

Extremale Gitter mit großen Automorphismen

MASTERARBEIT

von Simon Berger

Vorgelegt am Lehrstuhl D für Mathematik der RWTH-Aachen University

bei Prof. Dr. Gabriele Nebe (1. Prüferin)
und Prof. Dr. Markus Kirschmer (2. Prüfer)

11. August 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Grundbegriffe	4
2.1	Quadratische Vektorräume	4
2.2	Modulare Gitter	7
3	Ideal-Gitter	12
3.1	Definitionen	12
3.2	Klassifikation	15
4	Literaturverzeichnis	18

1 Einleitung

2 Grundbegriffe

§ 2.1 Quadratische Vektorräume

Wir wiederholen zunächst einige wichtige Begriffe aus der Gittertheorie, welche wir in der Folgenden Arbeit häufig benötigen werden. Zunächst benötigen wir das Konzept eines quadratischen Vektorraumes. Die nun angeführten Definitionen sind [Kne02, Def. (2.1)] entnommen.

(2.1.1) Definition

- (i) Sei A ein Ring und E ein A -Modul. Für eine symmetrische Bilinearform $b : E \times E \rightarrow A$ heißt das Paar (E, b) ein *bilinearer A -Modul* (bzw. falls A Körper ein *bilinearer A -Vektorraum*).
- (ii) Eine Abbildung $q : E \rightarrow A$ mit den Eigenschaften

$$q(ax) = a^2q(x) \quad \text{für } a \in A, x \in E$$

$$q(x + y) = q(x) + q(y) + b_q(x, y)$$

mit einer symmetrischen Bilinearform b_q heißt *quadratische Form*. Ein solches Paar (E, q) heißt *quadratischer A -Modul* (bzw. falls A Körper ein *quadratischer A -Vektorraum*).

- (iii) Eine *isometrische Abbildung* (oder kurz *Isometrie*) zwischen zwei bilinearen Moduln (E, b) und (E', b') ist ein Modulisomorphismus $f : E \rightarrow E'$ mit $b(x, y) = b'(f(x), f(y))$.
- (iv) Analog ist eine Isometrie zwischen zwei quadratischen Moduln (E, q) und (E', q') ist ein Modulisomorphismus $f : E \rightarrow E'$ mit $q(x) = q'(f(x))$ für alle $x \in E$.

(2.1.2) Bemerkung

Auf einem quadratischen A -Modul (E, q) ist $b_q : E \times E \rightarrow A, (x, y) \mapsto q(x + y) - q(x) - q(y)$ eine symmetrische Bilinearform. Andersherum erhält man aus jeder symmetrischen Bilinearform b auf E eine quadratische Form $q_b : E \rightarrow A, x \mapsto b(x, x)$. Es ist dabei $b_{q_b} = 2b$ und $q_{b_q} = 2q$. Ist $2 \in A^*$, so kann man daher stattdessen $q_b : E \rightarrow A, x \mapsto \frac{1}{2}b(x, x)$ wählen, womit die Konzepte der quadratischen Formen und der symmetrischen Bilinearformen auf E vertauschbar sind.

Nun folgen Definitionen zum Gitterbegriff, zu finden in [Kne02, Def. (14.1), (14.2)].

(2.1.3) Definition

- (i) Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum mit Basis (b_1, \dots, b_n) . Ein R -Gitter in V ist ein R -Untermodul L von V , zu dem Elemente $a, b \in K^*$ existieren mit $a \sum_{i=1}^n Rb_i \subseteq L \subseteq b \sum_{i=1}^n Rb_i$.
- (ii) Sei b eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V und L ein Gitter in V . Dann ist auch $L^\# := \{x \in V \mid b(x, y) \in R \text{ für alle } y \in L\}$ ein R -Gitter und heißt *das zu L duale Gitter* (bzgl. b).
- (iii) Für $m \in \mathbb{N}$ heißt das Gitter $L^{\#,m} := \frac{1}{m}L \cap L^\#$ *partielles Dualgitter* von L .

(iv) Sei (V, b) ein bilinearer K -Vektorraum und L ein Gitter in V . Die Gruppe $\text{Aut}(L) := \{\sigma : V \rightarrow V \mid \sigma \text{ ist Isometrie und } \sigma(L) = L\}$ heißt die *Automorphismengruppe* von L .

