Corso di Laurea Magistrale in

Ingegneria Biomedica

Esame di

Trasmissione Del Calore

TESINA

Analisi termica del transitorio 1D
relativo ad una massa tumorale nel tessuto mammario
a seguito di una termoablazione a microonde

MASONE BENEDETTA
Matr. 177470 - b.masone@studenti.unimol.it

CIRNELLI SIMONE
Matr. 177084 - s.cirnelli@studenti.unimol.it

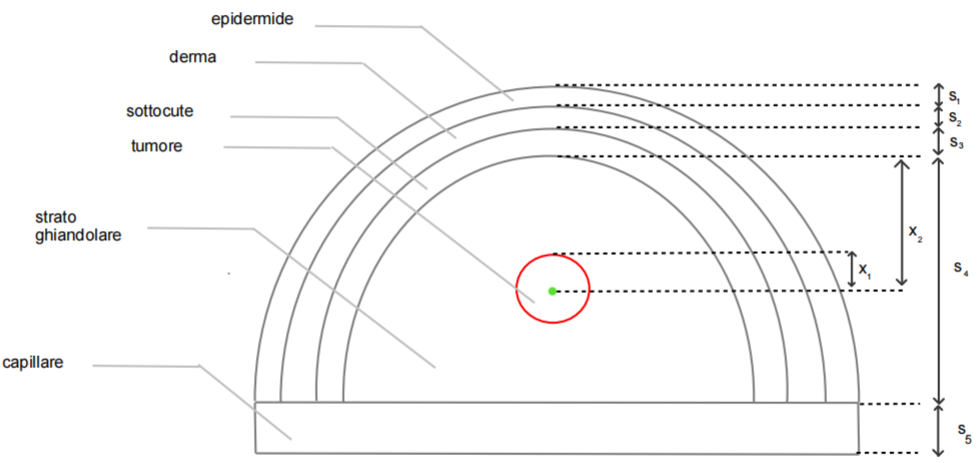
Anno Accademico 2023/2024

Dati

Qui di seguito vengono riassunti in formato tabellare diversi *parametri termodinamici* relativi a ciascuno strato biologico trattato nel problema in esame.

PARAMETRI TERMODINAMICI			**STRATI BIOLOGICI**
$T_\infty \; = \; 20\,°\mathrm{C}$	$h_\infty\,(T) \; = \; \bar{h_c} \; = \; 13.5\,W/(m^2K)$	$u_\infty \; = \; 0.2\,\mathrm{m/s}$	ARIA
$\rho_{ep} \; = \; 1000\;kg/m^3$ $A \; = \; 1.80 \cdot 10^{50}\;s^{-1}$	$k_{ep} \; = \; 0.37\;W/mK$ $\Delta H \; = \; 3.27 \cdot 10^5\;J/mol$	$c_{ep} \; = \; 3391\;J/kgK$ $\dot{Q}_{MET} \; = \; 400\,W/m^3$	EPIDERMIDE - DERMA - SOTTOCUTE
$\rho_g \; = \; 1041\;kg/m^3$ $A \; = \; 1.18 \cdot 10^{46}\;s^{-1}$	$k_g \; = \; 0.33\;W/mK$ $\Delta H \; = \; 3.02 \cdot 10^5\;J/mol$	$c_g \; = \; 2960\;J/kgK$ $\dot{Q}_{MET} \; = \; 700\,W/m^3$	STRATO GHIANDOLARE
$\rho_t \; = \; 1060\;kg/m^3$ $A \; = \; 1.18 \cdot 10^{36}\;s^{-1}$	$k_t \; = \; 0.415\;W/mK$ $\Delta H \; = \; 2.38 \cdot 10^5\;J/mol$	$c_g \; = \; 2726\;J/kgK$ $\dot{Q}_{MET} \; = \; 1400\,W/m^3$	TUMORE
$\rho_c \; = \; 1102\;kg/m^3$ $A \; = \; 5.60 \cdot 10^{63}\;s^{-1}$	$k_c \; = \; 0.46\;W/mK$ $\Delta H \; = \; 4.30 \cdot 10^5\;J/mol$	$c_c \; = \; 3306\;J/kgK$ $\dot{Q}_{MET} \; = \; 400\,W/m^3$	CAPILLARE
$\rho_b \; = \; 1050\;kg/m^3$ $A \; = \; 5.60 \cdot 10^{63}\;s^{-1}$	– $\Delta H \; = \; 4.30 \cdot 10^5\;J/mol$	$c_b \; = \; 3617\;J/kgK$ $u_b \; = \; 2 \cdot 10^{-4}\;\;\mathrm{m/s}$	SANGUE

Di seguito viene invece riportata una tabella che mostra i parametri che definiscono la *geometria* del sistema.



PARAMETRI GEOMETRICI
$s_1 \; = \; 3.5\,mm$
$s_2 \; = \; 4.0\,mm$
$s_3 \; = \; 3.5\,mm$
$s_4 \; = \; 25\,mm$
$s_5 \; = \; 10\,\mu m$
$x_1 \; = \; 2\,mm$
$x_2 \; = \; 10\,mm$

Figura 1: Geometria

Discretizzazione monodimensionale del tessuto mammario

Si consideri il tessuto mammario formato da una distribuzione in parallelo di diversi tessuti. All'interno di esso è presente una massa tumorale da trattare attraverso termoablazione.
Per ridurre la complessità del problema si effettui un'analisi monodimensionale lungo l'asse verticale x, passante lungo il tumore e avente origine in corrispondenza di quest'ultimo esattamente come mostrato in **Fig.2**.

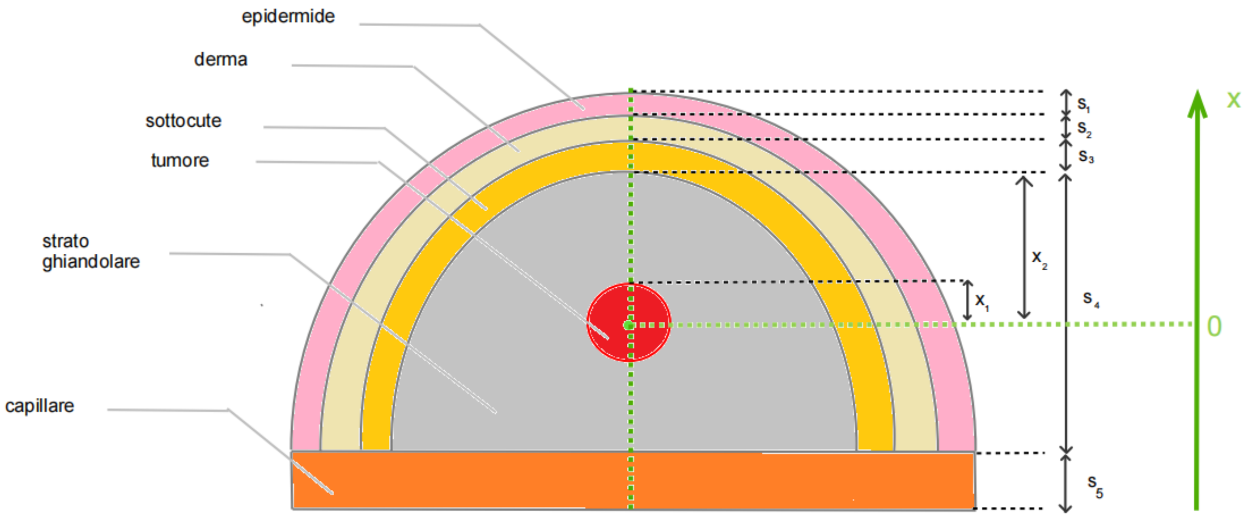


Figura 2: Schematizzazione del tessuto mammario

L'equazione generale della conduzione può essere scritta come:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \theta} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T) + \dot{Q}_{met} + \dot{Q}_p$$

Considerare la dipendenza dalla temperatura della perfusione sanguigna e delle proprietà elettriche dei tessuti, mentre la conducibilità termica può essere assunta costante.

Di seguito si definiscono le equazioni generalizzate per i singoli nodi caratteristici, supponendo tutte le potenze entranti. Per non appesantire la notazione si suppone che il passo di campionamento nella direzione z e y sia unitario, in modo da trascurarlo durante i calcoli.

Nodo 1

Il nodo 1 è posto in corrispondenza dell'interfaccia tra l'epidermide e l'ambiente circostante.
Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{c,i} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + h_\infty A(T_\infty - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \frac{\Delta x}{2} + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_{ep} c_{ep} A \frac{\Delta x}{2\Delta\theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Dividiamo per k_{ep}, per A e moltiplichiamo per Δx :

$$(T_{i-1}^{?}-T_i^{?})+h_\infty\frac{\Delta x}{k_{ep}}(T_\infty-T_i^{?})+\dot{Q}_m\frac{\Delta x}{k_{ep}}+SAR_i\rho_{ep}\frac{\Delta x^2}{2k_{ep}}+\frac{w_b(T)\rho_b c_b\Delta x}{k_{ep}}(T_b(\theta)-T_i^{?})=\rho_{ep}c_{ep}\frac{\Delta x^2}{2k_{ep}\Delta\theta}(T_i^{t+1}-T_i^t)$$

Definiamo il numero di Biot locale in corrispondenza dell'epidermide:

$$Bi_{ep}=h_\infty\frac{\Delta x}{k_{ep}}$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza dell'epidermide:

$$Fo_{ep}=\frac{k_{ep}\Delta\theta}{\rho_{ep}c_{ep}\Delta x^2}$$

Sfruttando le costanti appena definite, è possibile riscrive il bilancio come segue:

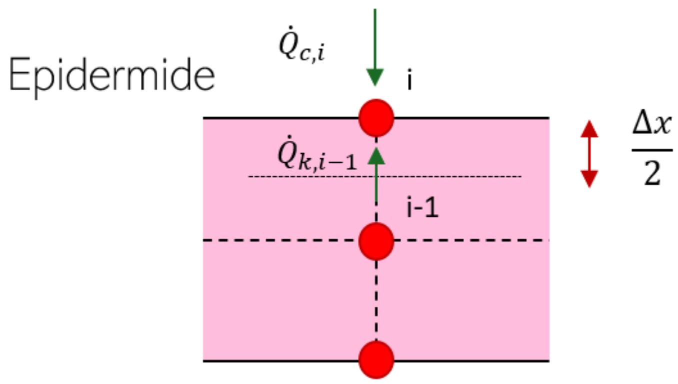
$$(T_{i-1}^{?}-T_i^{?})+Bi_{ep}(T_\infty-T_i^{?})+\dot{Q}_m\frac{\Delta x}{k_{ep}}+SAR_i\rho_{ep}\frac{\Delta x^2}{2k_{ep}}+\frac{w_b(T)\rho_b c_b\Delta x}{k_{ep}}(T_b(\theta)-T_i^{?})=\frac{1}{2Fo_{ep}}(T_i^{t+1}-T_i^t)$$

Da qui ricaviamo:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t+2Fo_{ep}\left[T_{i-1}^{?}-T_i^{?}\left(1+Bi_{ep}+\frac{w_b(T)\rho_b c_b\Delta x}{k_{ep}}\right)+Bi_{ep}T_\infty+\frac{\Delta x}{k_{ep}}\left(\dot{Q}_m+SAR_i\rho_{ep}\frac{\Delta x}{2}+w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$



Nodo 2

Il nodo 2 è posto in corrispondenza in corrispondenza dell'epidermide.
Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1}+\dot{Q}_{k,i+1}+\dot{Q}_m+\dot{Q}_p+w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta)-T_i^{?})=\frac{\Delta u}{\Delta\theta}$$

