Funzioni a più Variabili e Vettoriali

Introduzione

Studieremo funzioni reali di più variabili (sempre reali) a valori scalari o vettoriali:

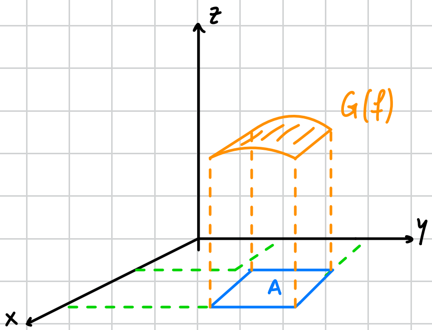
$$f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad (\text{con } n \geq 2 \text{ e } k \geq 1)$$

Se $k=1$ e $n \geq 2$ la funzione è detta funzione scalare a più variabili (dove n sarà il numero di variabili: $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$.

Se $k \geq 2$ e $n \geq 2$, f si dice funzione vettoriale a più variabili.

Graficare Funzioni a Più Variabili

Ricordiamo che nel caso di una funzione scalare di una sola variabile $f: A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow y = f(x)$ e indichiamo con $G(f)$ il grafico della funzione. Già prendendo $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \Rightarrow [z = f(x,y),$ con $x,y \in A]$ e dunque $G(f) \subseteq \mathbb{R}^3$



Se poi andiamo ad aumentare la quantità di variabili è molto più complicato graficare f.

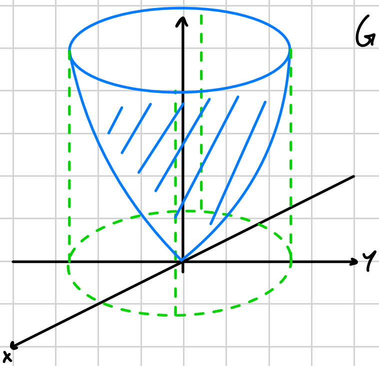
Curve di Livello di una Funzione a Più Variabili

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, fissato un parametro $t \in \mathbb{R}$ definisco curva di livello $C_t = \{(x,y) \in A : f(x,y) = t\}$.

t è un insieme di tipo curva contenuto in A.

Esempio di calcolo Curve di Livello:

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2+y^2$



$G(f)$ è un paraboloide

Definiamo $C_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = t\}$

la curva di livello $x^2+y^2=t$ è per definizione una circonferenza di centro $(0,0,0)$ e raggio $\sqrt{t}$.

Limiti e Continuità di Funzioni a Più Variabili

Ricordiamo che per funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'operazione di limite è definita:

$$“\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : |f(x) - L| < \varepsilon”$$

$$“\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to b^-} f(x) = L \quad \forall x \in (a,b) \cup (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \ x \neq x_0”$$

Nella seconda funzione definiamo $(x-\delta, x_0+\delta)$ come intorno (sferico) del punto x_0:

$$B(x_0, \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$$

Il raggio dell'intorno è definito da δ.

Per definire i raggi in dimensioni superiori definiamo la funzione distanza euclidea: $d(p,q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

avendo p e q 2 punti nel piano t.c. $p=(x_1,y_1)$ e $q=(x_2,y_2)$.

Grazie a ciò posso definire un intorno sferico di una funzione di centro $p_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ e raggio $r\geq 0$

l'insieme $B_r(p_0)=B(p_0,r):=\{p\in\mathbb{R}^2 : d(p,p_0)<r\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2\}$.

Grazie a questi strumenti possiamo dire che:

Sia $A\subseteq\mathbb{R}^2$:

(i) un punto $p_0\in\mathbb{R}^2$ si dice punto di frontiera se $B(p_0,r)\cap A\neq\emptyset$ e $B(p_0,r)\cap(\mathbb{R}^2/A)\neq 0$.

A parole sono quei punti dove si intersecano A e A^c, il bordo di A. Denotiamo la frontiera di A come ∂A.

(ii) L'insieme A è detto chiuso se ogni punto di frontiera di A appartiene ad A.

