

Corso di Laurea Magistrale in  
**Ingegneria Biomedica**

Esame di  
**Trasmissione Del Calore**

TESINA

*Analisi termica del transitorio 1D  
relativo ad una massa tumorale nel tessuto mammario  
a seguito di una termoablazione a microonde*



MASONE BENEDETTA

Matr. 177470 - b.masone@studenti.unimol.it

CIRNELLI SIMONE

Matr. 177084 - s.cirnelli@studenti.unimol.it

*Anno Accademico 2023/2024*

## Dati

Qui di seguito vengono riassunti in formato tabellare diversi *parametri termodinamici* relativi a ciascuno strato biologico trattato nel problema in esame.

| PARAMETRI TERMODINAMICI  |  |  | STRATI BIOLOGICI               |
|--|--|--|--------------------------------|
| $T_{\infty} = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$                                  | $h_{\infty}(T) = \bar{h}_c = 13.5\text{ W/(m}^2\text{K)}$                | $u_{\infty} = 0.2\text{ m/s}$                                      | ARIA                           |
| $\rho_{ep} = 1000\text{ kg/m}^3$<br>$A = 1.80 \cdot 10^{50}\text{ s}^{-1}$ | $k_{ep} = 0.37\text{ W/mK}$<br>$\Delta H = 3.27 \cdot 10^5\text{ J/mol}$ | $c_{ep} = 3391\text{ J/kgK}$<br>$\dot{Q}_{MET} = 400\text{ W/m}^3$ | EPIDERMIDE - DERMA - SOTTOCUTE |
| $\rho_g = 1041\text{ kg/m}^3$<br>$A = 1.18 \cdot 10^{46}\text{ s}^{-1}$    | $k_g = 0.33\text{ W/mK}$<br>$\Delta H = 3.02 \cdot 10^5\text{ J/mol}$    | $c_g = 2960\text{ J/kgK}$<br>$\dot{Q}_{MET} = 700\text{ W/m}^3$    | STRATO GHIANDOLARE             |
| $\rho_t = 1060\text{ kg/m}^3$<br>$A = 1.18 \cdot 10^{36}\text{ s}^{-1}$    | $k_t = 0.415\text{ W/mK}$<br>$\Delta H = 2.38 \cdot 10^5\text{ J/mol}$   | $c_g = 2726\text{ J/kgK}$<br>$\dot{Q}_{MET} = 1400\text{ W/m}^3$   | TUMORE                         |
| $\rho_c = 1102\text{ kg/m}^3$<br>$A = 5.60 \cdot 10^{63}\text{ s}^{-1}$    | $k_c = 0.46\text{ W/mK}$<br>$\Delta H = 4.30 \cdot 10^5\text{ J/mol}$    | $c_c = 3306\text{ J/kgK}$<br>$\dot{Q}_{MET} = 400\text{ W/m}^3$    | CAPILLARE                      |
| $\rho_b = 1050\text{ kg/m}^3$<br>$A = 5.60 \cdot 10^{63}\text{ s}^{-1}$    | —<br>$\Delta H = 4.30 \cdot 10^5\text{ J/mol}$                           | $c_b = 3617\text{ J/kgK}$<br>$u_b = 2 \cdot 10^{-4}\text{ m/s}$    | SANGUE                         |

Di seguito viene invece riportata una tabella che mostra i parametri che definiscono la *geometria* del sistema.

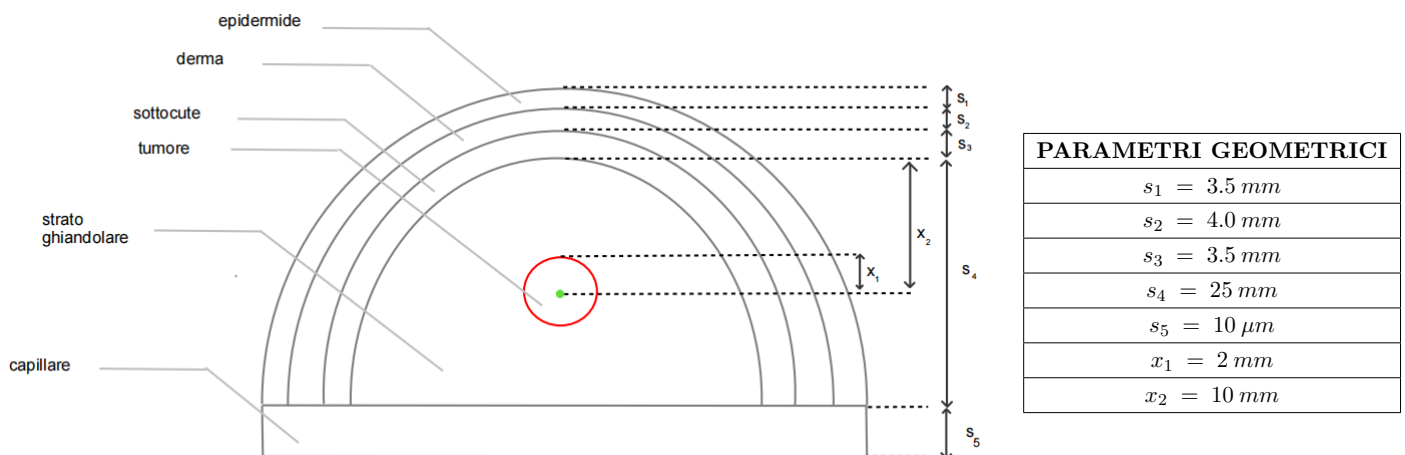


Figura 1: Geometria

## Discretizzazione monodimensionale del tessuto mammario

Si consideri il tessuto mammario formato da una distribuzione in parallelo di diversi tessuti. All'interno di esso è presente una massa tumorale da trattare attraverso termoablazione.

Per ridurre la complessità del problema si effettui un'analisi monodimensionale lungo l'asse verticale  $x$ , passante lungo il tumore e avente origine in corrispondenza di quest'ultimo esattamente come mostrato in **Fig.2**.

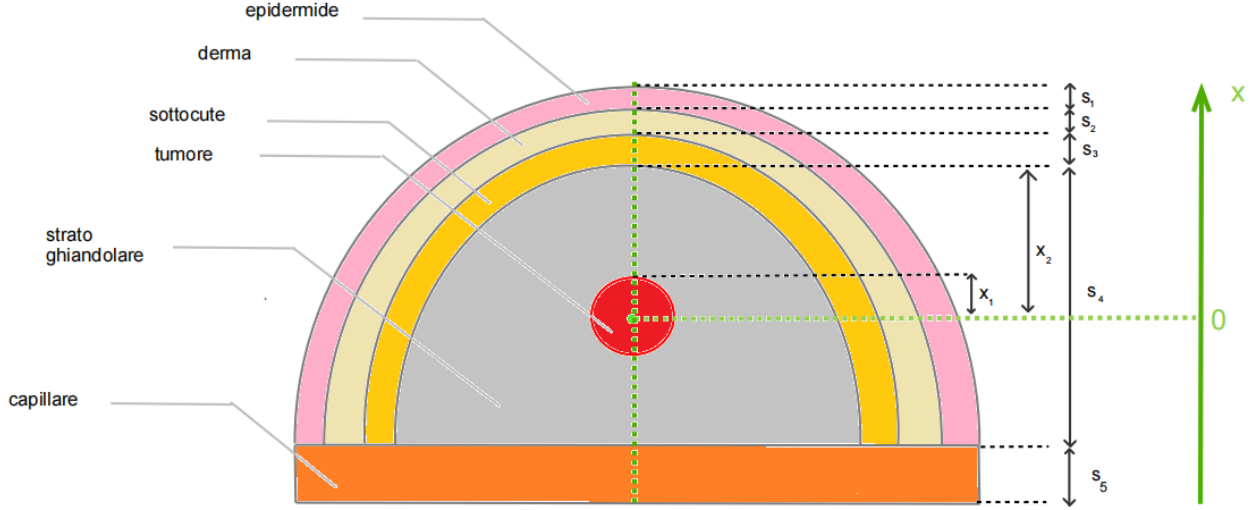


Figura 2: Schematizzazione del tessuto mammario

L'equazione generale della conduzione può essere scritta come:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial \theta} = K \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + w_b(T) \rho_b c_b (T_b(\theta) - T) + \dot{Q}_{met} + \dot{Q}_p$$

Considerare la dipendenza dalla temperatura della perfusione sanguigna e delle proprietà elettriche dei tessuti, mentre la conducibilità termica può essere assunta costante.

Di seguito si definiscono le equazioni generalizzate per i singoli nodi caratteristici, supponendo tutte le potenze entranti. Per non appesantire la notazione si suppone che il passo di campionamento nella direzione  $z$  e  $y$  sia unitario, in modo da trascurarlo durante i calcoli.

### Nodo 1

Il nodo 1 è posto in corrispondenza dell'interfaccia tra l'epidermide e l'ambiente circostante.

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{c,i} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T) \rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_{ep} A}{\Delta x} (T_{i-1}^? - T_i^?) + h_{\infty} A (T_{\infty} - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \frac{\Delta x}{2} + w_b(T) \rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_{ep} c_{ep} A \frac{\Delta x}{2 \Delta \theta} (T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Dividiamo per  $k_{ep}$ , per  $A$  e moltiplichiamo per  $\Delta x$  :

$$(T_{i-1}^? - T_i^?) + h_\infty \frac{\Delta x}{k_{ep}} (T_\infty - T_i^?) + \dot{Q}_m \frac{\Delta x}{k_{ep}} + SAR_i \rho_{ep} \frac{\Delta x^2}{2k_{ep}} + \frac{w_b(T) \rho_b c_b \Delta x}{k_{ep}} (T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_{ep} c_{ep} \frac{\Delta x^2}{2k_{ep} \Delta \theta} (T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Definiamo il numero di Biot locale in corrispondenza dell'epidermide:

$$Bi_{ep} = h_\infty \frac{\Delta x}{k_{ep}}$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza dell'epidermide:

$$Fo_{ep} = \frac{k_{ep} \Delta \theta}{\rho_{ep} c_{ep} \Delta x^2}$$

Sfruttando le costanti appena definite, è possibile riscrivere il bilancio come segue:

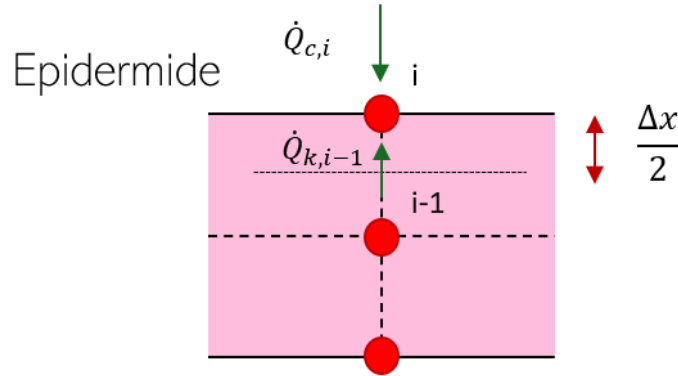
$$(T_{i-1}^? - T_i^?) + Bi_{ep} (T_\infty - T_i^?) + \dot{Q}_m \frac{\Delta x}{k_{ep}} + SAR_i \rho_{ep} \frac{\Delta x^2}{2k_{ep}} + \frac{w_b(T) \rho_b c_b \Delta x}{k_{ep}} (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{1}{2Fo_{ep}} (T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Da qui ricaviamo:

$$T_i^{t+1}$$

↓

$$T_i^t + 2Fo_{ep} \left[ T_{i-1}^? - T_i^? \left( 1 + Bi_{ep} + \frac{w_b(T) \rho_b c_b \Delta x}{k_{ep}} \right) + Bi_{ep} T_\infty + \frac{\Delta x}{k_{ep}} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \frac{\Delta x}{2} + w_b(T) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$



## Nodo 2

Il nodo 2 è posto in corrispondenza in corrispondenza dell'epidermide.