(2.1.4) Bemerkung

Falls R ein Hauptidealbereich ist, vereinfacht sich die Definition erheblich, da Teilmoduln von endlich erzeugten freien Moduln über Hauptidealbereichen wieder frei sind. Ein R -Gitter ist per Definition zwischen zwei freien Moduln eingespannt, also sind die R -Gitter in diesem Fall genau die freien R -Moduln von Rang n .

Insbesondere interessieren uns \mathbb{Z} -Gitter in \mathbb{R}^n . Für eben solche folgen nun ein paar weitere Definitionen, abgeleitet aus [Kne02, Def. (1.7), (1.13), (14.7), (26.1)].

(2.1.5) Definition

Sei L ein \mathbb{Z} -Gitter mit Basis $B = (e_1, \dots, e_n)$ in (\mathbb{R}^n, b) , für eine symmetrische Bilinearform b .

- (i) Die Matrix $G := \text{Gram}(B) = (b(e_i, e_j))_{i,j=1}^n$ heißt *Gram-Matrix* von L , $\text{Det}(L) := \text{Det}(G)$ heißt die *Determinante* von L .
- (ii) Das Gitter L heißt *ganz*, falls $b(L, L) \subseteq \mathbb{Z}$ gilt.
- (iii) Das Gitter L heißt *gerade*, falls $b(x, x) \in 2\mathbb{Z}$ für alle $x \in L$ gilt.
- (iv) Die *Stufe* von L ist die kleinste Zahl $\ell \in \mathbb{N}$, sodass $\sqrt{\ell}L^\#$ ein gerades Gitter ist.
- (v) Das *Minimum* von L ist definiert als $\text{Min}(L) := \min\{b(x, x) \mid 0 \neq x \in L\}$.

(2.1.6) Bemerkung

- (i) Nach [Kne02, Satz (14.7)] gilt $\text{Det}(L) = |L^\# / L|$. Insbesondere ist die Determinante für \mathbb{Z} -Gitter unabhängig von der Wahl der Basis. Allgemeiner ist die Determinante von R -Gittern modulo $(R^*)^2$ eindeutig bestimmt [Kne02, (1.13)].
- (ii) Direkt aus der Definition des dualen Gitters folgt: L ist ganz genau dann, wenn $L \subseteq L^\#$.
- (iii) Ein gerades Gitter L ist notwendigerweise ganz, denn seien $x, y \in L$, dann ist
$$b(x, y) = \frac{b(x + y, x + y) - b(x, x) - b(y, y)}{2} \in \mathbb{Z}.$$
- (iv) Ist $B = (e_1, \dots, e_n)$ eine Basis von L , dann ist $B^* := (e_1^*, \dots, e_n^*)$, wobei $b(e_i, e_j^*) = \delta_{ij}$, eine Basis von $L^\#$. Es gilt $\text{Gram}(B^*) = \text{Gram}(B)^{-1}$ [Kne02, (1.14)].

Da wir uns im Zuge dieser Arbeit in der Regel mit geraden Gittern quadratfreier Stufe beschäftigen, ist das folgende Lemma aus [Jü15, Lemma 1.1.1] von großer Bedeutung.

(2.1.7) Lemma

Sei L ein gerades Gitter der Stufe ℓ , wobei ℓ quadratfrei. Dann ist ℓ gleichzeitig die kleinste natürliche Zahl a , sodass $aL^\# \subseteq L$ (also der Exponent der Diskriminantengruppe $L^\# / L$).

§ 2.2 Modulare Gitter

Wir kommen nun zum ursprünglich von Quebbemann eingeführten Konzept *modularer Gitter* [Que95]. Die hier verwendete Definition ist in [BFS05] zu finden.

(2.2.1) Definition

Sei L ein gerades Gitter und $\ell \in \mathbb{N}$.

- (i) L heißt ℓ -modular, falls $L \cong \sqrt{\ell}L^\#$.
- (ii) L heißt *stark* ℓ -modular, falls $L \cong \sqrt{m}L^{\#,m}$ für alle $m|l$, sodass $\text{ggT}(m, \frac{\ell}{m}) = 1$.

(2.2.2) Lemma

Ist L ein gerades Gitter der Dimension n .

- (i) Ist L ℓ -modular, dann ist $\text{Det}(L) = \ell^{\frac{n}{2}}$. Insbesondere muss daher n gerade sein.
- (ii) Ist L ℓ -modular und ℓ quadratfrei, dann hat L die Stufe ℓ .
- (iii) Ist L stark ℓ -modular, von Stufe ℓ und ℓ quadratfrei, dann ist L auch ℓ -modular.

