

Extremale Gitter mit großen Automorphismen

MASTERARBEIT

von Simon Berger

Vorgelegt am Lehrstuhl D für Mathematik der RWTH-Aachen University

bei Prof. Dr. Gabriele Nebe (1. Prüferin)
und Prof. Dr. Markus Kirschmer (2. Prüfer)

16. August 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Grundbegriffe	4
2.1	Quadratische Vektorräume	4
2.2	Modulare Gitter	7
3	Ideal-Gitter	12
3.1	Definitionen	12
3.2	Strategie zur Klassifikation	15
3.3	Die Klassengruppe	19
3.4	Total-positive Erzeuger	20
3.5	Finaler Algorithmus und Ergebnisse	26
4	Sub-Ideal-Gitter	34
4.1	Einführung	34
4.2	Automorphismen von Primzahlordnung	35
5	Literaturverzeichnis	38

1 Einleitung

2 Grundbegriffe

§ 2.1 Quadratische Vektorräume

Wir wiederholen zunächst einige wichtige Begriffe aus der Gittertheorie, welche wir in der Arbeit häufig benötigen werden. Zunächst führen wir das Konzept eines quadratischen Vektorraumes ein. Die nun angeführten Definitionen sind [Kne02, Def. (2.1)] entnommen.

(2.1.1) Definition

- (i) Sei A ein Ring und E ein A -Modul. Für eine symmetrische Bilinearform $b : E \times E \rightarrow A$ heißt das Paar (E, b) ein *bilinearer A -Modul* (bzw. falls A Körper ein *bilinearer A -Vektorraum*).
- (ii) Eine Abbildung $q : E \rightarrow A$ mit den Eigenschaften

$$q(ax) = a^2q(x) \quad \text{für } a \in A, x \in E$$

$$q(x + y) = q(x) + q(y) + b_q(x, y)$$

mit einer symmetrischen Bilinearform b_q heißt *quadratische Form*. Ein solches Paar (E, q) heißt *quadratischer A -Modul* (bzw. falls A Körper ein *quadratischer A -Vektorraum*).

- (iii) Eine *isometrische Abbildung* (oder kurz *Isometrie*) zwischen zwei bilinearen Moduln (E, b) und (E', b') ist ein Modulisomorphismus $f : E \rightarrow E'$ mit $b(x, y) = b'(f(x), f(y))$.
- (iv) Analog ist eine Isometrie zwischen zwei quadratischen Moduln (E, q) und (E', q') ist ein Modulisomorphismus $f : E \rightarrow E'$ mit $q(x) = q'(f(x))$ für alle $x \in E$.

(2.1.2) Bemerkung

Auf einem quadratischen A -Modul (E, q) ist $b_q : E \times E \rightarrow A, (x, y) \mapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ eine symmetrische Bilinearform. Andersherum erhält man aus jeder symmetrischen Bilinearform b auf E eine quadratische Form $q_b : E \rightarrow A, x \mapsto b(x, x)$. Es ist dabei $b_{q_b} = 2b$ und $q_{b_q} = 2q$. Ist $2 \in A^*$, so kann man daher stattdessen $q_b : E \rightarrow A, x \mapsto \frac{1}{2}b(x, x)$ wählen, womit die Konzepte der quadratischen Formen und der symmetrischen Bilinearformen auf E vertauschbar sind.

Nun folgen Definitionen zum Gitterbegriff, zu finden in [Kne02, Def. (14.1), (14.2)].

(2.1.3) Definition

- (i) Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum mit Basis (b_1, \dots, b_n) . Ein R -Gitter in V ist ein R -Untermodul L von V , zu dem Elemente $a, b \in K^*$ existieren mit $a \sum_{i=1}^n Rb_i \subseteq L \subseteq b \sum_{i=1}^n Rb_i$.
- (ii) Sei b eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V und L ein Gitter in V . Dann ist auch $L^\# := \{x \in V \mid b(x, y) \in R \text{ für alle } y \in L\}$ ein R -Gitter und heißt *das zu L duale Gitter* (bzgl. b).
- (iii) Für $m \in \mathbb{N}$ heißt das Gitter $L^{\#,m} := \frac{1}{m}L \cap L^\#$ *partielles Dualgitter* von L .

(iv) Sei (V, b) ein bilinearer K -Vektorraum und L ein Gitter in V . Die Gruppe $\text{Aut}(L) := \{\sigma : V \rightarrow V \mid \sigma \text{ ist Isometrie und } \sigma(L) = L\}$ heißt die *Automorphismengruppe* von L .

(2.1.4) Bemerkung

Falls R ein Hauptidealbereich ist, vereinfacht sich die Definition erheblich, da Teilmoduln von endlich erzeugten freien Moduln über Hauptidealbereichen wieder frei sind. Ein R -Gitter ist per Definition zwischen zwei freien Moduln eingespannt, also sind die R -Gitter in diesem Fall genau die freien R -Moduln von Rang n .

Insbesondere interessieren uns \mathbb{Z} -Gitter in \mathbb{R}^n . Für eben solche folgen nun ein paar weitere Definitionen, abgeleitet aus [Kne02, Def. (1.7), (1.13), (14.7), (26.1)].

(2.1.5) Definition

Sei L ein \mathbb{Z} -Gitter mit Basis $B = (e_1, \dots, e_n)$ in (\mathbb{R}^n, b) , für eine symmetrische Bilinearform b .

- (i) Die Matrix $G := \text{Gram}(B) = (b(e_i, e_j))_{i,j=1}^n$ heißt *Gram-Matrix* von L , $\text{Det}(L) := \text{Det}(G)$ heißt die *Determinante* von L .
- (ii) Das Gitter L heißt *ganz*, falls $b(L, L) \subseteq \mathbb{Z}$ gilt.
- (iii) Das Gitter L heißt *gerade*, falls $b(x, x) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $x \in L$ gilt.
- (iv) Die *Stufe* von L ist die kleinste Zahl $\ell \in \mathbb{N}$, sodass $\sqrt{\ell}L^\#$ ein gerades Gitter ist.
- (v) Das *Minimum* von L ist definiert als $\text{Min}(L) := \min\{b(x, x) \mid 0 \neq x \in L\}$.

(2.1.6) Bemerkung

- (i) Nach [Kne02, Satz (14.7)] gilt $\text{Det}(L) = |L^\# / L|$. Insbesondere ist die Determinante für \mathbb{Z} -Gitter unabhängig von der Wahl der Basis. Allgemeiner ist die Determinante von R -Gittern modulo $(R^*)^2$ eindeutig bestimmt [Kne02, (1.13)].
- (ii) Direkt aus der Definition des dualen Gitters folgt: L ist ganz genau dann, wenn $L \subseteq L^\#$.
- (iii) Ein gerades Gitter L ist notwendigerweise ganz, denn seien $x, y \in L$, dann ist
$$b(x, y) = \frac{b(x + y, x + y) - b(x, x) - b(y, y)}{2} \in \mathbb{Z}.$$
- (iv) Ist $B = (e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von L , dann ist $B^* := (e_1^*, \dots, e_n^*)$, wobei $b(e_i, e_j^*) = \delta_{ij}$, eine Basis von $L^\#$. Es gilt $\text{Gram}(B^*) = \text{Gram}(B)^{-1}$ [Kne02, (1.14)].

Da wir uns im Zuge dieser Arbeit in der Regel mit geraden Gittern quadratfreier Stufe beschäftigen, ist das folgende Lemma aus [Jü15, Lemma 1.1.1] von großer Bedeutung.

(2.1.7) Lemma

Sei L ein gerades Gitter der Stufe ℓ , wobei ℓ quadratfrei. Dann ist ℓ gleichzeitig die kleinste natürliche Zahl a , sodass $aL^\# \subseteq L$ (also der Exponent der Diskriminantengruppe $L^\# / L$).

§ 2.2 Modulare Gitter

Wir kommen nun zum ursprünglich von Quebbemann eingeführten Konzept *modularer Gitter* [Que95]. Die hier verwendete Definition ist in [BFS05] zu finden.

(2.2.1) Definition

Sei L ein gerades Gitter und $\ell \in \mathbb{N}$.

- (i) L heißt ℓ -modular, falls $L \cong \sqrt{\ell}L^\#$.
- (ii) L heißt *stark* ℓ -modular, falls $L \cong \sqrt{m}L^{\#,m}$ für alle $m|l$, sodass $\text{ggT}(m, \frac{\ell}{m}) = 1$.

(2.2.2) Lemma

Ist L ein gerades Gitter der Dimension n .

