인하대학교
INHA UNIVERSITY

일반물리학

제18장. 전류회로와 축전기

목차

들어서며
1. 기전력과 전류회로
2. 키르히호프의 법칙
3. 축전기와 전기용량
4. 축전기와 전기장
5. 유전체와 전기용량
6. RC 회로

들어서며

전류 회로: 전하의 이동하는 경로

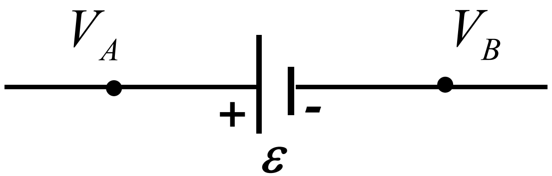
- 전기 소자: 기전력 장치, 저항, 축전기, 인덕터 등..

[저항]

기전력 장치: 전기 위치에너지(전위)를 높여주는 장치

[건전지, 기전기]

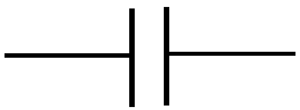
[기전력]



$$\boxed{\varepsilon = V_A - V_B}$$

축전기(capacitor) : 정전기 에너지를 저장하는 창고

- 전기용량(capacitance) C : 창고의 크기



인덕터 : 자기에너지를 저장하는 창고

기전력

- 기전력장치

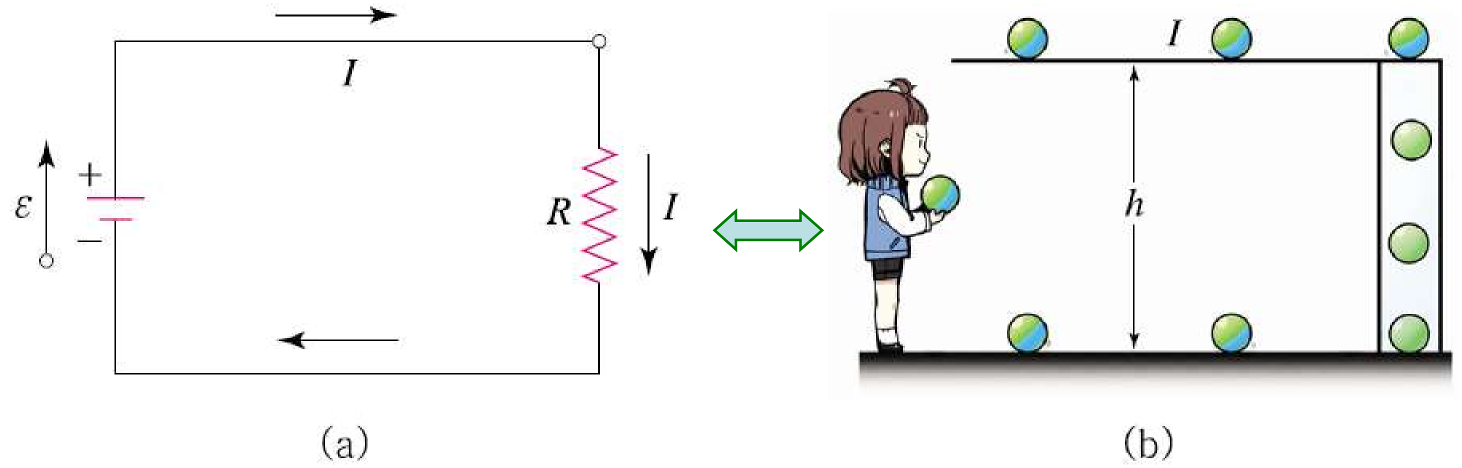
  - 회로상의 두 점 사이의 전위차를 일정하게 유지시킬 수 있는 장치

  - 전기 위치에너지(전위)를 높여주는 펌프 역할

  예] 건전지, 발전기 등

- 기전력

  - 단위 전하당 하는 일 [V]



▲ **그림 18.1** | (a) 기전력장치와 간단한 회로. (b) 공이 떨어지고 사람이 올려주는 장치

회로에 흐르는 전류

- 미소 전하량 **dq**를 보다 높은 전위로 이동시킬 때 하는 일 = **dW**
- 기전력 **:** 단위 전하당 하는 일

$$\varepsilon \equiv \frac{dW}{dq}$$

$$dW = \varepsilon\, dq$$

➡ 단위 전하당 위치에너지(전위)가 기전력만큼 증가

➡ $$\varepsilon = V_A - V_B = V$$

$$\Rightarrow \quad i = \frac{V}{R} = \frac{\varepsilon}{R}$$

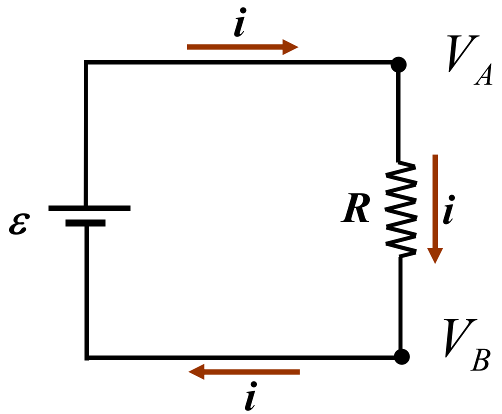
에너지 보존 법칙

- 기전력 장치가 하는 일 = 저항에서 발생하는 열에너지

- dt *동안 기전력이 하는 일* $dW = \varepsilon\, dq = \varepsilon\, i\, dt$ (전하량 보존)
- dt 동안 저항에서 발생한 열에너지 $= P\, dt = i^2 R\, dt$