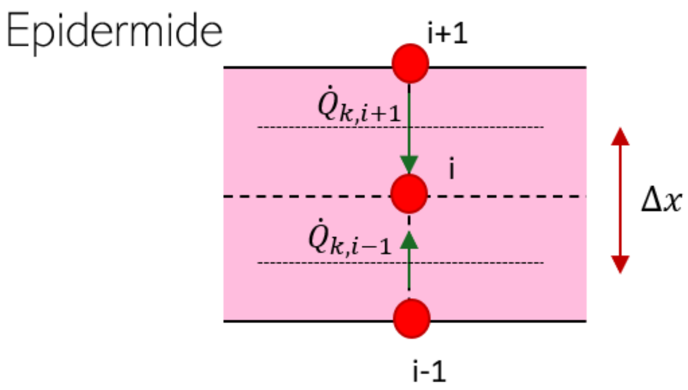
$$\frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i-1}^{?}-T_i^{?})+\frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i+1}^{?}-T_i^{?})+\dot{Q}_m+SAR_i\rho_{ep}\Delta x+w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta)-T_i^{?})=\rho_{ep}c_{ep}A\frac{\Delta x}{\Delta\theta}(T_i^{t+1}-T_i^t)$$

Dividendo per k_{ep}, per A e moltiplichiamo per Δx otteniamo che:

$$T_i^{t+1}$$

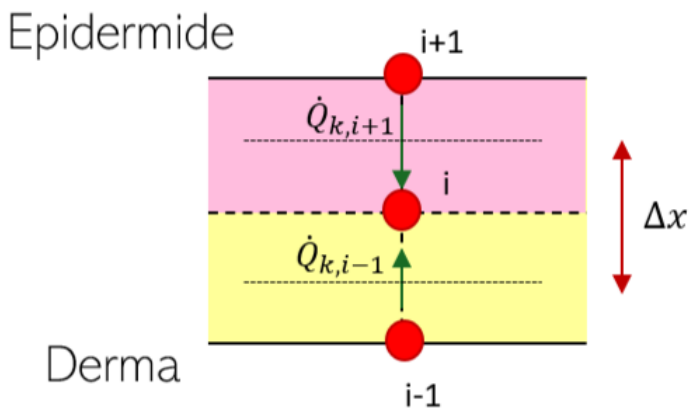
$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_{ep}\left[T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^?\left(2 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_{ep}}\right) + \frac{\Delta x}{k_{ep}}\left(\dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$



Nodo 3

Il nodo 3 è posto in corrispondenza dell'interfaccia tra l'epidermide e il derma.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

Da varie ricerche in letteratura si può ipotizzare che la densità, il calore specifico e la conducibilità del derma sono le stesse di quella dell'epidermide:

$$\frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_{ep} c_{ep} A \frac{\Delta x}{\Delta \theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Dividendo per k_{ep}, per A e moltiplichiamo per Δx otteniamo che:

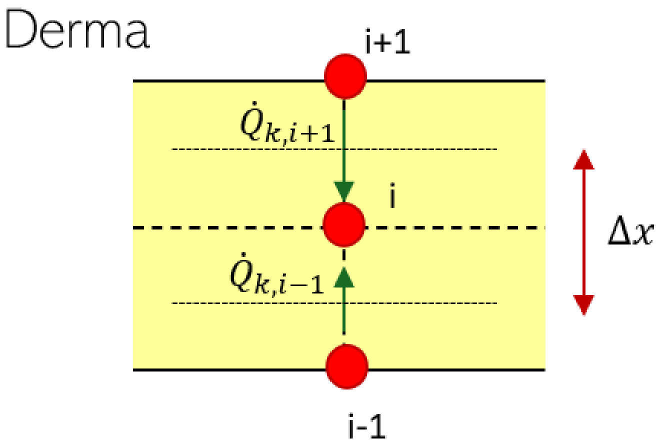
$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_{ep}\left[T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^?\left(2 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_{ep}}\right) + \frac{\Delta x}{k_{ep}}\left(\dot{Q}_m + SAR_i\rho_{ep}\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Nodo 4

Il nodo 4 è posto in corrispondenza del derma.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

Da varie ricerche in letteratura si può ipotizzare che la densità, il calore specifico e la conducibilità del derma sono le stesse di quella dell'epidermide:

$$\frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i\rho_{ep}\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_{ep}c_{ep}A\frac{\Delta x}{\Delta \theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Dividendo per k_{ep}, per A e moltiplichiamo per Δx otteniamo che:

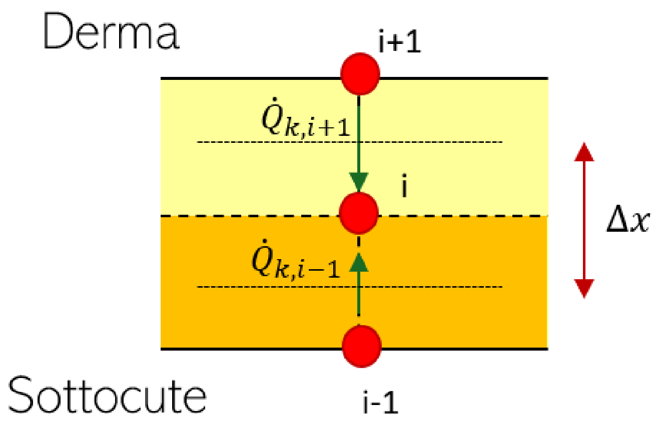
$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_{ep}\left[T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^?\left(2 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_{ep}}\right) + \frac{\Delta x}{k_{ep}}\left(\dot{Q}_m + SAR_i\rho_{ep}\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Nodo 5

Il nodo 5 è posto a cavallo dell'interfaccia tra derma e sottocute.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

Da varie ricerche in letteratura si può ipotizzare che la densità, il calore specifico e la conducibilità della sottocute sono le stesse di quella dell'epidermide:

$$\frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i\rho_{ep}\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_{ep}c_{ep}A\frac{\Delta x}{\Delta \theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Dividendo per k_{ep}, per A e moltiplichiamo per Δx otteniamo che:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_{ep}\left[T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^?\left(2 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_{ep}}\right) + \frac{\Delta x}{k_{ep}}\left(\dot{Q}_m + SAR_i\rho_{ep}\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

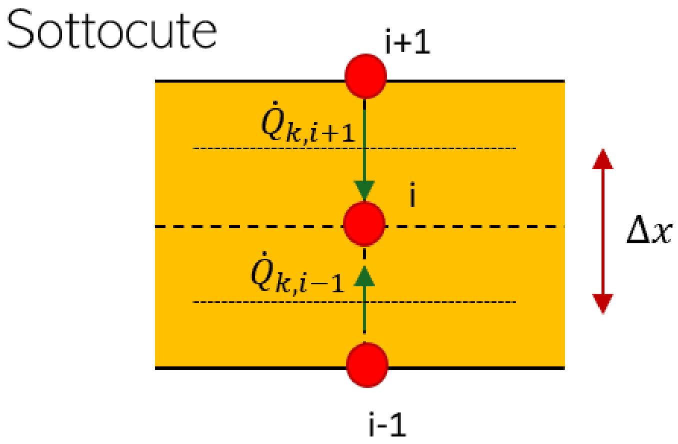
Nodo 6

Il nodo 6 è posto in corrispondenza della sottocute.
Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

Da varie ricerche in letteratura si può ipotizzare che la densità, il calore specifico e la conducibilità della sottocute sono le stesse di quella dell'epidermide:

$$\frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i\rho_{ep}\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_{ep}c_{ep}A\frac{\Delta x}{\Delta \theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)$$



Dividendo per k_{ep}, per A e moltiplichiamo per Δx otteniamo che:

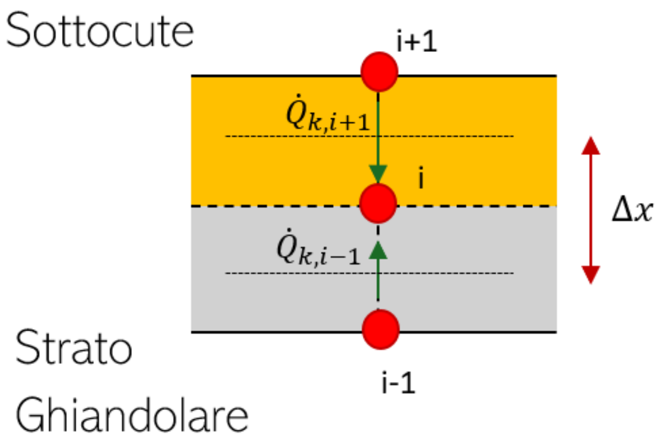
$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_{ep}\left[T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^?\left(2 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_{ep}}\right) + \frac{\Delta x}{k_{ep}}\left(\dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Nodo 7

Il nodo 7 è posto in corrispondenza dell'interfaccia tra sottocute e strati ghiandolare.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i+1}^{?}-T_i^{?})+\frac{k_g A}{\Delta x}(T_{i-1}^{?}-T_i^{?})+\dot{Q}_m+SAR_i\frac{\rho_{ep}+\rho_g}{2}\Delta x+w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta)-T_i^{?})= \frac{\Delta x}{2\Delta\theta}(T_i^{t+1}-T_i^{t})(\rho_{ep}c_{ep}+\rho_g c_g)$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza dello strato ghiandolare:

$$Fo_g=\frac{k_g\Delta\theta}{\rho_g c_g\Delta x^2}$$

Un ulteriore parametro da introdurre per semplificare la scrittura equivalente un il numero di Fourier equivalente che tiene conto, contemporaneamente della sottocute e dello strato ghiandolare:

$$\frac{1}{Fo_{eg}}=\frac{1}{Fo_{ep}k_g}+\frac{1}{Fo_g k_{ep}}$$

Da queste definizione si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t+Fo_{eg}\left[2\frac{T_{i-1}^{?}}{k_{ep}}+2\frac{T_{i+1}^{?}}{k_g}-2T_i^{?}\left(\frac{1}{k_g}+\frac{1}{k_{ep}}+\frac{w_b(T)\rho_b c_b\Delta x}{k_{ep}k_g}\right)+\frac{\Delta x}{k_{ep}k_g}\Big(2\dot{Q}_m+SAR_i(\rho_{ep}+\rho_g)\Delta x+ 2w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\Big)\right]$$

Nodo 8

Il nodo 8 è posto in corrispondenza dello strato ghiandolare.
In questa posizione il nodo i+1 può assumere due possibili configurazioni differenti:

1. in corrispondenza dell'interfaccia tra sottocute e strato ghiandolare;
2. in corrispondenza dello strato ghiandolare.

Di seguito vengono analizzate le due casistiche.

