Corso di Laurea Magistrale in

Ingegneria Biomedica

Esame di

Robotica medica

Lezione del 05/10/23

Jacobiano Geometrico

Esercitazione 2

Commenti aggiuntivi

Anno Accademico 2022/2023

TRACCIA

Calcolo dello Jacobiano geometrico per varie strutture (planare a 2 bracci, antropomorfo)

- Utilizzare il file `init.m` e le funzioni dell'esercizio precedente
- Calcolare lo Jacobiano con 6 righe indipendetemente dalla struttura

Una possibile implementazione è disponibile nel file `esercizio02.zip`

Figura 1: Traccia

La seguente esercitazione consiste nella scrittura di una funzione MatLab che consenta di calcolare lo Jacobiano geometrico, a partire dalla tabella DH (Denavit-Hartenberg) e a prescindere dalla particolare struttura di manipolazione. Bisogna utilizzare il file ”*init.m*” e le funzioni MatLab (quelle contenute nel file zip ”*DrawRobot.zip*, oltre alle funzioni ”*Homogeneous*”” e *DirectKinematics*” dell'esercitazione precedente). Per il calcolo dello Jacobiano geometrico ci si può servire della cinematica diretta. Con uno Jacobiano geometrico indipendente dalla particolare struttura si intende dire che deve avere sempre e comunque sei righe, in modo da renderlo quanto più generale: se un manipolatore è planare lo spazio operativo non ha dimensione 6, ma presenta dimensione 3, e quindi basterebbe uno Jacobiano geometrico di 3 righe. Inoltre va creato anche un file ”*mani.m*” in cui è necessario dover andare a richiamare la funzione.

Background teorico

Lo Jacobiano geometrico $\mathbf{J}$ è la matrice (6xn) che lega le velocità delle variabili di giunto $\dot{\mathbf{q}}$ le velocità (lineari ed angolari) dell'end effector $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_\mathbf{e} \\ \omega_\mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_\mathbf{P1} & & \mathbf{j}_\mathbf{Pn} \\ & \text{---} & \\ \mathbf{j}_\mathbf{O1} & & \mathbf{j}_\mathbf{On} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \;=\; \mathbf{J}\,\dot{\mathbf{q}}$$

É necessario definire inizialmente il significato geometrico delle componenti di $\mathbf{J}$.
L'elemento $\mathbf{j}_\mathbf{Pi}$ della matrice è un vettore 3x1 che rappresenta il contributo del solo giunto i-esimo alla *velocità lineare* dell'end effector, mantenendo fermi tutti gli altri giunti. L'elemento $\mathbf{j}_\mathbf{Oi}$ della matrice è un vettore 3x1 che rappresenta il contributo del solo giunto i-esimo alla *velocità angolare* dell'end effector, mantenendo fermi tutti gli altri giunti.
Lo stesso vale per ciascun giunto i-esimo (con $i \;=\; 1,\; ...\; ,\; n$), ma da giunto a giunto cambia la traiettoria che l'end effector traccia muovendo il solo giunto i-esimo. Alla fine, la velocità alla quale si muove l'end effector, se si muovono tutti i giunti insieme, sarà la somma risultante vettoriale dei prodotti riga per colonna tra la matrice $\mathbf{J}$ ed il vettore $\dot{\mathbf{q}}$. In parole povere l'effetto risultante sarà dato dalla *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{j}$ che compongono lo Jacobiano geometrico dove i pesi sono le velocità dei giunti $\dot{\mathbf{q}}$.

In base al tipo di giunto (se prismatico o rotoidale) è poi possibile definire in che modo calcolare ciascuna colonna $[\mathbf{j}_\mathbf{Pi} \quad \mathbf{j}_\mathbf{Oi}]^T$ relativa al giunto i-esimo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{j}_{Pi} \\ \mathbf{j}_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{Per un giunto } \textit{prismatico} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-i} \times (\mathbf{p}_e - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-i} \end{bmatrix} & \text{Per un giunto } \textit{rotoidale} \end{cases} \tag{1}$$