➡ $\varepsilon\, i\, dt = i^2 R\, dt$ ➡ $\boxed{i = \dfrac{\varepsilon}{R}}$

저항에 의한 전위저하

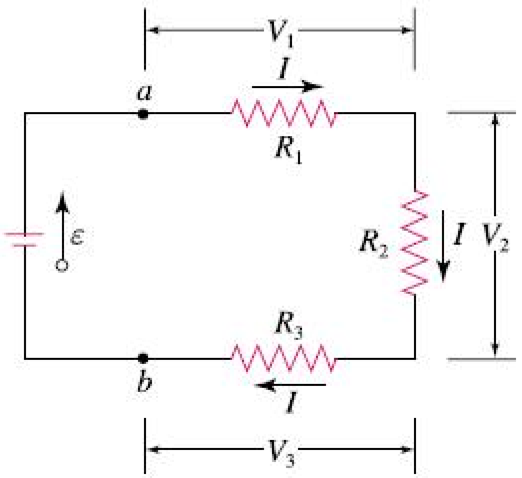


$$V_A - V_B = \varepsilon = i\, R$$

저항 R에 전류 i가 흐르면
전위가 $i\, R$ 만큼 저하된다.

직렬과 병렬저항

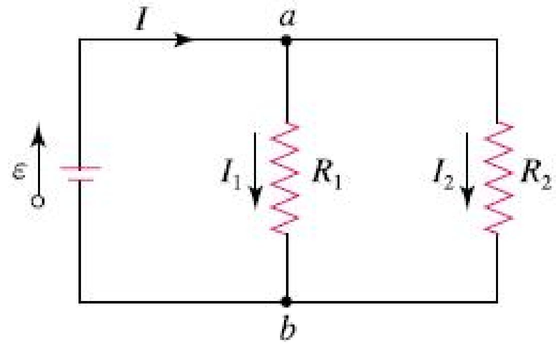
직렬연결



$$\varepsilon = V_1 + V_2 + V_3 = I\,R_1 + I\,R_2 + I\,R_3$$
$$= I\,(R_1 + R_2 + R_3) = I\,R_{eq}$$

$$\boxed{R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3}$$

병렬연결



$$I = I_1 + I_2 \quad \left[I_1 = \frac{\varepsilon}{R_1},\; I_2 = \frac{\varepsilon}{R_2} \right]$$

$$\varepsilon = I\,R_{eq} = \left(\frac{\varepsilon}{R_1} + \frac{\varepsilon}{R_2} \right) R_{eq}$$

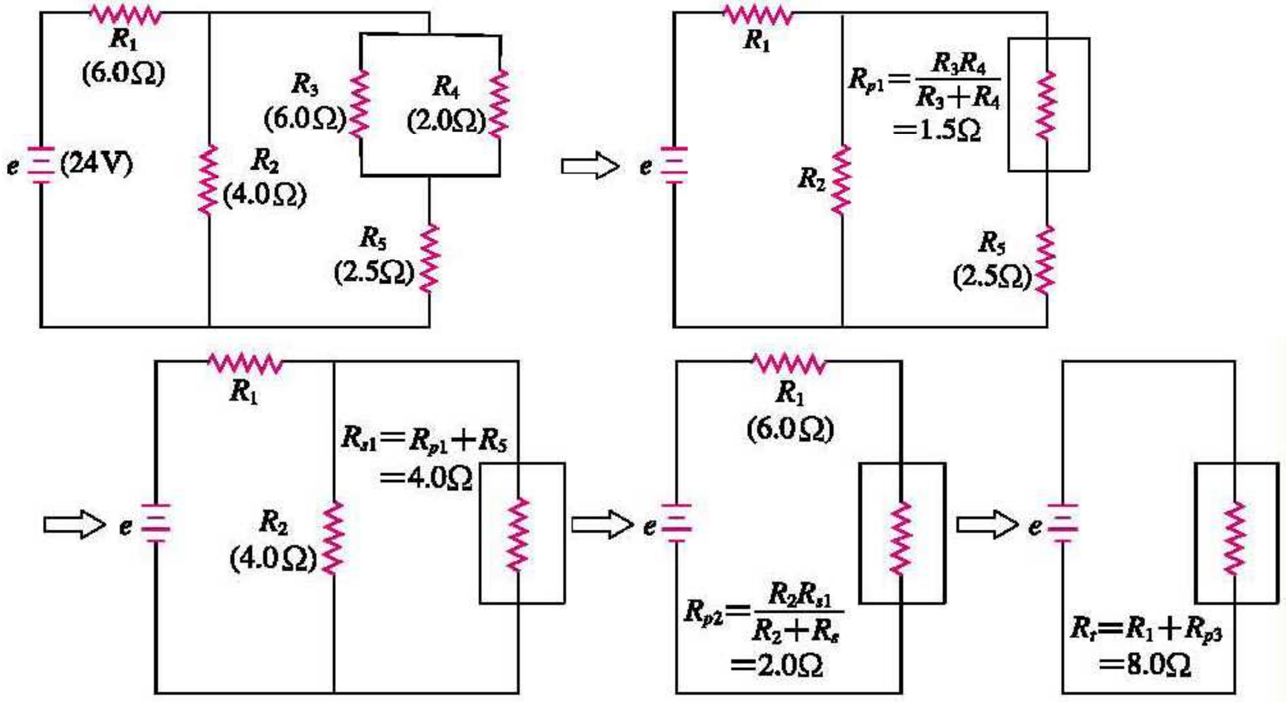
$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