(iii) L'insieme A è detto aperto se A non contiene nessun punto della sua frontiera.

(iv) L'insieme di tutti i punti di A che non sono di frontiera sono detti parte interna di A, $\mathring{A}$

(v) L'insieme A è detto limitato se $\exists R_0>0 : A\subseteq B(0,R_0)$

(vi) Prendendo $p_0\in\mathbb{R}^2$, p_0 è detto punto di accumulazione per A se $B(p_0,r)\cap(A\setminus\{p_0\})\neq\emptyset\ \forall r>0$.

Cioè scelto un punto p_0 è di accumulazione t.c. ogni suo intorno contenga almeno 1 punto di A.

(vii) Prendendo un punto $p_0\in A$ si dice che p_0 è un punto isolato se p_0 non è un punto di accumulazione.

cioe' se $\exists r>0: B(p_0,r)\cap A=\{p_0\}$. Quindi un punto isolato e' un punto che non e' di accumulazione.

Limiti e Continuità a Più Variabili

Limiti a Più Variabili

Ovviamente come per le funzioni a singola variabile, possiamo applicare l'operazione di limite anche a funzioni a piu' variabili. Definiamo quindi il limite di funzioni di 2 variabili come:

$$\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=L\in\mathbb{R} \Longrightarrow \text{se } \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(p_0,\varepsilon)>0 \text{ t.c. } |f(x,y)-L|<\varepsilon$$

$$\exists \lim_{p\to p_0} f(p)=L \qquad \forall (x,y)\in B(p_0,\delta)\cap(A/\{p_0\})$$

Aggiungiamo a questa definizione anche il teorema di unicita' del limite, che dice che data $f:A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ e sia $p_0\in A$ punto di accumulazione di A, supponiamo che $\lim_{p\to p_0} f(p)=L$, allora L e' unico.

Calcolo dei Limiti

Definiamo il Teorema sul Calcolo dei Limiti definendo $f,g:A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $p_0\in\mathbb{R}^2$ e punto di accumulazione di A, supponiamo che $\exists\lim_{p\to p_0} f(p)=L$ e $\exists\lim_{p\to p_0} g(p)=M$, con $M e L\in\mathbb{R}$, allora:

(i) $\exists\lim_{p\to p_0}(f(p)+g(p))=L+M$.

(ii) $\exists\lim_{p\to p_0}(f(p)\cdot g(h))=L\cdot M$.

(iii) Se $g(p)\neq 0\ \forall p\in(A\setminus\{p\})$ e $M\neq 0$: $\exists\lim_{p\to p_0}\dfrac{f(p)}{g(p)}=\dfrac{L}{M}$.

(iv) Sia $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua e $h(p) = F(f(p))$, allora $\exists \lim_{p \to p_0} h(p) = F(L)$.

(v) Siano $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, supponiamo che:

$$\left.\begin{aligned} &\bullet\ f(p) \leq g(p) \leq h(p) \quad \forall p \in A \setminus \{p_0\} \\ &\bullet\ \exists \lim_{p \to p_0} f(p) = \exists \lim_{p \to p_0} h(p) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \end{aligned}\right\} \quad \text{Allora } \exists \lim_{p \to p_0} g(p) = L.$$

Introduciamo un altro elemento importante nel calcolo di limiti a due variabili, ricordiamo che data $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ e $B \subseteq A$ si chiama funzione di restrizione di f a B la funzione $f|_B : B \to \mathbb{R}$, $f|_B(x) := f(x)$ se $x \in B$. Grazie a ciò possiamo definire il Teorema del Limite Lungo le Direzioni, il quale dice che avendo una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $p_0 \in \mathbb{R}^2$ e punto di accumulazione di A, allora sono equivalenti:

(i) $\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = L$

(ii) Per ogni sottoinsieme $B \subseteq A$, per cui p_0 è un punto di accumulazione di B, $\exists \lim_{p \to p_0} f|_B(p) = L$.

Il Teorema appena enunciato viene solitamente usato per provare che il limite non esiste.