- (i) Ist L ℓ -modular, dann ist $\text{Det}(L) = \ell^{\frac{n}{2}}$. Insbesondere muss daher n gerade sein.
- (ii) Ist L ℓ -modular und ℓ quadratfrei, dann hat L die Stufe ℓ .
- (iii) Ist L stark ℓ -modular, von Stufe ℓ und ℓ quadratfrei, dann ist L auch ℓ -modular.

Beweis:

- (i) Nach Bem. (2.1.6) ist $\text{Det}(L^\#) = \text{Det}(L)^{-1}$. Somit

$$\text{Det}(L) = \text{Det}(\sqrt{\ell}L^\#) = \ell^n \text{Det}(L^\#) = \frac{\ell^n}{\text{Det}(L)}.$$

Also folgt die Behauptung.

- (ii) Sei a die Stufe von L , dann ist $\sqrt{a}L^\#$ gerade und hat insbesondere eine ganzzahlige Determinante. Nach (i) erhalten wir $\text{Det}(\sqrt{a}L^\#) = \left(\frac{a^2}{\ell}\right)^{\frac{n}{2}} \stackrel{!}{\in} \mathbb{Z}$. Da ℓ quadratfrei sieht man also $\ell|a$. Andersherum ist $L \cong \sqrt{\ell}L^\#$, also selbstverständlich auch $\sqrt{\ell}L^\#$ gerade, somit $a|\ell$.

ℓ	1	2	3	5	6	7	11	14	15	23
k_1	24	16	12	8	8	6	4	4	4	2

Tabelle 2.1: k_1 Werte nach ℓ .

(iii) L hat quadratfreie Stufe ℓ , also ist $\ell L^\# \subseteq L$ nach Lemma (2.1.7). Wir erhalten

$$L \cong \sqrt{\ell} L^{\#, \ell} = \sqrt{\ell} \left(\frac{1}{\ell} L \cap L^\# \right) = \sqrt{\ell} L^\#. \quad \square$$

Quebbemann zeigte in [Que95], dass die Theta-Reihen eines modularen Gitters Modulform einer bestimmten Gruppe ist. Außerdem hat die Algebra der Modulformen eine besonders einfache Gestalt, wenn die Summe der Teiler von ℓ selbst ein Teiler von 24 ist. Konkret ist diese Eigenschaft für $\ell \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$ erfüllt. In der Literatur sind diese Stufen also besonders interessant. Es lässt sich zeigen (vgl. z.B. [Jü15, 1.2.2]), dass der Raum der Modulformen der erwähnten Gruppe in diesen Fällen ein eindeutiges Element θ der Form $1 + O(q^d)$ mit möglichst großem d und ganzzahligen Koeffizienten hat. Wir wollen den Begriff eines *extremalen Gitters* definieren als ein Gitter, welches ein möglichst großes Minimum besitzt, also ein Gitter mit Thetareihe θ . In unseren Spezialfällen gilt $d = 1 + \lfloor \frac{n}{k_1} \rfloor$, wobei k_1 Tabelle (2.1) zu entnehmen ist.

Wir können also definieren:

(2.2.3) Definition

Sei L ein ℓ -modulares Gitter der Dimension n und $\ell \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$. Erfüllt L die Schranke

$$\text{Min}(L) \geq 2 \left(1 + \left\lfloor \frac{n}{k_1} \right\rfloor \right)$$

wobei k_1 gewählt ist wie in Tabelle (2.1), so nennen wir L ein *extremales Gitter*.

Die Dimensionen, welche jeweils echt von k_1 geteilt werden bezeichnet man häufig auch als *Sprungdimensionen*, da in diesen Fällen das Minimum im Vergleich zur nächst kleineren Dimension um 2 nach oben "springt".

Da die Determinante für ℓ -modulare Gitter in fester Dimension nach Lemma (2.2.2) eindeutig bestimmt ist, liefern modulare Gitter mit möglichst großem Minimum die dichtesten Kugelpackungen. In diesem Sinne ist die Klassifikation extremer Gitter besonders interessant. Definiert man für ein n -dimensionales Gitter L den Wert

$$\gamma(L) := \frac{\text{Min}(L)}{\text{Det}(L)^{\frac{1}{n}}} \quad (2.1)$$

(die *Hermite-Konstante*), so bedeutet eine größerer Wert für γ ein dichteres Gitter (vgl. [CS93, (1.5)]). Vergleicht man die hypothetischen Hermite-Konstanten extremer Gitter (deren Existenz bisher nach [Jü15] noch nicht ausgeschlossen wurde) mit denen der dichtesten bisher bekannten Gitter (zu finden in [NS]), so fällt auf, dass die Entdeckung extremer Gitter in den folgenden Stufen und Dimensionen ≤ 48 jeweils neue dichteste Kugelpackungen liefern würden:

- 3-modular und 36-dimensional
- 3-modular und 38-dimensional
- 5-modular und 32-dimensional
- 5-modular und 36-dimensional
- 5-modular und 40-dimensional
- 5-modular und 44-dimensional
- 5-modular und 48-dimensional
- 6-modular und 40-dimensional

- 7-modular und 32-dimensional
- 7-modular und 34-dimensional
- 7-modular und 38-dimensional
- 7-modular und 40-dimensional
- 7-modular und 46-dimensional
- 11-modular und 18-dimensional
- 11-modular und 22-dimensional
- 14-modular und 28-dimensional
- 15-modular und 28-dimensional

Wie man sieht, ist die Erforschung extremaler modularer Gitter also von großem Interesse für die Gittertheorie. Im nächsten Kapitel beschreiben wir nun eine Vorgehensweise, modulare Gitter zu klassifizieren, welche zusätzlich eine Struktur als gebrochenes Ideal eines Zahlkörpers aufweisen, sogenannte *Ideal-Gitter*.

3 Ideal-Gitter

§ 3.1 Definitionen

Wir geben nun die Definition eines Ideal-Gitter abgeleitet aus [BFS05] an.

(3.1.1) Definition

- (i) Ein (*algebraischer*) *Zahlkörper* ist eine endliche Erweiterung des Körpers \mathbb{Q} .
- (ii) Der *Ring der ganzen Zahlen* eines Zahlkörpers K ist der Ring

$$\mathbb{Z}_K := \{a \in K \mid \mu_{a,\mathbb{Q}}(X) \in \mathbb{Z}[X]\}.$$

- (iii) Die *Norm* eines Ideals \mathcal{I} von \mathbb{Z}_K ist definiert als

$$\mathcal{N}(\mathcal{I}) := |\mathbb{Z}_K / \mathcal{I}|.$$

- (iv) Ein Zahlkörper K heißt *CM-Körper*, falls K total-imaginär ist und ein total-reeller Teilkörper $K^+ \leq K$ existiert mit $[K : K^+] = 2$.

- (v) Sei K ein CM-Körper und \mathbb{Z}_K der Ring der ganzen Zahlen in K . Ein *Ideal-Gitter* ist ein Gitter (\mathcal{I}, b) , sodass \mathcal{I} ein gebrochenes \mathbb{Z}_K -Ideal ist und $b : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische positiv-definite Bilinearform mit $b(\lambda x, y) = b(x, \bar{\lambda}y)$ für $x, y \in \mathcal{I}$ und $\lambda \in \mathbb{Z}_K$. Die Abbildung $\bar{}$ bezeichnet dabei die herkömmliche komplexe Konjugation.
- (vi) Ein Element $\alpha \in K^+$ heißt *total-positiv*, wenn $\iota(\alpha) > 0$ für alle Einbettungen $\iota : K^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$. Wir schreiben dann auch $\alpha \gg 0$. Die Menge aller total-positiven Elemente in K^+ wird mit $K_{\gg 0}^+$ bezeichnet.

Bis auf weiteres sei im Folgenden stets K ein CM-Körper, \mathbb{Z}_K der Ring der ganzen Zahlen in K und K^+ der maximale total-reelle Teilkörper von K .

(3.1.2) Bemerkung

Die Eigenschaften der Bilinearform in der obigen Definition sind nach [BFS05] äquivalent dazu, dass ein total-positives Element $\alpha \in K^+$ existiert mit $b(x, y) = \text{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha x \bar{y})$. Wir können Ideal-Gitter daher auch durch die Notation (\mathcal{I}, α) beschreiben.