예제 18.1 등가저항 계산

그림과 같은 직렬+병렬회로에서 저항에 흐르는 전류를 구하여라.

풀이]

- 등가저항 : 8 Ω



$$i_{R_1} = \frac{\varepsilon}{R_{eq}} = \frac{24\text{V}}{8\Omega} = 3\text{A} \qquad i_{R_2} = 1.5\text{A} \quad (\because R_2 = R_{s1})$$

접합점(junction)과 고리(loop)

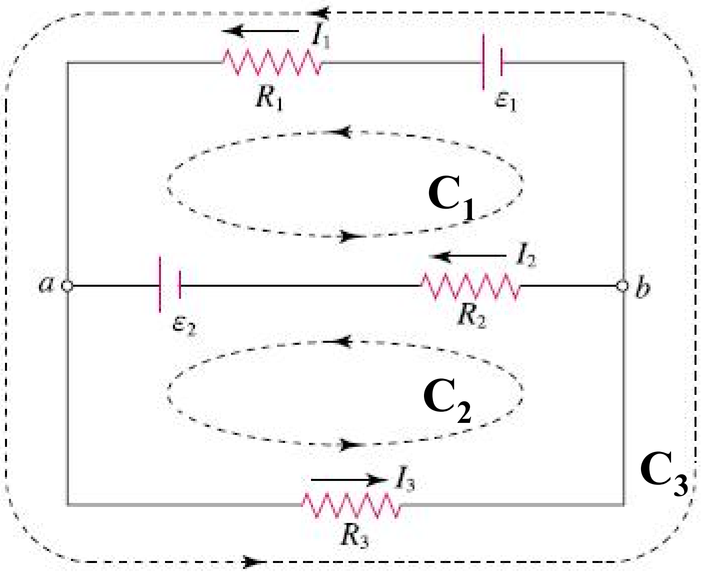
- 접합점: 3개 또는 그 이상의 전선이 만나는 점 (a,b)
- 고리 : 방향성이 있는 임의의 닫힌 회로의 경로 (C_1, C_2, C_3)

접합점 법칙(junction theorem)

$$\boxed{\sum_n i_n = 0}$$ (전하량보존)

고리 법칙(loop theorem)

$$\boxed{\sum_n V_n = 0}$$ (에너지보존)



▲ 그림 18.3 | 기전력장치와 저항으로 구성된 다중회로

- 전류의 방향을 임의로 선택
- 고리의 방향을 임의로 선택
- 전위상승과 전위저하

2. 키르히호프의 법칙

접합점 법칙

- 전하량 보존법칙에 근거

  - 단위 시간당 접합점에 들어오는 총 전하량 = 빠져 나가는 총 전하량

  - 들어오는 전류 = 나가는 전류

고리법칙

- 에너지 보존법칙에 관계
- 몇 가지 약속

  - 각 접합점에서 전류의 방향을 가정하고 회로도에 표시

  - 기전력 약속

    « 고리방향이 기전력의 음극에서 양극방향이면 +방향

  - 저항 약속

    « 고리방향이 전류방향과 같으면 – IR로 약속

예제 18.2 키르히호프 법칙의 응용

다음 그림의 회로에서 각각의 전류값을 구해 보자.

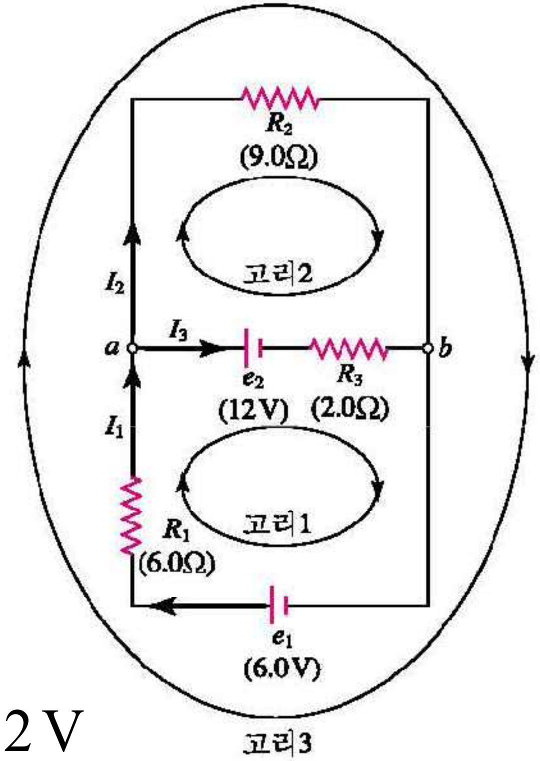
풀이]

