1$

$p_3(\lambda) = (3 - \lambda)\, p_2(\lambda) - 1^2 p_1(\lambda) = (3 - \lambda)[(-2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1] - (1 - \lambda)$

$p_1(\lambda)=0 \iff \lambda=1 \Rightarrow \lambda_1^{(1)}=1.$

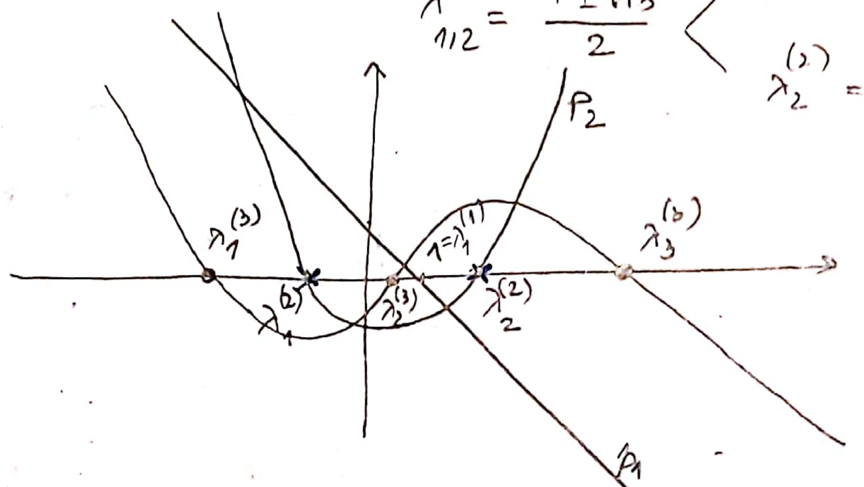
$p_2(\lambda)=0 \Rightarrow (-2-\lambda)(1-\lambda)-1=0.$

$-2+2\lambda-\lambda+\lambda^2-1=0$

$\lambda^2+\lambda-3=0$

$\Delta=1+12=13$

$\lambda_{1,2}^{(2)}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$; $\lambda_1^{(2)}=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}<\lambda_1^{(1)}=1$; $\lambda_2^{(2)}=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}>\lambda_1^{(1)}=1$



Fie $\mu\in\mathbb{R}$. Pentru $i=\overline{1,n}$ definim:

(25)
$$\begin{cases} sgn(p_i(\mu)) = \begin{cases} \text{semnul lui } p_i(\mu), & p_i(\mu)\neq 0 \\ \text{semnul lui } p_{i-1}(\mu), & p_i(\mu)=0 \\ & (\text{pt } p_{i-1}(\mu)\neq 0) \end{cases} \\ E(i,\mu) = \text{mulț semnelor pol } p_0, p_1, \dots, p_i \text{ în } \mu \\ \quad = \underbrace{\{+, sgn(p_1(\mu)), \dots, sgn(p_i(\mu))\}}_{i+1 \text{ semne}} \\ N(i,\mu) = \text{nr. schimbărilor de semn consecutive în } E(i,\mu). \\ M(i,\mu) = \text{nr. perechilor de semne egale în } E(i,\mu) \end{cases}$$

<u>OBS</u>: $N(i,\mu)+M(i,\mu)=i$, $i=\overline{1,n}$.

(P4) Cu notațiile (25) avem: $N(i,\mu)$ este egal cu nr rădăcinilor lui p_i mai mici decât μ și $M(i,\mu)$ este egal cu nr. rădăcinilor lui p_i mai mari decât μ.

Folosesc (P3) și (P4) pentru a determina intervale de lungime $< \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) în care să avem doar câte o valoare proprie λ_j, pentru pn. $j = \overline{1,n}$

Alg bisecției.

Intrare: $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^+$, A este matrice tridiagonală simetrică (dată prin $b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_{n-1}$)
$\varepsilon > 0$.

Calculăm $a = \|A\|_\infty$. (val. proprii ale lui A se află în $(-a, a)$)

$a_0 = -a$; $b_0 = a$.

pentru $i = \overline{1,n}$ execută (localizăm într-un interval de lung $< \varepsilon$ val proprie λ_i a lui A. Se obțin val proprii $\lambda_1^{(n)} < \dots < \lambda_n^{(n)}$)

execută

$m = (a_0 + b_0)/2$

calculează $N(n, m)$ → câte val. proprii ale lui A sunt mai mici decât m.

dacă $N(n, m) \geq i$ atunci

// $\lambda_i^{(n)} \in (a_0, m)$

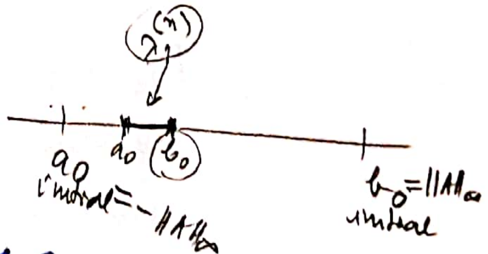
$b_0 = m$

altfel // $\lambda_i^{(n)} \in (m, b_0)$

$a_0 = m$

lungime $= b_0 - a_0$.

cât timp (lungime $> \varepsilon$)



// $\lambda_i^{(n)} \in (a_0, b_0)$ și $b_0 - a_0 < \varepsilon$.

$\lambda_i^{(n)} = (a_0 + b_0)/2$;

// trecem să calculăm $\lambda_{i+1}^{(n)}$

$a_0 = b_0$; $b_0 = a$.

scrie $\lambda_1^{(n)}, \dots, \lambda_n^{(n)}$ valorile proprii pt A.
$(\lambda_1^{(n)} < \dots < \lambda_n^{(n)})$

Temă: 1) Calculați polinoamele Sturm pt matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, n = 4.$$

2) Aplicați alg de mai sus și determinați intervale de lungime $\varepsilon = \frac{1}{2}$ sau $\varepsilon = 1$. care separă valorile proprii pt A.

3) Implementați funcții pentru:
- metodele iterative: Jacobi; Gauss-Seidel
- rez. numerică pt. ec. în $\mathbb{R}$: m. bisecției; m. coardei; m. tangentei
- rez numerică pt un sistem neliniar în $\mathbb{R}^2$, folosind met. Newton simplificată și metoda contracției.
- metoda rotațiilor pt val și vectori proprii.
- metoda bisecției (cu funcții separate pentru calcul și reprezentare polinoame Sturm și pentru calcul $N(i, \mu)$ (adică, câte valori proprii pt A_i sunt $< \mu$))