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T) \rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

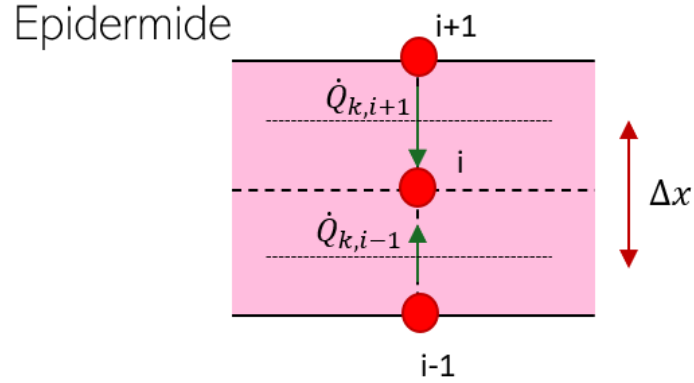
$$\frac{k_{ep} A}{\Delta x} (T_{i-1}^? - T_i^?) + \frac{k_{ep} A}{\Delta x} (T_{i+1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \Delta x + w_b(T) \rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_{ep} c_{ep} A \frac{\Delta x}{\Delta \theta} (T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Dividendo per  $k_{ep}$ , per A e moltiplichiamo per  $\Delta x$  otteniamo che:

$$T_i^{t+1}$$

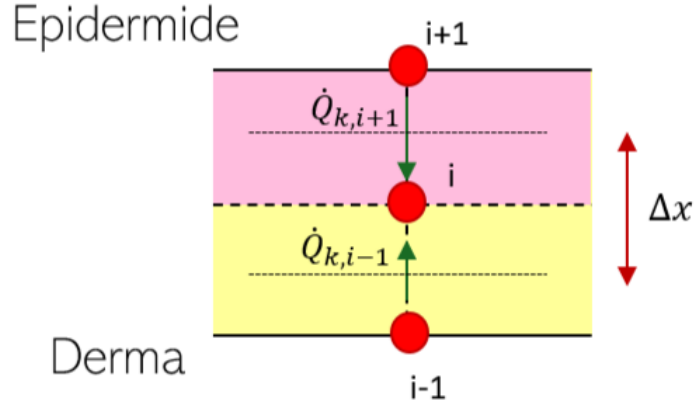
$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_{ep} \left[ T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^? \left( 2 + \frac{w_b(T) \rho_b c_b \Delta x}{k_{ep}} \right) + \frac{\Delta x}{k_{ep}} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \Delta x + w_b(T) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$



### Nodo 3

Il nodo 3 è posto in corrispondenza dell'interfaccia tra l'epidermide e il derma.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T) \rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

Da varie ricerche in letteratura si può ipotizzare che la densità, il calore specifico e la conducibilità del derma sono le stesse di quella dell'epidermide:

$$\frac{k_{ep} A}{\Delta x} (T_{i-1}^? - T_i^?) + \frac{k_{ep} A}{\Delta x} (T_{i+1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \Delta x + w_b(T) \rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_{ep} c_{ep} A \frac{\Delta x}{\Delta \theta} (T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Dividendo per  $k_{ep}$ , per A e moltiplichiamo per  $\Delta x$  otteniamo che:

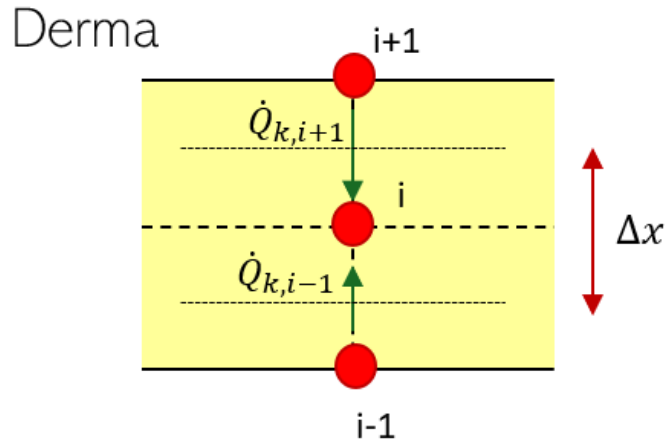
$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_{ep} \left[ T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^? \left( 2 + \frac{w_b(T) \rho_b c_b \Delta x}{k_{ep}} \right) + \frac{\Delta x}{k_{ep}} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \Delta x + w_b(T) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

#### Nodo 4

Il nodo 4 è posto in corrispondenza del derma.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T) \rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

Da varie ricerche in letteratura si può ipotizzare che la densità, il calore specifico e la conducibilità del derma sono le stesse di quella dell'epidermide:

$$\frac{k_{ep} A}{\Delta x} (T_{i-1}^? - T_i^?) + \frac{k_{ep} A}{\Delta x} (T_{i+1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \Delta x + w_b(T) \rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_{ep} c_{ep} A \frac{\Delta x}{\Delta \theta} (T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Dividendo per  $k_{ep}$ , per A e moltiplichiamo per  $\Delta x$  otteniamo che:

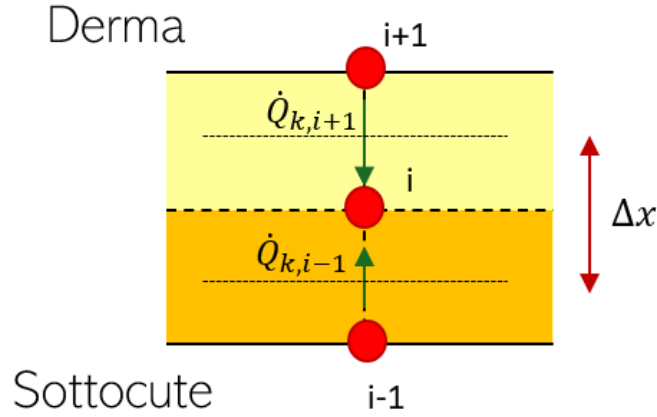
$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_{ep} \left[ T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^? \left( 2 + \frac{w_b(T) \rho_b c_b \Delta x}{k_{ep}} \right) + \frac{\Delta x}{k_{ep}} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \Delta x + w_b(T) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

## Nodo 5

Il nodo 5 è posto a cavallo dell'interfaccia tra derma e sottocute.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

Da varie ricerche in letteratura si può ipotizzare che la densità, il calore specifico e la conducibilità della sottocute sono le stesse di quella dell'epidermide:

$$\frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_{ep} c_{ep} A \frac{\Delta x}{\Delta \theta} (T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Dividendo per  $k_{ep}$ , per A e moltiplichiamo per  $\Delta x$  otteniamo che:

$$T_i^{t+1}$$

$\Downarrow$

$$T_i^t + Fo_{ep} \left[ T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^? \left( 2 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_{ep}} \right) + \frac{\Delta x}{k_{ep}} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

## Nodo 6

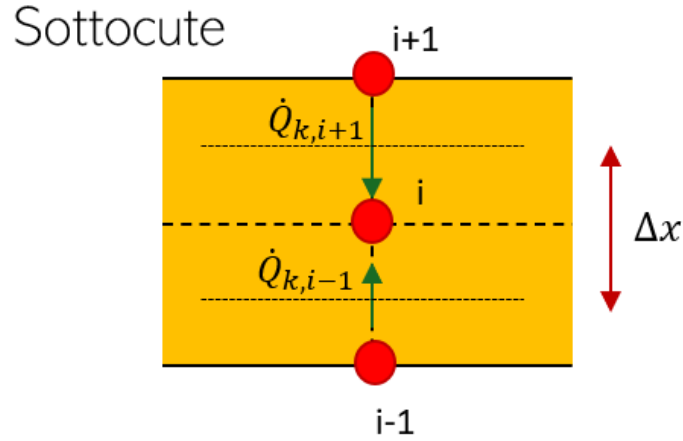
Il nodo 6 è posto in corrispondenza della sottocute.

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

Da varie ricerche in letteratura si può ipotizzare che la densità, il calore specifico e la conducibilità della sottocute sono le stesse di quella dell'epidermide:

$$\frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_{ep} c_{ep} A \frac{\Delta x}{\Delta \theta} (T_i^{t+1} - T_i^t)$$



Dividendo per  $k_{ep}$ , per A e moltiplichiamo per  $\Delta x$  otteniamo che:

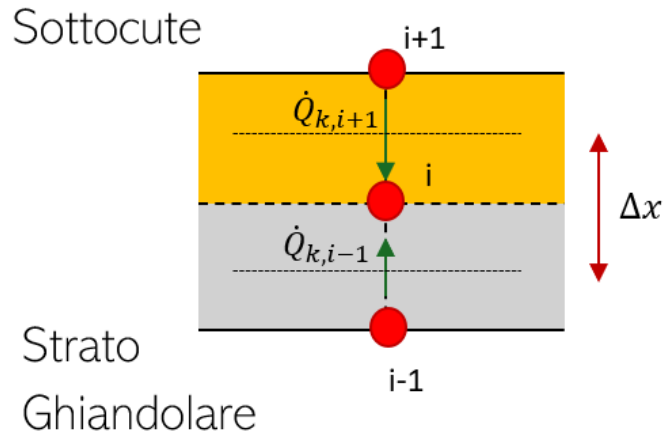
$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_{ep} \left[ T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^? \left( 2 + \frac{w_b(T) \rho_b c_b \Delta x}{k_{ep}} \right) + \frac{\Delta x}{k_{ep}} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_{ep} \Delta x + w_b(T) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

#### Nodo 7

Il nodo 7 è posto in corrispondenza dell'interfaccia tra sottocute e strati ghiandolare.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T) \rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$



$$\frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \frac{k_gA}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \frac{\rho_{ep} + \rho_g}{2} \Delta x + w_b(T) \rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta x}{2\Delta\theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)(\rho_{ep}c_{ep} + \rho_gc_g)$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza dello strato ghiandolare:

$$Fo_g = \frac{k_g \Delta\theta}{\rho_g c_g \Delta x^2}$$

Un ulteriore parametro da introdurre per semplificare la scrittura equivalente un il numero di Fourier equivalente che tiene conto, contemporaneamente della sottocute e dello strato ghiandolare:

$$\frac{1}{Fo_{eg}} = \frac{1}{Fo_{ep}k_g} + \frac{1}{Fo_gk_{ep}}$$

Da queste definizioni si ottiene:

$$T_i^t + Fo_{eg} \left[ 2 \frac{T_{i-1}^?}{k_{ep}} + 2 \frac{T_{i+1}^?}{k_g} - 2T_i^? \left( \frac{1}{k_g} + \frac{1}{k_{ep}} + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_{ep}k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_{ep}k_g} \left( 2\dot{Q}_m + SAR_i(\rho_{ep} + \rho_g)\Delta x + 2w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

## Nodo 8

Il nodo 8 è posto in corrispondenza dello strato ghiandolare.

In questa posizione il nodo i+1 può assumere due possibili configurazioni differenti:

1. in corrispondenza dell'interfaccia tra sottocute e strato ghiandolare;
2. in corrispondenza dello strato ghiandolare.

Di seguito vengono analizzate le due casistiche.