- 각 저항에 흐르는 전류를 I_1, I_2, I_3
- 접합점법칙: $I_1 = I_2 + I_3$
- 고리법칙:
  - $C_1: -\varepsilon_2 - I_3R_3 + \varepsilon_1 - I_1R_1 = 0$
  - $C_2: -I_2R_2 + I_3R_3 + \varepsilon_2 = 0$
  - C_3 : 불필요
- 연립

$$I_1 = \frac{(R_2+R_3)\varepsilon_1 - R_2\varepsilon_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

$$I_3 = \frac{\varepsilon_1 R_2 - \varepsilon_2 (R_2 + R_1)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$

$$I_2 = \frac{R_3\varepsilon_1 + R_1\varepsilon_2}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}$$



$$\varepsilon_1 = 6\,\text{V},\ \ \varepsilon_1 = 12\,\text{V}$$

$$R_1 = 6\,\Omega,\ \ R_2 = 9\,\Omega,\ \ R_3 = 2\,\Omega$$

$$\Rightarrow I_1 = -\frac{1}{2}\text{A},\ I_3 = -\frac{3}{2}\text{A},\ I_2 = 1\text{A}$$

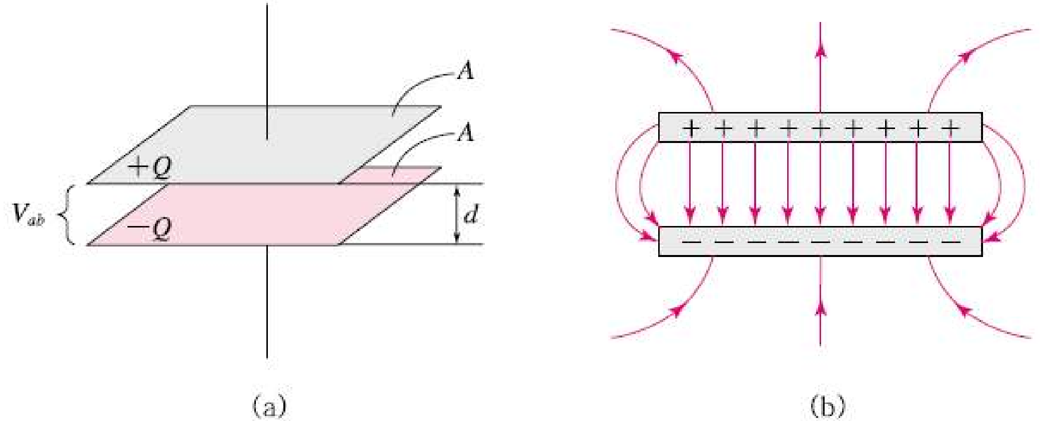
(− : 실제전류는 반대 방향)

축전기(capacitor): 정전기 에너지를 저장하는 창고

- 전기용량(capacitance): 창고의 크기
  [단위전위차당 대전되는 전하량]

$$C = \frac{Q}{V}$$

(C/V=F : Farad)



▲ 그림 18.5 | 평행판 축전기의 모양과 전기력선의 분포

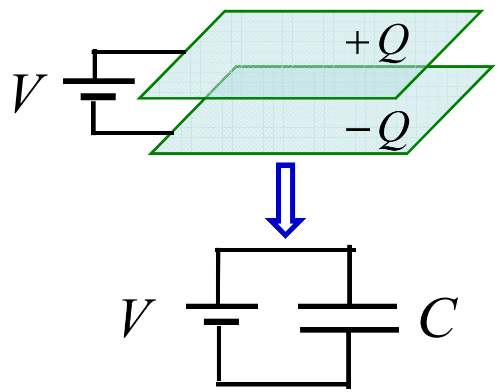
- 평행판 축전기 [면적 A, 사이거리 d : A >> d]

$$V = Ed \quad \text{[균일한 전기장]}$$

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (Q = \sigma A) \text{ [가우스법칙]}$$

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

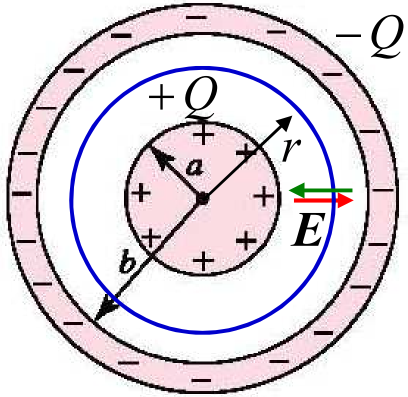
축전기 내부에만 전기장존재
➡ 전기장 창고



예제 18.3 구형 축전기

그림과 같이 안쪽 작은 도체구의 반지름이 a이고 바깥쪽 속이 빈 큰 도체구의 반지름이 b이다. 안쪽 도체구에 $+Q$의 전하를, 바깥쪽 도체구에 $-Q$의 전하를 대전했다. 두 도체구를 축전기로 사용할 때 축전기의 전기용량은 얼마인가?