Beweis:

- (i) Nach Bem. (2.1.6) ist $\text{Det}(L^\#) = \text{Det}(L)^{-1}$. Somit

$$\text{Det}(L) = \text{Det}(\sqrt{\ell}L^\#) = \ell^n \text{Det}(L^\#) = \frac{\ell^n}{\text{Det}(L)}.$$

Also folgt die Behauptung.

- (ii) Sei a die Stufe von L , dann ist $\sqrt{a}L^\#$ gerade und hat insbesondere eine ganzzahlige Determinante. Nach (i) erhalten wir $\text{Det}(\sqrt{a}L^\#) = \left(\frac{a^2}{\ell}\right)^{\frac{n}{2}} \stackrel{!}{\in} \mathbb{Z}$. Da ℓ quadratfrei sieht man also $\ell|a$. Andersherum ist $L \cong \sqrt{\ell}L^\#$, also selbstverständlich auch $\sqrt{\ell}L^\#$ gerade, somit $a|\ell$.

ℓ	1	2	3	5	6	7	11	14	15	23
k_1	24	16	12	8	8	6	4	4	4	2

Tabelle 2.1: k_1 Werte nach ℓ .

(iii) L hat quadratfreie Stufe ℓ , also ist $\ell L^\# \subseteq L$ nach Lemma (2.1.7). Wir erhalten

$$L \cong \sqrt{\ell} L^{\#, \ell} = \sqrt{\ell} \left(\frac{1}{\ell} L \cap L^\# \right) = \sqrt{\ell} L^\#. \quad \square$$

Quebbemann zeigte in [Que95], dass die Theta-Reihen eines modularen Gitters Modulform einer bestimmten Gruppe ist. Außerdem hat die Algebra der Modulformen eine besonders einfache Gestalt, wenn die Summe der Teiler von ℓ selbst ein Teiler von 24 ist. Konkret ist diese Eigenschaft für $\ell \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$ erfüllt. In der Literatur sind diese Stufen also besonders interessant. Es lässt sich zeigen (vgl. z.B. [Jü15, 1.2.2]), dass der Raum der Modulformen der erwähnten Gruppe in diesen Fällen ein eindeutiges Element θ der Form $1 + O(q^d)$ mit möglichst großem d und ganzzahligen Koeffizienten hat. Wir wollen den Begriff eines *extremalen Gitters* definieren als ein Gitter, welches ein möglichst großes Minimum besitzt, also ein Gitter mit Thetareihe θ . In unseren Spezialfällen gilt $d = 1 + \lfloor \frac{n}{k_1} \rfloor$, wobei k_1 Tabelle (2.1) zu entnehmen ist.

Wir können also definieren:

(2.2.3) Definition

Sei L ein ℓ -modulares Gitter der Dimension n und $\ell \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$. Erfüllt L die Schranke

$$\text{Min}(L) \geq 2 \left(1 + \left\lfloor \frac{n}{k_1} \right\rfloor \right)$$

wobei k_1 gewählt ist wie in Tabelle (2.1), so nennen wir L ein *extremales Gitter*.

Die Dimensionen, welche jeweils echt von k_1 geteilt werden bezeichnet man häufig auch als *Sprungdimensionen*, da in diesen Fällen das Minimum im Vergleich zur nächst kleineren Dimension um 2 nach oben "springt".

Da die Determinante für ℓ -modulare Gitter in fester Dimension nach Lemma (2.2.2) eindeutig bestimmt ist, liefern modulare Gitter mit möglichst großem Minimum die dichtesten Kugelpackungen. In diesem Sinne ist die Klassifikation extremer Gitter besonders interessant. Definiert man für ein n -dimensionales Gitter L den Wert

$$\gamma(L) := \frac{\text{Min}(L)}{\text{Det}(L)^{\frac{1}{n}}} \quad (2.1)$$

(die *Hermite-Konstante*), so bedeutet eine größerer Wert für γ ein dichteres Gitter (vgl. [CS93, (1.5)]). Vergleicht man die hypothetischen Hermite-Konstanten extremer Gitter (deren Existenz bisher nach [Jü15] noch nicht ausgeschlossen wurde) mit denen der dichtesten bisher bekannten Gitter (zu finden in [NS]), so fällt auf, dass die Entdeckung extremer Gitter in den folgenden Stufen und Dimensionen ≤ 48 jeweils neue dichteste Kugelpackungen liefern würden:

- 3-modular und 36-dimensional
- 3-modular und 38-dimensional
- 5-modular und 32-dimensional
- 5-modular und 36-dimensional
- 5-modular und 40-dimensional
- 5-modular und 44-dimensional
- 5-modular und 48-dimensional
- 6-modular und 40-dimensional

- 7-modular und 32-dimensional
- 7-modular und 34-dimensional
- 7-modular und 38-dimensional
- 7-modular und 40-dimensional
- 7-modular und 46-dimensional
- 11-modular und 18-dimensional
- 11-modular und 22-dimensional
- 14-modular und 28-dimensional
- 15-modular und 28-dimensional

Wie man sieht, ist die Erforschung extremaler modularer Gitter also von großem Interesse für die Gittertheorie. Im nächsten Kapitel beschreiben wir nun eine Vorgehensweise, modulare Gitter zu klassifizieren, welche zusätzlich eine Struktur als gebrochenes Ideal eines Zahlkörpers aufweisen, sogenannte *Ideal-Gitter*.

3 Ideal-Gitter

§ 3.1 Definitionen

Wir geben nun die Definition eines Ideal-Gitter abgeleitet aus [BFS05] an.

(3.1.1) Definition

- (i) Ein (*algebraischer*) *Zahlkörper* ist eine endliche Erweiterung des Körpers \mathbb{Q} .
- (ii) Der *Ring der ganzen Zahlen* eines Zahlkörpers K ist der Ring

$$\mathbb{Z}_K := \{a \in K \mid \mu_{a,\mathbb{Q}}(X) \in \mathbb{Z}[X]\}.$$

- (iii) Die *Norm* eines Ideals \mathcal{I} von \mathbb{Z}_K ist definiert als

$$\mathcal{N}(\mathcal{I}) := |\mathbb{Z}_K / \mathcal{I}|.$$

- (iv) Ein Zahlkörper K heißt *CM-Körper*, falls K total-imaginär ist und ein total-reeller Teilkörper $K^+ \leq K$ existiert mit $[K : K^+] = 2$.

(v) Sei K ein CM-Körper und \mathbb{Z}_K der Ring der ganzen Zahlen in K . Ein *Ideal-Gitter* ist ein Gitter (\mathcal{I}, b) , sodass \mathcal{I} ein gebrochenes \mathbb{Z}_K -Ideal ist und $b : \mathcal{I} \times \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische positiv-definite Bilinearform mit $b(\lambda x, y) = b(x, \bar{\lambda}y)$ für $x, y \in \mathcal{I}$ und $\lambda \in \mathbb{Z}_K$. Die Abbildung $\bar{}$ bezeichnet dabei die herkömmliche komplexe Konjugation.

(3.1.2) Bemerkung

Die Eigenschaften der Bilinearform in der obigen Definition sind nach [BFS05] äquivalent dazu, dass ein total-positives Element $\alpha \in K^+$ (das bedeutet $\iota(\alpha) > 0$ für alle Einbettungen $\iota : K^+ \hookrightarrow \mathbb{R}$) existiert mit $b(x, y) = \text{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha x \bar{y})$. Wir können Ideal-Gitter daher auch durch die Notation (\mathcal{I}, α) beschreiben.

Ein Ideal-Gitter \mathcal{I} kann immer auch als \mathbb{Z} -Gitter betrachtet werden, indem man \mathbb{Z}_K -Erzeuger von \mathcal{I} und eine \mathbb{Z} -Basis von \mathbb{Z}_K zu \mathbb{Z} -Erzeugern von \mathcal{I} kombiniert. Im Folgenden bezeichnen wir daher \mathcal{I} als gerade, ganz, modular, etc., falls \mathcal{I} als \mathbb{Z} -Gitter diese Eigenschaften erfüllt und $\mathcal{I}^\#$ als das Dualgitter von \mathcal{I} als \mathbb{Z} -Gitter.

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit Ideal-Gittern über zyklotomischen Zahlkörpern, also Körpern der Form $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ für primitive m -te Einheitswurzeln ζ_m . Solche Körper sind CM-Körper mit maximalem total-reellem Teilkörper $K^+ = \mathbb{Q}(\zeta_m + \bar{\zeta}_m)$. Solche Körper erhalten wir, indem wir Automorphismen von \mathbb{Z} -Gittern betrachten, die wie primitive Einheitswurzeln operieren. Diese Aussagen wollen wir nun ein wenig präzisieren. Dazu eine kurze Definition:

(3.1.3) Definition

Sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$.