Ein Ideal-Gitter \mathcal{I} kann immer auch als \mathbb{Z} -Gitter betrachtet werden, indem man \mathbb{Z}_K -Erzeuger von \mathcal{I} und eine \mathbb{Z} -Basis von \mathbb{Z}_K zu \mathbb{Z} -Erzeugern von \mathcal{I} kombiniert. Im Folgenden bezeichnen wir daher \mathcal{I} als gerade, ganz, modular, etc., falls \mathcal{I} als \mathbb{Z} -Gitter diese Eigenschaften erfüllt und $\mathcal{I}^\#$ als das Dualgitter von \mathcal{I} als \mathbb{Z} -Gitter.

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit Ideal-Gittern über zyklotomischen Zahlkörpern, also Körpern der Form $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ für primitive m -te Einheitswurzeln ζ_m . Solche Körper sind CM-Körper mit maximalem total-reellem Teilkörper $K^+ = \mathbb{Q}(\zeta_m + \bar{\zeta}_m)$. Wir erhalten Körper dieser Form, indem wir Automorphismen von \mathbb{Z} -Gittern betrachten, die wie primitive Einheitswurzeln operieren. Diese Aussagen wollen wir nun ein wenig präzisieren. Dazu eine kurze Definition:

(3.1.3) Definition

Sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$.

1. Ein Element $\zeta \in K$ heißt primitive m -te Einheitswurzel, falls $|\langle \zeta \rangle| = m$ ist.
2. Gilt $\text{char}(K) \nmid m$ und sind ζ_1, \dots, ζ_n die primitiven m -ten Einheitswurzeln in einem Zerfällungskörper von $X^m - 1$, dann heißt das Polynom

$$\Phi_m(X) := \prod_{i=1}^n (X - \zeta_i)$$

das m -te Kreisteilungspolynom.

Einige wichtige bekannte Fakten zu Kreisteilungspolynomen (z.B. zu finden in [Mol11, Kap. 1]), sind die folgenden:

(3.1.4) Satz

- (i) Gilt $\text{char}(K) \nmid m$, so enthält der Zerfällungskörper von $X^m - 1$ genau $\varphi(m)$ primitive m -te Einheitswurzeln. Dabei ist $\varphi(m) = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*|$ die *Eulersche φ -Funktion*.
- (ii) Ist $\text{char}(K) = 0$, dann ist $\Phi_m \in \mathbb{Z}[X]$ und $X^m - 1 = \prod_{d|m} \Phi_d$.
- (iii) Speziell für $K = \mathbb{Q}$ gilt $[\mathbb{Q}(\zeta_m) : \mathbb{Q}] = \varphi(m)$ und $\Phi(m) \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel.
- (iv) Gilt $\text{char}(K) \nmid m$, so ist $K(\zeta_m)/K$ eine Galoiserweiterung.

Wir sehen also, dass ζ_m genau dann eine primitive m -te Einheitswurzel ist, wenn sie

das Minimalpolynom Φ_m hat. Wir können \mathbb{Z} -Gitter somit auf die folgende Weise als Ideal-Gitter auffassen (vgl. [Neb13, Abschnitt (5.2)]):

(3.1.5) Lemma

Sei L ein \mathbb{Z} -Gitter in einem n -dimensionalen bilinearen Vektorraum (V, b) und $\sigma \in \text{Aut}(L)$ mit $\mu_\sigma = \Phi_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(m) = n$. Dann ist L isomorph zu einem Ideal-Gitter in $\mathbb{Q}(\zeta_m)$.

Beweis:

Durch die Operation von σ wird $\mathbb{Q}L$ mittels $\zeta_m \cdot x := \sigma(x)$ für $x \in \mathbb{Q}L$ zu einem ein-dimensionalen $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ -Vektorraum und L zu einem ein $\mathbb{Z}[\zeta_m]$ -Modul. Wegen $\mathbb{Z}[\zeta_m] = \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}[\zeta_m]}$ ist L also ein gebrochenes Ideal in $\mathbb{Q}(\zeta_m)$.

Da σ ein Automorphismus ist, ist die Bilinearform $b : L \times L \rightarrow \mathbb{Q}$ des Vektorraums ζ_m -invariant. Sei nun $\lambda \in \mathbb{Z}[\zeta_m]$ beliebig. Wir können $\lambda = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \zeta_m^i$ für Koeffizienten $a_i \in \mathbb{Z}$ schreiben und sehen

$$b(\lambda x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b(\zeta_m^i x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b(x, \zeta_m^{-i} y) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b(x, \overline{\zeta_m^i} y) = b(x, \overline{\lambda} y),$$

womit die Eigenschaften eines Ideal-Gitters erfüllt sind. \square

Mittels der Klassifikation der Ideal-Gitter über $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ erhalten wir also zugleich alle \mathbb{Z} -Gitter mit Minimalpolynom Φ_m . Wie diese Klassifikation durchgeführt werden kann, erläutern wir in den nächsten Abschnitten.

§ 3.2 Strategie zur Klassifikation

Die in den nächsten Abschnitten beschriebenen Aussagen und Vorgehensweisen zur Klassifikation von Ideal-Gittern sind an [Jü15, Abschnitt (3.2)] und [Neb13, Abschnitt (5.2)] angelehnt.

(3.2.1) Definition

Das \mathbb{Z}_K -ideal

$$\Delta := \{x \in K \mid \text{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(x\bar{y}) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } y \in \mathbb{Z}_K\}$$

bezeichnet die *inverse Different* von \mathbb{Z}_K .

Wir können nun das Dual eines Idealgitters mithilfe der inversen Different ausdrücken.

(3.2.2) Lemma

Sei (\mathcal{I}, α) ein Ideal-Gitter. Dann ist $\mathcal{I}^\# = \bar{\mathcal{I}}^{-1} \Delta \alpha^{-1}$ das Dualgitter von \mathcal{I} als \mathbb{Z} -Gitter.

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\# &= \{x \in K \mid b(x, \mathcal{I}) \subseteq \mathbb{Z}\} \\ &= \{x \in K \mid \text{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha x \bar{\mathcal{I}}) \subseteq \mathbb{Z}\} \\ &= \alpha^{-1} \{x \in K \mid \text{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(x \bar{\mathcal{I}}) \subseteq \mathbb{Z}\} \\ &= \alpha^{-1} \bar{\mathcal{I}}^{-1} \{x \in K \mid \text{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(x \overline{\mathbb{Z}_K}) \subseteq \mathbb{Z}\} \\ &= \bar{\mathcal{I}}^{-1} \Delta \alpha^{-1}. \end{aligned}$$

□

Mit Blick auf modulare Gitter kann man damit die nächste Folgerung ziehen:

(3.2.3) Korollar

Sei ℓ quadratfrei und (\mathcal{I}, α) ein ganzes Ideal-Gitter der Stufe ℓ . Die Menge $\mathcal{B} := \alpha \mathcal{I} \bar{\mathcal{I}} \Delta^{-1}$ ist ein \mathbb{Z}_K -Ideal mit $\ell \mathbb{Z}_K \subseteq \mathcal{B}$ und Norm $\mathcal{N}(\mathcal{B}) = \det(\mathcal{I})$.

Beweis:

Da ℓ quadratfrei ist, gilt $\ell \mathcal{I}^\# \subseteq \mathcal{I}$ nach Lemma (2.1.7). Mit Lemma (3.2.2) bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \ell \mathcal{I}^\# &\subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^\# \\ \Leftrightarrow \ell \bar{\mathcal{I}}^{-1} \Delta \alpha^{-1} &\subseteq \mathcal{I} \subseteq \bar{\mathcal{I}}^{-1} \Delta \alpha^{-1} \\ \Leftrightarrow \ell \mathbb{Z}_K &\subseteq \alpha \mathcal{I} \bar{\mathcal{I}} \Delta^{-1} \subseteq \mathbb{Z}_K. \end{aligned}$$

Für die Norm gilt

$$\det(\mathcal{I}) = |\mathcal{I}^\# / \mathcal{I}| = |\mathbb{Z}_K / \left(\mathcal{I} \left(\mathcal{I}^\# \right)^{-1} \right)| = |\mathbb{Z}_K / \mathcal{B}| = \mathcal{N}(\mathcal{B}). \quad \square$$

Da es jeweils nur endlich viele \mathbb{Z}_K -Ideale mit bestimmter Norm gibt, existieren bei der Konstruktion von Idealgittern mit fester Determinante nur endlich viele Möglichkeiten für \mathcal{B} . Mithilfe der Primidealzerlegung lässt sich ein rekursiver Algorithmus (Algorithmus (1)) konstruieren, welcher alle Teiler eines Ideals \mathcal{J} mit bestimmter Norm n berechnen kann.