풀이]



- 가우스 법칙에 의해

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = E(4\pi r^2) = Q/\varepsilon_0$$

도체 빈 공간 사이의 전기장 $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$

a, b사이 전위차

$$V_{ab} = \int_a^b \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_a^b \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

구형 축전기의 전기용량

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = Q\frac{4\pi\varepsilon_0}{Q}\frac{ab}{b-a} = 4\pi\varepsilon_0\frac{ab}{b-a}$$

예제 18.4 도체 구의 축전기

반지름이 R인 도체구의 전기용량을 구하여라.

풀이]

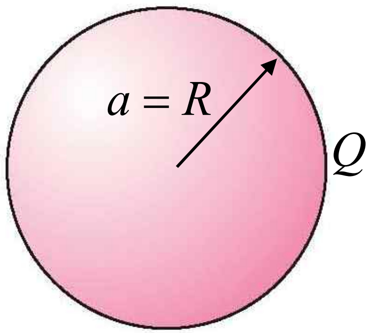
- 예제3과 비교하여 바깥 고체구 반경이 ∞
  - 안쪽 도체구 표면에서 전위

$$V_R = \int_R^\infty \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_R^\infty \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\infty}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$$

  - 도체구의 전기용량

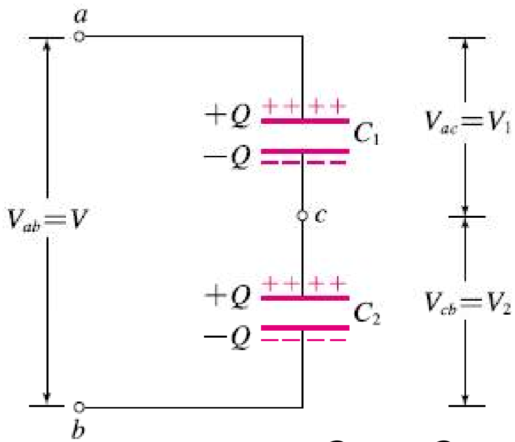
$$C = \frac{Q}{V_R} = Q\frac{4\pi\varepsilon_0 R}{Q} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

지구를 도체구로 고려, $R = 6370$ km ➔ 719 μF



직렬과 병렬 축전기

직렬연결

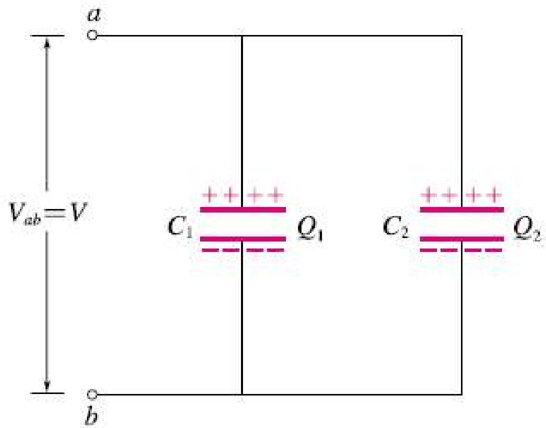


$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

$$= Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{Q}{C_{eq}}$$

$$\boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

병렬연결



$$Q = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V$$

$$= (C_1 + C_2)V = C_{eq} V$$

$$\boxed{C_{eq} = C_1 + C_2}$$

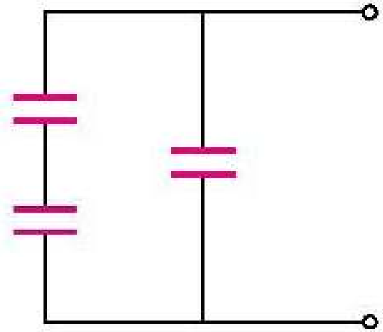
예제 18.5 등가 전기용량 계산

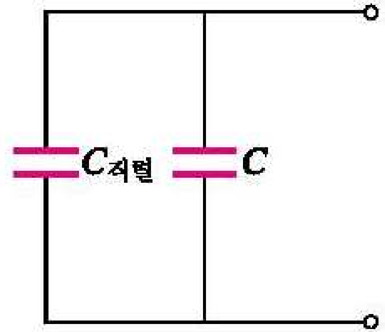
전기용량이 동일한 세 개의 축전기가 그림과 같이 연결되어 있다. 등가 전기용량을 구하여라.

풀이]

- 직렬연결 먼저

$$\frac{1}{C_{직렬}} = \frac{1}{C} + \frac{1}{C} = \frac{2}{C}$$

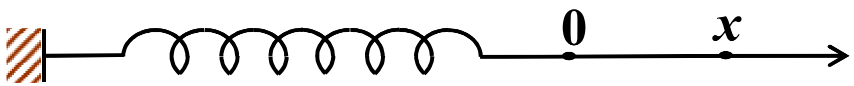




병렬연결($C_{직렬}$, C)

$$C_{등가} = C_{직렬} + C = \frac{C}{2} + C = \frac{3}{2}C$$

용수철 : 역학적에너지의 저장

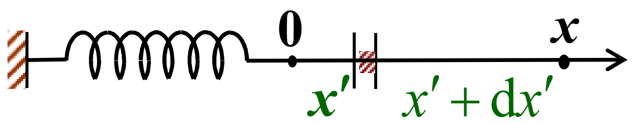


- 저장된 탄성에너지 = 용수철을 늘이는데 한 일= $\frac{1}{2}kx^2$

축전기: 전기에너지의 저장

- 저장된 전기에너지 = 전하를 대전 시키는데 한일

용수철의 경우



$$dW = F(x')dx' = kx'dx'$$

$$W = \int_0^x kx'dx' \boxed{= \frac{1}{2}kx^2 = U}$$

축전기의 경우

$$dW = V(q')dq' = \frac{q'}{C}dq'$$

$$W = \int_0^q \frac{q'}{C}dq' = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} \boxed{= \frac{1}{2}CV^2 = U}$$