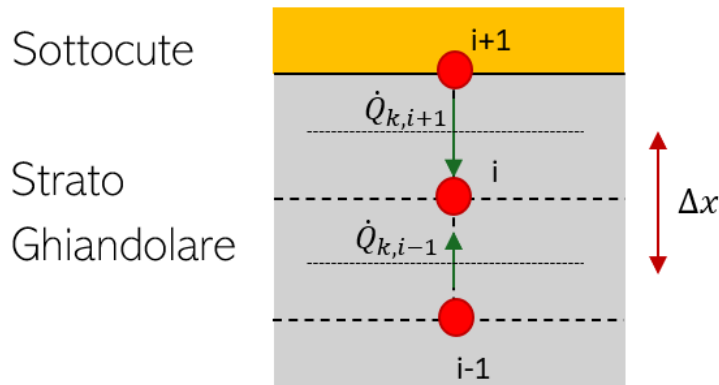


Figura 3: i+1 all'interfaccia sottocute-strato ghiandolare

### I CASO: i+1 all'interfaccia sottocute-strato ghiandolare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_g + k_{ep}}{2} \cdot \frac{A}{\Delta x} (T_{i+1}^? - T_i^?) + \frac{k_g A}{\Delta x} (T_{i-1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_g c_g A \frac{\Delta x}{\Delta \theta} (T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^t + F o_g \left[ T_{i+1}^? \left( \frac{k_g + k_{ep}}{2k_g} \right) + T_{i-1}^? - T_i^? \left( \frac{k_g + k_{ep}}{2k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_g} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

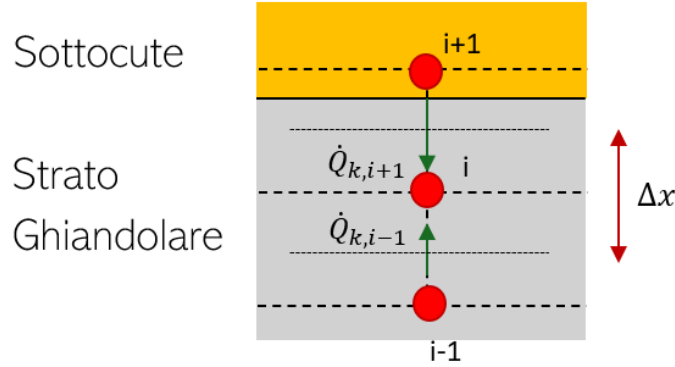


Figura 4: i+1 nella sottocute

## II CASO: i+1 nella sottocute

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

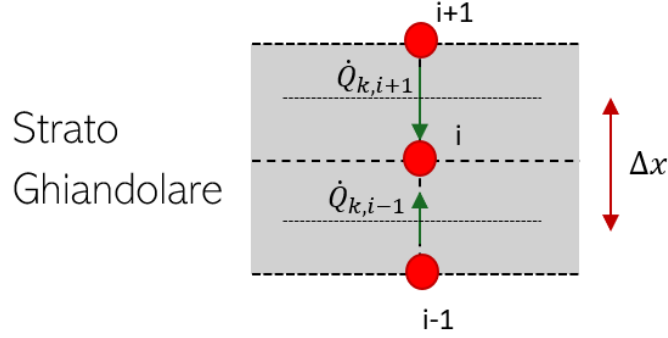
$$\frac{k_{ep} A}{\Delta x} (T_{i+1}^? - T_i^?) + \frac{k_g A}{\Delta x} (T_{i-1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_g c_g A \frac{\Delta x}{\Delta \theta} (T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^t + F o_g \left[ T_{i+1}^? \frac{k_{ep}}{k_g} + T_{i-1}^? - T_i^? \left( \frac{k_{ep}}{k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_g} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

### Nodo 9

Il nodo 9 è posto in corrispondenza dello strato ghiandolare.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_g A}{\Delta x} (T_{i+1}^? - T_i^?) + \frac{k_g A}{\Delta x} (T_{i-1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_g c_g A \frac{\Delta x}{\Delta \theta} (T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$\Downarrow$

$$T_i^t + Fo_g \left[ T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^? \left( 2 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_g} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

### Nodo 10

Il nodo 10 è posto in corrispondenza dello strato ghiandolare.

In questa posizione il nodo i-1 può avere due configurazioni differenti:

1. in corrispondenza dell'interfaccia tra strato ghiandolare e tumore;
2. in corrispondenza del tumore.

Di seguito vengono analizzate le due casistiche.

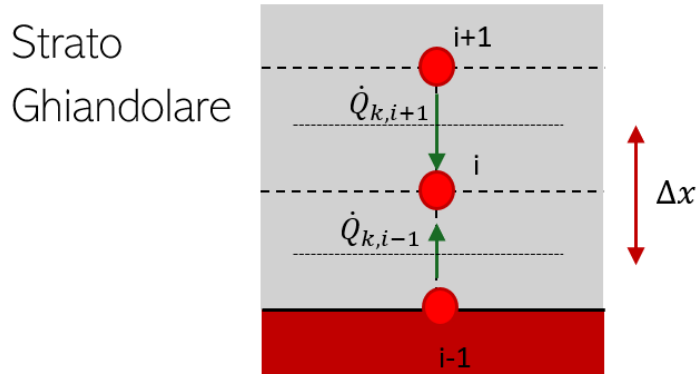


Figura 5: i-1 all'interfaccia strato ghiandolare-tumore

### I CASO: i-1 all'interfaccia strato ghiandolare-tumore

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_g + k_t}{2} \cdot \frac{A}{\Delta x} (T_{i-1}^? - T_i^?) + \frac{k_g A}{\Delta x} (T_{i+1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_g c_g A \frac{\Delta x}{\Delta \theta} (T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1} \downarrow$$

$$T_i^t + F o_g \left[ T_{i-1}^? \left( \frac{k_g + k_t}{2k_g} \right) + T_{i+1}^? - T_i^? \left( \frac{k_g + k_t}{2k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_g} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

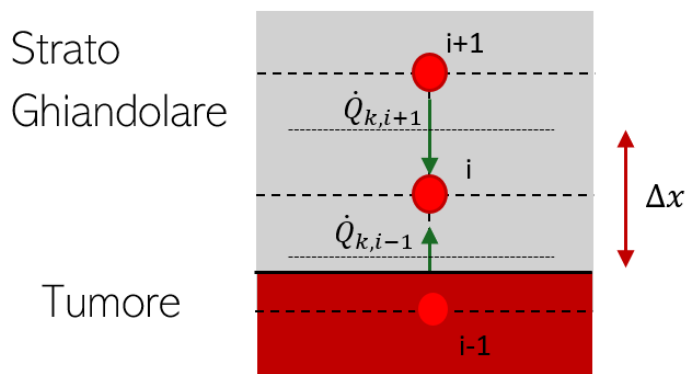


Figura 6: i-1 nel tumore

## II CASO: i-1 nel tumore

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_g A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \frac{k_t A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_g c_g A \frac{\Delta x}{\Delta \theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

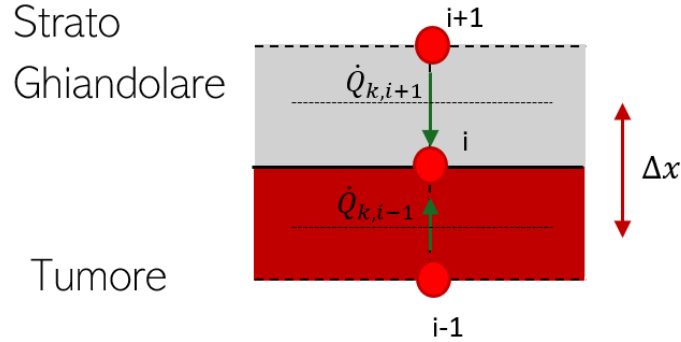
$$T_i^{t+1}$$

$\Downarrow$

$$T_i^t + Fog \left[ T_{i-1}^? \frac{k_t}{k_g} + T_{i+1}^? - T_i^? \left( \frac{k_t}{k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_g} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

### Nodo 11

Il nodo 11 è posto in corrispondenza dell'interfaccia tra strato ghiandolare e tumore.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_g A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \frac{k_t A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \frac{\rho_g + \rho_t}{2} \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta x}{2\Delta \theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)(\rho_g c_g + \rho_t c_t)$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza dello strato ghiandolare:

$$Fot = \frac{k_t \Delta \theta}{\rho_t c_t \Delta x^2}$$

Un ulteriore parametro da introdurre per semplificare la scrittura equivalente un il numero di Fourier equivalente che tiene conto, contemporaneamente della sottocute e dello strato ghiandolare:

$$\frac{1}{Fogt} = \frac{1}{Fot k_g} + \frac{1}{Fog k_t}$$

Da queste definizioni si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$\Downarrow$

$$T_i^t + F o_{gt} \left[ 2 \frac{T_{i+1}^?}{k_t} + 2 \frac{T_{i-1}^?}{k_g} - 2 T_i^? \left( \frac{1}{k_t} + \frac{1}{k_g} + \frac{w_b(T) \rho_b c_b \Delta x}{k_t k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_t k_g} \left( 2 \dot{Q}_m + S A R_i (\rho_t + \rho_g) \Delta x + 2 w_b(T) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

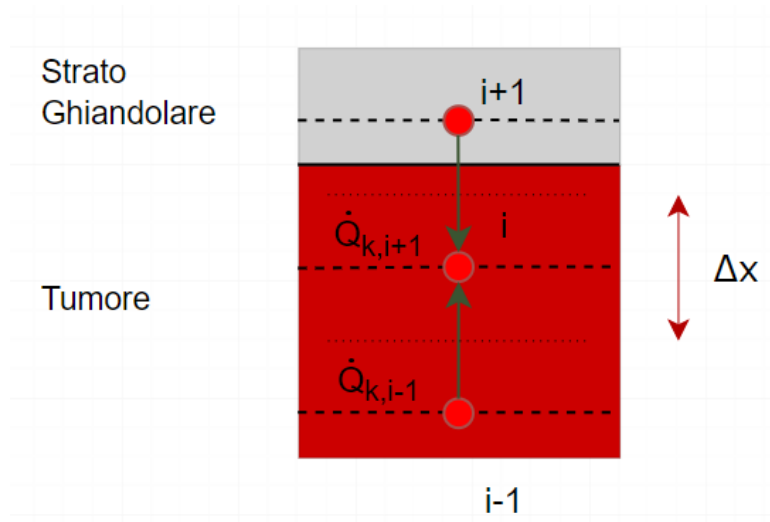
## Nodo 12

Il nodo 12 è posto in corrispondenza del tumore.

In questa posizione il nodo i+1 può stare in due configurazioni differenti:

1. in corrispondenza dello strato ghiandolare;
2. in corrispondenza dell'interfaccia tra strato ghiandolare e tumore.

Di seguito vengono analizzate le due casistiche.