Esempio Calcolo di un Limite

Calcolo di un Limite Esistente

Calcolare (se esiste): $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

Nel calcolo di un limite la prima cosa da fare è verificare la sua esistenza.

Utilizzando la sostituzione $t = x^2+y^2$: $\lim_{t \to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$ per i limiti notevoli.

Il limite dunque esiste $\forall p \in A / \{(0,0)\}$, anche se $p_0 = (0,0)$ è punto di accumulazione di A

Calcolo di un Limite che Non Esiste

Calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Determino l'esistenza tramite la sostituzione $y=mx$ e tramite il Teorema di Unicità del Limite posso dire che il limite esiste $\iff \exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,mx)=L \quad \forall m\in\mathbb{R}$:

$$f(x,mx)=\frac{mx^2}{m^2x^2+x^2}=\frac{m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(m+1)}=\frac{m}{m+1}$$

$\lim_{x,y\to(0,0)} \frac{m}{m+1}$ non e' unico $\forall m$, ma cambia per ogni m scelto

Questa tecnica e' uno standard nel capire l'esistenza di un limite, se m nella sostituzione si elimina allora il limite esiste, se no non esiste, oppure m puo' esistere ma non deve influenzare il limite

Esempio: $\lim_{x\to 0} \frac{mx}{mx^2+1}=0 \quad \forall m\in\mathbb{R}$

Continuità di una Funzione a Più Variabili

Sia $f: A\subseteq\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ e $p_0\in A$:

(i) f e' detta continua in p_0 se p_0 e' punto isolato di A, oppure p_0 e' punto di accumulazione di A e contemporaneamente $\exists \lim_{p\to p_0} f(p)=f(p_0)$

(ii) f si dice continua su A se f e' continua $\forall p_0\in A$.

Estensione delle precedenti nozioni in $\mathbb{R}^m$ $m \geq 3$

Possiamo estendere le definizioni viste fin'ora in $\mathbb{R}^2$ ad uno spazio maggiore ($\mathbb{R}^m$, con $m \geq 3$):

(i) Distanza Euclidea: avendo $p = (x_1, \dots, x_n)$ e $q = (y_1, \dots, y_n)$ definiamo la distanza euclidea in $\mathbb{R}^m$, come
$$d(p,q) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}.$$

(ii) Intorno di un Punto: avendo $p_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ e un $r \in \mathbb{R} > 0$, definiamo come intorno l'insieme
$$B(p_0, r) := \{p \in \mathbb{R}^n : d(p, p_0) < r\} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : [(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)] \leq r^2\}.$$

(iii) Avendo la definizione di intorno in $\mathbb{R}^n$ possiamo estendere le nozioni di insieme aperto/chiuso, frontiera di un insieme, insieme limitato e punto di accumulazione/isolato, tutto per un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$.

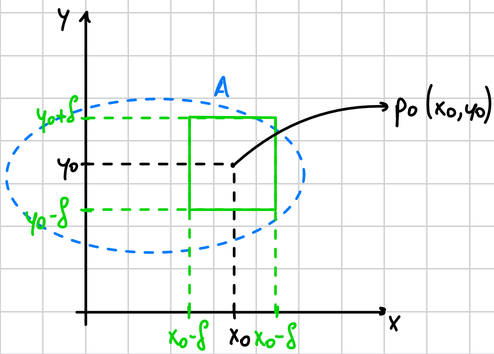
(iv) Limite: avendo $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $p_0 \in \mathbb{R}$ e punto di accumulazione di A, allora possiamo dire che $\exists \lim_{p \to p_0} f(p) = L \in \mathbb{R}$, solo se $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta = d(p_0, \varepsilon) : |f(p) - L| < \varepsilon \quad \forall p \in B(p_0, \delta) \cap (A \setminus \{p_0\})$.

(v) Continuità: avendo definito il limite la definizione cambia solo nel limite (che da $\mathbb{R}^2$ passa a $\mathbb{R}^n$).

