Discrétisation Spatiale par Différences Finies

Équation de Transport 2D au Voisinage d'un Point de Stagnation

Équation:	ρ ∂φ/∂t + ρ U·∇φ = Γ ∇<super>2</super>φ
Champ de vitesse:	u = x, v = -y
Domaine:	[0, 1] × [0, 1]
Densité (ρ):	1.2 kg/m<super>3</super>
Diffusion (Γ):	0.1 m<super>2</super>/s
Résolution:	41 × 41 points

1. Introduction

Ce document présente la discrétisation spatiale par différences finies de l'équation de transport 2D pour un écoulement au voisinage d'un point de stagnation. La discrétisation spatiale est la première étape avant l'intégration temporelle qui permettra de calculer le flux diffusif à la paroi ouest au temps t = 0.12 secondes.

2. Équations Gouvernantes

Équation de transport:
$\rho\, \partial\phi/\partial t + \rho\, U\cdot\nabla\phi = \Gamma\, \nabla^2\phi$

où:
- $U\cdot\nabla\phi = u\, \partial\phi/\partial x + v\, \partial\phi/\partial y$ (terme de convection)
- $\nabla^2\phi = \partial^2\phi/\partial x^2 + \partial^2\phi/\partial y^2$ (terme de diffusion)

Champ de vitesse au point de stagnation:
- u = x (vitesse en x proportionnelle à x)
- v = -y (vitesse en y proportionnelle à -y)

3. Méthode de Discrétisation

3.1 Grille Uniforme
- Domaine: $[0, L_x] \times [0, L_y]$ avec $L_x = L_y = 1.0$ m
- Nombre de points: $n_x \times n_y = 41 \times 41$
- Pas d'espace: $\Delta x = L_x/(n_x-1) = 0.025$ m
- Pas d'espace: $\Delta y = L_y/(n_y-1) = 0.025$ m
- Points intérieurs: $(n_x-2) \times (n_y-2) = 1521$

3.2 Terme de Convection (Schéma Upwind)
Le terme de convection $\rho\, U\cdot\nabla\phi$ est discrétisé avec un schéma décentré amont qui assure la stabilité numérique:

- Si u > 0: $\partial\phi/\partial x \approx (\phi_{i,j} - \phi_{i,j-1}) / \Delta x$
- Si u < 0: $\partial\phi/\partial x \approx (\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}) / \Delta x$
- Si v > 0: $\partial\phi/\partial y \approx (\phi_{i,j} - \phi_{i-1,j}) / \Delta y$
- Si v < 0: $\partial\phi/\partial y \approx (\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}) / \Delta y$

3.3 Terme de Diffusion (Schéma Centré)
Le terme de diffusion $\Gamma\, \nabla^2\phi$ utilise des différences finies centrées d'ordre 2:

- $\partial^2\phi/\partial x^2 \approx (\phi_{i,j+1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j-1}) / \Delta x^2$
- $\partial^2\phi/\partial y^2 \approx (\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}) / \Delta y^2$

4. Formulation Matricielle

La discrétisation spatiale conduit à un système matriciel de la forme:

$$\mathbf{L} \cdot \phi = -\mathbf{b}$$

où:
- L est la matrice de l'opérateur spatial (1521 × 1521)
- ϕ est le vecteur des valeurs de ϕ aux points intérieurs (1521 éléments)
- b est le vecteur source dû aux conditions aux limites

Pour l'intégration temporelle:
$$d\phi/dt = -1/\rho * (\mathbf{L} \cdot \phi + \mathbf{b})$$

Structure de la matrice L:
- Matrice sparse pentadiagonale par blocs
- Éléments non-nuls: 7449
- Densité: 0.32%
- Chaque ligne a au maximum 5 coefficients non nuls

5. Conditions aux Limites

Conditions de Dirichlet appliquées sur toutes les frontières:

- **Frontière ouest ($x = 0$):** $\phi = 1.0$
- **Frontière est ($x = L_x$):** $\phi = 0.0$
- **Frontière sud ($y = 0$):** $\phi = 0.0$
- **Frontière nord ($y = L_y$):** $\phi = 0.0$