전기 에너지 밀도

(평행판 축전기)

$$\boxed{u = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \frac{A}{d}\right)\frac{V^2}{Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{d}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

예제 18.6 대전된 도체구에 저장된 에너지

반지름이 R인 도체구가 전하량 Q로 대전된다면 도체구 주위에 전기장이 형성된다. 전기장 속에 저장된 에너지를 구하여라.

풀이]

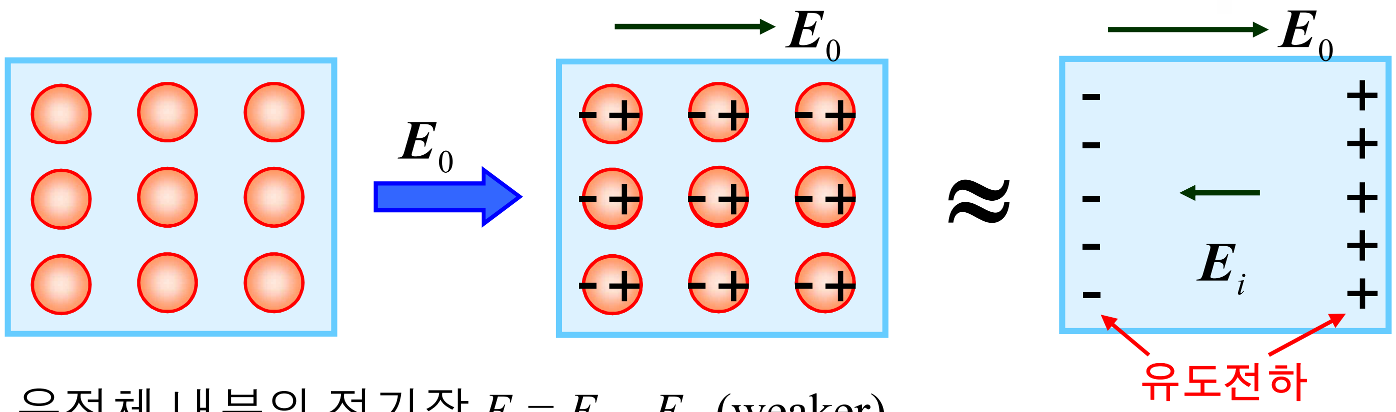
- 도체구의 전기용량

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

전기 에너지

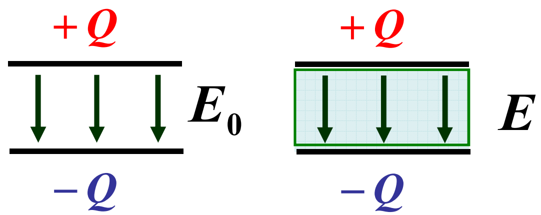
$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

유전체(dielectric) : 부도체 (자유전자 X, 속박전자 O)



- 유전체 내부의 전기장 $E = E_0 - E_i$ (weaker)
  $= E_0 / \kappa \quad (\kappa \geq 1)$
- κ : 유전상수 (진공: 1, 공기: 1.0006, 유리: 4.7, …)

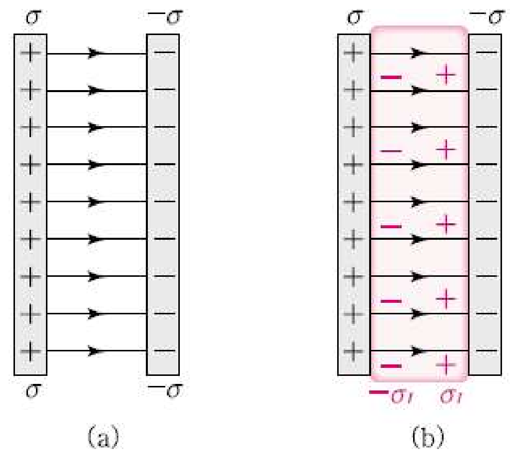
유전체를 평행판 축전기 사이에 넣었을 때



$$C_0 = \frac{Q}{V_0} = \frac{Q}{E_0 d}$$

$$V = Ed = \frac{V_0}{\kappa}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \kappa \frac{Q}{V_0} = \kappa C_0$$



▲ 그림 18.9 | 유도전하가 생긴 축전기의 모양

유도전하와 유전체의 유전율

- 가우스법칙 : 유전체가 없을 때 ➡ $E_0 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

  유전체를 넣었을 때 ➡ $E = \dfrac{\sigma - \sigma_i}{\varepsilon_0} = \dfrac{E_0}{\kappa}$