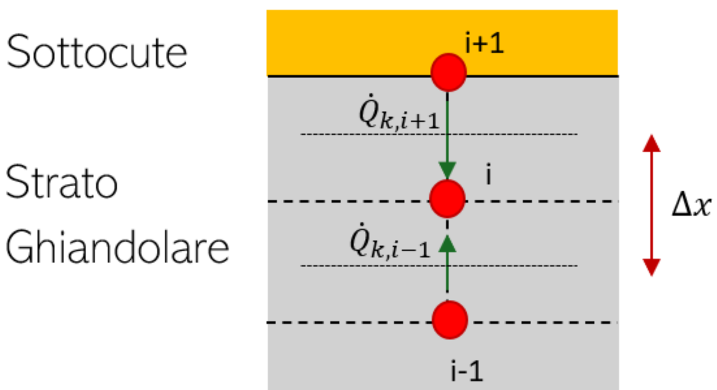


Figura 3: i+1 all'interfaccia sottocute-strato ghiandolare

I CASO: i+1 all'interfaccia sottocute-strato ghiandolare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_g + k_{ep}}{2} \cdot \frac{A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \frac{k_g A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_g c_g A \frac{\Delta x}{\Delta \theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_g\left[T_{i+1}^?(\frac{k_g + k_{ep}}{2k_g}) + T_{i-1}^? - T_i^?\left(\frac{k_g + k_{ep}}{2k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g}\right) + \frac{\Delta x}{k_g}\left(\dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

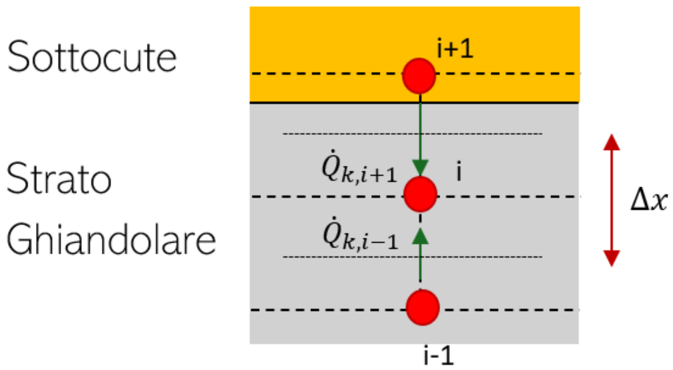


Figura 4: i+1 nella sottocute

II CASO: i+1 nella sottocute

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_{ep} A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \frac{k_g A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_g c_g A \frac{\Delta x}{\Delta \theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

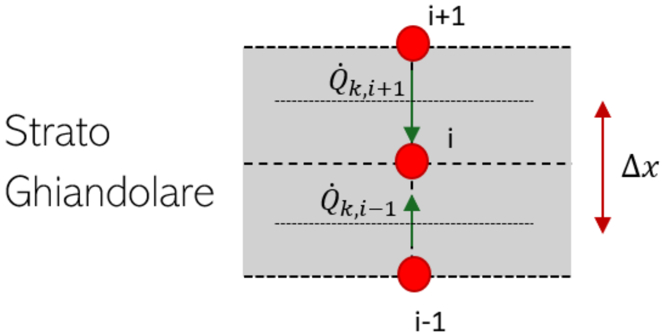
$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_g\left[T_{i+1}^? \frac{k_{ep}}{k_g} + T_{i-1}^? - T_i^?\left(\frac{k_{ep}}{k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g}\right) + \frac{\Delta x}{k_g}\left(\dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Nodo 9

Il nodo 9 è posto in corrispondenza dello strato ghiandolare.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta\theta}$$

$$\frac{k_g A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \frac{k_g A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_g c_g A \frac{\Delta x}{\Delta\theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_g \left[T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^? \left(2 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_g} \left(\dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

Nodo 10

Il nodo 10 è posto in corrispondenza dello strato ghiandolare.
In questa posizione il nodo i-1 può avere due configurazioni differenti:

1. in corrispondenza dell'interfaccia tra strato ghiandolare e tumore;
2. in corrispondenza del tumore.

Di seguito vengono analizzate le due casistiche.

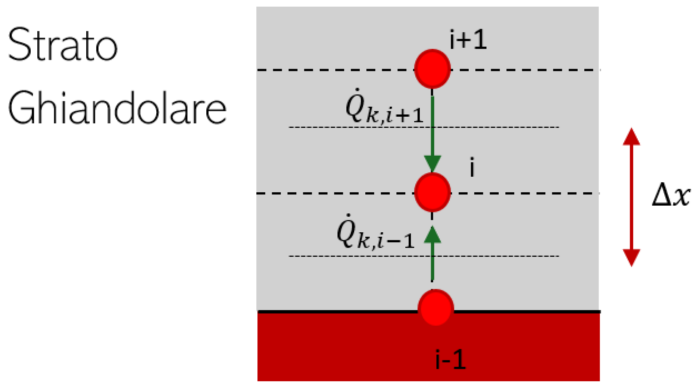


Figura 5: i-1 all'interfaccia strato ghiandolare-tumore

I CASO: i-1 all'interfaccia strato ghiandolare-tumore

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_g+k_t}{2} \cdot \frac{A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \frac{k_g A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i\rho_g\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_g c_g A\frac{\Delta x}{\Delta \theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_g\left[T_{i-1}^?(\frac{k_g+k_t}{2k_g}) + T_{i+1}^? - T_i^?\left(\frac{k_g+k_t}{2k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b\Delta x}{k_g}\right) + \frac{\Delta x}{k_g}\left(\dot{Q}_m + SAR_i\rho_g\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

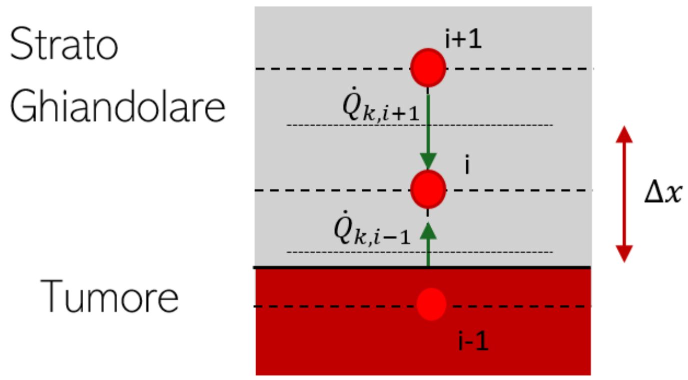


Figura 6: i-1 nel tumore

II CASO: i-1 nel tumore

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_g A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \frac{k_t A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_g c_g A \frac{\Delta x}{\Delta \theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

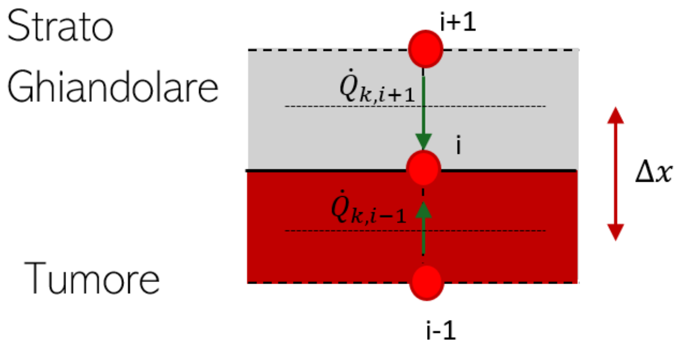
$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_g \left[T_{i-1}^? \frac{k_t}{k_g} + T_{i+1}^? - T_i^? \left(\frac{k_t}{k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_g} \left(\dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

Nodo 11

Il nodo 11 è posto in corrispondenza dell'interfaccia tra strato ghiandolare e tumore.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_g A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \frac{k_t A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \frac{\rho_g + \rho_t}{2} \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta x}{2\Delta \theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)(\rho_g c_g + \rho_t c_t)$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza dello strato ghiandolare:

$$Fo_t = \frac{k_t \Delta \theta}{\rho_t c_t \Delta x^2}$$

Un ulteriore parametro da introdurre per semplificare la scrittura equivalente un il numero di Fourier equivalente che tiene conto, contemporaneamente della sottocute e dello strato ghiandolare:

$$\frac{1}{Fo_{gt}} = \frac{1}{Fo_t k_g} + \frac{1}{Fo_g k_t}$$

Da queste definizione si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

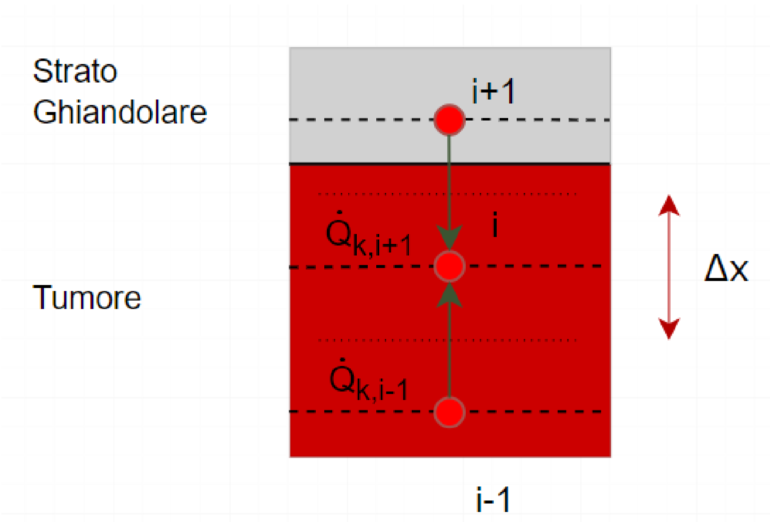
$$T_i^t + Fo_{gt}\left[2\frac{T_{i+1}^?}{k_t} + 2\frac{T_{i-1}^?}{k_g} - 2T_i^?\left(\frac{1}{k_t} + \frac{1}{k_g} + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_t k_g}\right) + \frac{\Delta x}{k_t k_g}\left(2\dot{Q}_m + SAR_i(\rho_t + \rho_g)\Delta x + 2w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Nodo 12

Il nodo 12 è posto in corrispondenza del tumore.
In questa posizione il nodo i+1 può stare in due configurazioni differenti:

1. in corrispondenza dello strato ghiandolare;
2. in corrispondenza dell'interfaccia tra strato ghiandolare e tumore.

Di seguito vengono analizzate le due casistiche.



I CASO: i+1 nello strato ghiandolare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

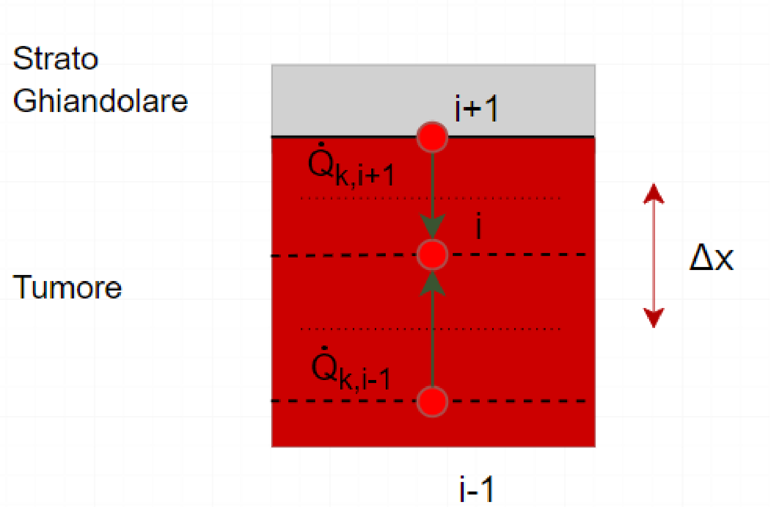
$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_t\left[T_{i+1}^?(\frac{k_g}{k_t}) + T_{i-1}^? - T_i^?\left(\frac{k_g}{k_t} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_t}\right) + \frac{\Delta x}{k_t}\left(\dot{Q}_m + SAR_i\rho_t\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$



II CASO: i+1 all'interfaccia strato ghiandolare -tumore

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

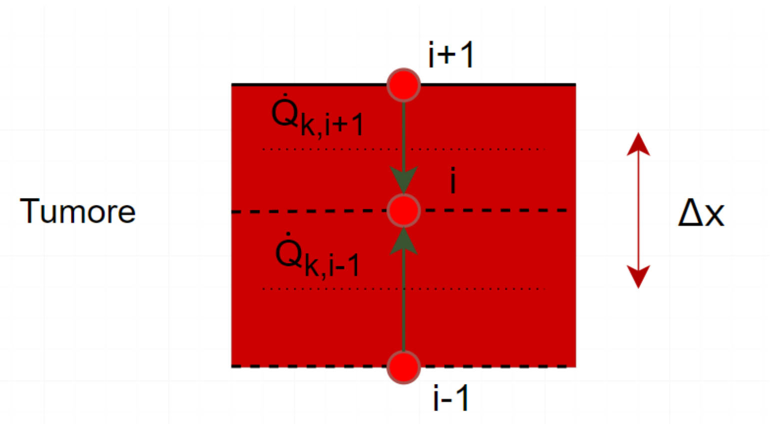
$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_t\left[T_{i+1}^?(\frac{k_g+k_t}{2\,k_t}) + T_{i-1}^? - T_i^?\left(\frac{k_g+k_t}{2\,k_t} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_t}\right) + \frac{\Delta x}{k_t}\left(\dot{Q}_m + SAR_i\rho_t\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Nodo 13

Il nodo 13 è posto in corrispondenza del tumore.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

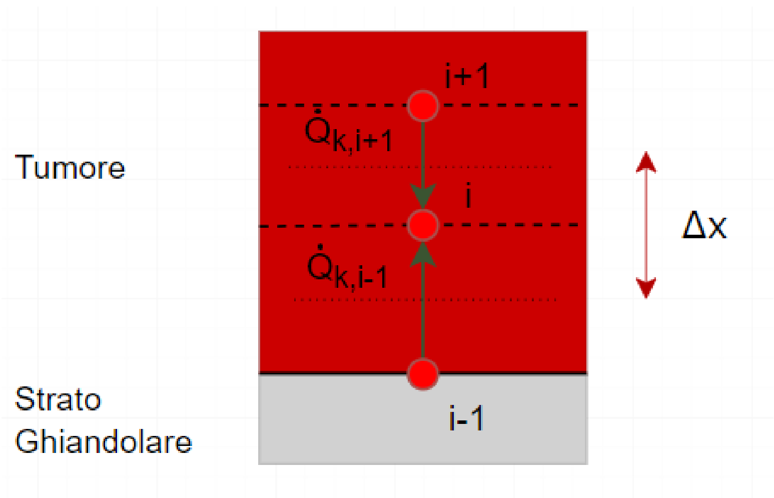
$$T_i^t + Fo_t \left[T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^? \left(2 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_t} \right) + \frac{\Delta x}{k_t} \left(\dot{Q}_m + SAR_i \rho_t \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

Nodo 14

Il nodo 14 è posto in corrispondenza del tumore.
In questa posizione il nodo i-1 può avere due configurazioni differenti:

1. in corrispondenza dell'interfaccia tra tumore e strato ghiandolare;
2. in corrispondenza dello strato ghiandolare.