Condition initiale:
$\phi(x, y, t=0) = 0$ dans tout le domaine intérieur

6. Calcul du Flux Diffusif

Le flux diffusif à travers la paroi ouest est calculé par:

$$\text{Flux} = -\Gamma\, \partial\phi/\partial x|_{x=0}$$

Utilisation d'une différence finie décentrée avant d'ordre 2:

$$\partial\phi/\partial x|_{x=0} \approx (-3\phi_0 + 4\phi_1 - \phi_2) / (2\Delta x)$$

Résultats de la solution stationnaire (test):
- Flux total: 0.590851
- Flux moyen par unité de longueur: 0.590851
- Flux maximum: 3.018101 à y = 0.975
- Flux minimum: ≈0 à y = 0

7. Nombres Adimensionnels

7.1 Nombre de Péclet
Le nombre de Péclet compare convection et diffusion:

$Pe = \rho\ u\ \Delta x / \Gamma$

Pour notre problème:
• $Pe_x = 1.2 \times 1.0 \times 0.025 / 0.1 = 0.3$
• $Pe_y = 1.2 \times 1.0 \times 0.025 / 0.1 = 0.3$

Interprétation: $Pe < 2 \rightarrow$ Les deux schémas (upwind et centré) sont stables. Le schéma centré donnerait une meilleure précision, mais le schéma upwind a été utilisé pour sa robustesse.

7.2 Critère CFL (pour l'intégration temporelle)
Pour assurer la stabilité de l'intégration temporelle avec Euler explicite:

• Convection: $\Delta t < 0.0125$ s
• Diffusion: $\Delta t < 0.001875$ s
• **Recommandé: $\Delta t < 0.001875$ s**

8. Fichiers Fournis

8.1 Code Source
• **transport_differences_finies.py:** Code principal avec la classe TransportDifferencesFinies2D
• **analyse_schemas.py:** Comparaison des schémas et analyse de convergence
• **exemple_utilisation.py:** Exemple simple d'utilisation

8.2 Documentation
• **README.md:** Documentation complète du code
• **discretisation_spatiale_resume.pdf:** Ce document

8.3 Visualisations
• **matrix_structure.png:** Structure de la matrice sparse
• **solution_stationnaire.png:** Solution ϕ et champ de vitesse
• **flux_distribution.png:** Distribution du flux à la paroi ouest

9. Utilisation du Code

Code Python:

```
from transport_differences_finies import TransportDifferencesFinies2D

# Création du problème
problem = TransportDifferencesFinies2D(
    Lx=1.0, Ly=1.0, nx=41, ny=41,
    rho=1.2, Gamma=0.1
```

```
)

# Conditions aux limites
problem.set_boundary_conditions(
    west=1.0, east=0.0, south=0.0, north=0.0
)

# Construction de l'opérateur spatial
L, b = problem.build_spatial_operator(scheme='upwind')

# Pour l'intégration temporelle:
# dϕ/dt = -1/ρ * (L·ϕ + b)
```

10. Prochaines Étapes

La discrétisation spatiale est maintenant complète. Pour résoudre le problème instationnaire et calculer le flux au temps $t = 0.12$ s, il faut:

1. Choisir une méthode d'intégration temporelle
- Euler explicite (simple, mais Δt limité)
- Runge-Kutta 4 (RK4) - bon compromis précision/stabilité
- Méthodes implicites (plus stables, mais plus coûteuses)

2. Implémenter la boucle temporelle
- Condition initiale: $\phi = 0$ partout sauf aux frontières
- Intégrer de $t = 0$ à $t = 0.12$ s
- Respecter le critère CFL: $\Delta t < 0.001875$ s

3. Calculer le flux final
- À $t = 0.12$ s, calculer le flux diffusif à la paroi ouest
- Comparer avec la solution stationnaire

4. Analyser les résultats
- Évolution temporelle de ϕ
- Évolution du flux en fonction du temps
- Convergence vers l'état stationnaire (si applicable)

11. Conclusion

La discrétisation spatiale par différences finies a été implémentée avec succès pour l'équation de transport 2D au voisinage d'un point de stagnation. Les opérateurs spatiaux (matrice L et vecteur b) sont prêts pour l'intégration temporelle.

Points clés:
- Schéma upwind stable pour la convection
- Différences centrées d'ordre 2 pour la diffusion
- Matrice sparse efficace (0.32% de densité)
- Conditions aux limites de Dirichlet
- Flux diffusif calculable avec précision d'ordre 2

Le code est modulaire, bien documenté et prêt pour l'extension à l'intégration temporelle.