Calcolo Differenziale per Funzioni a Più Variabili

Derivate Parziali e Gradiente

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, con A aperto e avendo $p_0 = (x_0, y_0) \in A$



Dato che A e' aperto, $\exists\, \delta_0 > 0$ t.c. $[x-\delta_0, x+\delta_0] \times [y-\delta_0, y+\delta_0] \subset A$, in particolare abbiamo 2 segmenti:

$(x_0-\delta_0) \in A \quad \forall\, x \in (x_0-\delta_0, x_0+\delta_0)$

$(x_0-\delta_0) \in A \quad \forall\, y \in (y_0-\delta_0, y_0+\delta_0)$

Pertanto possiamo definire dei rapporti incrementali:

$$(x_0-\delta_0, x_0+\delta_0) \setminus x_0 \in x \Longrightarrow \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$(y_0-\delta_0, y_0+\delta_0) \setminus y_0 \in y \Longrightarrow \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

Definiamo ora il Teorema di Derivabili per funzioni in $\mathbb{R}^2$,

(i) Definiamo una funzione f derivabile parzialmente rispetto a x nel punto $p_0(x_0,y_0)$ se:

$$\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = D_1 f(x_0,y_0) \in \mathbb{R}$$

(ii) Definiamo una funzione f derivabile parzialmente rispetto a y nel punto $p_0(x_0,y_0)$ se:

$$\exists \lim_{y\to y_0} \frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} := \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = D_2 f(x_0,y_0) \in \mathbb{R}$$

(iii) Definiamo infine che f e' derivabile parzialmente sia rispetto a x che a y nel punto $p_0(x_0,y_0)$

si chiama vettore gradiente di f in p_0 il vettore:

$$\nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p_0), \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)\right) \in \mathbb{R}^2$$

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, con A insieme aperto, supponiamo che $\exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : A \longrightarrow \mathbb{R}$, allora e' ben definito il

campo di vettori gradiente: $\nabla f : A \longrightarrow \mathbb{R} : \nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p)\right)$.

Differentemente dagli spazi bidimensionali, se una funzione non e' continua, non necessariamente non e' derivabile,

prendiamo per esempio la funzione vista in precedenza: $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, che non e' continua in $p_0(0,0)$, ma:

$$\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0$$

per $x,y \neq 0 \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = 0$ e $\exists \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) = 0$

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0$$

Piano Tangente al Grafico

Sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $p_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $z = f(x,y)$ possiamo definire un piano Π tangente alla funzione $p_0(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$. Ricordiamo l'equazione del piano: $\Pi: z = a(x-x_0) + b(y-y_0) + f(x_0,y_0)$, dove a e $b \in \mathbb{R}$ e possono essere valori qualunque.

In 2 dimensioni ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) possiamo definire una retta tangente in $p_0(x_0,y_0)$ come $y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0) = m(x-x_0) + y_0$ e $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - [m(x-x_0) + f(x_0)]}{|x-x_0|} = 0$.

Prendiamo l'ultima definizione e portiamola a più variabili:

$$\exists \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - [a(x-x_0) + b(y-y_0) + f(x_0,y_0)]}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$$

Questo limite definisce un piano tangente a $G(f)$ in p_0: $\Pi: z = (x-x_0) + b(y-y_0) + f(x_0,y_0)$. Se esiste quel limite e dunque il piano f e' detta differenziabile ne punto $p_0(x_0,y_0)$.

Differenziale

Supponiamo ora che abbiamo $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ differenziabile (vale il limite ↑) e nella dimostrazione pongo $y = y_0$: $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} = a$

Da questo limite possiamo definire che $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x} = a$ e analogamente possiamo dimostrare $\exists \dfrac{\partial f}{\partial y} = b$

Con ciò appena dimostrato possiamo dare la definizione di differenziale come l'applicazione lineare

$L:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita: $L(v_1, v_2) := \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) v_2$ con $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ che possiamo definire anche con la notazione: $L = \partial f(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0) dy$.