Di seguito vengono analizzate le due casistiche.



I CASO: i-1 all'interfaccia tumore - strato ghiandolare Il bilancio, in questa posizione fornisce:

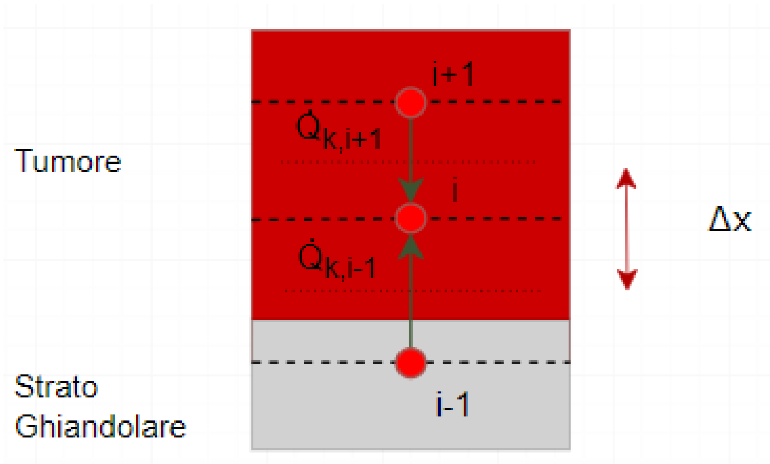
$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_t \left[T_{i-1}^? \left(\frac{k_g + k_t}{2\,k_t}\right) + T_{i+1}^? - T_i^? \left(\frac{k_g + k_t}{2\,k_t} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_t} \right) + \frac{\Delta x}{k_t} \left(\dot{Q}_m + SAR_i \rho_t \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$



II CASO: i-1 nello strato ghiandolare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

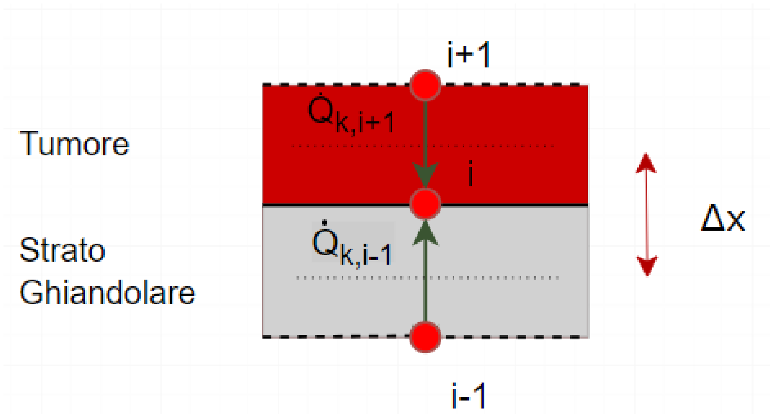
$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_t\left[T_{i-1}^?(\tfrac{k_g}{k_t}) + T_{i+1}^? - T_i^?\left(\tfrac{k_g}{k_t} + 1 + \tfrac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_t}\right) + \tfrac{\Delta x}{k_t}\left(\dot{Q}_m + SAR_i\rho_t\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Nodo 15

Il nodo 15 è posto in corrispondenza dell'interfaccia tra tumore e strato ghiandolare.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_g A}{\Delta x}(T_{i-1}^{?} - T_i^{?}) + \frac{k_t A}{\Delta x}(T_{i+1}^{?} - T_i^{?}) + \dot{Q}_m + SAR_i \frac{\rho_g+\rho_t}{2}\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^{?}) = \frac{\Delta x}{2\Delta\theta}(T_i^{t+1} - T_i^{t})(\rho_g c_g + \rho_t c_t)$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza del tumore:

$$Fo_t = \frac{k_t \Delta\theta}{\rho_t c_t \Delta x^2}$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza dello strato ghiandolare:

$$Fo_g = \frac{k_g \Delta\theta}{\rho_g c_g \Delta x^2}$$

Un ulteriore parametro da introdurre per semplificare la scrittura equivalente un il numero di Fourier equivalente che tiene conto, contemporaneamente della sottocute e dello strato ghiandolare:

$$\frac{1}{Fo_{tg}} = \frac{1}{Fo_g k_t} + \frac{1}{Fo_t k_g}$$

Da queste definizione si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

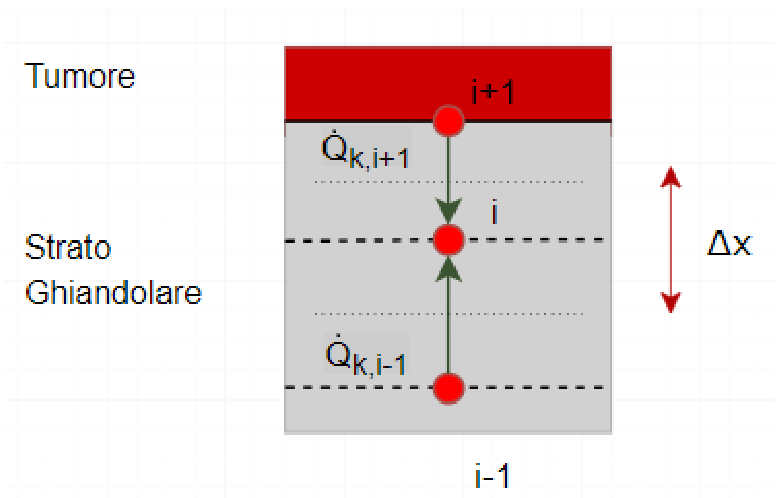
$$T_i^t + Fo_{tg}\left[2\frac{T_{i+1}^{?}}{k_g} + 2\frac{T_{i-1}^{?}}{k_t} - 2T_i^{?}\left(\frac{1}{k_t} + \frac{1}{k_g} + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_t k_g}\right) + \frac{\Delta x}{k_t k_g}\left(2\dot{Q}_m + SAR_i(\rho_t + \rho_g)\Delta x + 2w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Nodo 16

Il nodo 16 è posto in corrispondenza dello strato ghiandolare.
In questa posizione il nodo i+1 può stare in due configurazioni differenti:

1. in corrispondenza dell'interfaccia tra tumore e strato ghiandolare;
2. in corrispondenza dello strato ghiandolare.

Di seguito vengono analizzate le due casistiche.



I CASO: i+1 all'interfaccia tumore-strato ghiandolare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

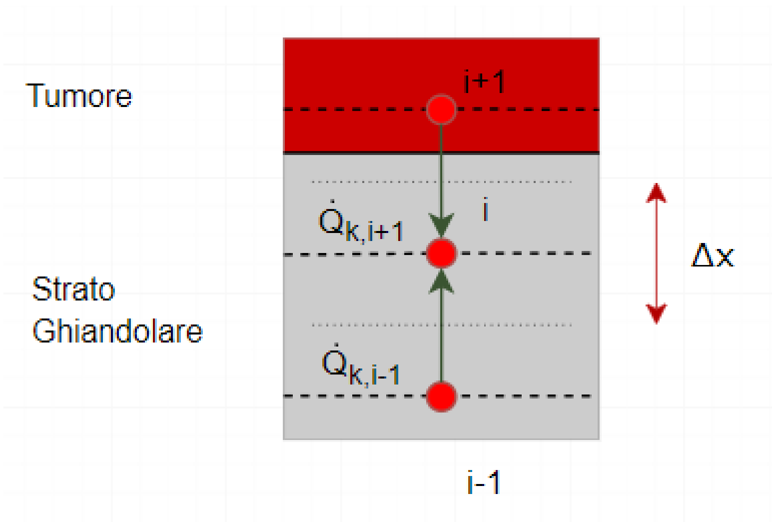
$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_g\left[T_{i+1}^?(\frac{k_g+k_t}{2\,k_g}) + T_{i-1}^? - T_i^?\left(\frac{k_g+k_t}{2\,k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g}\right) + \frac{\Delta x}{k_g}\left(\dot{Q}_m + SAR_i\rho_g\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$



II CASO: i+1 nel tumore

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

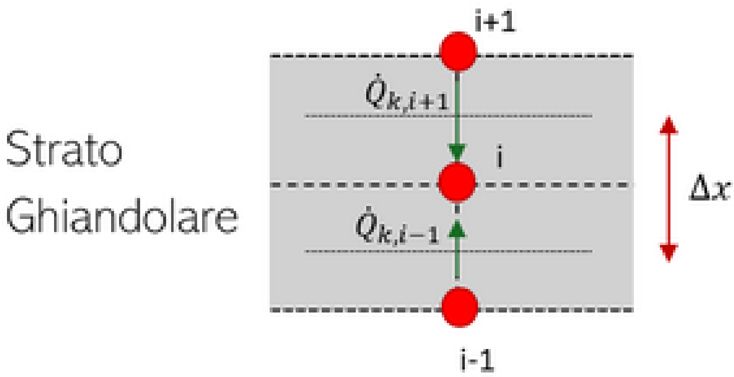
$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_g\left[T_{i+1}^?(\frac{k_t}{k_g}) + T_{i-1}^? - T_i^?\left(\frac{k_t}{k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g}\right) + \frac{\Delta x}{k_g}\left(\dot{Q}_m + SAR_i\rho_g\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Nodo 17

Il nodo 17 è posto in corrispondenza dello strato ghiandolare.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_g \left[T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^? \left(2 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_g} \left(\dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

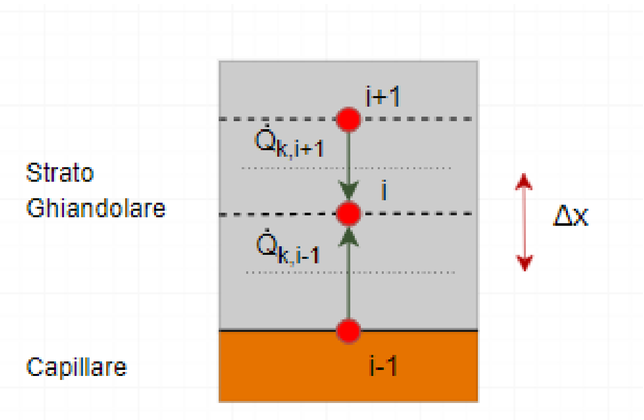
Nodo 18

Il nodo 18 è posto in corrispondenza dello strato ghiandolare.
In questa posizione il nodo i-1 può avere due configurazioni differenti:

1. in corrispondenza dell'interfaccia tra strato ghiandolare e capillare;

2. in corrispondenza del capillare.