## I CASO: i+1 nello strato ghiandolare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

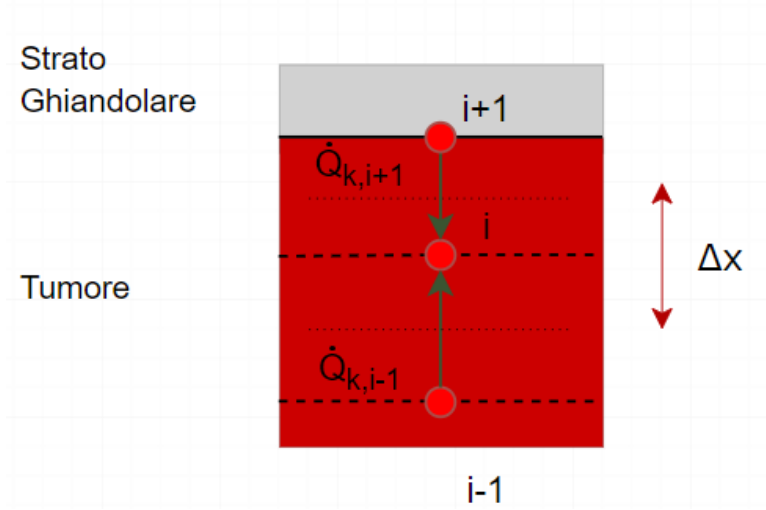
$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T) \rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$\Downarrow$

$$T_i^t + F o_t \left[ T_{i+1}^? \left( \frac{k_g}{k_t} \right) + T_{i-1}^? - T_i^? \left( \frac{k_g}{k_t} + 1 + \frac{w_b(T) \rho_b c_b \Delta x}{k_t} \right) + \frac{\Delta x}{k_t} \left( \dot{Q}_m + S A R_i \rho_t \Delta x + w_b(T) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$



## II CASO: i+1 all'interfaccia strato ghiandolare -tumore

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

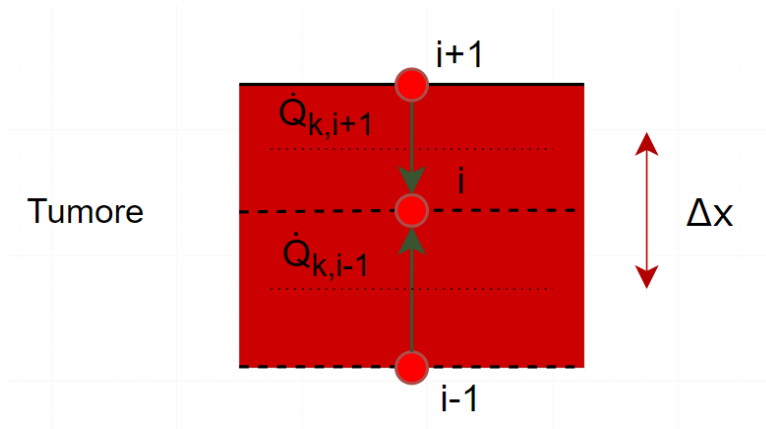
$$T_i^{t+1}$$

⇓

$$T_i^t + Fo_t \left[ T_{i+1}^? \left( \frac{k_g + k_t}{2k_t} \right) + T_{i-1}^? - T_i^? \left( \frac{k_g + k_t}{2k_t} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_t} \right) + \frac{\Delta x}{k_t} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_t \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

### Nodo 13

Il nodo 13 è posto in corrispondenza del tumore.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_t \left[ T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^? \left( 2 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_t} \right) + \frac{\Delta x}{k_t} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_t \Delta x + w_b(T) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

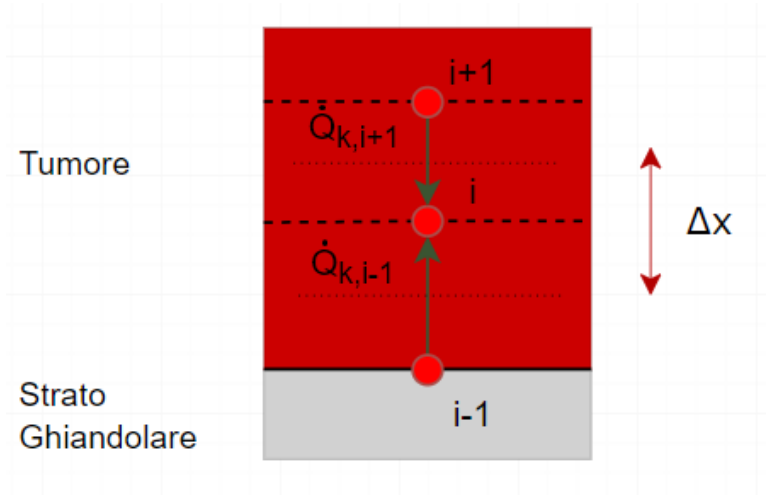
#### Nodo 14

Il nodo 14 è posto in corrispondenza del tumore.

In questa posizione il nodo i-1 può avere due configurazioni differenti:

1. in corrispondenza dell'interfaccia tra tumore e strato ghiandolare;
2. in corrispondenza dello strato ghiandolare.

Di seguito vengono analizzate le due casistiche.



**I CASO: i-1 all'interfaccia tumore - strato ghiandolare** Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T) \rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

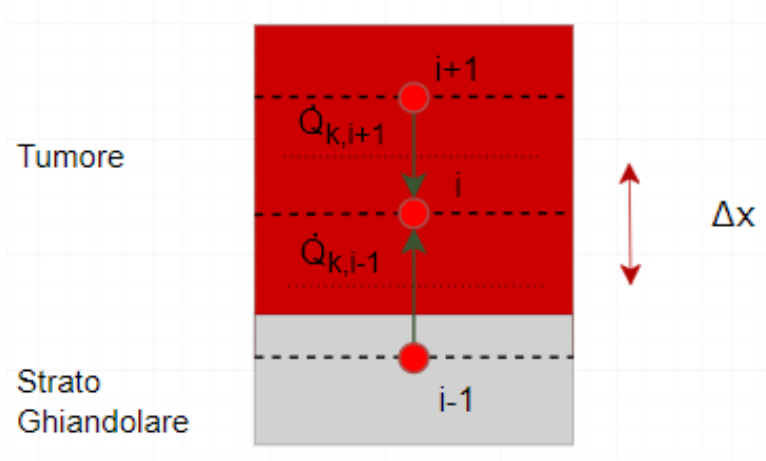
Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + Fo_t \left[ T_{i-1}^? \left( \frac{k_g + k_t}{2 k_t} \right) + T_{i+1}^? - T_i^? \left( \frac{k_g + k_t}{2 k_t} + 1 + \frac{w_b(T) \rho_b c_b \Delta x}{k_t} \right) + \frac{\Delta x}{k_t} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_t \Delta x + w_b(T) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$





## II CASO: i-1 nello strato ghiandolare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

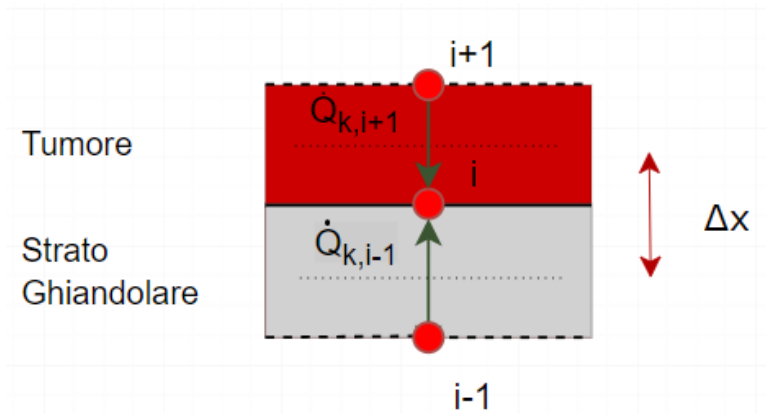
$$T_i^{t+1}$$

⇓

$$T_i^t + \text{Fot} \left[ T_{i-1}^? \left( \frac{k_g}{k_t} \right) + T_{i+1}^? - T_i^? \left( \frac{k_g}{k_t} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_t} \right) + \frac{\Delta x}{k_t} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_t \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

### Nodo 15

Il nodo 15 è posto in corrispondenza dell'interfaccia tra tumore e strato ghiandolare.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta u}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_g A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \frac{k_t A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \frac{\rho_g + \rho_t}{2} \Delta x + w_b(T) \rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta x}{2 \Delta \theta} (T_i^{t+1} - T_i^t) (\rho_g c_g + \rho_t c_t)$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza del tumore:

$$Fo_t = \frac{k_t \Delta \theta}{\rho_t c_t \Delta x^2}$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza dello strato ghiandolare:

$$Fo_g = \frac{k_g \Delta \theta}{\rho_g c_g \Delta x^2}$$

Un ulteriore parametro da introdurre per semplificare la scrittura equivalente un il numero di Fourier equivalente che tiene conto, contemporaneamente della sottocute e dello strato ghiandolare:

$$\frac{1}{Fo_{tg}} = \frac{1}{Fo_g k_t} + \frac{1}{Fo_t k_g}$$

Da queste definizioni si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

↓

$$T_i^t + Fo_{tg} \left[ 2 \frac{T_{i+1}^?}{k_g} + 2 \frac{T_{i-1}^?}{k_t} - 2 T_i^? \left( \frac{1}{k_t} + \frac{1}{k_g} + \frac{w_b(T) \rho_b c_b \Delta x}{k_t k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_t k_g} \left( 2 \dot{Q}_m + SAR_i (\rho_t + \rho_g) \Delta x + 2 w_b(T) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

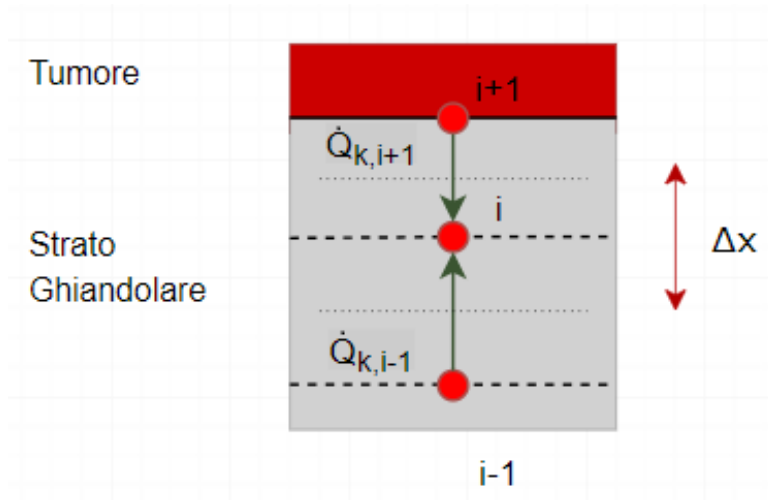
## Nodo 16

Il nodo 16 è posto in corrispondenza dello strato ghiandolare.

In questa posizione il nodo i+1 può stare in due configurazioni differenti:

1. in corrispondenza dell'interfaccia tra tumore e strato ghiandolare;
2. in corrispondenza dello strato ghiandolare.

Di seguito vengono analizzate le due casistiche.