Konkret wird unsere Strategie im groben daraus bestehen, alle (relevanten) Möglichkeiten für \mathcal{I} und \mathcal{B} durchzugehen und zu testen, für welche davon das Ideal $(\mathcal{I} \bar{\mathcal{I}})^{-1} \Delta \mathcal{B}$ ein Hauptideal mit total-positivem Erzeuger $\alpha \in K^+$ ist. Dazu machen wir zunächst einige Einschränkungen, um den Suchraum zu verkleinern.

Algorithmus 1 Berechnung aller Teiler mit fester Norm

```
1: Eingabe:  $\mathbb{Z}_K$ -Ideal  $\mathcal{J}$ , Norm  $n$ .
2: Ausgabe: Liste aller Teiler von  $\mathcal{J}$  mit Norm  $n$ .
3:
4: if  $n = 1$  then return  $[\mathbb{Z}_K]$ 
5: if  $n \nmid \mathcal{N}(\mathcal{J})$  then return  $[\ ]$ 
6: if  $\mathcal{N}(\mathcal{J}) = n$  then return  $[\mathcal{J}]$ 
7: Zerlege  $\mathcal{J}$  in Primideale  $\mathcal{J} = \mathfrak{p}_1^{s_1} \dots \mathfrak{p}_k^{s_k}$ 
8:  $n_{\mathfrak{p}} \leftarrow \mathcal{N}(\mathfrak{p}_1)$ 
9:  $A \leftarrow [\ ]$ 
10: for  $j \in \{0, \dots, s_1\}$  do
11:   if  $n_{\mathfrak{p}}^j \mid n$  then
12:      $B \leftarrow$  Teiler von  $\mathfrak{p}_2^{s_2} \dots \mathfrak{p}_k^{s_k}$  mit Norm  $\frac{n}{n_{\mathfrak{p}}^j}$  (rekursiv)
13:     for  $X \in B$  do
14:        $A \leftarrow A \cup [\mathfrak{p}_1^j X]$ 
15: return  $A$ 
```

§ 3.3 Die Klassengruppe

(3.3.1) Definition

Die *Klassengruppe*

$$\mathrm{Cl}_K := \{J \mid J \text{ ist gebrochenes } \mathbb{Z}_K\text{-Ideal}\} / \{(c)_{\mathbb{Z}_K} \mid c \in K^*\}.$$

(3.3.2) Lemma

Seien \mathcal{I} ein gebrochenes \mathbb{Z}_K -Ideal und $\alpha \in K_{\gg 0}^+$. Für $\lambda \in K^*$ gilt $(\lambda\mathcal{I}, \alpha) \cong (\mathcal{I}, \lambda\bar{\lambda}\alpha)$.

Beweis:

Sei $b_\alpha : K \times K \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \mathrm{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha x \bar{y})$ die zu α gehörige Bilinearform. Dann ist

$$b_\alpha(\lambda x, \lambda y) = \mathrm{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(\lambda \bar{\lambda} \alpha x \bar{y}) = b_{\lambda \bar{\lambda} \alpha}(x, y).$$

Folglich ist $\psi : (K, b_{\lambda \bar{\lambda} \alpha}) \rightarrow (K, b_\alpha), x \mapsto \lambda x$ eine Isometrie mit $\psi(\mathcal{I}) = (\lambda\mathcal{I})$. □

Mit dieser Aussage genügt es also, aus jeder Klasse der jeweils nur einen Vertreter zu betrachten. Wählt man $\lambda \in \mathbb{Z}_K^*$, so zeigt das Lemma, dass $(\mathcal{I}, \alpha) \cong (\mathcal{I}, \lambda \bar{\lambda} \alpha)$. Für α reichen also Vertreter modulo $\{\lambda \bar{\lambda} \mid \lambda \in \mathbb{Z}_K^*\}$.

Wir wollen nun die zu untersuchenden Möglichkeiten für \mathcal{I} noch weiter einschränken: Ist K/\mathbb{Q} galoissch (wie es für zyklotomische Zahlkörper der Fall ist), so genügt ein Repräsentant modulo der Operation der Galosgruppe.

(3.3.3) Lemma

Sei K/\mathbb{Q} eine Galoiserweiterung, \mathcal{I} ein gebrochenes \mathbb{Z}_K -Ideal und $\alpha \in K_{\gg 0}^+$. Für $\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ist $(\mathcal{I}, \alpha) \cong (\sigma(\mathcal{I}), \sigma(\alpha))$.

Beweis:

Da die Spur invariant unter der Galoisgruppe ist, erhält man die folgende Gleichungskette.

$$\begin{aligned} b_{\sigma(\alpha)}(\sigma(x), \sigma(y)) &= \text{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(\sigma(\alpha)\sigma(x)\overline{\sigma(y)}) \\ &= \text{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(\sigma(\alpha x \bar{y})) = \text{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha x \bar{y}) = b_\alpha(x, y) \end{aligned}$$

Also induziert σ eine Isometrie $\sigma : (K, b_\alpha) \rightarrow (K, b_{\sigma(\alpha)})$. □

§ 3.4 Total-positive Erzeuger

Wir benötigen nun einen Test, welcher für ein gegebenes gebrochenes \mathbb{Z}_K -Ideal \mathcal{I} überprüft, dieses von einem total-positiven Element $\alpha \in K_{\gg 0}^+$ erzeugt wird. Dazu untersuchen wir zuerst, ob \mathcal{I} überhaupt von einem Element aus K^+ erzeugt ist und anschließend, wann ein Ideal $\alpha'\mathbb{Z}_K$ für $\alpha' \in K^+$ einen total-positiven Erzeuger hat.

(3.4.1) Satz

Sei \mathcal{I} ein gebrochenes \mathbb{Z}_K -Ideal. Es existiert genau dann ein $\alpha' \in K^+$ mit $\mathcal{I} = \alpha'\mathbb{Z}_K$, wenn $\mathcal{I} \cap K^+ = \alpha'\mathbb{Z}_{K^+}$ und für jeden Primteiler \mathfrak{p} von \mathcal{I} gilt

- Ist \mathfrak{p} verzweigt in K/K^+ , so ist $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{I}) \in 2\mathbb{Z}$.
- Ist \mathfrak{p} unverzweigt in K/K^+ , so ist $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{I}) = \nu_{\overline{\mathfrak{p}}}(\mathcal{I})$.

Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass die Bedingungen an die Primteiler äquivalent dazu sind, dass

$$\mathcal{I} = (\mathcal{I} \cap K^+) \mathbb{Z}_K.$$

Sei dazu zuerst $\mathcal{I} = (\mathcal{I} \cap K^+) \mathbb{Z}_K$ erfüllt. Seien

$$\mathcal{I}' := \mathcal{I} \cap K^+ = \prod_{\mathfrak{a}} \mathfrak{a}^{\nu_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I} \cap K^+)}, \quad \mathcal{I} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{I})}$$

die Primidealzerlegungen. Dann folgt

$$\prod_{\mathfrak{a}} \mathfrak{a}^{\nu_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}')} \mathbb{Z}_K = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{I})}.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Primidealzerlegung bedeutet dies

$$\mathfrak{a}^{\nu_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}')} \mathbb{Z}_K = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{I})}$$

für jedes Primideal \mathfrak{a} von \mathbb{Z}_{K^+} . Es ist $[K : K^+] = 2$, also kann $\mathfrak{a} \mathbb{Z}_K$ nur eine der Formen \mathfrak{p} , \mathfrak{p}^2 , oder $\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}$ für ein Primideal \mathfrak{p} in \mathbb{Z}_K annehmen.

- Falls $\mathfrak{a} \mathbb{Z}_K = \mathfrak{p}^2$ (also falls \mathfrak{p} verzweigt ist), so folgt $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{I}) = 2\nu_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}') \in 2\mathbb{Z}$.
- In den anderen beiden Fällen (also falls \mathfrak{p} unverzweigt ist) gilt $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{I}) = \nu_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}') = \nu_{\mathfrak{p}}(\bar{\mathcal{I}})$.

Seien nun andersherum die Primideal-Bedingungen erfüllt. Definiert man

$$\mathcal{I}' := \prod_{\mathfrak{a}} \mathfrak{a}^{\nu_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}')} \quad \nu_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}') = \begin{cases} \nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{I}) & \mathfrak{a} \mathbb{Z}_K \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}\} \\ \frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{I}) & \mathfrak{a} \mathbb{Z}_K = \mathfrak{p}^2 \end{cases}$$

so gilt

$$\mathcal{I} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathcal{I})} = \prod_{\mathfrak{a}} (\mathfrak{a} \mathbb{Z}_K)^{\nu_{\mathfrak{a}}(\mathcal{I}')} = \mathcal{I}' \mathbb{Z}_K.$$

Also folgt $(\mathcal{I} \cap K^+) \mathbb{Z}_K = (\mathcal{I}' \mathbb{Z}_K \cap K^+) \mathbb{Z}_K = \mathcal{I}' \mathbb{Z}_K = \mathcal{I}$ und es gilt die behauptete Äquivalenz.