Di seguito vengono analizzate le due casistiche.



I CASO: i-1 all'interfaccia strato ghiandolare - capillare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

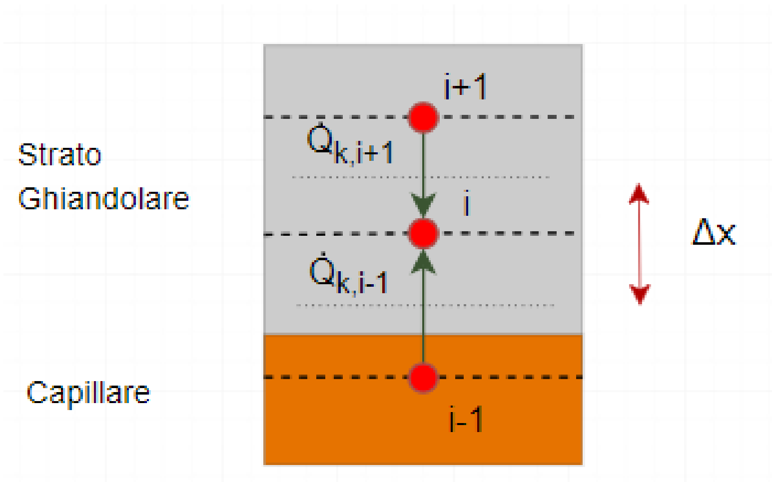
$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_g\left[T_{i-1}^?(\frac{k_g+k_c}{2\,k_g}) + T_{i+1}^? - T_i^?\left(\frac{k_g+k_c}{2\,k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g}\right) + \frac{\Delta x}{k_g}\left(\dot{Q}_m + SAR_i\rho_c\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$



II CASO: i-1 nel capillare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

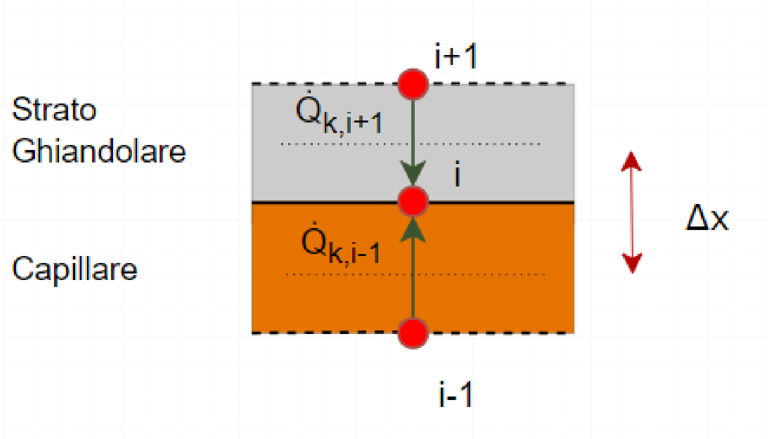
$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_g\left[T_{i-1}^?(\frac{k_c}{k_g}) + T_{i+1}^? - T_i^?\left(\frac{k_c}{k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g}\right) + \frac{\Delta x}{k_g}\left(\dot{Q}_m + SAR_i\rho_c\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Nodo 19

Il nodo 19 è posto in corrispondenza dell'interfaccia tra strato ghiandolare e capillare.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_c A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \frac{k_g A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \frac{\rho_g + \rho_c}{2} \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta x}{2\Delta\theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)(\rho_g c_g + \rho_c c_c)$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza dello strato ghiandolare:

$$Fo_g = \frac{k_g \Delta\theta}{\rho_g c_g \Delta x^2}$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza del capillare:

$$Fo_c = \frac{k_c \Delta\theta}{\rho_c c_c \Delta x^2}$$

Un ulteriore parametro da introdurre per semplificare la scrittura equivalente un il numero di Fourier equivalente che tiene conto, contemporaneamente della sottocute e dello strato ghiandolare:

$$\frac{1}{Fo_{gc}} = \frac{1}{Fo_g k_c} + \frac{1}{Fo_c k_g}$$

Da queste definizione si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

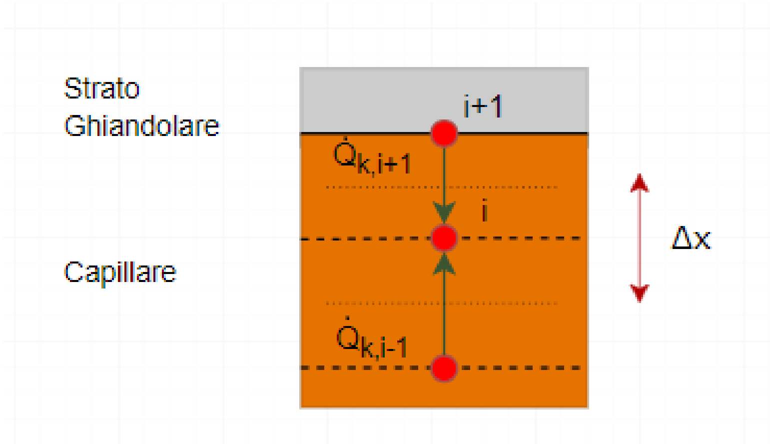
$$T_i^t + Fo_{gc}\left[2\frac{T_{i+1}^?}{k_c} + 2\frac{T_{i-1}^?}{k_g} - 2T_i^?\left(\frac{1}{k_c} + \frac{1}{k_g} + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_c k_g}\right) + \frac{\Delta x}{k_c k_g}\left(2\dot{Q}_m + SAR_i(\rho_c + \rho_g)\Delta x + 2w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Nodo 20

Il nodo 20 è posto in corrispondenza del capillare.
In questa posizione il nodo i+1 può stare in due configurazioni differenti:

1. in corrispondenza dell'interfaccia tra strato ghiandolare e capillare;
2. in corrispondenza dello strato ghiandolare.

Di seguito vengono analizzate le due casistiche.



I CASO: i+1 all'interfaccia strato ghiandolare - capillare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

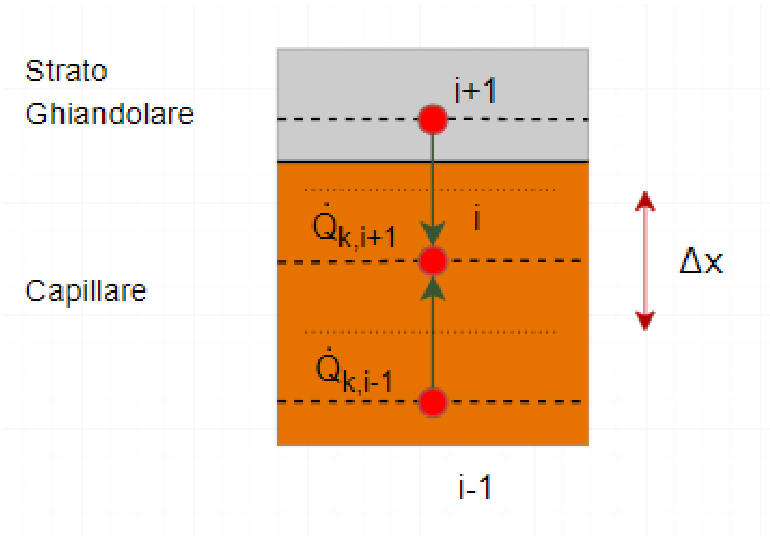
$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_c\left[T_{i+1}^?(\frac{k_g+k_c}{2\,k_c}) + T_{i-1}^? - T_i^?\left(\frac{k_g+k_c}{2\,k_c} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_c}\right) + \frac{\Delta x}{k_c}\left(\dot{Q}_m + SAR_i\rho_c\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$



II CASO: i+1 nello strato ghiandolare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

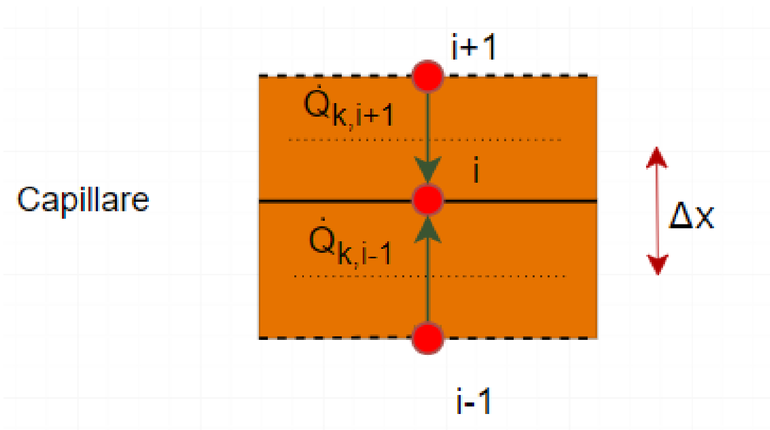
$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_c \left[T_{i+1}^? (\tfrac{k_g}{k_c}) + T_{i-1}^? - T_i^? \left(\tfrac{k_g}{k_c} + 1 + \tfrac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_c} \right) + \tfrac{\Delta x}{k_c} \left(\dot{Q}_m + SAR_i \rho_c \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

Nodo 21

Il nodo 21 è posto in corrispondenza del capillare.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_c\left[T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^?\left(2 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_c}\right) + \frac{\Delta x}{k_c}\left(\dot{Q}_m + SAR_i\rho_c\Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Nodo 22

Il nodo 22 è posto in corrispondenza dell'interfaccia tra il capillare e il flusso sanguigno.
Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_{c,i} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_c A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + h_{b,\infty}(T_b(\theta) - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i\rho_c\frac{\Delta x}{2} + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_c c_c A\frac{\Delta x}{2\Delta\theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Dividiamo per k_c, per A e moltiplichiamo per Δx :

$$(T_{i+1}^? - T_i^?) + h_{b,\infty}\frac{\Delta x}{k_c}(T_b(\theta) - T_i^?) + \dot{Q}_m\frac{\Delta x}{k_c} + SAR_i\rho_c\frac{\Delta x^2}{2k_c} + \frac{w_b(T)\rho_b c_b\Delta x}{k_c}(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_c c_c\frac{\Delta x^2}{2k_c\Delta\theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Definiamo il numero di Biot locale in corrispondenza del capillare:

$$Bi_c = h_{b,\infty}\frac{\Delta x}{k_c}$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza del capillare:

$$Fo_c = \frac{k_c\Delta\theta}{\rho_c c_c \Delta x^2}$$

Sfruttando le costanti appena definite, è possibile riscrive il bilancio come segue:

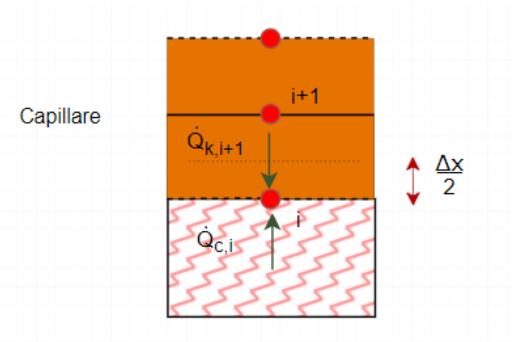
$$(T_{i+1}^? - T_i^?) + Bi_c(T_b(\theta) - T_i^?) + \dot{Q}_m\frac{\Delta x}{k_c} + SAR_i\rho_c\frac{\Delta x^2}{2k_c} + \frac{w_b(T)\rho_b c_b\Delta x}{k_c}(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{1}{2Fo_c}(T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Da qui ricaviamo:

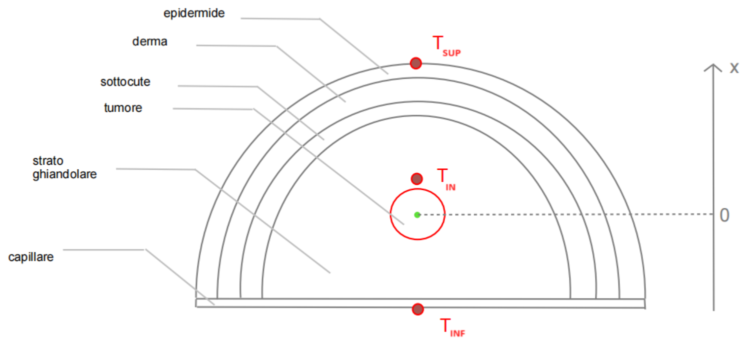
$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + 2Fo_c\left[T_{i+1}^? - T_i^?\left(1 + Bi_c + \frac{w_b(T)\rho_b c_b\Delta x}{k_c}\right) + Bi_c T_b(\theta) + \frac{\Delta x}{k_c}\left(\dot{Q}_m + SAR_i\rho_c\frac{\Delta x}{2} + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$



Bilanci (secondo approccio delle resistenze)



Bilancio nodo T_3 (aria-strato)

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{c,i} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T_i^?)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{(T_{i-1}^? - T_i^?)}{R_{i-1}} + h_{c,\infty}(T_\infty(\theta) - T_i^?) + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i\,\rho_i\,\frac{\Delta x}{2} + w_b(T_i^?)\rho_b\,c_b\,(T_b(\theta) - T_i^?) = \sum_{i=1}^{N}\,(\rho_i\,c_i\,s_i)\,\frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Delta\theta}$$

$$\frac{(T_{i-1}^? - T_i^?)}{R_{i-1}} + h_{c,\infty}(T_\infty(\theta) - T_i^?) + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i\,\rho_i\,\frac{\Delta x}{2} + w_b(T_i^?)\rho_b\,c_b\,(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Sigma_3}$$

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + \Sigma_3\left[\frac{T_{i-1}^?}{R_{i-1}} - T_i^?\left(\frac{1}{R_{i-1}} + h_{c,\infty} + w_b(T_i^?)\,\rho_b\,c_b\right) + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i\,\rho_i\,\frac{\Delta x}{2} + h_{c,\infty}\,T_\infty + w_b(T_i^?)\rho_b c_b T_b(\theta)\Big)\right]$$

Bilancio nodo T_2 (strato-strato)

$$\dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T_i^?)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{(T_{i+1}^? - T_i^?)}{R_{i+1}} + \frac{(T_{i-1}^? - T_i^?)}{R_{i-1}} + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i\,\rho_i\,\Delta x + w_b(T_i^?)\rho_b\,c_b\,(T_b(\theta) - T_i^?) = \sum_{i=1}^{N}\,(\rho_i\,c_i\,s_i)\,\frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Delta\theta}$$

$$\frac{(T_{i+1}^? - T_i^?)}{R_{i+1}} + \frac{(T_{i-1}^? - T_i^?)}{R_{i-1}} + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i\,\rho_i\,\Delta x + w_b(T_i^?)\rho_b\,c_b\,(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Sigma_2}$$

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + \Sigma_2\left[\frac{T_{i+1}^?}{R_{i+1}} + \frac{T_{i-1}^?}{R_{i-1}} - T_i^?\left(\frac{1}{R_{i+1}} + \frac{1}{R_{i-1}} + w_b(T_i^?)\,\rho_b\,c_b\right) + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i\,\rho_i\,\Delta x + w_b(T_i^?)\rho_b c_b T_b(\theta)\Big)\right]$$

Bilancio nodo T_1 (strato-sangue)

$$\dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_{c,i} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T_i^?)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{(T_{i+1}^? - T_i^?)}{R_{i+1}} + h_{b,\infty}(T_{b,\infty}(\theta) - T_i^?) + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i\,\rho_i\,\frac{\Delta x}{2} + w_b(T_i^?)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \sum_{i=1}^{N}(\rho_i\, c_i\, s_i)\,\frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Delta \theta}$$

$$\frac{(T_{i+1}^? - T_i^?)}{R_{i+1}} + h_{b,\infty}(T_{b,\infty}(\theta) - T_i^?) + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i\,\rho_i\,\frac{\Delta x}{2} + w_b(T_i^?)\rho_b\, c_b\,(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Sigma_1}$$

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + \Sigma_1\left[\frac{T_{i+1}^?}{R_{i+1}} - T_i^?\left(\frac{1}{R_{i+1}} + h_{b,\infty} + w_b(T_i^?)\,\rho_b c_b\right) + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i\,\rho_i\,\frac{\Delta x}{2} + h_{b,\infty}\,T_{b,\infty} + w_b(T_i^?)\rho_b c_b T_b(\theta)\Big)\right]$$

Il *sistema di equazioni* risulta il seguente:

$$\mathbf{T_1}\quad T_1^{t+1} = T_1^t + \left[\frac{\Sigma_1}{R_2}\,T_2^? - T_1^?\left(\frac{\Sigma_1}{R_2} + \Sigma_1\, h_{b,\infty} + \Sigma_1\, w_b(T_1^?)\,\rho_b\, c_b\right) + \Sigma_1\,\dot{Q}_{m,1} + \Sigma_1\, SAR_1\,\rho_1\,\frac{\Delta x}{2} + \Sigma_1\, h_{b,\infty}\, T_{b,\infty} + \Sigma_1\, w_b(T_1^?)\rho_b c_b T_b(\theta)\Big)\right]$$

$$\mathbf{T_2}\quad T_2^{t+1} = T_2^t + \left[\frac{\Sigma_2}{R_3}T_3^? + \frac{\Sigma_2}{R_1}T_1^? - T_2^?\left(\frac{\Sigma_2}{R_3} + \frac{\Sigma_2}{R_1} + \Sigma_2\, w_b(T_2^?)\,\rho_b\, c_b\right) + \Sigma_2\,\dot{Q}_{m,2} + \Sigma_2\, SAR_2\,\rho_2\,\Delta x + \Sigma_2\, w_b(T_2^?)\rho_b c_b T_b(\theta)\Big)\right]$$

$$\mathbf{T_3}\quad T_3^{t+1} = T_3^t + \left[\frac{\Sigma_3}{R_2}\,T_2^? - T_3^?\left(\frac{\Sigma_3}{R_2} + \Sigma_3\, h_{c,\infty} + \Sigma_3\, w_b(T_3^?)\,\rho_b\, c_b\right) + \Sigma_3\,\dot{Q}_{m,3} + \Sigma_3\, SAR_3\,\rho_3\,\frac{\Delta x}{2} + \Sigma_3\, h_{c,\infty}\, T_\infty + \Sigma_3\, w_b(T_3^?)\rho_b c_b T_b(\theta)\Big)\right]$$

Tale sistema può essere riscritto in forma matriciale:

$$\underline{T}^{t+1} = \underline{T}^t + \underline{\underline{A}}\,\underline{T}^? + \underline{b}$$

dove:

- $\underline{T}^{t+1}$: vettore delle temperature all'istante t+1 ;
- $\underline{T}^t$: vettore delle temperature all'istante t ;
- $\underline{\underline{A}}$: matrice dei coefficienti;
- $\underline{T}^?$: vettore delle temperature incognite;
- $\underline{b}$: vettore dei termini noti;

Rappresentazione matriciale del sistema

$$\underline{T}^{t+1} \;=\; \underline{T}^{t} \;+\; \underline{\underline{A}}\,\underline{T}^{?} \;+\; \underline{b}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_1^{\,t+1} \\ T_2^{\,t+1} \\ T_3^{\,t+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{t+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^{\,t} \\ T_2^{\,t} \\ T_3^{\,t} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{t}} \;+\; \underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{array} & \begin{bmatrix} -\left(\frac{\Sigma_1}{R_2} + \Sigma_1 h_{b,\infty} + \Sigma_1 w_b(T_1^?)\,\rho_b\,c_b\right) & \frac{\Sigma_1}{R_2} & 0 \\ \frac{\Sigma_2}{R_1} & -\left(\frac{\Sigma_2}{R_3} + \frac{\Sigma_2}{R_1} + \Sigma_2 w_b(T_2^?)\,\rho_b\,c_b\right) & \frac{\Sigma_2}{R_3} \\ 0 & \frac{\Sigma_3}{R_2} & -\left(\frac{\Sigma_3}{R_2} + \Sigma_3 h_{c,\infty} + \Sigma_3 w_b(T_3^?)\,\rho_b\,c_b\right) \end{bmatrix} \end{array}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^{\,?} \\ T_2^{\,?} \\ T_3^{\,?} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{?}} \;+\; \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_1 \dot{Q}_{m,1} \;+\; \Sigma_1 SAR_1\,\rho_1\,\frac{\Delta x}{2} \;+\; \Sigma_1 h_{b,\infty}\,T_{b,\infty} \;+\; \Sigma_1 w_b(T_1^?)\rho_b c_b T_b(\theta) \\ \Sigma_2 \dot{Q}_{m,2} \;+\; \Sigma_2 SAR_2\,\rho_2\,\Delta x \;+\; \Sigma_2 w_b(T_2^?)\rho_b c_b T_b(\theta) \\ \Sigma_3 \dot{Q}_{m,3} \;+\; \Sigma_3 SAR_3\,\rho_3\,\frac{\Delta x}{2} \;+\; \Sigma_3 h_{c,\infty}\,T_{\infty} \;+\; \Sigma_3 w_b(T_3^?)\rho_b c_b T_b(\theta) \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Per generalizzare la scelta del metodo numerico da adottare, occorre modificare il sistema matriciale introducendo un parametro ξ che consenta, in base al valore che assume, di definire uno tra tali metodi.

$$\xi \;=\; \begin{cases} 0 & \text{metodo esplicito} \\ 1/2 & \text{metodo di Crank-Nicolson} \\ 1 & \text{metodo implicito} \end{cases}$$

Il sistema matriciale allora diventa:

$$\underline{T}^{t+1} \;=\; \underline{T}^{t} \;+\; \underline{\underline{A}}\,\xi\,\underline{T}^{t+1} \;+\; \underline{\underline{A}}\;(1\;-\;\xi)\;\underline{T}^{t} \;+\; \underline{b}$$

che può essere riscritto come:

$$\underline{T}^{t+1}\;\underbrace{\left[\underline{\underline{I}}\;-\;\underline{\underline{A}}\,\xi\right]}_{\underline{\underline{A}}_m} \;=\; \underbrace{\underline{T}^{t}\left[\underline{\underline{I}}\;+\;\underline{\underline{A}}\;(1\;-\;\xi)\right]\;+\;\underline{b}}_{\underline{b}_m}$$

$$\underline{T}^{t+1}\,\underline{\underline{A}}_m \;=\; \underline{b}_m$$

É bene ricordare, infine, che in caso di scelta del *metodo esplicito* ($\xi = 0$) vi è la necessità di dover assicurare il rispetto del *vincolo di stabilità* secondo cui, in ogni nodo, il coefficiente del termine T_i^t deve risultare positivo.
Per i tre nodi la condizione di stabilità risulterebbe:

$$T_1: \quad \begin{array}{l} 1 - \Sigma_1\left(\dfrac{1}{R_2} \;+\; h_{b,\infty} \;+\; \omega_b(T_1^t)\rho_b c_b\right) \geq 0 \\ -1 + \dfrac{\Delta\theta}{\sum_{i=1}^{n}\;\rho_i\,c_i\,s_i}\left(\dfrac{1}{R_2} \;+\; h_{b,\infty} \;+\; \omega_b(T_1^t)\rho_b c_b\right) \leq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta \;\leq\; \frac{\sum_{i=1}^{n}\;\rho_i\,c_i\,s_i}{\frac{1}{R_2}\;+\;h_{b,\infty}\;+\;\omega_b(T_1^t)\rho_b c_b}$$

$$T_2: \quad \begin{array}{l} 1 - \Sigma_2\left(\dfrac{1}{R_1} \;+\; \dfrac{1}{R_3} \;+\; \omega_b(T_2^t)\rho_b c_b\right) \geq 0 \\ -1 + \dfrac{\Delta\theta}{\sum_{i=1}^{n}\;\rho_i\,c_i\,s_i}\left(\dfrac{1}{R_1} \;+\; \dfrac{1}{R_3} \;+\; \omega_b(T_2^t)\rho_b c_b\right) \leq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta \;\leq\; \frac{\sum_{i=1}^{n}\;\rho_i\,c_i\,s_i}{\frac{1}{R_1}\;+\;\frac{1}{R_3}\;+\;\omega_b(T_2^t)\rho_b c_b}$$

$$T_3: \quad \begin{array}{l} 1 - \Sigma_3\left(\dfrac{1}{R_2} \;+\; h_{c,\infty} \;+\; \omega_b(T_3^t)\rho_b c_b\right) \geq 0 \\ -1 + \dfrac{\Delta\theta}{\sum_{i=1}^{n}\;\rho_i\,c_i\,s_i}\left(\dfrac{1}{R_2} \;+\; h_{c,\infty} \;+\; \omega_b(T_3^t)\rho_b c_b\right) \leq 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta \;\leq\; \frac{\sum_{i=1}^{n}\;\rho_i\,c_i\,s_i}{\frac{1}{R_2}\;+\;h_{c,\infty}\;+\;\omega_b(T_3^t)\rho_b c_b}$$