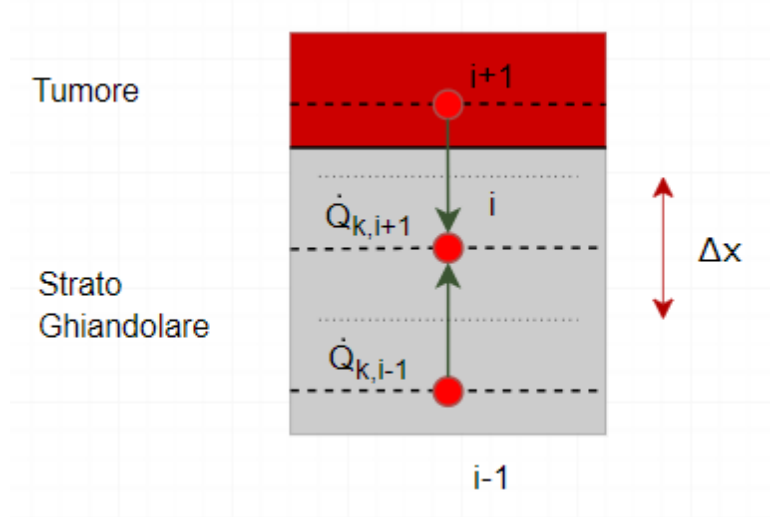
### I CASO: i+1 all'interfaccia tumore-strato ghiandolare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1} \Downarrow T_i^t + Fo_g \left[ T_{i+1}^? \left( \frac{k_g + k_t}{2k_g} \right) + T_{i-1}^? - T_i^? \left( \frac{k_g + k_t}{2k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_g} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$



## II CASO: i+1 nel tumore

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

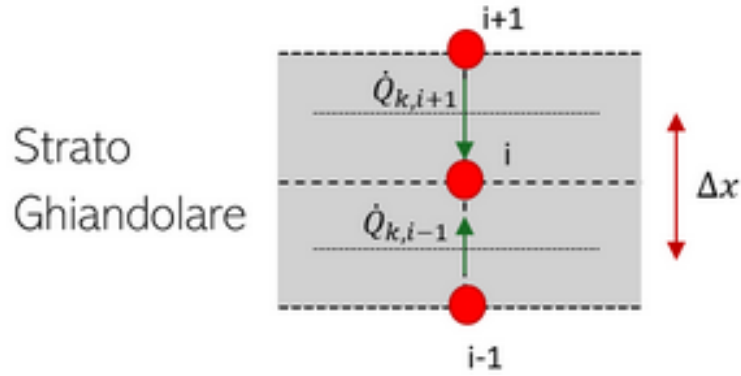
$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1} \Downarrow T_i^t + Fo_g \left[ T_{i+1}^? \left( \frac{k_t}{k_g} \right) + T_{i-1}^? - T_i^? \left( \frac{k_t}{k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_g} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

### Nodo 17

Il nodo 17 è posto in corrispondenza dello strato ghiandolare.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1} \Downarrow T_i^t + Fo_g \left[ T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^? \left( 2 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_g} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_g \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

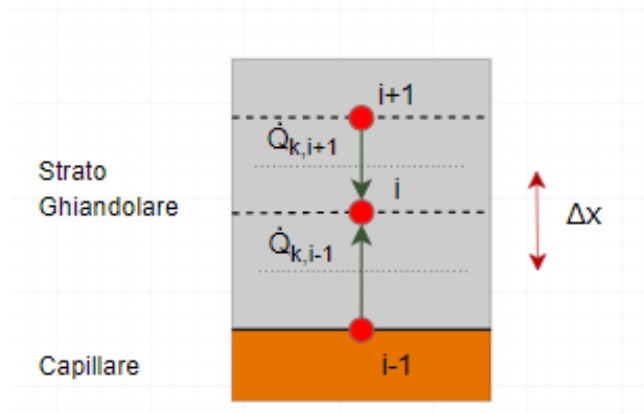
### Nodo 18

Il nodo 18 è posto in corrispondenza dello strato ghiandolare.

In questa posizione il nodo i-1 può avere due configurazioni differenti:

1. in corrispondenza dell'interfaccia tra strato ghiandolare e capillare;
2. in corrispondenza del capillare.

Di seguito vengono analizzate le due casistiche.



### I CASO: i-1 all'interfaccia strato ghiandolare - capillare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

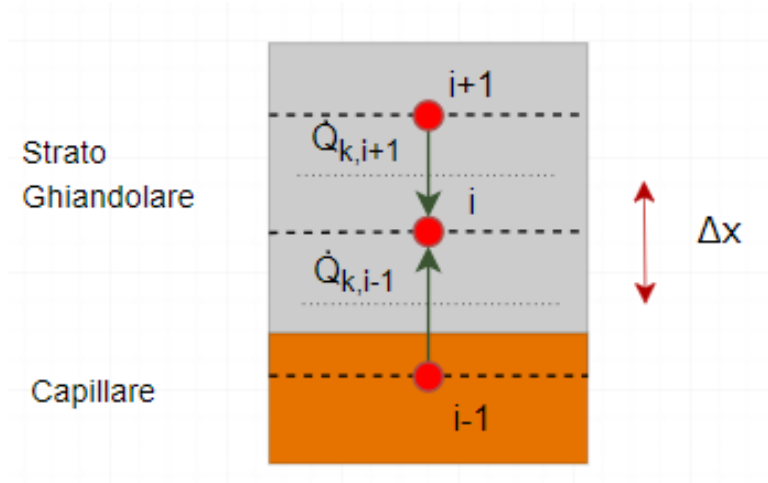
$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

$\Downarrow$

$$T_i^t + Fog \left[ T_{i-1}^? \left( \frac{k_g + k_c}{2k_g} \right) + T_{i+1}^? - T_i^? \left( \frac{k_g + k_c}{2k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_g} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_c \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$



### II CASO: i-1 nel capillare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

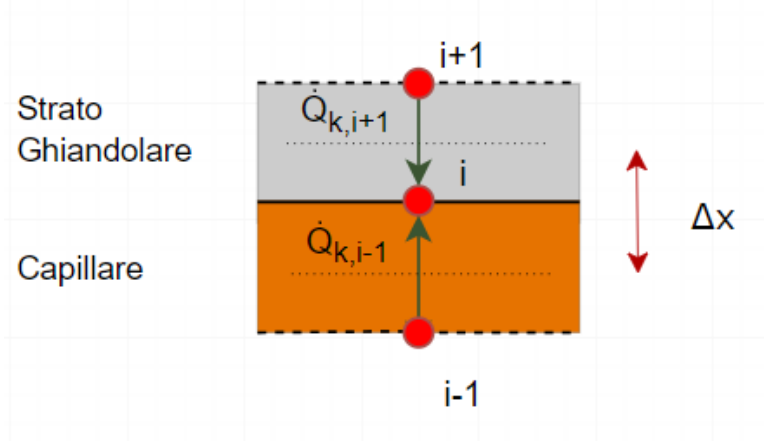
$$T_i^{t+1}$$

$\Downarrow$

$$T_i^t + Fog \left[ T_{i-1}^? \left( \frac{k_c}{k_g} \right) + T_{i+1}^? - T_i^? \left( \frac{k_c}{k_g} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_g} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_c \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

## Nodo 19

Il nodo 19 è posto in corrispondenza dell'interfaccia tra strato ghiandolare e capillare.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_c A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \frac{k_g A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \frac{\rho_g + \rho_c}{2} \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta x}{2\Delta \theta}(T_i^{t+1} - T_i^t)(\rho_g c_g + \rho_c c_c)$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza dello strato ghiandolare:

$$Fo_g = \frac{k_g \Delta \theta}{\rho_g c_g \Delta x^2}$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza del capillare:

$$Fo_c = \frac{k_c \Delta \theta}{\rho_c c_c \Delta x^2}$$

Un ulteriore parametro da introdurre per semplificare la scrittura equivalente un il numero di Fourier equivalente che tiene conto, contemporaneamente della sottocute e dello strato ghiandolare:

$$\frac{1}{Fo_{gc}} = \frac{1}{Fo_g k_c} + \frac{1}{Fo_c k_g}$$

Da queste definizioni si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

↓

$$T_i^t + Fo_{gc} \left[ 2 \frac{T_{i+1}^?}{k_c} + 2 \frac{T_{i-1}^?}{k_g} - 2 T_i^? \left( \frac{1}{k_c} + \frac{1}{k_g} + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_c k_g} \right) + \frac{\Delta x}{k_c k_g} \left( 2 \dot{Q}_m + SAR_i (\rho_c + \rho_g) \Delta x + 2 w_b(T) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

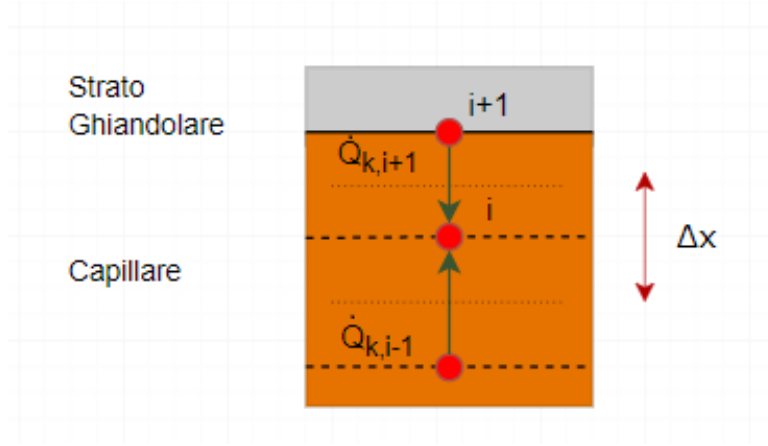
## Nodo 20

Il nodo 20 è posto in corrispondenza del capillare.

In questa posizione il nodo i+1 può stare in due configurazioni differenti:

1. in corrispondenza dell'interfaccia tra strato ghiandolare e capillare;
2. in corrispondenza dello strato ghiandolare.

Di seguito vengono analizzate le due casistiche.



### I CASO: i+1 all'interfaccia strato ghiandolare - capillare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

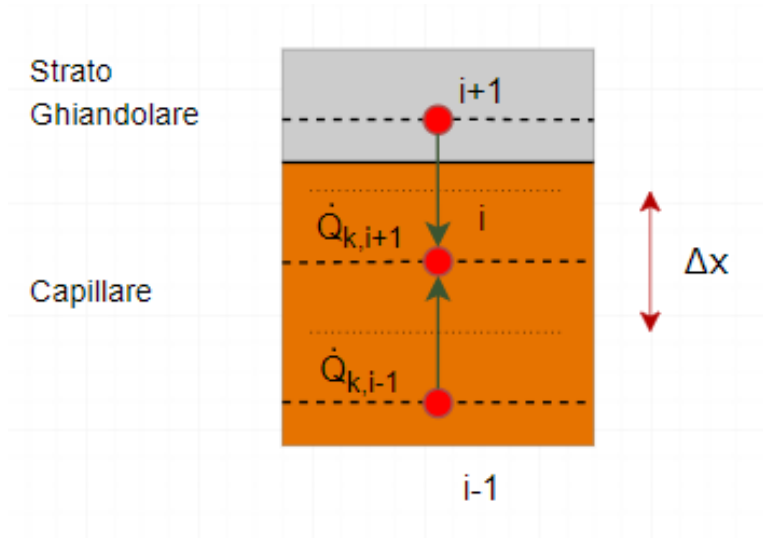
$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1}$$

↓

$$T_i^t + Foc \left[ T_{i+1}^? \left( \frac{k_g + k_c}{2k_c} \right) + T_{i-1}^? - T_i^? \left( \frac{k_g + k_c}{2k_c} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_c} \right) + \frac{\Delta x}{k_c} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_c \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$



## II CASO: i+1 nello strato ghiandolare

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

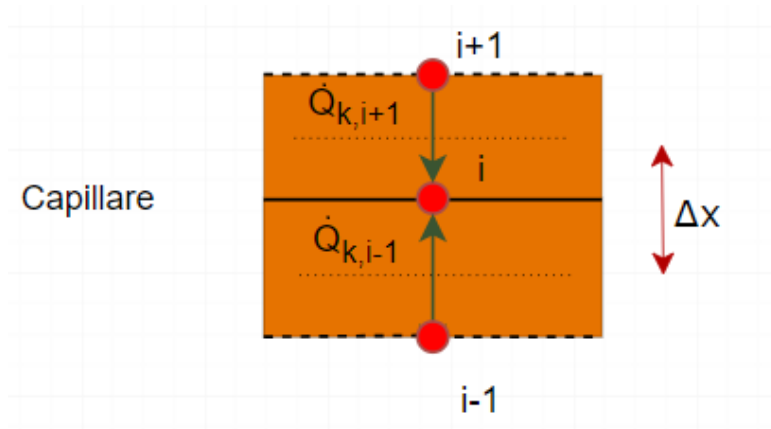
$$T_i^{t+1}$$

↓

$$T_i^t + Fo_c \left[ T_{i+1}^? \left( \frac{k_g}{k_c} \right) + T_{i-1}^? - T_i^? \left( \frac{k_g}{k_c} + 1 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_c} \right) + \frac{\Delta x}{k_c} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_c \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

## Nodo 21

Il nodo 21 è posto in corrispondenza del capillare.