Il contributo alla velocità lineare del giunto i-esimo (nel caso di giunto rotoidale), espresso come $\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}\, \mathbf{j}_\mathbf{Pi}$, è un vettore tangente alla traiettoria compiuta dall'end effector ottenuto dal prodotto vettoriale tra la velocità angolare ($\omega_\mathbf{i-1,i}$) tra il giunto i (espresso in terna i-1) e quello i+1 (espresso in terna i) ed un vettore ($\mathbf{r}_\mathbf{i-1,n}$) che lega il giunto i con l'ultimo n dell'end effector (in particolare le terne attraverso cui si esprimono), e cioè $\omega_\mathbf{i-1,i} \times \mathbf{r}_\mathbf{i-1,n}$. Da ciò si ricava che:

$$\dot{\mathbf{q}}_\mathbf{i}\, \mathbf{j}_\mathbf{Pi} \;=\; \omega_\mathbf{i-1,i} \times \mathbf{r}_\mathbf{i-1,n} = \dot{\theta}_i \mathbf{z}_\mathbf{i-1} \times (\mathbf{p}_\mathbf{e} \;-\; \mathbf{p}_\mathbf{i-1}) \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{j}_\mathbf{Pi} \;=\; \mathbf{z}_\mathbf{i-1} \times (\mathbf{p}_\mathbf{e} \;-\; \mathbf{p}_\mathbf{i-1})$$

Ciascun giunto, ovviamente, restituisce un contributo differente alla velocità lineare dell'end effector dato che cambiano la distanza tra il centro del giunto e l'end effector e l'asse di rotazione del giunto.

Sempre nel caso di giunto rotoidale, il contributo alla velocità angolare del giunto i-esimo, espresso come $\mathbf{\dot{q}_i\, j_{Oi}}$, è un vettore pari al prodotto della derivata ($\dot{\theta}_i$) dell'angolo che il braccio i genera con l'asse delle x con l'asse di rotazione del giunto i ($\mathbf{z_{i-1}}$):

$$\mathbf{\dot{q}_i\, j_{Oi}} \;=\; \dot{\theta}_i \times \mathbf{z_{i-1}} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{j_{Oi}} \;=\; \mathbf{z_{i-1}}$$

Capito come si calcola il jacobiano e quindi quali sono le sue componenti è opportuno adesso capire come calcolare quest'ultime, e cioè $\mathbf{z_{i-1}}$, $\mathbf{p_e}$ e $\mathbf{p_{i-1}}$.
Per ottenere l'asse di rotazione $\mathbf{z_{i-1}}$ del giunto i, si parte sempre da $\mathbf{z_0} \;=\; [0\;\,0\;\,1]^T$ e poi si vanno ad applicare rotazioni successive fino al giunto i, esattamente come per avviene per la cinematica diretta:

$$\mathbf{z_{i-1}} \;=\; \mathbf{R}_1^0(q_1)\; ...\; \mathbf{R}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})\; \mathbf{z_0}$$

Il vettore posizione $\mathbf{p_e}$, che indica la posizione dell'end effector (e che va calcolato una sola volta rimanendo fisso), si ottiene sempre per cinematica diretta tramite composizione di matrici di trasformazione a partire da $\mathbf{p_0} == \;[0\;0\;0\;1]^T$:

$$\mathbf{p_e} \;=\; \mathbf{A}_1^0(q_1)\; ...\; \mathbf{A}_{n-1}^{n-2}(q_n)\; \mathbf{p_0}$$

Ciò che va calcolato giunto dopo giunto ma sempre seguendo la stessa tecnica di calcolo è il vettore $\mathbf{p_{i-1}}$, che indica la posizione del giunto i-esimo (espresso secondo la terna i-1, perciò compare tale pedice):

$$\mathbf{p_{i-1}} \;=\; \mathbf{A}_1^0(q_1)\; ...\; \mathbf{A}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1})\; \mathbf{p_0}$$

Svolgimento

La funzione per il calcolo dello Jacobiano geometrico deve essere chiamata "*Jacobian*". Essa riceve in ingresso una tabella DH (di dim nx4) e restituisce in uscita una matrice **J**, che è una matrice 6xn, dove n corrisponde al numero di gradi di libertà del manipolatore (numero di giunti) mentre 6 alla dimensione dello spazio operativo.

