

Extremale Gitter mit großen Automorphismen

Simon Berger

21. September 2018

Definition

Sei L ein \mathbb{Z} -Gitter der Dimension n . Ein *großer Automorphismus* von L ist ein $\sigma \in \text{Aut}(L)$ von Ordnung $m \in \mathbb{N}$, sodass $\Phi_m | \mu_\sigma$ und $\frac{n}{2} < \varphi(m) \leq n$.

Definition

Sei L ein \mathbb{Z} -Gitter der Dimension n . Ein *großer Automorphismus* von L ist ein $\sigma \in \text{Aut}(L)$ von Ordnung $m \in \mathbb{N}$, sodass $\Phi_m | \mu_\sigma$ und $\frac{n}{2} < \varphi(m) \leq n$.

→ Ziel: Gitter mit großen Automorphismen klassifizieren.

Sei L Gitter mit großem Automorphismus σ der Ordnung m in Vektorraum V .

Sei L Gitter mit großem Automorphismus σ der Ordnung m in Vektorraum V .

$$\Rightarrow V = \text{Kern}\left(\frac{\mu_\sigma}{\Phi_m}(\sigma)\right) \perp \text{Kern}(\Phi_m(\sigma))$$

$$M := L_1 \perp L_p := L \cap \text{Kern}\left(\frac{\mu_\sigma}{\Phi_m}(\sigma)\right) \perp L \cap \text{Kern}(\Phi_m(\sigma))$$

$$M := L_1 \perp L_p := L \cap \text{Kern}\left(\frac{\mu_\sigma}{\Phi_m}(\sigma)\right) \perp L \cap \text{Kern}(\Phi_m(\sigma))$$

- Falls ein $p \in \mathbb{P}$ existiert, sodass $\frac{\mu_\sigma}{\Phi_m} \mid (X^{\frac{m}{p}} - 1)$, dann ist
 $L_1 = L \cap \text{Kern}(\sigma^{\frac{m}{p}} - 1)$ das Fixgitter und
 $L_p = L \cap \text{Bild}(\sigma^{\frac{m}{p}} - 1)$ das Bildgitter eines Automorphismus von Primzahlordnung.

- Primteiler p von m mit $\text{ggT}(p, \ell) = 1$ durchgehen.

- Primteiler p von m mit $\text{ggT}(p, \ell) = 1$ durchgehen.
- Mögliche Automorphismen typen der Ordnung p durchgehen.

- Primteiler p von m mit $\text{ggT}(p, \ell) = 1$ durchgehen.
- Mögliche Automorphismentypen der Ordnung p durchgehen.
- Mögliche Bildgitter aufzählen.

- Primteiler p von m mit $\text{ggT}(p, \ell) = 1$ durchgehen.
- Mögliche Automorphismentypen der Ordnung p durchgehen.
- Mögliche Bildgitter aufzählen.
- Mögliche Fixgitter aufzählen.

- Primteiler p von m mit $\text{ggT}(p, \ell) = 1$ durchgehen.
- Mögliche Automorphismentypen der Ordnung p durchgehen.
- Mögliche Bildgitter aufzählen.
- Mögliche Fixgitter aufzählen.
- Kandidaten für σ aufzählen.

- Primteiler p von m mit $\text{ggT}(p, \ell) = 1$ durchgehen.
- Mögliche Automorphismentypen der Ordnung p durchgehen.
- Mögliche Bildgitter aufzählen.
- Mögliche Fixgitter aufzählen.
- Kandidaten für σ aufzählen.
- L als σ -invariantes Obergitter von $L_1 \perp L_p$ konstruieren.