Il bilancio, in questa posizione fornisce:



$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

Con le opportune semplificazioni, si ottiene:

$$T_i^{t+1} \Downarrow T_i^t + Fo_c \left[ T_{i-1}^? + T_{i+1}^? - T_i^? \left( 2 + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_c} \right) + \frac{\Delta x}{k_c} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_c \Delta x + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

## Nodo 22

Il nodo 22 è posto in corrispondenza dell'interfaccia tra il capillare e il flusso sanguigno.

Il bilancio, in questa posizione fornisce:

$$\dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_{c,i} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_c A}{\Delta x} (T_{i+1}^? - T_i^?) + h_{b,\infty} (T_b(\theta) - T_i^?) + \dot{Q}_m + SAR_i \rho_c \frac{\Delta x}{2} + w_b(T)\rho_b c_b (T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_c c_c A \frac{\Delta x}{2 \Delta \theta} (T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Dividiamo per  $k_c$ , per A e moltiplichiamo per  $\Delta x$  :

$$(T_{i+1}^? - T_i^?) + h_{b,\infty} \frac{\Delta x}{k_c} (T_b(\theta) - T_i^?) + \dot{Q}_m \frac{\Delta x}{k_c} + SAR_i \rho_c \frac{\Delta x^2}{2 k_c} + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_c} (T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_c c_c \frac{\Delta x^2}{2 k_c \Delta \theta} (T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Definiamo il numero di Biot locale in corrispondenza del capillare:

$$Bi_c = h_{b,\infty} \frac{\Delta x}{k_c}$$

Definiamo il numero di Fourier in corrispondenza del capillare:

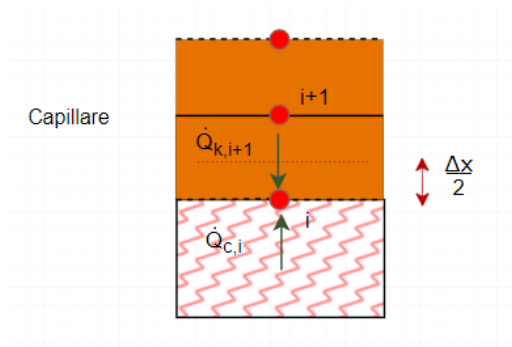
$$Fo_c = \frac{k_c \Delta \theta}{\rho_c c_c \Delta x^2}$$

Sfruttando le costanti appena definite, è possibile riscrivere il bilancio come segue:

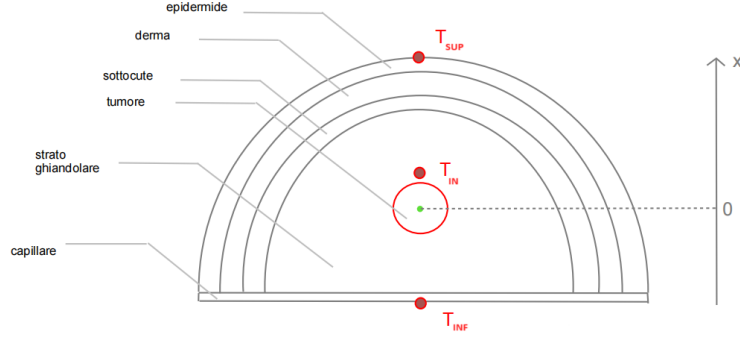
$$(T_{i+1}^? - T_i^?) + Bi_c (T_b(\theta) - T_i^?) + \dot{Q}_m \frac{\Delta x}{k_c} + SAR_i \rho_c \frac{\Delta x^2}{2 k_c} + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_c} (T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{1}{2 Fo_c} (T_i^{t+1} - T_i^t)$$

Da qui ricaviamo:

$$T_i^{t+1} \Downarrow T_i^t + 2 Fo_c \left[ T_{i+1}^? - T_i^? \left( 1 + Bi_c + \frac{w_b(T)\rho_b c_b \Delta x}{k_c} \right) + Bi_c T_b(\theta) + \frac{\Delta x}{k_c} \left( \dot{Q}_m + SAR_i \rho_c \frac{\Delta x}{2} + w_b(T)\rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$



## Bilanci (secondo approccio delle resistenze)



### Bilancio nodo $T_3$ (aria-strato)

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{c,i} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T_i^?)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{(T_{i-1}^? - T_i^?)}{R_{i-1}} + h_{c,\infty}(T_\infty(\theta) - T_i^?) + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i \rho_i \frac{\Delta x}{2} + w_b(T_i^?)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \sum_{i=1}^N (\rho_i c_i s_i) \frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Delta \theta}$$

$$\frac{(T_{i-1}^? - T_i^?)}{R_{i-1}} + h_{c,\infty}(T_\infty(\theta) - T_i^?) + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i \rho_i \frac{\Delta x}{2} + w_b(T_i^?)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Sigma_3}$$

$$T_i^{t+1}$$

$\Downarrow$

$$T_i^t + \Sigma_3 \left[ \frac{T_{i-1}^?}{R_{i-1}} - T_i^? \left( \frac{1}{R_{i-1}} + h_{c,\infty} + w_b(T_i^?)\rho_b c_b \right) + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i \rho_i \frac{\Delta x}{2} + h_{c,\infty} T_\infty + w_b(T_i^?)\rho_b c_b T_b(\theta) \right]$$

### Bilancio nodo $T_2$ (strato-strato)

$$\dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T_i^?)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{(T_{i+1}^? - T_i^?)}{R_{i+1}} + \frac{(T_{i-1}^? - T_i^?)}{R_{i-1}} + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i \rho_i \Delta x + w_b(T_i^?)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \sum_{i=1}^N (\rho_i c_i s_i) \frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Delta \theta}$$

$$\frac{(T_{i+1}^? - T_i^?)}{R_{i+1}} + \frac{(T_{i-1}^? - T_i^?)}{R_{i-1}} + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i \rho_i \Delta x + w_b(T_i^?)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Sigma_2}$$

$$T_i^{t+1}$$

$\Downarrow$

$$T_i^t + \Sigma_2 \left[ \frac{T_{i+1}^?}{R_{i+1}} + \frac{T_{i-1}^?}{R_{i-1}} - T_i^? \left( \frac{1}{R_{i+1}} + \frac{1}{R_{i-1}} + w_b(T_i^?)\rho_b c_b \right) + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i \rho_i \Delta x + w_b(T_i^?)\rho_b c_b T_b(\theta) \right]$$

**Bilancio nodo  $T_1$  (strato-sangue)**

$$\dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_{c,i} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_p + w_b(T_i^?)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{(T_{i+1}^? - T_i^?)}{R_{i+1}} + h_{b,\infty}(T_{b,\infty}(\theta) - T_i^?) + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i \rho_i \frac{\Delta x}{2} + w_b(T_i^?)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \sum_{i=1}^N (\rho_i c_i s_i) \frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Delta \theta}$$

$$\frac{(T_{i+1}^? - T_i^?)}{R_{i+1}} + h_{b,\infty}(T_{b,\infty}(\theta) - T_i^?) + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i \rho_i \frac{\Delta x}{2} + w_b(T_i^?)\rho_b c_b(T_b(\theta) - T_i^?) = \frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Sigma_1}$$

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + \Sigma_1 \left[ \frac{T_{i+1}^?}{R_{i+1}} - T_i^? \left( \frac{1}{R_{i+1}} + h_{b,\infty} + w_b(T_i^?)\rho_b c_b \right) + \dot{Q}_{m,i} + SAR_i \rho_i \frac{\Delta x}{2} + h_{b,\infty} T_{b,\infty} + w_b(T_i^?)\rho_b c_b T_b(\theta) \right]$$

Il sistema di equazioni risulta il seguente:

$$\begin{aligned} \mathbf{T_1} \quad T_1^{t+1} &= T_1^t + \left[ \frac{\Sigma_1}{R_2} T_2^? - T_1^? \left( \frac{\Sigma_1}{R_2} + \Sigma_1 h_{b,\infty} + \Sigma_1 w_b(T_1^?)\rho_b c_b \right) + \Sigma_1 \dot{Q}_{m,1} + \Sigma_1 SAR_1 \rho_1 \frac{\Delta x}{2} + \Sigma_1 h_{b,\infty} T_{b,\infty} + \Sigma_1 w_b(T_1^?)\rho_b c_b T_b(\theta) \right] \\ \mathbf{T_2} \quad T_2^{t+1} &= T_2^t + \left[ \frac{\Sigma_2}{R_3} T_3^? + \frac{\Sigma_2}{R_1} T_1^? - T_2^? \left( \frac{\Sigma_2}{R_3} + \frac{\Sigma_2}{R_1} + \Sigma_2 w_b(T_2^?)\rho_b c_b \right) + \Sigma_2 \dot{Q}_{m,2} + \Sigma_2 SAR_2 \rho_2 \Delta x + \Sigma_2 w_b(T_2^?)\rho_b c_b T_b(\theta) \right] \\ \mathbf{T_3} \quad T_3^{t+1} &= T_3^t + \left[ \frac{\Sigma_3}{R_2} T_2^? - T_3^? \left( \frac{\Sigma_3}{R_2} + \Sigma_3 h_{c,\infty} + \Sigma_3 w_b(T_3^?)\rho_b c_b \right) + \Sigma_3 \dot{Q}_{m,3} + \Sigma_3 SAR_3 \rho_3 \frac{\Delta x}{2} + \Sigma_3 h_{c,\infty} T_\infty + \Sigma_3 w_b(T_3^?)\rho_b c_b T_b(\theta) \right] \end{aligned}$$

Tale sistema può essere riscritto in forma matriciale:

$$\underline{T}^{t+1} = \underline{T}^t + \underline{A} \underline{T}^? + \underline{b}$$

dove:

- $\underline{T}^{t+1}$  : vettore delle temperature all'istante t+1 ;
- $\underline{T}^t$  : vettore delle temperature all'istante t ;
- $\underline{A}$  : matrice dei coefficienti;
- $\underline{T}^?$  : vettore delle temperature incognite;
- $\underline{b}$  : vettore dei termini noti;

## Rappresentazione matriciale del sistema

$$\underline{T}^{t+1} = \underline{T}^t + \underline{\underline{A}} \underline{T}^? + \underline{b}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_1^{t+1} \\ T_2^{t+1} \\ T_3^{t+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{t+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^t \\ T_2^t \\ T_3^t \end{bmatrix}}_{\underline{T}^t} + \underbrace{\begin{bmatrix} \textcolor{blue}{1} & \textcolor{blue}{2} & \textcolor{blue}{3} \\ \textcolor{blue}{1} & -\left(\frac{\Sigma_1}{R_2} + \Sigma_1 h_{b,\infty} + \Sigma_1 w_b(T_1^?) \rho_b c_b\right) & 0 \\ \textcolor{blue}{2} & \frac{\Sigma_2}{R_1} & -\left(\frac{\Sigma_2}{R_3} + \frac{\Sigma_2}{R_1} + \Sigma_2 w_b(T_2^?) \rho_b c_b\right) \\ \textcolor{blue}{3} & 0 & \frac{\Sigma_3}{R_2} - \left(\frac{\Sigma_3}{R_2} + \Sigma_3 h_{c,\infty} + \Sigma_3 w_b(T_3^?) \rho_b c_b\right) \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^? \\ T_2^? \\ T_3^? \end{bmatrix}}_{\underline{T}^?} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_1 \dot{Q}_{m,1} + \Sigma_1 SAR_1 \rho_1 \frac{\Delta x}{2} + \Sigma_1 h_{b,\infty} T_{b,\infty} + \Sigma_1 w_b(T_1^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \\ \Sigma_2 \dot{Q}_{m,2} + \Sigma_2 SAR_2 \rho_2 \Delta x + \Sigma_2 w_b(T_2^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \\ \Sigma_3 \dot{Q}_{m,3} + \Sigma_3 SAR_3 \rho_3 \frac{\Delta x}{2} + \Sigma_3 h_{c,\infty} T_{\infty} + \Sigma_3 w_b(T_3^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Per generalizzare la scelta del metodo numerico da adottare, occorre modificare il sistema matriciale introducendo un parametro  $\xi$  che consenta, in base al valore che assume, di definire uno tra tali metodi.