1. Ein Element $\zeta \in K$ heißt primitive m -te Einheitswurzel, falls $|\langle \zeta \rangle| = m$ ist.

2. Gilt $\text{char}(K) \nmid m$ und sind ζ_1, \dots, ζ_n die primitiven m -ten Einheitswurzeln in einem Zerfällungskörper von $X^m - 1$, dann heißt das Polynom

$$\Phi_m(X) := \prod_{i=1}^n (X - \zeta_i)$$

das m -te *Kreisteilungspolynom*.

Einige wichtige bekannte Fakten zu Kreisteilungspolynomen (z.B. zu finden in [Mol11, Kap. 1]), sind die folgenden:

(3.1.4) Satz

- (i) Gilt $\text{char}(K) \nmid m$, so enthält der Zerfällungskörper von $X^m - 1$ genau $\varphi(m)$ primitive m -te Einheitswurzeln. Dabei ist $\varphi(m) = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*|$ die *Eulersche φ -Funktion*.
- (ii) Ist $\text{char}(K) = 0$, dann ist $\Phi_m \in \mathbb{Z}[X]$ und $X^m - 1 = \prod_{d|m} \Phi_d$.
- (iii) Speziell für $K = \mathbb{Q}$ gilt $[\mathbb{Q}(\zeta_m) : \mathbb{Q}] = \varphi(m)$ und $\Phi(m) \in \mathbb{Q}[X]$ ist irreduzibel.

Wir sehen also, dass ζ_m genau dann eine primitive m -te Einheitswurzel ist, wenn sie das Minimalpolynom Φ_m hat. Wir können \mathbb{Z} -Gitter somit auf die folgende Weise als Ideal-Gitter auffassen (vgl. [Neb13, Abschnitt (5.2)]):

(3.1.5) Lemma

Sei L ein \mathbb{Z} -Gitter in einem bilinearen Vektorraum (V, b) und $\sigma \in \text{Aut}(L)$ mit $\mu_\sigma = \Phi_m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Dann ist L isomorph zu einem Ideal-Gitter in $\mathbb{Q}(\zeta_m)$.

Beweis:

Durch die Operation von σ wird $\mathbb{Q}L$ mittels $\zeta_m \cdot x := \sigma(x)$ für $x \in \mathbb{Q}L$ zu einem ein-dimensionalen $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ -Vektorraum und L zu einem ein $\mathbb{Z}[\zeta_m]$ -Modul. Wegen $\mathbb{Z}[\zeta_m] = \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}[\zeta_m]}$ ist L also ein gebrochenes Ideal in $\mathbb{Q}(\zeta_m)$.

Da σ ein Automorphismus ist, ist die Bilinearform $b : L \times L \rightarrow \mathbb{Q}$ des Vektorraums ζ_m -invariant. Sei nun $\lambda = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \zeta_m^i \in \mathbb{Z}[\zeta_m]$. Es ergibt sich

$$b(\lambda x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b(\zeta_m^i x, y) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b(x, \zeta_m^{-i} y) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i b(x, \overline{\zeta_m^i} y) = b(x, \overline{\lambda} y). \quad \square$$

Über die Klassifikation der Ideal-Gitter erhalten wir also alle \mathbb{Z} -Gitter mit Minimalpolynom Φ_m . Wie diese Klassifikation durchgeführt werden kann, erläutern wir im nächsten Abschnitt.

§ 3.2 Klassifikation

Die hier beschriebene Methodik ist an [Jü15, Abschnitt (3.2)] und [Neb13, Abschnitt (5.2)] angelehnt.

In diesem Abschnitt sei stets $K = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ für eine primitive m -te Einheitswurzel ζ_m , $\mathbb{Z}_K = \mathbb{Z}[\zeta_m]$ der Ring der ganzen Zahlen in K und $K^+ = \mathbb{Q}(\zeta_m + \overline{\zeta_m})$ der maximale total-reelle Teilkörper von K .

(3.2.1) Definition

Das \mathbb{Z}_K -ideal

$$\Delta := \{x \in K \mid \text{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(x\overline{y}) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } y \in \mathbb{Z}_K\}$$

bezeichnet die *inverse Different* von \mathbb{Z}_K .

Wir können nun das Dual eines Idealgitters mithilfe der inversen Differentiale ausdrücken.