Die Behauptung des Satzes wurde somit darauf reduziert, dass genau dann $\mathcal{I} = \alpha' \mathbb{Z}_K$, wenn $\mathcal{I} \cap K^+ = \alpha' \mathbb{Z}_{K^+}$ und $\mathcal{I} = (\mathcal{I} \cap K^+) \mathbb{Z}_K$ für $\alpha' \in K^+$. Dies folgt allerdings leicht mithilfe von $(\alpha' \mathbb{Z}_K) \cap K^+ = \alpha' \mathbb{Z}_{K^+}$. \square

Mithilfe dieses Satzes können wir nun Algorithmus (2) formulieren, welcher zu einem gegebenen Ideal \mathcal{I} testet, ob dieses einen Erzeuger in K^+ hat und - falls ja - einen solchen zurückgibt. Ein Primideal \mathfrak{a} wie im Beweis unseres Satzes erhalten wir, indem wir eine Primzahl p finden, sodass $\mathfrak{p} \mid (p \mathbb{Z}_K)$, dann muss \mathfrak{a} eines der Primideale aus der Faktorisierung von $p \mathbb{Z}_{K^+}$ teilen.

(3.4.2) Lemma

Sei $\alpha' \in K^+$. Ein total-positives Element $\alpha \in K_{\gg 0}^+$ ist genau dann ein Erzeuger des Ideals $\alpha' \mathbb{Z}_K$, wenn eine Einheit $\epsilon \in \mathbb{Z}_{K^+}^*$ existiert mit $\alpha = \alpha' \epsilon$ und $\text{sign}(\iota(\epsilon)) = \text{sign}(\iota(\alpha'))$ für alle Einbettungen $\iota : K^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$.

Beweis:

Ein weiterer Erzeuger hat immer die Gestalt $\alpha = \alpha' \epsilon$ für eine Einheit $\epsilon \in (\mathbb{Z}_{K^+})^*$. Damit α total-positiv wird muss für alle Einbettungen $\iota : K^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$ gelten:

$$1 \stackrel{!}{=} \text{sign}(\iota(\alpha)) = \text{sign}(\iota(\alpha') \iota(\epsilon)) = \text{sign}(\iota(\alpha')) \text{sign}(\iota(\epsilon))$$

Also müssen die Vorzeichen jeweils identisch sein. \square

Elemente aus $(\mathbb{Z}_{K^+}^*)^2$ haben immerzu positives Signum bezüglich allen Einbettungen. Außerdem liefern total-positive Elemente, die in der gleichen Klasse modulo Quadraten liegen nach Lemma (3.3.2) isomorphe Idealgitter. Es genügt also, sich bei der Suche nach einer Einheit wie im vorherigen Lemma auf Vertreter modulo Quadraten zu beschränken.

Algorithmus 2 Berechnung total-reelles Erzeugers

```
1: Eingabe:  $\mathbb{Z}_K$ -Ideal  $\mathcal{I}$ 
2: Ausgabe: Element  $\alpha' \in K^+$  mit  $\alpha'\mathbb{Z}_K = \mathcal{I}$ , oder false, falls ein solches Element
   nicht existiert.
3:
4:  $\mathcal{I}' \leftarrow 1\mathbb{Z}_{K^+}$ 
5:  $\text{split} \leftarrow [ ]$ 
6: Zerlege  $\mathcal{I} = \mathfrak{p}_1^{s_1} \dots \mathfrak{p}_k^{s_k}$  in Primideale.
7: for  $i \in \{1 \dots k\}$  do
8:   if  $i \in \text{split}$  then continue
9:    $p \leftarrow$  minimale natürliche Zahl  $p \in \mathbb{N}$  mit  $\mathfrak{p}_i \mid (p\mathbb{Z}_K)$ 
10:  Zerlege  $p\mathbb{Z}_{K^+}$  in Primideale:  $p\mathbb{Z}_{K^+} = \mathfrak{q}_1^{t_1} \dots \mathfrak{q}_l^{t_l}$ 
11:   $\mathfrak{a} \leftarrow \mathfrak{q}_j$  mit  $\mathfrak{p}_i \mid (\mathfrak{q}_j\mathbb{Z}_K)$ 
12:  if  $\mathfrak{a}\mathbb{Z}_K = \mathfrak{p}_i^2$  then
13:    if  $2 \nmid s_i$  then return false
14:     $\mathcal{I}' \leftarrow \mathcal{I}' \mathfrak{a}^{\frac{s_i}{2}}$ 
15:  else if  $\mathfrak{a}\mathbb{Z}_K = \mathfrak{p}_i$  then
16:     $\mathcal{I}' \leftarrow \mathcal{I}' \mathfrak{a}^{s_i}$ 
17:  else if  $\mathfrak{a}\mathbb{Z}_K = \mathfrak{p}_i \overline{\mathfrak{p}_i}$  then
18:    if  $\nu_{\mathfrak{p}_i}(\mathcal{I}) \neq \nu_{\overline{\mathfrak{p}_i}}(\mathcal{I})$  then return false
19:     $\mathcal{I}' \leftarrow \mathcal{I}' \mathfrak{a}^{s_i}$ 
20:     $j \leftarrow j'$  mit  $\mathfrak{p}_{j'} = \overline{\mathfrak{p}_i}$ 
21:     $\text{split} \leftarrow \text{split} \cup [j]$ 
22: if  $\mathcal{I}'$  kein Hauptideal then
23:   return false
24: else
25:   return Erzeuger von  $\mathcal{I}'$ 
```

Nach dem Dirichletschen Einheitensatz [Neu92, Theorem (7.4)] hat die Einheitengruppe die Struktur

$$\mathbb{Z}_{K^+}^* = \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}^{t-1}.$$

mit $t := [K^+ : \mathbb{Q}]$. Die Erzeuger $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_t)$ der Gruppe heißen *Grundeinheiten*. Jede Einheit ϵ lässt sich also darstellen in der Form $\epsilon = \epsilon_1^{\nu_1} \dots \epsilon_t^{\nu_t}$. Das folgende Korollar liefert uns nun die Lösung auf unsere Frage nach den total-positiven Erzeugern.

Dann lässt sich folgendes Korollar ziehen:

(3.4.3) Korollar

Sei $\alpha' \in K^+$, seien die Einbettungen von K^+ in \mathbb{R} gegeben durch ι_1, \dots, ι_t und seien $\epsilon_1, \dots, \epsilon_t$ die Grundeinheiten von $\mathbb{Z}_{K^+}^*$. Definiere die Matrix

$$M \in \mathbb{F}_2^{t \times t}, \quad M_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{sign}(\iota_i(\epsilon_j)) = -1 \\ 0 & , \text{sign}(\iota_i(\epsilon_j)) = 1 \end{cases}$$

und den Vektor

$$V \in \mathbb{F}_2^{1 \times t}, \quad V_i = \begin{cases} 1 & , \text{sign}(\iota_i(\alpha')) = -1 \\ 0 & , \text{sign}(\iota_i(\alpha')) = 1 \end{cases}.$$

Dann sind die total-positiven Erzeuger des Ideals $\alpha' \mathbb{Z}_K$ genau die Elemente der Menge $\{\alpha' \epsilon_1^{x_1} \dots \epsilon_t^{x_t} \epsilon^2 \mid x \in \mathbb{F}_2^{1 \times t}, xM = V, \epsilon \in (\mathbb{Z}_{K^+}^*)\}$.