Quindi grazie a tutti questi strumenti possiamo definire che si dice esiste un piano tangente al grafico G_f nel punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ se f e' differenziabile nel punto $p_0(x_0,y_0) \in A$. Questo piano sara' definito dall'equazione:

$$\Pi: z = \frac{\partial f}{\partial x}(p_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(p_0)(y-y_0) + f(x_0,y_0) = \nabla f \cdot (x-x_0, y_0) + f(x_0,y_0)$$

Differenziabilita' per Spazi a $\mathbb{R}^m$ $m \geq 3$

Come per i limiti e le nozioni di base, anche il concetto di differenziabilita' e' estendibile a $m \geq 3$ variabili. Consideriamo $A \subseteq \mathbb{R}^n$, con A insieme aperto e $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ e avendo $p_0 \in A$ $p_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ e $p = (x_1, \dots, x_n)$, possiamo definire la derivata parziale i-esima di f in p_0 se: $\exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p_0 + he_i) - f(p_0)}{h} \in \mathbb{R}$, con $i = 1, 2, \dots n$ ed $e_1, e_2, \dots, e_n$ e ciò denota la base canonica di $\mathbb{R}^n$, cioè $e_i = (0, \dots, 0, 0, \underset{i\text{-esimo}}{1}, 0, 0, \dots, 0)$.

Grazie a ciò possiamo dire che $\exists \nabla f(p_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0) \right)$ (gradiente di f in p_0) $\iff \exists \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)$ $\forall i = 1, \dots, n$.

Grazie a questi strumenti possiamo ridefinire il concetto di Differenziabilita' in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 3$, dicendo che avendo $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con $n \geq 3$ e $p_0(x_0, y_0) \in A$, f e' detta differenziabile in p_0 se esiste un'applicazione lineare $L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.: $\exists \lim_{p \to p_0} \frac{f(p) - f(p_0) - L(p - p_0)}{d(p, p_0)} = 0$

L'applicazione lineare per cui il limite vale deve essere $L = df(p_0)$.

Se f è differenziabile nel punto p_0, allora:

(i) $\exists \nabla f(p_0)$

(ii) $df(p_0)(v) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(p_0)\, v_i = \nabla f(p_0)\, v$ se $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

Coordinate Polare

Cerchiamo di studiare il limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$, questo limite esiste ma non possiamo semplicemente risolverlo per sostituzione $\left(\frac{0}{0}\right)$. Per risolverlo usiamo il metodo delle coordinate polari:

Consideriamo la seguente sostituzione:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \quad \text{con } \rho > 0 \text{ e } 0 \le \theta \le 2\pi \implies \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}} \implies \frac{\rho\cos\theta\,\rho^2\text{sen}^2\theta}{\sqrt{\rho^4\cos^4\theta + \rho^4\text{sen}^4\theta}} = \frac{\rho^{\cancel{3}}}{\cancel{\rho^2}} \frac{\cos\theta\,\text{sen}^2\theta}{\sqrt{\cos^4\theta + \text{sen}^4\theta}} =$$

$$= \rho\,\frac{\cos\theta\,\text{sen}^2\theta}{\sqrt{\cos^4\theta + \text{sen}^4\theta}}$$

L'uso delle coordinate polari non ci permette di risolvere l'esercizio, ma ci aiuta nell'applicazione del Teorema del Confronto:

$$0 \le \left|\frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}}\right| \le \left|\rho\,\frac{\overbrace{\cos\theta\,\text{sen}^2\theta}^{=1}}{\underbrace{\sqrt{\cos^4\theta+\text{sen}^4\theta}}_{\text{sempre} \ge 1/2\ \forall\theta\in[0,2\pi]}}\right| \implies 0 \le \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}} \le \sqrt{2}\,\underbrace{\rho}_{\rho=\sqrt{x^2+y^2} \implies \text{definizione}} \implies 0 \le \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}} \le \sqrt{2}\,(x^2+y^2) \implies$$

$\Rightarrow$ applichiamo sugli estremi il limite iniziale $\Rightarrow \lim_{x,y \to 0,0} 0 \leq \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}} \leq \lim_{x,y \to 0,0} \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow 0 \leq \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}} \leq 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^4+y^4}} = 0$

#