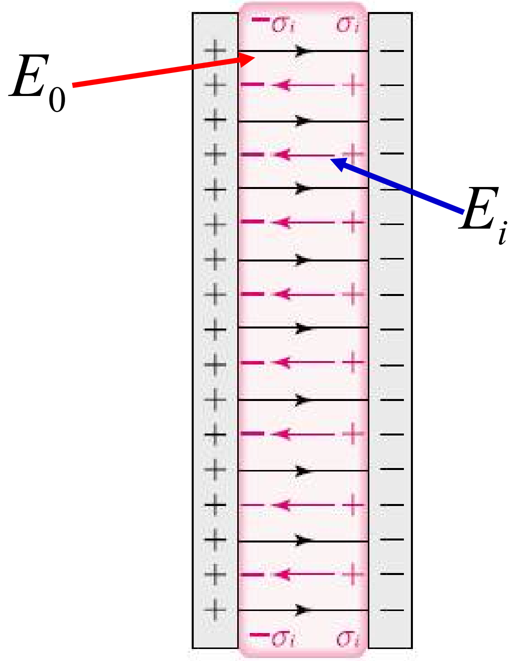
- 유도전하 밀도 : $\boxed{\sigma_i = \sigma\left(1 - \dfrac{1}{\kappa}\right)}$

- 유전체의 유전률 : $\boxed{\varepsilon \equiv \kappa\,\varepsilon_0}$

⇨ $\boxed{E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon}}$

$$\boxed{\varepsilon \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = q}$$

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon E^2}$$



▲ 그림 18.11 | 평행판 축전기에 유전체를 넣었을 때 내부의 전기장 모습

예제 18.7 평행판 축전기의 유전체 효과

평행판의 단면적이 A이며 두 평행판의 간격이 d인 평행판 축전기를 V_0의 전위차를 가진 기전력장치로 충분히 충전시킨 후, 기전력장치를 제거하고 평행판 축전기 사이에 유전상수 κ인 유전체를 삽입하였다. 각 변수에 대한 값들은 $A = 100\ \text{cm}^2$, $d = 5\ \text{mm}$, $V_0 = 50\ \text{V}$, $\kappa = 2.5$이다.

풀이]

a) 유전체를 삽입하기 전, 평행판 축전기의 전기용량

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{(8.85\times10^{-12}\ \text{F/m})(100\times10^{-4}\ \text{m}^2)}{5\times10^{-3}\ \text{m}} = 1.77\times10^{-11}\ \text{F}$$

b) 평행판 도체 하나에 대전된 전하량

$$q_0 = C_0V_0 = (1.77\times10^{-11}\ \text{F})(50\ \text{V}) = 8.85\times10^{-10}\ \text{C}$$

c) 유전체를 삽입하기 전 평행판 도체 사이의 전기장

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{50\text{V}}{5\times10^{-3}\ \text{m}} = 1\times10^4\ \text{V/m}$$

예제 18.7 평행판 축전기의 유전체 효과

d) 평행판 도체 표면에 형성된 표면전하밀도

$$\sigma_0 = E_0\varepsilon_0 = (1\times10^4\ \text{V/m})(8.85\times10^{-12}\ \text{F/m}) = 8.85\times10^{-8}\ \text{C/m}^2$$

$$\text{or}\quad \sigma_0 = \frac{q_0}{A} = 8.85\times10^{-8}\ \text{C/m}^2$$

e) 평행판 도체와 접한 유전체의 안쪽 표면에 대전된 표면전하밀도
(유도된 전하밀도)

$$\sigma_I = \sigma_0\left(1-\frac{1}{\kappa}\right) = (8.85\times10^{-8}\ \text{C/m}^2)\left(1-\frac{1}{2.5}\right) = 5.31\times10^{-8}\ \text{C/m}^2$$

f) 유전체를 삽입한 후 유전체 내의 전기장

$$E = E_0/\kappa = (1\times10^4\ \text{V/m})/2.5 = 4\times10^3\ \text{V/m}$$

g) 유전체를 삽입한 후 평행판 사이의 전위차

$$V = V_0/\kappa = (50\ \text{V})/2.5 = 20\ \text{V}$$

h) 유전체를 삽입한 후 축전기의 전기용량

$$C = \kappa C_0 = (2.5)(1.77\times10^{-11}\ \text{F}) = 4.425\times10^{-11}\ \text{F}$$

충전(charging)

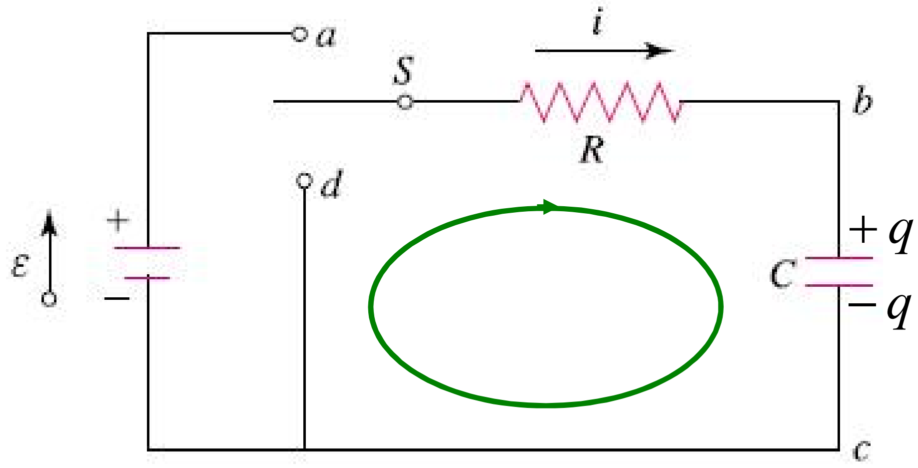
- $s \leftrightarrow a$

  $q = 0 \quad \rightarrow \quad C\varepsilon$

방전(discharging)