(3.2.2) Lemma

Sei (\mathcal{I}, α) ein Ideal-Gitter. Dann ist $\mathcal{I}^\# = \bar{\mathcal{I}}^{-1} \Delta \alpha^{-1}$ das Dualgitter von \mathcal{I} als \mathbb{Z} -Gitter.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}^\# &= \{x \in K \mid b(x, \mathcal{I}) \subseteq \mathbb{Z}\} \\
 &= \{x \in K \mid \text{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha x \bar{\mathcal{I}}) \subseteq \mathbb{Z}\} \\
 &= \alpha^{-1} \{x \in K \mid \text{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(x \bar{\mathcal{I}}) \subseteq \mathbb{Z}\} \\
 &= \alpha^{-1} \bar{\mathcal{I}}^{-1} \{x \in K \mid \text{Spur}_{K/\mathbb{Q}}(x \overline{\mathbb{Z}_K}) \subseteq \mathbb{Z}\} \\
 &= \bar{\mathcal{I}}^{-1} \Delta \alpha^{-1}.
 \end{aligned}$$

□

Mit Blick auf modulare Gitter kann man damit die nächste Folgerung ziehen:

(3.2.3) Korollar

Sei ℓ quadratfrei und (\mathcal{I}, α) ein ganzes Ideal-Gitter der Stufe ℓ . Die Menge $\mathcal{B} := \alpha \mathcal{I} \bar{\mathcal{I}} \Delta^{-1}$ ist ein \mathbb{Z}_K -Ideal mit $\ell \mathbb{Z}_K \subseteq \mathcal{B}$ und Norm $\mathcal{N}(\mathcal{B}) = \det(\mathcal{I})$.

Beweis:

Da ℓ quadratfrei ist, gilt $\ell \mathcal{I}^\# \subseteq \mathcal{I}$ nach Lemma (2.1.7). Mit Lemma (3.2.2) bedeutet dies:

$$\begin{aligned}
 \ell \mathcal{I}^\# &\subseteq \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^\# \\
 \Leftrightarrow \ell \bar{\mathcal{I}}^{-1} \Delta \alpha^{-1} &\subseteq \mathcal{I} \subseteq \bar{\mathcal{I}}^{-1} \Delta \alpha^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ell \mathbb{Z}_K \subseteq \alpha \mathcal{I} \bar{\mathcal{I}} \Delta^{-1} \subseteq \mathbb{Z}_K.$$

Für die Norm gilt

$$\det(\mathcal{I}) = |\mathcal{I}^\# / \mathcal{I}| = |\mathbb{Z}_K / \left(\mathcal{I} \left(\mathcal{I}^\# \right)^{-1} \right)| = |\mathbb{Z}_K / \mathcal{B}| = \mathcal{N}(\mathcal{B}). \quad \square$$

Da es jeweils nur endlich viele \mathbb{Z}_K -Ideale mit bestimmter Norm gibt, existieren bei der Konstruktion von Idealgittern mit fester Determinante nur endlich viele Möglichkeiten für \mathcal{B} . Konkret wird unsere Strategie im groben daraus bestehen, alle (relevanten) Möglichkeiten für \mathcal{I} und \mathcal{B} durchzugehen und zu testen, für welche davon das Ideal $\left(\mathcal{I} \bar{\mathcal{I}} \right)^{-1} \Delta \mathcal{B}$ ein Hauptideal mit total-positivem Erzeuger $\alpha \in K^+$ ist. Dazu machen wir zunächst einige Einschränkungen, um den Suchraum zu verkleinern.

4 Literaturverzeichnis

- [BFS05] Eva Bayer Fluckiger and Ivan Suarez. Modular lattices over cyclotomic fields. *Journal of Number Theory*, 114:394–411, 2005.
- [CS93] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. *Sphere packings, lattices and groups*, volume 290 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 3rd edition, 1993.
- [Jü15] Michael Jürgens. *Nicht-Existenz und Konstruktion extremaler Gitter*. PhD thesis, Technische Universität Dortmund, März 2015.
- [Kne02] M. Kneser. *Quadratische Formen*. Springer, 2002.
- [Mol11] Richard A. Mollin. *Algebraic number theory*. CRC Press, 2nd edition, 2011.
- [Neb13] Gabriele Nebe. On automorphisms of extremal even unimodular lattices. *International Journal of Number Theory*, 09:1933–1959, 2013.
- [NS] Gabriele Nebe and N. J. A. Sloane. A Catalogue of Lattices. <http://www.math.rwth-aachen.de/~Gabriele.Nebe/LATTICES/>. Aufgerufen: 10.08.2018.
- [Que95] H. G. Quebbemann. Modular Lattices in Euclidean Spaces. *Journal of Number Theory*, 54:190–202, 1995.