Beweis:

Nach Lemma (3.4.2) und da Quadrate immerzu positives Signum haben, sind die total-positiven Erzeuger gegeben durch die Elemente $u = \alpha' \epsilon_1^{x_1} \dots \epsilon_t^{x_t} \epsilon^2$, wobei $x \in \mathbb{F}_2^{1 \times t}$, $\epsilon \in \mathbb{Z}_{K^+}^*$ und $\epsilon_1^{x_1} \dots \epsilon_t^{x_t}$ bezüglich allen Einbettungen dasselbe Signum wie α' hat. Das

Signum bezüglich einem ι_i ist genau dann gleich, wenn

$$|\{j \mid \text{sign}(\iota_i(\epsilon_j)) = -1 \text{ und } x_j = 1\}| \equiv \begin{cases} 1 \pmod{2} & , \text{sign}(\iota_i(\alpha')) = -1 \\ 0 \pmod{2} & , \text{sign}(\iota_i(\alpha')) = 1 \end{cases}.$$

Diese Kongruenz ist aber genau dann erfüllt, wenn x Lösung des linearen Gleichungssystems $xM = V$ ist. \square

(3.4.4) Bemerkung

Um später in der Implementierung Zeit zu sparen, kann man bemerken, dass sich verschiedene total-positive Erzeuger des gleichen Ideals jeweils lediglich um eine total-positive Einheit unterscheiden. Es lohnt sich also, zu Beginn des Algorithmus die Menge aller total-positiven Einheiten (diese korrespondieren zum Kern von M) zu berechnen, sodass man später pro Ideal jeweils nur eine spezielle Lösung des Gleichungssystems finden muss und die Menge aller total-positiven Erzeuger durch Multiplikation mit den vorher berechneten total-positiven Einheiten erstellt.

Eine weitere Anmerkung zur Implementierung: **MAGMA** kann mit der Funktion `pFundamentalUnits` eine Untergruppe von \mathbb{Z}_{K+}^* mit ungeradem Index berechnen. Wie das folgende Lemma zeigt, reicht dies für unser Vorhaben bereits aus, da wir nur ein Vertretersystem der Einheiten modulo Quadraten benötigen.

(3.4.5) Lemma

Sei G eine abelsche Gruppe und $U \leq G$ mit $[G : U]$ ungerade. Dann ist

$$G/G^2 \cong U/U^2.$$

Beweis:

Betrachte den Epimorphismus $\pi : G \rightarrow G/G^2$. Es ist bereits $\pi|_U$ surjektiv, denn sei $gG^2 \in G/G^2$, dann ist $g^{[G:U]} \in U$, da $(gU)^{[G:U]} = U$ und weil der Index ungerade ist auch $\pi(g^{[G:U]}) = gG^2$. Zudem ist $\text{Kern}(\pi|_U) = U \cap G^2 = U^2$, denn für $g^2 \in U \cap G^2$

muss $|gU| \leq 2$ gelten, die Ordnung kann aber wegen des ungeraden Index nicht 2 sein, also folgt bereits $g \in U$ und somit $g^2 \in U^2$. Mit dem Homomorphiesatz folgt die Behauptung. \square

Anhand der gewonnenen Erkenntnisse erstellen wir nun einen Algorithmus (3), der zu einem Ideal $\mathcal{I} = \alpha' \mathbb{Z}_K$ für $\alpha' \in K^+$ ein Vertretersystem aller total-positiven Erzeuger $\alpha \in K_{\gg 0}^+$ modulo $\lambda \bar{\lambda}$ für $\lambda \in \mathbb{Z}_K^*$ zurückgibt. Die Ergebnisse der Zeilen 6 – 14 können in der Implementierung nach einmaliger Durchführung abgespeichert werden, sodass die Resultate anschließend für jedes zu prüfende α' wiederverwertet werden können.

§ 3.5 Finaler Algorithmus und Ergebnisse

Alle bisherigen Bestandteile können nun zu einem Algorithmus zusammengesetzt werden, der zu einem quadratfreien $\ell \in \mathbb{N}$, einer vorgegebenen Determinante d und einem CM-Körper K mit total-reellem Teilkörper K^+ alle Ideal-Gitter berechnet.

Mit diesem Algorithmus kann man nun alle ℓ -modularen Gitter in Dimension n klassifizieren, welche einen Automorphismus σ besitzen mit $\mu_\sigma = \Phi_m$ und $\varphi(m) = n$. Dazu wendet man Algorithmus (4) wie in Lemma (2.2.2) und Lemma (3.1.5) besprochen mit $d = l^{\frac{n}{2}}$ und $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ an. Eine weitere kleine Erleichterung bringt in diesem Spezialfall die Tatsache, dass $\mathbb{Q}(\zeta_m) \cong \mathbb{Q}(\zeta_{2m})$, falls $m \equiv 1 \pmod{2}$. Insbesondere sind die Ideal-Gitter über $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ und $\mathbb{Q}(\zeta_{2m})$ dieselben. Man kann also für eine vollständige Aufzählung alle m mit $m \equiv 2 \pmod{4}$ weglassen. Eine Implementierung in **MAGMA** liefert die folgenden Anzahlen von ℓ -modularen Gittern nach Dimension und Minimum für $\ell \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$.

Algorithmus 3 Berechnung total-positiver Erzeuger

```
1: Eingabe: Erzeuger  $\alpha' \in K^+$  von  $\mathcal{I}$ .
2: Ausgabe: Liste von Vertretern der Menge aller total-positiven Erzeuger  $\alpha \in K_{\gg 0}^+$ 
   von  $\mathcal{I}$  modulo  $\{\lambda\bar{\lambda} \mid \lambda \in \mathbb{Z}_K^*\}$  zurückgibt.
3:
4:  $\iota_1, \dots, \iota_t \leftarrow$  Einbettungen  $K^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$ 
5:  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_t \leftarrow$  Erzeuger einer Untergruppe von  $\mathbb{Z}_{K^+}^*$  mit ungeradem Index
6:  $M \leftarrow 0 \in \mathbb{F}_2^{t \times t}$ 
7: for  $(i, j) \in \underline{t} \times \underline{t}$  do
8:   if  $\iota_i(\epsilon_j) < 0$  then
9:      $M_{ij} \leftarrow 1$ 
10:  $U' \leftarrow [\epsilon_1^{a_1} \dots \epsilon_t^{a_t} \mid a \in \text{Kern}(M)]$ 
11:  $U \leftarrow []$ 
12: for  $u' \in U'$  do
13:   if  $u' \neq u\lambda\bar{\lambda}$  für alle  $u \in U, \lambda \in \mathbb{Z}_K^*$  then
14:      $U \leftarrow U \cup [u']$ 
15:  $V \leftarrow 0 \in \mathbb{F}_2^{1 \times t}$ 
16: for  $i \in \{1, \dots, t\}$  do
17:   if  $\iota_i(\alpha') < 0$  then
18:      $V_i \leftarrow 1$ 
19:  $x \leftarrow$  Lösung von  $xM = V$ 
20: return  $xU$ 
```

Algorithmus 4 Berechnung von Ideal-Gittern

- 1: **Eingabe:** Quadratfreies $\ell \in \mathbb{N}$, $d \in \mathbb{N}$, CM-Körper K , maximaler total-reeller Teilkörper K^+ von K
 - 2: **Ausgabe:** Per Isomorphie reduzierte Liste aller geraden Ideal-Gitter (\mathcal{I}, α) in K von Stufe ℓ und mit Determinante d
 - 3:
 - 4: $\mathfrak{A} \leftarrow$ Vertretersystem von $Cl_K / \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$
 - 5: $\mathfrak{B} \leftarrow [\mathcal{B} \mid \mathcal{B} \text{ ist } \mathbb{Z}_K\text{-Ideal mit } \ell\mathbb{Z}_K \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathbb{Z}_K \text{ und } \mathcal{N}(\mathcal{B}) = d]$ (nach Algorithmus (1))
 - 6: $\text{List} \leftarrow []$
 - 7: **for** $(\mathcal{I}, \mathcal{B}) \in (\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ **do**
 - 8: $\mathcal{J} \leftarrow (\mathcal{I}\bar{\mathcal{I}})^{-1} \Delta\mathcal{B}$
 - 9: **if** $\exists \alpha' \in K^+$ mit $\mathcal{J} = \alpha'\mathbb{Z}_K$ (nach Algorithmus (2)) **then**
 - 10: $X \leftarrow [\alpha \in K_{\gg 0}^+ \mid \mathcal{J} = \alpha\mathbb{Z}_K]$ (nach Algorithmus (3))
 - 11: **for** $\alpha \in X$ **do**
 - 12: **if** (\mathcal{I}, α) ist gerades Gitter der Stufe ℓ **then**
 - 13: **if** $(\mathcal{I}, \alpha) \not\cong (\tilde{\mathcal{I}}, \tilde{\alpha})$ für alle $(\tilde{\mathcal{I}}, \tilde{\alpha}) \in \text{List}$ **then**
 - 14: $\text{List} \leftarrow \text{List} \cup [(\mathcal{I}, \alpha)]$
-