- 1 Automorphismen von Primzahlordnung
- 2 Bildgitter
- 3 Fixgitter
- 4 Kandidaten für σ
- 5 Konstruktion von Obergittern

Satz

Sei L gerade, n -dim. von q -freier Stufe ℓ , $\text{Det}(L) = \ell^k$. Sei zudem $\sigma \in \text{Aut}(L)$ von Typ $p - (n_1, n_p) - s - q_1 - (k_{1,1}, k_{p,1}) - \dots$, wobei $\text{ggT}(p, \ell) = 1$. Dann gilt:

- $n_1 + n_p = n$.
- $s \in \{0, \dots, \min(n_1, \frac{n_p}{p-1})\}$.
- $s \equiv_2 \frac{n_p}{p-1}$ und für $p = 2$ zusätzlich $s \equiv_2 0$.
- $k_{1,i} \in \{0, \dots, \min(n_1, k)\}$.
- $k_{1,i} \equiv_2 k$.
- $k_{p,i} \in \{0, \dots, \min(n_p, k)\}$.
- $k_{p,i} \equiv_2 0$.
- $(2f(q_i)) \mid k_{p,i}$, wobei $f(q_i)$ den Trägheitsgrad von $q_i \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\zeta_p + \zeta_p^{-1})}$ bezeichne.
- $k_{1,i} + k_{p,i} = k$.

- 1 Automorphismen von Primzahlordnung
- 2 Bildgitter**
- 3 Fixgitter
- 4 Kandidaten für σ
- 5 Konstruktion von Obergittern

Da $\varphi(m) > \frac{n}{2}$ ist $\text{Kern}(\Phi_m)$ ein eindimensionaler $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ -Vektorraum $\rightsquigarrow L_p$ ist Ideal-Gitter.

Da $\varphi(m) > \frac{n}{2}$ ist $\text{Kern}(\Phi_m)$ ein eindimensionaler $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ -Vektorraum $\rightsquigarrow L_p$ ist Ideal-Gitter.

\Rightarrow Effizient berechenbar mit dem Algorithmus aus dem ersten Teil!

- 1 Automorphismen von Primzahlordnung
- 2 Bildgitter
- 3 Fixgitter**
- 4 Kandidaten für σ
- 5 Konstruktion von Obergittern

- Für das Fixgitter kennen wir Dimension, Determinante und Stufe.

- Für das Fixgitter kennen wir Dimension, Determinante und Stufe.
- \Rightarrow Finden wir nur mittels Geschlechteraufzählung.

- Für das Fixgitter kennen wir Dimension, Determinante und Stufe.
- \Rightarrow Finden wir nur mittels Geschlechteraufzählung.
- Falls $p > 2$ und ℓ prim, kennen wir genau das Geschlechtssymbol von L_1 .

- Für das Fixgitter kennen wir Dimension, Determinante und Stufe.
- \Rightarrow Finden wir nur mittels Geschlechteraufzählung.
- Falls $p > 2$ und ℓ prim, kennen wir genau das Geschlechtssymbol von L_1 .
- Ansonsten zumindest die Elementarteiler.

- Für das Fixgitter kennen wir Dimension, Determinante und Stufe.
- \Rightarrow Finden wir nur mittels Geschlechteraufzählung.
- Falls $p > 2$ und ℓ prim, kennen wir genau das Geschlechtssymbol von L_1 .
- Ansonsten zumindest die Elementarteiler.
- Nach Konstruktion von Vertretern mit passenden Elementarteilern (David Lorch) Aufzählung des gesamten Geschlechts mit der Kneser'schen Nachbarmethode.

Satz

Sei L ein Gitter von Dimension ≥ 3 . Hat für jede Primzahl $q \in \mathbb{P}$ die Jordanzerlegung von $\mathbb{Z}_q \otimes L$ mindestens eine Komponente von Dimension ≥ 2 , so besteht der Nachbarschafts-Graph von L aus genau einer Zusammenhangskomponente.

Satz

Sei L ein Gitter von Dimension ≥ 3 . Hat für jede Primzahl $q \in \mathbb{P}$ die Jordanzerlegung von $\mathbb{Z}_q \otimes L$ mindestens eine Komponente von Dimension ≥ 2 , so besteht der Nachbarschafts-Graph von L aus genau einer Zusammenhangskomponente.

- Schwache Bedingung ist beinahe immer erfüllt.
- Wir erhalten durch sukzessive Nachbarbildung das gesamte Geschlecht.
- Benutzen als Abbruchbedingung das Maß des Geschlechtes.