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{metodo esplicito} \\ 1/2 & \text{metodo di Crank-Nicolson} \\ 1 & \text{metodo implicito} \end{cases}$$

Il sistema matriciale allora diventa:

$$\underline{T}^{t+1} = \underline{T}^t + \underline{A} \xi \underline{T}^{t+1} + \underline{A} (1 - \xi) \underline{T}^t + \underline{b}$$

che può essere riscritto come:

$$\underline{T}^{t+1} \underbrace{[\underline{I} - \underline{A} \xi]}_{\underline{A}_m} = \underbrace{\underline{T}^t [\underline{I} + \underline{A} (1 - \xi)]}_{\underline{b}_m} + \underline{b}$$

$$\underline{T}^{t+1} \underline{A}_m = \underline{b}_m$$

É bene ricordare, infine, che in caso di scelta del *metodo esplicito* ( $\xi = 0$ ) vi è la necessità di dover assicurare il rispetto del *vincolo di stabilità* secondo cui, in ogni nodo, il coefficiente del termine  $T_i^t$  deve risultare positivo.

Per i tre nodi la condizione di stabilità risulterebbe:

$$\begin{aligned} T_1 : \quad & 1 - \Sigma_1 \left( \frac{1}{R_2} + h_{b,\infty} + \omega_b(T_1^t) \rho_b c_b \right) \geq 0 \\ & -1 + \frac{\Delta\theta}{\sum_{i=1}^n \rho_i c_i s_i} \left( \frac{1}{R_2} + h_{b,\infty} + \omega_b(T_1^t) \rho_b c_b \right) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta \leq \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i c_i s_i}{\frac{1}{R_2} + h_{b,\infty} + \omega_b(T_1^t) \rho_b c_b} \\ \\ T_2 : \quad & 1 - \Sigma_2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \omega_b(T_2^t) \rho_b c_b \right) \geq 0 \\ & -1 + \frac{\Delta\theta}{\sum_{i=1}^n \rho_i c_i s_i} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \omega_b(T_2^t) \rho_b c_b \right) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta \leq \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i c_i s_i}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} + \omega_b(T_2^t) \rho_b c_b} \\ \\ T_3 : \quad & 1 - \Sigma_3 \left( \frac{1}{R_2} + h_{c,\infty} + \omega_b(T_3^t) \rho_b c_b \right) \geq 0 \\ & -1 + \frac{\Delta\theta}{\sum_{i=1}^n \rho_i c_i s_i} \left( \frac{1}{R_2} + h_{c,\infty} + \omega_b(T_3^t) \rho_b c_b \right) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta \leq \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i c_i s_i}{\frac{1}{R_2} + h_{c,\infty} + \omega_b(T_3^t) \rho_b c_b} \end{aligned}$$

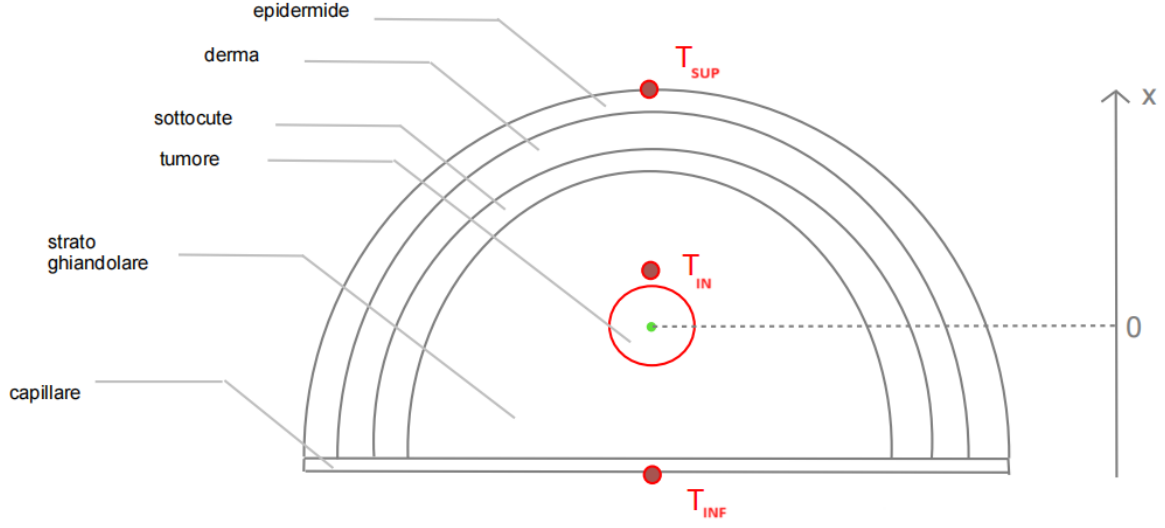
## Rappresentazione matriciale del sistema

$$\underline{T}^{t+1} \underbrace{\left[ \underline{I} - \underline{A} \xi \right]}_{\underline{A}_m} = \underbrace{\underline{T}^t \left[ \underline{I} + \underline{A} (1 - \xi) \right]}_{\underline{b}_m} + \underline{b}$$

$$\underline{A}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{I}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & -\left(\frac{\Sigma_1}{R_2} + \Sigma_1 h_{b,\infty} + \Sigma_1 w_b(T_1^?) \rho_b c_b\right) & \frac{\Sigma_1}{R_2} & 0 \\ \mathbf{2} & \frac{\Sigma_2}{R_1} & -\left(\frac{\Sigma_2}{R_3} + \frac{\Sigma_2}{R_1} + \Sigma_2 w_b(T_2^?) \rho_b c_b\right) & \frac{\Sigma_2}{R_3} \\ \mathbf{3} & 0 & \frac{\Sigma_3}{R_2} & -\left(\frac{\Sigma_3}{R_2} + \Sigma_3 h_{c,\infty} + \Sigma_3 w_b(T_3^?) \rho_b c_b\right) \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \xi$$

$$\underline{b}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^t \\ T_2^t \\ T_3^t \end{bmatrix}}_{\underline{T}^t} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{I}} + \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^t \\ T_2^t \\ T_3^t \end{bmatrix}}_{\underline{T}^t} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & -\left(\frac{\Sigma_1}{R_2} + \Sigma_1 h_{b,\infty} + \Sigma_1 w_b(T_1^?) \rho_b c_b\right) & \frac{\Sigma_1}{R_2} & 0 \\ \mathbf{2} & \frac{\Sigma_2}{R_1} & -\left(\frac{\Sigma_2}{R_3} + \frac{\Sigma_2}{R_1} + \Sigma_2 w_b(T_2^?) \rho_b c_b\right) & \frac{\Sigma_2}{R_3} \\ \mathbf{3} & 0 & \frac{\Sigma_3}{R_2} & -\left(\frac{\Sigma_3}{R_2} + \Sigma_3 h_{c,\infty} + \Sigma_3 w_b(T_3^?) \rho_b c_b\right) \end{bmatrix}}_{\underline{A}} (1 - \xi) + \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_1 \dot{Q}_{m,1} + \Sigma_1 SAR_1 \rho_1 \frac{\Delta x}{2} + \Sigma_1 h_{b,\infty} T_{b,\infty} + \Sigma_1 w_b(T_1^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \\ \Sigma_2 \dot{Q}_{m,2} + \Sigma_2 SAR_2 \rho_2 \Delta x + \Sigma_2 w_b(T_2^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \\ \Sigma_3 \dot{Q}_{m,3} + \Sigma_3 SAR_3 \rho_3 \frac{\Delta x}{2} + \Sigma_3 h_{c,\infty} T_\infty + \Sigma_3 w_b(T_3^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

## Bilanci (terzo approccio)



### Bilancio nodo $T_{SUP}$ (aria-strato)

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{c,i} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_{probe} + \dot{Q}_{perf} = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_{ep}A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + h_{c,\infty}A(T_\infty(\theta) - T_i^?) + \dot{u}_{m,ep}\frac{\Delta x}{2}A + SAR_{ep}\rho_{ep}\frac{\Delta x}{2}A + w_b(T_i^?)\rho_b c_b \frac{\Delta x}{2}A(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_{ep}c_{ep}\frac{\Delta x}{2}A\frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Delta \theta}$$

$$T_{i-1}^? - T_i^? + \frac{h_{c,\infty}\Delta x}{k_{ep}}(T_\infty(\theta) - T_i^?) + \dot{u}_{m,ep}\frac{\Delta x^2}{2k_{ep}} + SAR_{ep}\rho_{ep}\frac{\Delta x^2}{2k_{ep}} + w_b(T_i^?)\rho_b c_b \frac{\Delta x^2}{2k_{ep}}(T_b(\theta) - T_i^?) = \rho_{ep}c_{ep}\frac{\Delta x^2}{2k_{ep}}\frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Delta \theta}$$

Sapendo che:

$$Bi_{ep} = \frac{h_{c,\infty}\Delta x}{k_{ep}}$$

$$Fo_{ep} = \frac{k_{ep}\Delta \theta}{\rho_{ep}c_{ep}\Delta x^2}$$

allora:

$$T_i^{t+1}$$

$\Downarrow$

$$T_i^t + 2Fo_{ep}\left[T_{i-1}^? - T_i^? \left(Bi_{ep} + 1 + \frac{\Delta x^2 w_b(T_i^?)\rho_b c_b}{2k_{ep}}\right) + Bi_{ep}T_\infty + \frac{\Delta x^2}{2k_{ep}}\left(\dot{u}_{m,ep} + SAR_{ep}\rho_{ep} + w_b(T_i^?)\rho_b c_b T_b(\theta)\right)\right]$$

### Bilancio nodo $T_{IN}$ (strato-strato)

$$\dot{Q}_{k,i-1} + \dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_{probe} + \dot{Q}_{perf} = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_{i-1}A}{\Delta x}(T_{i-1}^? - T_i^?) + \frac{k_{i+1}A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + \dot{u}_{m,i}\Delta x A + SAR_i \rho_i \Delta x A + w_b(T_i^?) \rho_b c_b \Delta x A (T_b(\theta) - T_i^?) = \sum_{k=1}^n \rho_k c_k s_k A \frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Delta \theta}$$

Sapendo che:

$$\frac{1}{\Sigma} = \frac{\sum_{k=1}^n \rho_k c_k s_k}{\Delta \theta}$$

allora:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + \Sigma \left[ \frac{k_{i-1}}{\Delta x} T_{i-1}^? + \frac{k_{i+1}}{\Delta x} T_{i+1}^? - T_i^? \left( \frac{k_{i-1}}{\Delta x} + \frac{k_{i+1}}{\Delta x} + \Delta x w_b(T_i^?) \rho_b c_b \right) + \Delta x \left( \dot{u}_{m,i} + SAR_i \rho_i + w_b(T_i^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$

### Bilancio nodo $T_{INF}$ (strato-capillare)

$$\dot{Q}_{k,i+1} + \dot{Q}_{c,i} + \dot{Q}_m + \dot{Q}_{probe} + \dot{Q}_{perf} = \frac{\Delta U}{\Delta \theta}$$

$$\frac{k_{i+1}A}{\Delta x}(T_{i+1}^? - T_i^?) + h_{b,\infty} A (T_b(\theta) - T_i^?) + \dot{u}_{m,c} \frac{\Delta x}{2} A + SAR_c \rho_c \frac{\Delta x}{2} A + w_b(T_i^?) \rho_b c_b \frac{\Delta x}{2} A (T_b(\theta) - T_i^?) = \sum_{k=1}^n \rho_k c_k s_k A \frac{(T_i^{t+1} - T_i^t)}{\Delta \theta}$$