ℓ	Dim	Gesamtzahl(extremal)	K	Minimum						
				2	4	6	8	10	12	14
1	8	1(1)	$Q(\zeta_{15})$	1	—	—	—	—	—	—
	16	1(1)	$Q(\zeta_{40})$	1	—	—	—	—	—	—
	24	4(1)	$Q(\zeta_{35})$	—	1	—	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{45})$	1	—	—	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{54})$	1	—	—	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{75})$	1	—	—	—	—	—	—
	32	7(5)	$Q(\zeta_{51})$	—	2	—	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{68})$	1	1	—	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{80})$	1	1	—	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{120})$	—	1	—	—	—	—	—
2	4	1(1)	$Q(\zeta_8)$	1	—	—	—	—	—	—
	8	1(1)	$Q(\zeta_{16})$	1	—	—	—	—	—	—
	12	1(1)	$Q(\zeta_{36})$	1	—	—	—	—	—	—
	16	2(1)	$Q(\zeta_{32})$	1	—	—	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{40})$	—	1	—	—	—	—	—
	20	1(1)	$Q(\zeta_{33})$	—	1	—	—	—	—	—
	24	2(1)	$Q(\zeta_{56})$	—	1	—	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{72})$	1	—	—	—	—	—	—
	32	13(4)	$Q(\zeta_{51})$	—	—	3	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{64})$	1	1	—	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{68})$	—	3	—	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{80})$	—	1	1	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{96})$	—	1	—	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{120})$	—	2	—	—	—	—	—
	36	6(3)	$Q(\zeta_{57})$	—	—	3	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{76})$	—	1	—	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{108})$	1	1	—	—	—	—	—

ℓ	Dim	Gesamtzahl(extremal)	K	Minimum						
				2	4	6	8	10	12	14
3	4	1(1)	$\mathbf{Q}(\zeta_{12})$	1	—	—	—	—	—	—
	6	1(1)	$\mathbf{Q}(\zeta_9)$	1	—	—	—	—	—	—
	8	1(1)	$\mathbf{Q}(\zeta_{24})$	1	—	—	—	—	—	—
	12	2(1)	$\mathbf{Q}(\zeta_{21})$	—	1	—	—	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{36})$	1	—	—	—	—	—	—
	16	3(2)	$\mathbf{Q}(\zeta_{40})$	—	1	—	—	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{48})$	1	—	—	—	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{60})$	—	1	—	—	—	—	—
	18	1(—)	$\mathbf{Q}(\zeta_{27})$	1	—	—	—	—	—	—
	24	7(1)	$\mathbf{Q}(\zeta_{39})$	—	—	1	—	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{52})$	—	1	—	—	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{56})$	—	2	—	—	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{72})$	1	1	—	—	—	—	—
	32	13(7)	$\mathbf{Q}(\zeta_{80})$	—	2	4	—	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{96})$	1	—	1	—	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{120})$	—	3	2	—	—	—	—
	36	8(—)	$\mathbf{Q}(\zeta_{57})$	—	1	2	—	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{63})$	—	1	1	—	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{76})$	—	—	1	—	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{108})$	1	—	1	—	—	—	—
5	8	1(1)	$\mathbf{Q}(\zeta_{15})$	—	1	—	—	—	—	—
	12	1(1)	$\mathbf{Q}(\zeta_{21})$	—	1	—	—	—	—	—
	16	1(—)	$\mathbf{Q}(\zeta_{40})$	—	1	—	—	—	—	—

ℓ	Dim	Gesamtzahl(extremal)	K	Minimum						
				2	4	6	8	10	12	14
5	24	5(1)	$Q(\zeta_{35})$	—	—	—	1	—	—	—
			$Q(\zeta_{45})$	—	1	—	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{56})$	—	1	—	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{72})$	—	—	1	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{84})$	—	1	—	—	—	—	—
	32	10(—)	$Q(\zeta_{80})$	—	1	—	1	—	—	—
			$Q(\zeta_{96})$	—	1	—	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{120})$	—	—	2	5	—	—	—
6	8	1(1)	$Q(\zeta_{24})$	—	1	—	—	—	—	—
	12	1(1)	$Q(\zeta_{28})$	—	1	—	—	—	—	—
	16	2(1)	$Q(\zeta_{40})$	—	—	1	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{48})$	—	1	—	—	—	—	—
	20	1(1)	$Q(\zeta_{33})$	—	—	1	—	—	—	—
	24	5(2)	$Q(\zeta_{56})$	—	1	—	1	—	—	—
			$Q(\zeta_{72})$	—	1	1	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{84})$	—	—	—	1	—	—	—
	32	12(—)	$Q(\zeta_{80})$	—	—	1	5	—	—	—
			$Q(\zeta_{96})$	—	1	—	1	—	—	—
			$Q(\zeta_{120})$	—	—	—	4	—	—	—
7	6	1(1)	$Q(\zeta_7)$	—	1	—	—	—	—	—
	8	1(1)	$Q(\zeta_{24})$	—	1	—	—	—	—	—
	12	1(—)	$Q(\zeta_{28})$	—	1	—	—	—	—	—
	16	4(3)	$Q(\zeta_{40})$	—	—	1	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{48})$	—	1	1	—	—	—	—
			$Q(\zeta_{60})$	—	—	1	—	—	—	—
	20	1(—)	$Q(\zeta_{44})$	—	—	1	—	—	—	—

ℓ	Dim	Gesamtzahl(extremal)	K	Minimum						
				2	4	6	8	10	12	14
7	24	$8(-)$	$\mathbf{Q}(\zeta_{56})$	—	1	2	2	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{72})$	—	1	1	—	—	—	—
	32	$19(-)$	$\mathbf{Q}(\zeta_{80})$	—	—	1	1	2	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{96})$	—	1	2	3	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{120})$	—	—	2	7	—	—	—
11	4	$1(1)$	$\mathbf{Q}(\zeta_{12})$	—	1	—	—	—	—	—
	8	$2(1)$	$\mathbf{Q}(\zeta_{15})$	—	—	1	—	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{24})$	—	1	—	—	—	—	—
	10	$1(1)$	$\mathbf{Q}(\zeta_{11})$	—	—	1	—	—	—	—
	12	$1(-)$	$\mathbf{Q}(\zeta_{36})$	—	1	—	—	—	—	—
	16	$5(-)$	$\mathbf{Q}(\zeta_{40})$	—	—	1	1	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{48})$	—	1	—	—	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{60})$	—	—	—	2	—	—	—
	20	$2(-)$	$\mathbf{Q}(\zeta_{33})$	—	—	—	1	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{44})$	—	—	1	—	—	—	—
	24	$7(-)$	$\mathbf{Q}(\zeta_{35})$	—	—	—	1	—	1	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{45})$	—	—	1	—	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{56})$	—	—	—	1	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{72})$	—	1	—	1	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{84})$	—	—	1	—	—	—	—
14	4	$1(1)$	$\mathbf{Q}(\zeta_8)$	—	1	—	—	—	—	—
	8	$2(1)$	$\mathbf{Q}(\zeta_{16})$	—	1	—	—	—	—	—
			$\mathbf{Q}(\zeta_{24})$	—	—	1	—	—	—	—
	12	$1(1)$	$\mathbf{Q}(\zeta_{28})$	—	—	—	1	—	—	—

ℓ	Dim	Gesamtzahl(extremal)	K	Minimum						
				2	4	6	8	10	12	14
14	16	5(−)	$\mathbb{Q}(\zeta_{32})$	−	1	−	−	−	−	−
			$\mathbb{Q}(\zeta_{40})$	−	−	1	−	−	−	−
			$\mathbb{Q}(\zeta_{48})$	−	−	1	1	−	−	−
			$\mathbb{Q}(\zeta_{60})$	−	−	1	−	−	−	−
	24	8(−)	$\mathbb{Q}(\zeta_{56})$	−	−	−	4	−	2	−
			$\mathbb{Q}(\zeta_{72})$	−	−	1	1	−	−	−
15	8	1(1)	$\mathbb{Q}(\zeta_{24})$	−	−	1	−	−	−	−
	16	3(1)	$\mathbb{Q}(\zeta_{40})$	−	−	−	−	1	−	−
			$\mathbb{Q}(\zeta_{48})$	−	−	1	−	−	−	−
			$\mathbb{Q}(\zeta_{60})$	−	−	−	1	−	−	−
	24	5(−)	$\mathbb{Q}(\zeta_{56})$	−	−	−	1	−	−	−
			$\mathbb{Q}(\zeta_{72})$	−	−	1	−	−	1	−
			$\mathbb{Q}(\zeta_{84})$	−	−	−	−	−	2	−
	32	23(−)	$\mathbb{Q}(\zeta_{80})$	−	−	−	−	2	3	1
			$\mathbb{Q}(\zeta_{96})$	−	−	1	−	1	−	−
			$\mathbb{Q}(\zeta_{120})$	−	−	−	4	1	9	1
23	4	1(1)	$\mathbb{Q}(\zeta_{12})$	−	−	1	−	−	−	−
	8	3(−)	$\mathbb{Q}(\zeta_{24})$	−	−	1	2	−	−	−
	12	1(−)	$\mathbb{Q}(\zeta_{36})$	−	−	1	−	−	−	−
	16	5(−)	$\mathbb{Q}(\zeta_{40})$	−	−	−	−	1	−	−
			$\mathbb{Q}(\zeta_{48})$	−	−	1	2	−	−	−
			$\mathbb{Q}(\zeta_{60})$	−	−	−	−	−	1	−
	22	2(−)	$\mathbb{Q}(\zeta_{23})$	−	−	−	−	−	2	−

Tabelle 3.1: Anzahlen der Ideal-Gitter der Stufen $\ell \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$ und Determinante $\ell^{\frac{n}{2}}$ nach zugehörigem Kreisteilungskörper K und Minimum.