- 1 Automorphismen von Primzahlordnung
- 2 Bildgitter
- 3 Fixgitter
- 4 Kandidaten für σ**
- 5 Konstruktion von Obergittern

- σ operiert auf den Faktorgruppen $L_1^{\#,p}/L_1$ und $L_p^{\#,p}/L_p$.

- σ operiert auf den Faktorgruppen $L_1^{\#,p}/L_1$ und $L_p^{\#,p}/L_p$.
- Die Faktorgruppen sind isomorph als $\mathbb{F}_p[\sigma]$ -Moduln.

- σ operiert auf den Faktorgruppen $L_1^{\#,p}/L_1$ und $L_p^{\#,p}/L_p$.
- Die Faktorgruppen sind isomorph als $\mathbb{F}_p[\sigma]$ -Moduln.
- \Rightarrow Minimalpolynome der Operationen von σ auf den beiden Faktorgruppen sind identisch.

- σ operiert auf den Faktorgruppen $L_1^{\#,p}/L_1$ und $L_p^{\#,p}/L_p$.
- Die Faktorgruppen sind isomorph als $\mathbb{F}_p[\sigma]$ -Moduln.
- \Rightarrow Minimalpolynome der Operationen von σ auf den beiden Faktorgruppen sind identisch.
- Das Minimalpolynom auf den Faktorgruppen ist $\Phi_{\frac{m}{p}}$, falls $[L : M] > 1$.

- σ operiert auf den Faktorgruppen $L_1^{\#,p}/L_1$ und $L_p^{\#,p}/L_p$.
- Die Faktorgruppen sind isomorph als $\mathbb{F}_p[\sigma]$ -Moduln.
- \Rightarrow Minimalpolynome der Operationen von σ auf den beiden Faktorgruppen sind identisch.
- Das Minimalpolynom auf den Faktorgruppen ist $\Phi_{\frac{m}{p}}$, falls $[L : M] > 1$.
- Wähle Vertreter σ_1 und σ_p der Konjugiertenklassen der Automorphismen von L_1 und L_p , die mit dem richtigen Minimalpolynom auf $L_1^{\#,p}/L_1$ und $L_p^{\#,p}/L_p$ operieren. Setze $\sigma := \text{diag}(\sigma_1, \sigma_p)$.

- 1 Automorphismen von Primzahlordnung
- 2 Bildgitter
- 3 Fixgitter
- 4 Kandidaten für σ
- 5 Konstruktion von Obergittern

Konstruktion von Obergittern

- Die ganzen Obergitter von M mit Index p^s haben die Form

$$L_\varphi := \{(x_1, x_p) \in L_1^{\#,p} \perp L_p^{\#,p} \mid \varphi(x_1 + L_1) = x_p + L_p\}$$

für die Isometrien $\varphi : (L_1^{\#,p}/L_1, \overline{b_1}) \rightarrow (L_p^{\#,p}/L_p, -\overline{b_p})$

Konstruktion von Obergittern

- Die ganzen Obergitter von M mit Index p^s haben die Form

$$L_\varphi := \{(x_1, x_p) \in L_1^{\#,p} \perp L_p^{\#,p} \mid \varphi(x_1 + L_1) = x_p + L_p\}$$

für die Isometrien $\varphi : (L_1^{\#,p}/L_1, \overline{b_1}) \rightarrow (L_p^{\#,p}/L_p, -\overline{b_p})$

- Damit L_φ invariant unter $\sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_p)$ ist, muss $\varphi \circ \sigma_1 = \sigma_p \circ \varphi$ gelten.