Sapendo che:

$$\frac{1}{\Sigma} = \frac{\sum_{k=1}^n \rho_k c_k s_k}{\Delta \theta}$$

allora:

$$T_i^{t+1}$$

$$\Downarrow$$

$$T_i^t + \Sigma \left[ \frac{k_{i+1}}{\Delta x} T_{i+1}^? - T_i^? \left( \frac{k_{i+1}}{\Delta x} + h_{b,\infty} + \frac{\Delta x}{2} w_b(T_i^?) \rho_b c_b \right) + h_{b,\infty} T_{\infty,b} + \frac{\Delta x}{2} \left( \dot{u}_{m,c} + SAR_c \rho_c + w_b(T_i^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]$$



Il sistema di equazioni risulta il seguente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1 \quad T_1^{t+1} &= T_1^t + \Sigma \left[ \frac{k_2}{\Delta x} T_2^? - T_1^? \left( \frac{k_2}{\Delta x} + h_{b,\infty} + \frac{\Delta x}{2} w_b(T_1^?) \rho_b c_b \right) + h_{b,\infty} T_{\infty,b} + \frac{\Delta x}{2} \left( \dot{u}_{m,c} + SAR_c \rho_c + w_b(T_1^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right] \\
\mathbf{T}_2 \quad T_2^{t+1} &= T_2^t + \Sigma \left[ \frac{k_1}{\Delta x} T_1^? + \frac{k_3}{\Delta x} T_3^? - T_2^? \left( \frac{k_1}{\Delta x} + \frac{k_3}{\Delta x} + \Delta x w_b(T_2^?) \rho_b c_b \right) + \Delta x \left( \dot{u}_{m,2} + SAR_2 \rho_2 + w_b(T_2^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right] \\
\mathbf{T}_3 \quad T_3^{t+1} &= T_3^t + 2 Fo_{ep} \left[ T_2^? - T_3^? \left( Bi_{ep} + 1 + \frac{\Delta x^2 w_b(T_3^?) \rho_b c_b}{2 k_{ep}} \right) + Bi_{ep} T_{\infty} + \frac{\Delta x^2}{2 k_{ep}} \left( \dot{u}_{m,ep} + SAR_{ep} \rho_{ep} + w_b(T_3^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right]
\end{aligned}$$

Tale sistema può essere riscritto in forma matriciale:

$$\underline{T}^{t+1} = \underline{T}^t + \underline{\underline{A}} \underline{T}^? + \underline{b}$$

dove:

- $\underline{T}^{t+1}$  : vettore delle temperature all'istante t+1 ;
- $\underline{T}^t$  : vettore delle temperature all'istante t ;
- $\underline{\underline{A}}$  : matrice dei coefficienti;
- $\underline{T}^?$  : vettore delle temperature incognite;
- $\underline{b}$  : vettore dei termini noti;

## Rappresentazione matriciale del sistema

$$\underline{T}^{t+1} = \underline{T}^t + \underline{\underline{A}} \underline{T}^? + \underline{b}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} T_1^{t+1} \\ T_2^{t+1} \\ T_3^{t+1} \end{bmatrix}}_{\underline{T}^{t+1}} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^t \\ T_2^t \\ T_3^t \end{bmatrix}}_{\underline{T}^t} + \underbrace{\begin{bmatrix} \textcolor{blue}{1} & \textcolor{blue}{2} & \textcolor{blue}{3} \\ \textcolor{blue}{1} & -\Sigma_1 \left( \frac{k_2}{\Delta x} + h_{b,\infty} + \frac{\Delta x}{2} w_b(T_1^?) \rho_b c_b \right) & \Sigma_1 \frac{k_2}{\Delta x} & 0 \\ \textcolor{blue}{2} & \Sigma_2 \frac{k_1}{\Delta x} & -\Sigma_2 \left( \frac{k_1}{\Delta x} + \frac{k_3}{\Delta x} + \Delta x w_b(T_2^?) \rho_b c_b \right) & \Sigma_2 \frac{k_3}{\Delta x} \\ \textcolor{blue}{3} & 0 & 2 Fo_{ep} & -2 Fo_{ep} \left( Bi_{ep} + 1 + \frac{\Delta x^2 w_b(T_3^?) \rho_b c_b}{2 k_{ep}} \right) \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^? \\ T_2^? \\ T_3^? \end{bmatrix}}_{\underline{T}^?} + \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_1 \left[ h_{b,\infty} T_{\infty,b} + \frac{\Delta x}{2} \left( \dot{u}_{m,c} + SAR_c \rho_c + w_b(T_1^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right] \\ \Sigma_2 \Delta x \left( \dot{u}_{m,2} + SAR_2 \rho_2 + w_b(T_2^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \\ 2 Fo_{ep} \left[ Bi_{ep} T_\infty + \frac{\Delta x^2}{2 k_{ep}} \left( \dot{u}_{m,ep} + SAR_{ep} \rho_{ep} + w_b(T_3^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right] \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

Per generalizzare la scelta del metodo numerico da adottare, occorre modificare il sistema matriciale introducendo un parametro  $\xi$  che consenta, in base al valore che assume, di definire uno tra tali metodi.

$$\xi = \begin{cases} 0 & \text{metodo esplicito} \\ 1/2 & \text{metodo di Crank-Nicolson} \\ 1 & \text{metodo implicito} \end{cases}$$

Il sistema matriciale allora diventa:

$$\underline{T}^{t+1} = \underline{T}^t + \underline{A} \xi \underline{T}^{t+1} + \underline{A} (1 - \xi) \underline{T}^t + \underline{b}$$

che può essere riscritto come:

$$\underline{T}^{t+1} \underbrace{[\underline{I} - \underline{A} \xi]}_{\underline{A}_m} = \underbrace{\underline{T}^t [\underline{I} + \underline{A} (1 - \xi)]}_{\underline{b}_m} + \underline{b}$$

$$\underline{T}^{t+1} \underline{A}_m = \underline{b}_m$$

É bene ricordare, infine, che in caso di scelta del *metodo esplicito* ( $\xi = 0$ ) vi è la necessità di dover assicurare il rispetto del *vincolo di stabilità* secondo cui, in ogni nodo, il coefficiente del termine  $T_i^t$  deve risultare positivo.

Per i tre nodi la condizione di stabilità risulterebbe:

$$\begin{aligned} T_1 : \quad & 1 - \Sigma_1 \left( \frac{k_2}{\Delta x} + h_{b,\infty} + \frac{\Delta x}{2} w_b(T_1^?) \rho_b c_b \right) \geq 0 \\ & -1 + \Sigma_1 \left( \frac{k_2}{\Delta x} + h_{b,\infty} + \frac{\Delta x}{2} w_b(T_1^?) \rho_b c_b \right) \leq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta \leq \frac{\sum_{k=1}^n \rho_k c_k s_k}{\frac{k_2}{\Delta x} + h_{b,\infty} + \frac{\Delta x}{2} w_b(T_1^?) \rho_b c_b}$$

$$\begin{aligned} T_2 : \quad & 1 - \Sigma_2 \left( \frac{k_1}{\Delta x} + \frac{k_3}{\Delta x} + \Delta x w_b(T_2^?) \rho_b c_b \right) \geq 0 \\ & -1 + \Sigma_2 \left( \frac{k_1}{\Delta x} + \frac{k_3}{\Delta x} + \Delta x w_b(T_2^?) \rho_b c_b \right) \leq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta \leq \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i c_i s_i}{\frac{k_1}{\Delta x} + \frac{k_3}{\Delta x} + \Delta x w_b(T_2^?) \rho_b c_b}$$

$$\begin{aligned} T_3 : \quad & 1 - 2Fo_{ep} \left( Bi_{ep} + 1 + \frac{\Delta x^2 w_b(T_3^?) \rho_b c_b}{2 k_{ep}} \right) \geq 0 \\ & -1 + 2Fo_{ep} \left( Bi_{ep} + 1 + \frac{\Delta x^2 w_b(T_3^?) \rho_b c_b}{2 k_{ep}} \right) \leq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta \leq \frac{\rho_{ep} c_{ep} \Delta x^2}{2 k_{ep} \left( Bi_{ep} + 1 + \frac{\Delta x^2 w_b(T_3^?) \rho_b c_b}{2 k_{ep}} \right)}$$

## Rappresentazione matriciale del sistema

$$\underline{T}^{t+1} \underbrace{\left[ \underline{I} - \underline{A} \xi \right]}_{\underline{A}_m} = \underbrace{\underline{T}^t \left[ \underline{I} + \underline{A} (1 - \xi) \right]}_{\underline{b}_m} + \underline{b}$$

$$\underline{A}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{I}} - \underbrace{\begin{bmatrix} & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & -\Sigma_1 \left( \frac{k_2}{\Delta x} + h_{b,\infty} + \frac{\Delta x}{2} w_b(T_1^?) \rho_b c_b \right) & & \Sigma_1 \frac{k_2}{\Delta x} & & 0 \\ \mathbf{2} & & \Sigma_2 \frac{k_1}{\Delta x} & & -\Sigma_2 \left( \frac{k_1}{\Delta x} + \frac{k_3}{\Delta x} + \Delta x w_b(T_2^?) \rho_b c_b \right) & \Sigma_2 \frac{k_3}{\Delta x} \\ \mathbf{3} & & 0 & & 2 F o_{ep} & -2 F o_{ep} \left( B i_{ep} + 1 + \frac{\Delta x^2 w_b(T_3^?) \rho_b c_b}{2 k_{ep}} \right) \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \xi$$

$$\underline{b}_m = \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^t \\ T_2^t \\ T_3^t \end{bmatrix}}_{\underline{T}^t} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{2} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{I}} + \underbrace{\begin{bmatrix} T_1^t \\ T_2^t \\ T_3^t \end{bmatrix}}_{\underline{T}^t} \underbrace{\begin{bmatrix} & \mathbf{1} & & \mathbf{2} & & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & -\Sigma_1 \left( \frac{k_2}{\Delta x} + h_{b,\infty} + \frac{\Delta x}{2} w_b(T_1^?) \rho_b c_b \right) & & \Sigma_1 \frac{k_2}{\Delta x} & & 0 \\ \mathbf{2} & & \Sigma_2 \frac{k_1}{\Delta x} & & -\Sigma_2 \left( \frac{k_1}{\Delta x} + \frac{k_3}{\Delta x} + \Delta x w_b(T_2^?) \rho_b c_b \right) & \Sigma_2 \frac{k_3}{\Delta x} \\ \mathbf{3} & & 0 & & 2 F o_{ep} & -2 F o_{ep} \left( B i_{ep} + 1 + \frac{\Delta x^2 w_b(T_3^?) \rho_b c_b}{2 k_{ep}} \right) \end{bmatrix}}_{\underline{A}} (1 - \xi) + \underbrace{\begin{bmatrix} \Sigma_1 \left[ h_{b,\infty} T_{\infty,b} + \frac{\Delta x}{2} \left( \dot{u}_{m,c} + SAR_c \rho_c + w_b(T_1^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right] \\ \Sigma_2 \Delta x \left( \dot{u}_{m,2} + SAR_2 \rho_2 + w_b(T_2^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \\ 2 F o_{ep} \left[ B i_{ep} T_{\infty} + \frac{\Delta x^2}{2 k_{ep}} \left( \dot{u}_{m,ep} + SAR_{ep} \rho_{ep} + w_b(T_3^?) \rho_b c_b T_b(\theta) \right) \right] \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$