É necessario riuscire a calcolare prima le componenti dello Jacobiano geometrico, attraverso $\mathbf{z_{i-1}}$, $\mathbf{p_e}$ e $\mathbf{p_{i-1}}$, le quali si ottengono sfruttando la funzione "DirectKinematics".

In particolare tutti gli $\mathbf{z}$ e gli p vengono salvati ciascuno in un vettore tramite appunto questa funzione.

Invece $\mathbf{p_e}$ va preso come ultimo elemento del vettore che racchiude i valori di $\mathbf{p}$.

$\mathbf{z_0}$ e $\mathbf{p_0}$ possono essere inizializzate manualmente ed esse servono per costruire la prima colonna dello Jacobiano.

Le restanti colonne della matrice **J** vengono ottenute tramite un ciclo *for* che va da 2 ad n, dove di volta in volta viene preso l'elemento $\mathbf{z_{i-1}}$ e quello $\mathbf{p_{i-1}}$.

Infine nel file "*main*" si chiama prima il file "*init*" in cui è salvata la matrice DH e poi si richiama la funzione "*Jacobian*" che calcola lo Jacobiano geometrico a partire dalla tabella DH.

Per visualizzare la matrice **J** dopo la chiamata della funzione non va inserito il ";".

Lettura dei risultati

Si prenda il caso di un manipolatore planare a 3 bracci, nelle condizioni in cui il braccio robotico può muoversi in velocità lineare soltanto in una direzione e non nell'altra, ad esempio non può avere componente di velocità lineare lungo x in virtù di una particolare scelta delle variabili (angoli θ_i) di giunto (rotoidale). Lo Jacobiano geometrico che deve essere restituito deve avere prima riga (relativa alla velocità lineare lungo x) pari a 0 e la seconda riga (relativa alla velocità lineare lungo y) diversa da zero. In particolare, lungo la seconda riga, il primo valore deve essere uguale alla somma delle lunghezze di tutti e tre i bracci, il secondo pari alla somma delle lunghezze degli ultimi due e il terzo valore pari alla lunghezza del terzo braccio. Con valori $a_1 = 0.5$, $a_2 = 0.5$ e $a_3 = 0.3$, la seconda riga dello Jacobiano geometrico deve avere valori $j_{21} = 1.3$, $j_{22} = 0.8$ e $j_{23} = 0.3$. Essendo poi un caso planare, la terza riga (relativa alla velocità lineare lungo z) deve essere sicuramente nulla.

```
% Definizione della tabella di Denavit-Hartenberg
DH = [0.5 0 0 0;
    0.5 0 0 0;
    0.3 0 0 0];
```

Tabella DH

```
Command Window

J =

         0         0         0
    1.3000    0.8000    0.3000
         0         0         0
         0         0         0
         0         0         0
    1.0000    1.0000    1.0000
```

Jacobiano geometrico

Figura 2

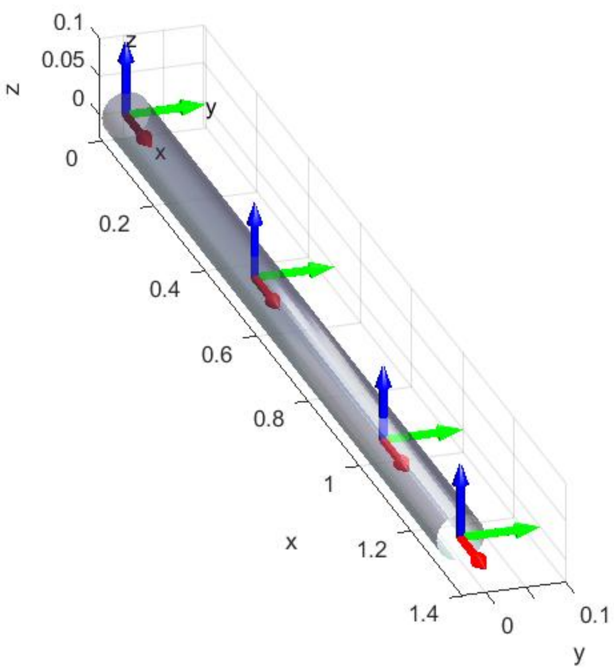

Figura 3: Visualizzazione della configurazione del manipolatore tramite *DrawRobot*