Konstruktion von Obergittern

- Die ganzen Obergitter von M mit Index p^s haben die Form

$$L_\varphi := \{(x_1, x_p) \in L_1^{\#,p} \perp L_p^{\#,p} \mid \varphi(x_1 + L_1) = x_p + L_p\}$$

für die Isometrien $\varphi : (L_1^{\#,p}/L_1, \overline{b_1}) \rightarrow (L_p^{\#,p}/L_p, -\overline{b_p})$

- Damit L_φ invariant unter $\sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_p)$ ist, muss $\varphi \circ \sigma_1 = \sigma_p \circ \varphi$ gelten.
- Für $c \in C_{\text{Aut}(L_1)}(\sigma_1)$ ist $L_\varphi \cong L_{\varphi c}$.

Konstruktion von Obergittern

- Die ganzen Obergitter von M mit Index p^s haben die Form

$$L_\varphi := \{(x_1, x_p) \in L_1^{\#,p} \perp L_p^{\#,p} \mid \varphi(x_1 + L_1) = x_p + L_p\}$$

für die Isometrien $\varphi : (L_1^{\#,p}/L_1, \overline{b_1}) \rightarrow (L_p^{\#,p}/L_p, -\overline{b_p})$

- Damit L_φ invariant unter $\sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_p)$ ist, muss $\varphi \circ \sigma_1 = \sigma_p \circ \varphi$ gelten.
- Für $c \in C_{\text{Aut}(L_1)}(\sigma_1)$ ist $L_\varphi \cong L_{\varphi c}$.
- Damit können wir die Obergitter aufzählen, indem wir die relevanten Isometrien modulo $C_{\text{Aut}(L_1)}(\sigma_1)$ durchgehen.

Konstruktion von Obergittern

- Die ganzen Obergitter von M mit Index p^s haben die Form

$$L_\varphi := \{(x_1, x_p) \in L_1^{\#,p} \perp L_p^{\#,p} \mid \varphi(x_1 + L_1) = x_p + L_p\}$$

für die Isometrien $\varphi : (L_1^{\#,p}/L_1, \overline{b_1}) \rightarrow (L_p^{\#,p}/L_p, -\overline{b_p})$

- Damit L_φ invariant unter $\sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_p)$ ist, muss $\varphi \circ \sigma_1 = \sigma_p \circ \varphi$ gelten.
- Für $c \in C_{\text{Aut}(L_1)}(\sigma_1)$ ist $L_\varphi \cong L_{\varphi c}$.
- Damit können wir die Obergitter aufzählen, indem wir die relevanten Isometrien modulo $C_{\text{Aut}(L_1)}(\sigma_1)$ durchgehen.
- Bemerkung: In vielen Fällen können wir einfach alle ganzen Obergitter von M mit Index p^s aufzählen, ohne auf σ -Invarianz zu achten; so erhalten wir ggf. noch mehr Gitter!

Alle Teilschritte können nun zu einem Algorithmus zusammengesetzt werden.

$n \backslash \ell$	1	2	3	5	6	7	11	14	15	23
2	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—
4	—	1	1	—	—	—	1	1	—	1
6	—	—	1	—	—	1	1	—	—	—
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	—
10	—	—	1	—	—	—	1	—	—	—
12	—	2	1	1	1	—	—	1	1	—
14	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—
16	2	1	2	—	1	3	—	—	1	—
18	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—
20	—	1	3	—	1	—	—	—	—	—
22	—	—	$2(1^*)$	—	—	—	—	—	—	—
24	1	$8(2^*)$	1	1	$5(3^*)$	—	—	—	—	—
26	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—
28	—	$35(25^*)$	$3(2^*)$	—	—	—	—	—	—	—
30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
32	—	2	$67(65^*)$	—	—	—	—	—	—	—
34	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
36	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

Table: Anzahl der durch den Algorithmus konstruierten extremalen stark ℓ -modularen Gitter in Dimension $n \leq 36$ sowie ggf. der Anzahl der bisher unbekannten Gitter darunter

- Erinnerung: Es muss ein $p \in \mathbb{P}$ mit $\text{ggT}(p, \ell) = 1$ existieren, sodass $\frac{\mu_\sigma}{\Phi_m} \mid (X^{\frac{m}{p}} - 1)$

- Erinnerung: Es muss ein $p \in \mathbb{P}$ mit $\text{ggT}(p, \ell) = 1$ existieren, sodass $\frac{\mu_\sigma}{\Phi_m} \mid (X^{\frac{m}{p}} - 1)$
- \rightsquigarrow Wie stark ist diese Voraussetzung?