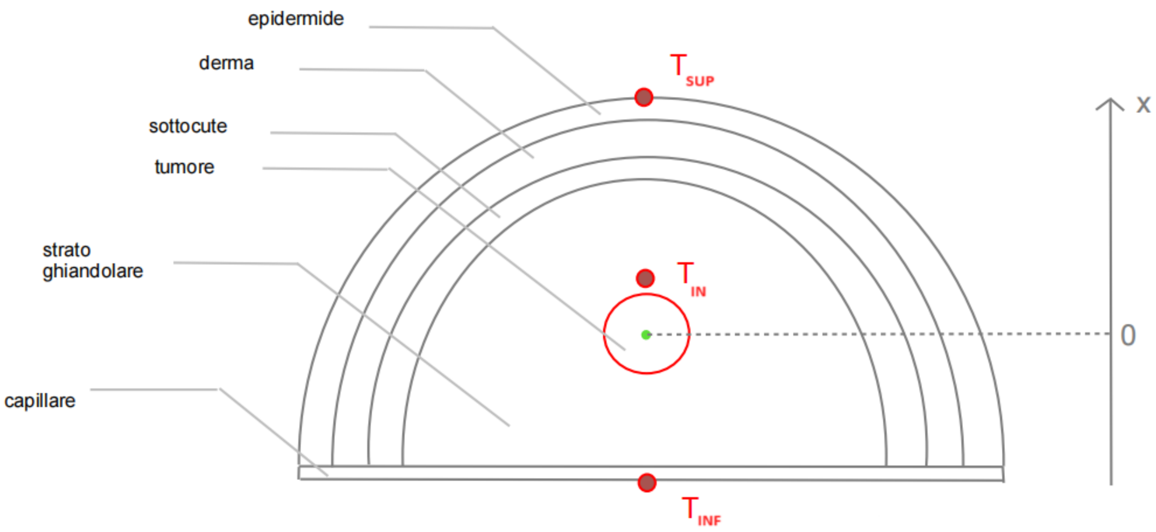
Rappresentazione matriciale del sistema

$$\underline{T}^{t+1}\,\underbrace{\left[\underline{\underline{I}} \;-\; \underline{\underline{A}}\;\xi\right]}_{\underline{\underline{A}}_m} \;=\; \underbrace{\underline{T}^{t}\left[\underline{\underline{I}} \;+\; \underline{\underline{A}}\;(1\;-\;\xi)\right] \;+\; \underline{b}}_{\underline{b}_m}$$

$$\underline{\underline{A}}_m \;=\; \underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{3}\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\underline{I}}} \;-\; \underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{3}\end{array} & \begin{bmatrix} -\left(\frac{\Sigma_1}{R_2} + \Sigma_1 h_{b,\infty} + \Sigma_1 w_b(T_1^?)\;\rho_b\;c_b\right) & \frac{\Sigma_1}{R_2} & 0 \\ \frac{\Sigma_2}{R_1} & -\left(\frac{\Sigma_2}{R_3} + \frac{\Sigma_2}{R_1} + \Sigma_2 w_b(T_2^?)\;\rho_b\;c_b\right) & \frac{\Sigma_2}{R_3} \\ 0 & \frac{\Sigma_3}{R_2} & -\left(\frac{\Sigma_3}{R_2} + \Sigma_3 h_{c,\infty} + \Sigma_3 w_b(T_3^?)\;\rho_b\;c_b\right) \end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\underline{A}}}\;\xi$$

$$\underline{b}_m \;=\; \underbrace{\begin{bmatrix} T_1{}^t \\ T_2{}^t \\ T_3{}^t \end{bmatrix}}_{\underline{T}^t} \underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{3}\end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\underline{I}}} \;+\; \underbrace{\begin{bmatrix} T_1{}^t \\ T_2{}^t \\ T_3{}^t \end{bmatrix}}_{\underline{T}^t} \underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{3}\end{array} & \begin{bmatrix} -\left(\frac{\Sigma_1}{R_2} + \Sigma_1 h_{b,\infty} + \Sigma_1 w_b(T_1^?)\;\rho_b\;c_b\right) & \frac{\Sigma_1}{R_2} & 0 \\ \frac{\Sigma_2}{R_1} & -\left(\frac{\Sigma_2}{R_3} + \frac{\Sigma_2}{R_1} + \Sigma_2 w_b(T_2^?)\;\rho_b\;c_b\right) & \frac{\Sigma_2}{R_3} \\ 0 & \frac{\Sigma_3}{R_2} & -\left(\frac{\Sigma_3}{R_2} + \Sigma_3 h_{c,\infty} + \Sigma_3 w_b(T_3^?)\;\rho_b\;c_b\right) \end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\underline{A}}} (1\;-\;\xi) \;+\; \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_1 \dot{Q}_{m,1} \;+\; \Sigma_1 SAR_1\,\rho_1\,\frac{\Delta x}{2} \;+\; \Sigma_1 h_{b,\infty}\,T_{b,\infty} \;+\; \Sigma_1 w_b(T_1^?)\rho_b c_b T_b(\theta) \\ \Sigma_2 \dot{Q}_{m,2} \;+\; \Sigma_2 SAR_2\,\rho_2\,\Delta x \;+\; \Sigma_2 w_b(T_2^?)\rho_b c_b T_b(\theta) \\ \Sigma_3 \dot{Q}_{m,3} \;+\; \Sigma_3 SAR_3\,\rho_3\,\frac{\Delta x}{2} \;+\; \Sigma_3 h_{c,\infty}\,T_{\infty} \;+\; \Sigma_3 w_b(T_3^?)\rho_b c_b T_b(\theta) \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Bilanci (terzo approccio)



Bilancio nodo T_{SUP} (aria-strato)

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{c,i} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_{probe} + \dot{Q}_{perf} = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T^?_{i-1} - T^?_i) + h_{c,\infty}A(T_\infty(\theta) - T^?_i) + \dot{u}_{m,ep}\frac{\Delta x}{2}A + SAR_{ep}\rho_{ep}\frac{\Delta x}{2}A + w_b(T^?_i)\rho_b c_b \frac{\Delta x}{2}A(T_b(\theta) - T^?_i) = \rho_{ep} c_{ep}\frac{\Delta x}{2}A\frac{(T^{t+1}_i - T^t_i)}{\Delta \theta}$$

$$T^?_{i-1} - T^?_i + \frac{h_{c,\infty}\Delta x}{k_{ep}}(T_\infty(\theta) - T^?_i) + \dot{u}_{m,ep}\frac{\Delta x^2}{2k_{ep}} + SAR_{ep}\,\rho_{ep}\frac{\Delta x^2}{2k_{ep}} + w_b(T^?_i)\rho_b\, c_b\frac{\Delta x^2}{2k_{ep}}(T_b(\theta) - T^?_i) = \rho_{ep}\, c_{ep}\frac{\Delta x^2}{2k_{ep}}\frac{(T^{t+1}_i - T^t_i)}{\Delta \theta}$$

Sapendo che:

$$Bi_{ep} = \frac{h_{c,\infty}\Delta x}{k_{ep}}$$

$$Fo_{ep} = \frac{k_{ep}\Delta \theta}{\rho_{ep}c_{ep}\Delta x^2}$$

allora:

$$T^{t+1}_i$$

$$\Downarrow$$

$$T^t_i + 2\,Fo_{ep}\left[T^?_{i-1} - T^?_i\left(Bi_{ep} + 1 + \frac{\Delta x^2 w_b(T^?_i)\,\rho_b\, c_b}{2\,k_{ep}}\right) + Bi_{ep}T_\infty + \frac{\Delta x^2}{2k_{ep}}\left(\dot{u}_{m,ep} + SAR_{ep}\rho_{ep} + w_b(T^?_i)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Bilancio nodo T_{IN} (strato-strato)

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_{probe} + \dot{Q}_{perf} = \frac{\Delta U}{\Delta\theta}$$

$$\frac{k_{i-1}A}{\Delta x}(T^?_{i-1} - T^?_i) + \frac{k_{i+1}A}{\Delta x}(T^?_{i+1} - T^?_i) + \dot{u}_{m,i}\Delta x\, A + SAR_i\,\rho_i\,\Delta x\, A + w_b(T^?_i)\rho_b\, c_b\,\Delta x\, A(T_b(\theta) - T^?_i) = \sum_{k=1}^{n}\rho_k\, c_k\, s_k\, A\,\frac{(T^{t+1}_i - T^t_i)}{\Delta\theta}$$

Sapendo che:

$$\frac{1}{\Sigma} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\rho_k\, c_k\, s_k}{\Delta\theta}$$

allora:

$$T^{t+1}_i$$

$$\Downarrow$$

$$T^t_i + \Sigma\left[\frac{k_{i-1}}{\Delta x}\,T^?_{i-1} + \frac{k_{i+1}}{\Delta x}\,T^?_{i+1} - T^?_i\left(\frac{k_{i-1}}{\Delta x} + \frac{k_{i+1}}{\Delta x} + \Delta x\, w_b(T^?_i)\,\rho_b\, c_b\right) + \Delta x\left(\dot{u}_{m,i} + SAR_i\rho_i + w_b(T^?_i)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Bilancio nodo T_{INF} (strato-capillare)

$$\dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_{c,i} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_{probe} + \dot{Q}_{perf} = \frac{\Delta U}{\Delta\theta}$$

$$\frac{k_{i+1}A}{\Delta x}(T^?_{i+1} - T^?_i) + h_{b,\infty}A(T_b(\theta) - T^?_i) + \dot{u}_{m,c}\frac{\Delta x}{2}A + SAR_c\,\rho_c\,\frac{\Delta x}{2}A + w_b(T^?_i)\rho_b\, c_b\,\frac{\Delta x}{2}A(T_b(\theta) - T^?_i) = \sum_{k=1}^{n}\rho_k\, c_k\, s_k\, A\,\frac{(T^{t+1}_i - T^t_i)}{\Delta\theta}$$