- $s \leftrightarrow d$

  $q = C\varepsilon \quad \rightarrow \quad 0$

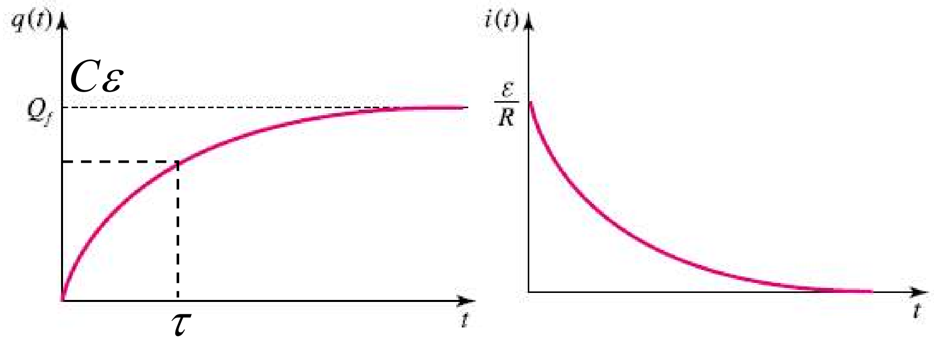


충전 예제

$q = q(t)$ (dynamics)

$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} q(t) &= C\varepsilon\left[1 - e^{-t/RC}\right] \\ i(t) &= \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon}{R}\, e^{-t/RC} \end{aligned}}$$



▲ 그림 18.13 | 축전기의 전하량과 전류의 시간에 따른 변화곡선

시간상수

$$\text{에너지저장율} = \frac{\text{저장에너지}}{\text{공급에너지}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}}{\varepsilon q} = \frac{1}{2}\frac{q}{\varepsilon C} = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-t/RC}\right] \rightarrow \frac{1}{2}$$

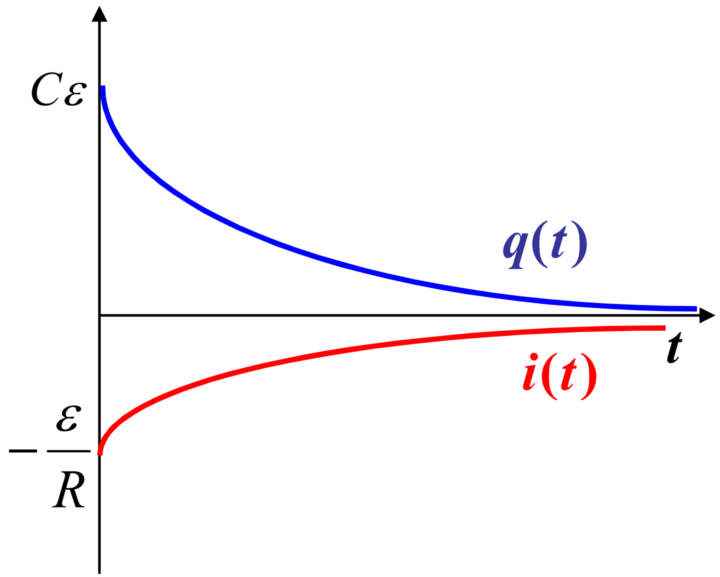
시간상수 $\tau = RC$ (약 60%를 충전하는데 걸리는 시간)

방전

$$\varepsilon = 0$$

$$-iR - \frac{q}{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{dq}{dt}R + \frac{q}{C}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} q(t) &= C\varepsilon\, e^{-t/RC} \\ i(t) &= \frac{dq}{dt} = -\frac{\varepsilon}{R}\, e^{-t/RC} \end{aligned}}$$



예제 18.8 RC 회로

저항이 R, 전기용량이 C인 축전기가 전압이 V인 배터리에 직렬로 연결되어 있다. 스위치를 켜고 나서 축전기에 전하량 Q가 충전되는 데 10초가 걸렸다. 축전기를 완전히 방전시킨 후, 이번에는 저항 R을 하나 더 직렬로 연결하고 스위치를 켰다. 전하량 Q가 다시 충전되는 데 걸린 시간은 얼마인가?

풀이]

- 축전기에 저장된 전하량

$$Q = Q_f\left(1-e^{-t/RC}\right)$$

저항 1개

$$Q = Q_f\left(1-e^{-t_0/RC}\right) \quad (\because t_0 = 10\text{ s})$$

저항 2개 $R_{eq} = 2R$

$$q' = Q_f\left(1-e^{-t/2RC}\right)$$

$$Q_f\left(1-e^{-t_0/RC}\right) = Q_f\left(1-e^{-t/2RC}\right) \quad (\because q' = Q) \qquad \therefore t = 2t_0 = 20\text{ s}$$