- Erinnerung: Es muss ein $p \in \mathbb{P}$ mit $\text{ggT}(p, \ell) = 1$ existieren, sodass $\frac{\mu_\sigma}{\Phi_m} \mid (X^{\frac{m}{p}} - 1)$
- \rightsquigarrow Wie stark ist diese Voraussetzung?
- Dazu: Gitter charakterisieren, die **nicht** auf diese Weise konstruiert werden können.

Sei $\ell = 3$, $n = 24$.

Vollständigkeit - Beispiel

Sei $\ell = 3$, $n = 24$.

Die möglichen Automorphisentypen von Ordnung $\in \mathbb{P}_{\neq 3}$ sind:

$2 - (12, 12) - 12 - (6, 6)$ (1 Fixgitter)

$2 - (0, 24) - 0 - (0, 12)$ (1 Fixgitter)

$5 - (8, 16) - 4 - (8, 4)$ (5 Fixgitter)

$5 - (8, 16) - 4 - (4, 8)$ (4 Fixgitter)

$5 - (0, 24) - 0 - (0, 12)$ (1 Fixgitter)

$7 - (0, 24) - 0 - (0, 12)$ (1 Fixgitter)

$11 - (4, 20) - 2 - (2, 10)$ (1 Fixgitter)

$13 - (0, 24) - 0 - (0, 12)$ (1 Fixgitter)

Vollständigkeit - Beispiel

Sei $\ell = 3$, $n = 24$.

Die möglichen Automorphisentypen von Ordnung $\in \mathbb{P}_{\neq 3}$ sind:

$$2 - (12, 12) - 12 - (6, 6) \quad (1 \text{ Fixgitter})$$

$$2 - (0, 24) - 0 - (0, 12) \quad (1 \text{ Fixgitter})$$

$$5 - (8, 16) - 4 - (8, 4) \quad (5 \text{ Fixgitter})$$

$$5 - (8, 16) - 4 - (4, 8) \quad (4 \text{ Fixgitter})$$

$$5 - (0, 24) - 0 - (0, 12) \quad (1 \text{ Fixgitter})$$

$$7 - (0, 24) - 0 - (0, 12) \quad (1 \text{ Fixgitter})$$

$$11 - (4, 20) - 2 - (2, 10) \quad (1 \text{ Fixgitter})$$

$$13 - (0, 24) - 0 - (0, 12) \quad (1 \text{ Fixgitter})$$

Für $12 < \varphi(m) \leq 24$ und da m keine Primteiler > 13 hat:
 $m \in \{25, 27, 32, 33, 40, 44, 45, 48, 50, 54, 60, 66, 72, 84, 90\}$.

$m = 25$: $\Phi_{25} \mid \mu_\sigma, \frac{\mu_\sigma}{\Phi_{25}} \mid (X^5 - 1) \Rightarrow$ wird von Alg. gefunden.

$m = 25$: $\Phi_{25} \mid \mu_\sigma, \frac{\mu_\sigma}{\Phi_{25}} \mid (X^5 - 1) \Rightarrow$ wird von Alg. gefunden.

$m = 48$: Ang. σ^{24} hat Typ $2 - (12, 12) - 12 - (6, 6)$, dann $\Phi_{48} \nmid \mu_\sigma$.

Somit $\Phi_{16} \mid \mu_\sigma$ und $\mu_\sigma \mid (X^{24} - 1)\Phi_{16}$.

$\Rightarrow \text{Bild}(\sigma^{24} - 1)$ ist $\mathbb{Q}(\zeta_{16})$ -VR, aber

$\text{Dim}(\text{Bild}(\sigma^{24} - 1)) = 12 \nmid$

$\Rightarrow \mu_\sigma \in \{\Phi_{16}\Phi_{48}, \Phi_{48}\}$. Für $\mu_\sigma = \Phi_{48}$ ist L aber ein Ideal-Gitter über $\mathbb{Q}(\zeta_{48})$ und wird gefunden.