Sapendo che:

$$\frac{1}{\Sigma} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\rho_k\, c_k\, s_k}{\Delta\theta}$$

allora:

$$T^{t+1}_i$$

$$\Downarrow$$

$$T^t_i + \Sigma\left[\frac{k_{i+1}}{\Delta x}\,T^?_{i+1} - T^?_i\left(\frac{k_{i+1}}{\Delta x} + h_{b,\infty} + \frac{\Delta x}{2}\,w_b(T^?_i)\,\rho_b\, c_b\right) + h_{b,\infty}T_{\infty,b} + \frac{\Delta x}{2}\left(\dot{u}_{m,c} + SAR_c\rho_c + w_b(T^?_i)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Il *sistema di equazioni* risulta il seguente:

$$\mathbf{T_1}\;\; T_1^{t+1} \;=\; T_1^t + \Sigma\left[\frac{k_2}{\Delta x}\,T_2^? \;-\; T_1^?\left(\frac{k_2}{\Delta x} \;+\; h_{b,\infty} \;+\; \frac{\Delta x}{2}\,w_b(T_1^?)\,\rho_b\,c_b\right) \;+\; h_{b,\infty}T_{\infty,b} \;+\; \frac{\Delta x}{2}\left(\dot{u}_{m,c} \;+\; SAR_c\rho_c \;+\; w_b(T_1^?)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

$$\mathbf{T_2}\;\; T_2^{t+1} \;=\; T_2^t + \Sigma\left[\frac{k_1}{\Delta x}\,T_1^? \;+\; \frac{k_3}{\Delta x}\,T_3^? \;-\; T_2^?\left(\frac{k_1}{\Delta x} \;+\; \frac{k_3}{\Delta x} \;+\; \Delta x\,w_b(T_2^?)\,\rho_b\,c_b\right) \;+\; \Delta x\left(\dot{u}_{m,2} \;+\; SAR_2\rho_2 \;+\; w_b(T_2^?)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

$$\mathbf{T_3}\;\; T_3^{t+1} \;=\; T_3^t + 2\,Fo_{ep}\left[T_2^? \;-\; T_3^?\left(Bi_{ep} \;+\; 1 \;+\; \frac{\Delta x^2 w_b(T_3^?)\,\rho_b\,c_b}{2\,k_{ep}}\right) \;+\; Bi_{ep}T_\infty \;+\; \frac{\Delta x^2}{2k_{ep}}\left(\dot{u}_{m,ep} \;+\; SAR_{ep}\rho_{ep} \;+\; w_b(T_3^?)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

Tale sistema può essere riscritto in forma matriciale:

$$\underline{T}^{t+1} \;=\; \underline{T}^t \;+\; \underline{\underline{A}}\,\underline{T}^? \;+\; \underline{b}$$

dove:

· $\underline{T}^{t+1}$: vettore delle temperature all'istante t+1 ;

· $\underline{T}^{t}$: vettore delle temperature all'istante t ;

· $\underline{\underline{A}}$: matrice dei coefficienti;

· $\underline{T}^{?}$: vettore delle temperature incognite;

· $\underline{b}$: vettore dei termini noti;

Rappresentazione matriciale del sistema

$$\underline{T}^{t+1} \;=\; \underline{T}^{t} \;+\; \underline{\underline{A}}\,\underline{T}^{?} \;+\; \underline{b}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} {T_1}^{t+1} \\ {T_2}^{t+1} \\ {T_3}^{t+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{t+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} {T_1}^{t} \\ {T_2}^{t} \\ {T_3}^{t} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{t}} + \underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \end{matrix} & \begin{bmatrix} -\Sigma_1\left(\frac{k_2}{\Delta x} \,+\, h_{b,\infty} \,+\, \frac{\Delta x}{2}\, w_b(T_1^{?})\,\rho_b\, c_b\right) & \Sigma_1 \frac{k_2}{\Delta x} & 0 \\ \Sigma_2 \frac{k_1}{\Delta x} & -\Sigma_2\left(\frac{k_1}{\Delta x} \,+\, \frac{k_3}{\Delta x} \,+\, \Delta x\, w_b(T_2^{?})\,\rho_b\, c_b\right) & \Sigma_2 \frac{k_3}{\Delta x} \\ 0 & 2\, Fo_{ep} & -2\, Fo_{ep}\left(Bi_{ep} \,+\, 1 \,+\, \frac{\Delta x^2 w_b(T_3^{?})\,\rho_b\, c_b}{2\, k_{ep}}\right) \end{bmatrix} \end{array}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} {T_1}^{?} \\ {T_2}^{?} \\ {T_3}^{?} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{?}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_1 \left[h_{b,\infty} T_{\infty,b} \,+\, \frac{\Delta x}{2}\left(\dot{u}_{m,c} \,+\, SAR_c \rho_c \,+\, w_b(T_1^{?})\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right] \\ \Sigma_2 \Delta x \left(\dot{u}_{m,2} \,+\, SAR_2 \rho_2 \,+\, w_b(T_2^{?})\rho_b c_b T_b(\theta)\right) \\ 2\, Fo_{ep}\left[Bi_{ep} T_\infty \,+\, \frac{\Delta x^2}{2k_{ep}}\left(\dot{u}_{m,ep} \,+\, SAR_{ep}\rho_{ep} \,+\, w_b(T_3^{?})\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right] \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Per generalizzare la scelta del metodo numerico da adottare, occorre modificare il sistema matriciale introducendo un parametro ξ che consenta, in base al valore che assume, di definire uno tra tali metodi.

$$\xi \; = \begin{cases} 0 & \text{metodo esplicito} \\ 1/2 & \text{metodo di Crank-Nicolson} \\ 1 & \text{metodo implicito} \end{cases}$$

Il sistema matriciale allora diventa:

$$\underline{T}^{t+1} \; = \; \underline{T}^{t} \; + \; \underline{\underline{A}}\, \xi \, \underline{T}^{t+1} \; + \; \underline{\underline{A}} \; (1 \; - \; \xi) \; \underline{T}^{t} \; + \; \underline{b}$$

che può essere riscritto come:

$$\underline{T}^{t+1} \; \underbrace{\left[\underline{\underline{I}} \; - \; \underline{\underline{A}}\, \xi\right]}_{\underline{\underline{A}}_m} \; = \; \underbrace{\underline{T}^{t} \left[\underline{\underline{I}} \; + \; \underline{\underline{A}} \; (1 \; - \; \xi)\right] \; + \; \underline{b}}_{\underline{b}_m}$$

$$\underline{T}^{t+1} \, \underline{\underline{A}}_m \; = \; \underline{b}_m$$

É bene ricordare, infine, che in caso di scelta del *metodo esplicito* ($\xi = 0$) vi è la necessità di dover assicurare il rispetto del *vincolo di stabilità* secondo cui, in ogni nodo, il coefficiente del termine T_i^t deve risultare positivo.

Per i tre nodi la condizione di stabilità risulterebbe:

$$T_1: \quad \begin{array}{l} 1 - \Sigma_1 \Big(\dfrac{k_2}{\Delta x} + h_{b,\infty} + \dfrac{\Delta x}{2} w_b(T_1^?) \rho_b c_b \Big) \geq 0 \\ -1 + \Sigma_1 \Big(\dfrac{k_2}{\Delta x} + h_{b,\infty} + \dfrac{\Delta x}{2} w_b(T_1^?) \rho_b c_b \Big) \leq 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\theta \leq \frac{\sum_{k=1}^{n} \; \rho_k \; c_k \; s_k}{\frac{k_2}{\Delta x} \; + \; h_{b,\infty} \; + \; \frac{\Delta x}{2} \; w_b(T_1^?) \; \rho_b \; c_b}$$

$$T_2: \quad \begin{array}{l} 1 - \Sigma_2 \Big(\dfrac{k_1}{\Delta x} + \dfrac{k_3}{\Delta x} + \Delta x w_b(T_2^?) \rho_b c_b \Big) \geq 0 \\ -1 + \Sigma_2 \Big(\dfrac{k_1}{\Delta x} + \dfrac{k_3}{\Delta x} + \Delta x w_b(T_2^?) \rho_b c_b \Big) \leq 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\theta \; \leq \; \frac{\sum_{i=1}^{n} \; \rho_i \; c_i \; s_i}{\frac{k_1}{\Delta x} \; + \; \frac{k_3}{\Delta x} \; + \; \Delta x \; w_b(T_2^?) \; \rho_b \; c_b}$$

$$T_3: \quad \begin{array}{l} 1 - 2Fo_{ep} \Big(Bi_{ep} + 1 + \dfrac{\Delta x^2 w_b(T_3^?) \; \rho_b \; c_b}{2 \; k_{ep}} \Big) \geq 0 \\ -1 + 2Fo_{ep} \Big(Bi_{ep} + 1 + \dfrac{\Delta x^2 w_b(T_3^?) \; \rho_b \; c_b}{2 \; k_{ep}} \Big) \leq 0 \end{array} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta\theta \leq \frac{\rho_{ep} \; c_{ep} \; \Delta x^2}{2 \; k_{ep} \Big(Bi_{ep} \; + \; 1 \; + \; \frac{\Delta x^2 w_b(T_3^?) \; \rho_b \; c_b}{2 \; k_{ep}} \Big)}$$

Rappresentazione matriciale del sistema

$$\underline{T}^{t+1}\underbrace{\left[\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{A}}\,\xi\right]}_{\underline{\underline{A}}_m} = \underbrace{\underline{T}^{t}\left[\underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}}\,(1-\xi)\right] + \underline{b}}_{\underline{b}_m}$$

$$\underline{\underline{A}}_m = \underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{3}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\underline{I}}} - \underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{3}\end{array} & \begin{bmatrix}-\Sigma_1\left(\frac{k_2}{\Delta x} + h_{b,\infty} + \frac{\Delta x}{2}\, w_b(T_1^?)\,\rho_b\, c_b\right) & \Sigma_1\frac{k_2}{\Delta x} & 0\\ \Sigma_2\frac{k_1}{\Delta x} & -\Sigma_2\left(\frac{k_1}{\Delta x} + \frac{k_3}{\Delta x} + \Delta x\, w_b(T_2^?)\,\rho_b\, c_b\right) & \Sigma_2\frac{k_3}{\Delta x}\\ 0 & 2\,Fo_{ep} & -2\,Fo_{ep}\left(Bi_{ep} + 1 + \frac{\Delta x^2 w_b(T_3^?)\,\rho_b\, c_b}{2\,k_{ep}}\right)\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\underline{A}}}\,\xi$$

$$\underline{b}_m = \underbrace{\begin{bmatrix}T_1{}^t\\ T_2{}^t\\ T_3{}^t\end{bmatrix}}_{\underline{T}^t}\underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{3}\end{array} & \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\underline{I}}} + \underbrace{\begin{bmatrix}T_1{}^t\\ T_2{}^t\\ T_3{}^t\end{bmatrix}}_{\underline{T}^t}\underbrace{\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathbf{1}\\ \mathbf{2}\\ \mathbf{3}\end{array} & \begin{bmatrix}-\Sigma_1\left(\frac{k_2}{\Delta x} + h_{b,\infty} + \frac{\Delta x}{2}\, w_b(T_1^?)\,\rho_b\, c_b\right) & \Sigma_1\frac{k_2}{\Delta x} & 0\\ \Sigma_2\frac{k_1}{\Delta x} & -\Sigma_2\left(\frac{k_1}{\Delta x} + \frac{k_3}{\Delta x} + \Delta x\, w_b(T_2^?)\,\rho_b\, c_b\right) & \Sigma_2\frac{k_3}{\Delta x}\\ 0 & 2\,Fo_{ep} & -2\,Fo_{ep}\left(Bi_{ep} + 1 + \frac{\Delta x^2 w_b(T_3^?)\,\rho_b\, c_b}{2\,k_{ep}}\right)\end{bmatrix}\end{array}}_{\underline{\underline{A}}}(1-\xi) + \underbrace{\begin{bmatrix}\Sigma_1\left[h_{b,\infty}T_{\infty,b} + \frac{\Delta x}{2}\left(\dot{u}_{m,c} + SAR_c\rho_c + w_b(T_1^?)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]\\ \Sigma_2\Delta x\left(\dot{u}_{m,2} + SAR_2\rho_2 + w_b(T_2^?)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\\ 2\,Fo_{ep}\left[Bi_{ep}T_\infty + \frac{\Delta x^2}{2k_{ep}}\left(\dot{u}_{m,ep} + SAR_{ep}\rho_{ep} + w_b(T_3^?)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]\end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$