4 Sub-Ideal-Gitter

§ 4.1 Einführung

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, wie Gitter in Dimension n mit einem Automorphismus σ klassifiziert werden können, falls $\mu_\sigma = \Phi_m$ und $\varphi(m) = n$ erfüllt sind. In diesem Kapitel wollen wir versuchen, Aussagen über Gitter zu treffen, welche lediglich ein Ideal-Gitter enthalten. Gilt $\Phi_m | \mu_\sigma$ für ein $\sigma \in \text{Aut}(L)$, so können wir den zugrundeliegenden Vektorraum V in σ -invariante Teilräume aufspalten:

$$V = \text{Kern}(\Phi_m(\sigma)) \oplus \text{Kern}\left(\frac{\mu_\sigma}{\Phi_m}(\sigma)\right).$$

Für $\frac{n}{2} < \varphi(m) \leq n$ muss $\text{Kern}(\Phi_m(\sigma))$ die Dimension $\varphi(m)$ haben, wird also zu einem eindimensionalen $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ -Vektorraum und $L \cap \text{Kern}(\Phi_m(\sigma))$ hat eine Struktur als Ideal-Gitter über diesem zyklotomischen Körper. Vergleiche dazu [Neb13, Abs. (5.3)]

(4.1.1) Definition

Sei L ein \mathbb{Z} -Gitter der Dimension n .

- (i) Ein *großer Automorphismus* von L ist ein $\sigma \in \text{Aut}(L)$ mit $\Phi_m | \mu_\sigma$ für ein $m \in \mathbb{N}$, sodass $\frac{n}{2} < \varphi(m) \leq n$.

(ii) Ist $\sigma \in \text{Aut}(L)$ ein großer Automorphismus, so bezeichnet man das Ideal-Gitter $L \cap \text{Kern}(\Phi_m(\sigma))$ über $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ als *Sub-Ideal-Gitter* von L .

Für Gitter mit großen Automorphismen verstehen wir die Ideal-Gitter-Komponente mit der Theorie des letzten Kapitels sehr gut. Probleme bereitet uns allerdings der andere Teil $\text{Kern}\left(\frac{\mu_\sigma}{\Phi_m}(\sigma)\right)$ des Vektorraums, über welchen wir a priori nicht viel aussagen können. Abhilfe schaffen uns unter gewissen Umständen die Automorphismen von Primzahlordnung.

§ 4.2 Automorphismen von Primzahlordnung

Der folgende Abschnitt ist an [Jü15, Kap. 4] und [Neb13, Kap. 4] angelehnt.

Sei L in diesem Abschnitt ein \mathbb{Z} -Gitter in einem n -dimensionalen bilinearen \mathbb{Q} -Vektorraum (V, b) und $\sigma \in \text{Aut}(L)$ von Primzahlordnung p . Dann ist $\mu_\sigma \in \{\Phi_p, \Phi_1\Phi_p\}$. Man erhält eine σ -invariante Zerlegung

$$V = \text{Kern}(\Phi_p(\sigma)) \oplus \text{Kern}(\Phi_1(\sigma)) =: V_p \oplus V_1$$

Es ist $\Phi_1(X) = X - 1$, also $V_p = \text{Bild}(\sigma - 1)$, $V_1 = \text{Kern}(\sigma - 1)$. Seien n_p die Dimension von V_p und n_1 die Dimension von V_1 über \mathbb{Q} . Da V_p eine Struktur als $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ -Vektorraum hat und $\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\zeta_p)) = p - 1$, muss $(p - 1)|n_p$ gelten.

Wie das folgende Lemma zeigt, ist die Summe sogar orthogonal.

(4.2.1) Lemma

Sei $\sigma \in O(V, b)$ von Primzahlordnung p , dann ist

$$V = \text{Kern}(\Phi_p(\sigma)) \perp \text{Kern}(\Phi_1(\sigma)).$$

Beweis:

Sei $x_p \in \text{Kern}(\Phi_p(\sigma))$ und $x_1 \in \text{Kern}(\Phi_1(\sigma))$. Dann gilt $\sigma(x_1) = x_1$ und es existiert ein $y \in V$ mit $(\sigma - 1)(y) = x_p$. Zusammen mit der Tatsache, dass die Bilinearform b invariant unter σ ist, folgt:

$$b(x_1, x_p) = b(x_1, (\sigma - 1)(y)) = b(\sigma(x_1), \sigma(y)) - b(x_1, y) = b(x_1, y) - b(x_1, y) = 0. \quad \square$$

Damit induziert σ ein Teilgitter von L . Definiert man nämlich $L_p := L \cap V_p$ und $L_1 := L \cap V_1$, so ist offensichtlich $M := L_p \perp L_1 \leq L$. Im Folgenden wollen wir die Struktur von M näher untersuchen.

(4.2.2) Lemma

Seien σ , L_1 und L_p wie oben.

- (i) Es existiert ein Polynom $v \in \mathbb{Z}[X]$ mit $1 = \frac{1}{p}v \cdot \Phi_1 + \frac{1}{p}\Phi_p$.
- (ii) Es gilt $pL \subseteq L_p \perp L_1 \subseteq L$.

Beweis:

- (i) Nach (3.1.4) ist $\Phi_p(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = X^{p-1} + X^{p-2} + \dots + 1$, also ist $\Phi_p(1) = p$ und somit 1 eine Nullstelle von $p - \Phi_p \in \mathbb{Z}[X]$. Da $\Phi_1(X) = X - 1$ folgt daher

$$p - \Phi_p = v \cdot \Phi_1 \text{ für ein } v \in \mathbb{Q}[X]. \quad (4.1)$$

Mit dem Lemma von Gauß muss $v \in \mathbb{Z}[X]$ gelten. Umstellen der Gleichung (4.1) liefert die Behauptung.

(ii) Zu zeigen ist $px \in L_p \perp L_1$ für alle $x \in L$. Wegen $(\Phi_1\Phi_p)(\sigma) = 0$ und der σ -Invarianz von L ist

$$\begin{aligned} px &= (v \cdot \Phi_1)(\sigma)(x) + \Phi_p(\sigma)(x) \in \text{Kern}(\Phi_p(\sigma)) \cap L + \text{Kern}(\Phi_1(\sigma))(\sigma) \cap L \\ &= V_p \perp V_1 \end{aligned} \quad \square$$

5 Literaturverzeichnis

- [BFS05] Eva Bayer Fluckiger and Ivan Suarez. Modular lattices over cyclotomic fields. *Journal of Number Theory*, 114:394–411, 2005.
- [CS93] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*, volume 290 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 3rd edition, 1993.
- [Jü15] Michael Jürgens. *Nicht-Existenz und Konstruktion extremaler Gitter*. PhD thesis, Technische Universität Dortmund, März 2015.
- [Kne02] M. Kneser. *Quadratische Formen*. Springer, 2002.
- [Mol11] Richard A. Mollin. *Algebraic number theory*. CRC Press, 2nd edition, 2011.
- [Neb13] Gabriele Nebe. On automorphisms of extremal even unimodular lattices. *International Journal of Number Theory*, 09:1933–1959, 2013.
- [Neu92] Jürgen Neukirch. *Algebraische Zahlentheorie*. Springer, 1992.
- [NS] Gabriele Nebe and N. J. A. Sloane. A Catalogue of Lattices. <http://www.math.rwth-aachen.de/~Gabriele.Nebe/LATTICES/>. Aufgerufen: 10.08.2018.
- [Que95] H. G. Quebbemann. Modular Lattices in Euclidean Spaces. *Journal of Number Theory*, 54:190–202, 1995.