$m = 25$: $\Phi_{25} \mid \mu_\sigma, \frac{\mu_\sigma}{\Phi_{25}} \mid (X^5 - 1) \Rightarrow$ wird von Alg. gefunden.

$m = 48$: Ang. σ^{24} hat Typ $2 - (12, 12) - 12 - (6, 6)$, dann $\Phi_{48} \nmid \mu_\sigma$.

Somit $\Phi_{16} \mid \mu_\sigma$ und $\mu_\sigma \mid (X^{24} - 1)\Phi_{16}$.

$\Rightarrow \text{Bild}(\sigma^{24} - 1)$ ist $\mathbb{Q}(\zeta_{16})$ -VR, aber

$\text{Dim}(\text{Bild}(\sigma^{24} - 1)) = 12 \nmid$

$\Rightarrow \mu_\sigma \in \{\Phi_{16}\Phi_{48}, \Phi_{48}\}$. Für $\mu_\sigma = \Phi_{48}$ ist L aber ein Ideal-Gitter über $\mathbb{Q}(\zeta_{48})$ und wird gefunden.

\vdots

Sei L ein Gitter mit einem Automorphismus σ der Ordnung m , sodass $\frac{n}{2} < \varphi(m) \leq n$, aber L kann nicht durch den Algorithmus gefunden werden.

Sei L ein Gitter mit einem Automorphismus σ der Ordnung m , sodass $\frac{n}{2} < \varphi(m) \leq n$, aber L kann nicht durch den Algorithmus gefunden werden.

Betrachte die charakteristischen Polynome

$$\chi_\sigma := \Phi_{d_1}^{c_1} \cdots \Phi_{d_k}^{c_k}$$

für die Teiler $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$ von m .

Sei L ein Gitter mit einem Automorphismus σ der Ordnung m , sodass $\frac{n}{2} < \varphi(m) \leq n$, aber L kann nicht durch den Algorithmus gefunden werden.

Betrachte die charakteristischen Polynome

$$\chi_\sigma := \Phi_{d_1}^{c_1} \cdots \Phi_{d_k}^{c_k}$$

für die Teiler $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$ von m .

- Für Ordnung m : $\text{kgV}\{d_i | c_i > 0\} \stackrel{!}{=} m$.

Sei L ein Gitter mit einem Automorphismus σ der Ordnung m , sodass $\frac{n}{2} < \varphi(m) \leq n$, aber L kann nicht durch den Algorithmus gefunden werden.

Betrachte die charakteristischen Polynome

$$\chi_\sigma := \Phi_{d_1}^{c_1} \cdots \Phi_{d_k}^{c_k}$$

für die Teiler $d_1 < d_2 < \cdots < d_k$ von m .

- Für Ordnung m : $\text{kgV}\{d_i \mid c_i > 0\} \stackrel{!}{=} m$.
- Wenn

$$c_k = 1 \text{ und } \text{kgV}\{d_i \mid i \in \{1, \dots, k-1\} \text{ und } c_i > 0\} \mid \frac{m}{p}$$

für ein $p \in \mathbb{P}$, $\text{ggT}(p, \ell) = 1$ erfüllt ist, wird L gefunden.

Kennt man für eine Menge von Primteiler $p_1, \dots, p_t \mid m$ die Typen

$$\begin{aligned} p_1 - (n_{1,1}, \dots \\ \vdots \\ p_t - (n_{t,1}, \dots \end{aligned}$$

der Automorphismen $\sigma^{\frac{m}{p_1}}, \sigma^{\frac{m}{p_2}}, \dots, \sigma^{\frac{m}{p_t}}$, so muss $c := (c_1, \dots, c_k)$ eine Lösung von $cM = (n_{1,1}, n_{2,1}, \dots, n_{t,1}, n)$ mit der Matrix

$$M \in \mathbb{N}_0^{k \times (t+1)}, \quad M_{i,j} := \begin{cases} \varphi(d_i) & , d_i \mid \frac{m}{p_j} \text{ oder } j = t+1 \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

sein.

Für $p \mid m$ ist

$$|\sigma_1| = \text{kgV}\{d_i \mid \nu_p(d_i) < \nu_p(m) \text{ und } c_i > 0\}.$$

$$|\sigma_p| = \text{kgV}\{d_i \mid \nu_p(d_i) = \nu_p(m) \text{ und } c_i > 0\}.$$

Für $p \mid m$ ist

$$|\sigma_1| = \text{kgV}\{d_i \mid \nu_p(d_i) < \nu_p(m) \text{ und } c_i > 0\}.$$

$$|\sigma_p| = \text{kgV}\{d_i \mid \nu_p(d_i) = \nu_p(m) \text{ und } c_i > 0\}.$$

\rightsquigarrow Wenn für $\sigma^{\frac{m}{p}}$ alle möglichen Fix- oder Bildgitter aufgezählt werden können, muss mindestens eines davon einen Automorphismus der passenden Ordnung haben.

Seien $p_1, p_2 \mid m$.

Wenn für alle Faktoren $\Phi_{d_i} \mid \chi_\sigma$, immer *entweder* $\nu_{p_1}(d_i) = \nu_{p_1}(m)$
oder $\nu_{p_2}(d_i) = \nu_{p_2}(m)$ gilt, induzieren p_1 und p_2 dasselbe
Teilgitter.

Seien $p_1, p_2 \mid m$.

Wenn für alle Faktoren $\Phi_{d_i} \mid \chi_\sigma$, immer *entweder* $\nu_{p_1}(d_i) = \nu_{p_1}(m)$
oder $\nu_{p_2}(d_i) = \nu_{p_2}(m)$ gilt, induzieren p_1 und p_2 dasselbe
Teilgitter.

\rightsquigarrow Index 1!

Seien $p_1, p_2 \mid m$.

Wenn für alle Faktoren $\Phi_{d_i} \mid \chi_\sigma$, immer *entweder* $\nu_{p_1}(d_i) = \nu_{p_1}(m)$ oder $\nu_{p_2}(d_i) = \nu_{p_2}(m)$ gilt, induzieren p_1 und p_2 dasselbe Teilgitter.

\rightsquigarrow Index 1!

z.B: $\mu_\sigma = \Phi_{12}\Phi_{20}$, dann induzieren σ^{12} und σ^{20} dasselbe Teilgitter.

Satz

Sei L ein extremales 3-modulares Gitter in einem bilinearen Vektorraum (V, b) der Dimension 24. Dann hat L keine Automorphismen der Ordnung 7 sowie der Ordnung $p \in P_{\geq 13}$. Ist $\sigma \in \text{Aut}(L)$ von Ordnung m mit $12 < \varphi(m) \leq 24$, so ist $m \in \{27, 33, 48, 54, 60, 66, 72\}$. Außerdem gelten folgende Einschränkungen:

- $m = 27 \Rightarrow \Phi_{27} | \mu_\sigma$
- $m = 33 \Rightarrow \chi_\sigma = \Phi_1^2 \Phi_3 \Phi_{11}^2$
- $m = 48 \Rightarrow \chi_\sigma = \Phi_{16} \Phi_{48}$
- $m = 54 \Rightarrow \Phi_{24} | \mu_\sigma$ und σ^{27} hat Typ $2 - (0, 24) - 0 - (0, 12)$.
- $m = 60 \Rightarrow \chi_\sigma = \Phi_4^2 \Phi_{12} \Phi_{20}^2$
- $m = 66 \Rightarrow \mu_\sigma | \Phi_2 \Phi_6 \Phi_{22} \Phi_{66}$
- $m = 72 \Rightarrow \Phi_8 | \mu_\sigma$

Methoden zur Analyse der charakteristischen Polynome in MAGMA implementiert und verschiedene ℓ und n ausgewertet.

Vielen Dank für eure Aufmerksamkeit!