인하대학교
INHA UNIVERSITY

일반물리학

제25장. 상대론

목차

들어서며

- 가속하지 않는 두 개의 우주선이 서로 스쳐지나 갈 때
  어느 것이 움직이는지 가려낼 수 있을까?

- 뉴턴의 역학
  - 시간은 절대적이어서 어떠한 좌표계에서나 시간은 똑같이 흐른다
  - 상대적으로 움직이는 두 개의 관성 좌표계에서
    한 물체의 속도를 측정하면 두 좌표계의 상대속도 만큼 차이가 난다

- 맥스웰의 방정식
  - 운동하는 관성 좌표계로 위와 같은 변환을 하면
    다른 모양의 방정식이 되어 모순이 생긴다
  - 새로운 물리의 필요성

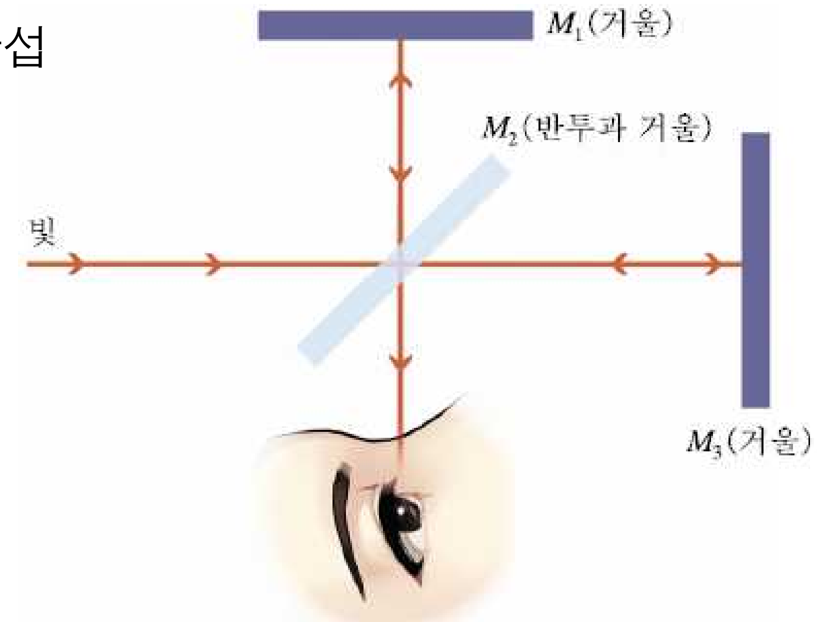
1. 빛의 속도와 마이켈슨-몰리 실험

역학적 파동들은 매질을 통하여 전파

- 소리 → 공기, 수면파 → 물
- 빛의 매질 : 에테르 (ether)?
- 절대 정지계는 존재하는가?

마이켈슨-몰리(Michelson-Morley)의 실험 (1887년)

- 두 수직된 방향으로 나누어진 빛이 간섭
- 계를 90도 회전시켜 또 관측
- 간섭 무늬에 변화가 없음
  → 빛의 속도가 관측자의
  상대속도에 관계 없이 일정



▲ 그림 25.1 | 마이켈슨-몰리 실험에서 이용된 간섭계와 빛의 경로

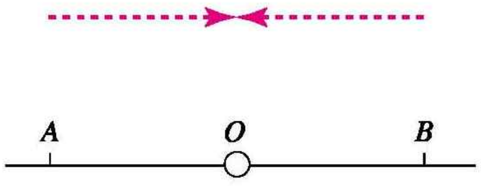
2. 아인슈타인의 가설

- **가정** 1 : **모든 관성계에는 똑같은 물리 법칙이 적용된다.**
  - **관성계 : 관성의 법칙이 성립하는 가속하지 않는 계**
  - **서로 상대적으로 운동하는 관성 좌표계에서 관측한 물리 현상은 같은 법칙의 지배를 받는다.**

- **가정** 2 : **빛의 속력은 모든 좌표계에서 동일하며, 이 값은 관측자나 광원의 상대적 운동에 무관하다.**
  - 고전 역학 : 시간-공간이 고정
  - 상대론 : 빛의 속력이 상대적 운동에 무관하게 일정,
시간-공간이 상대적.
  - 모든 측정의 기본이 빛이 되어야 한다

- **빛과 반대 방향으로** c/3 **의 속력으로 달리는 사람이 측정한 빛의 속력은**?

동시성과 상대시간

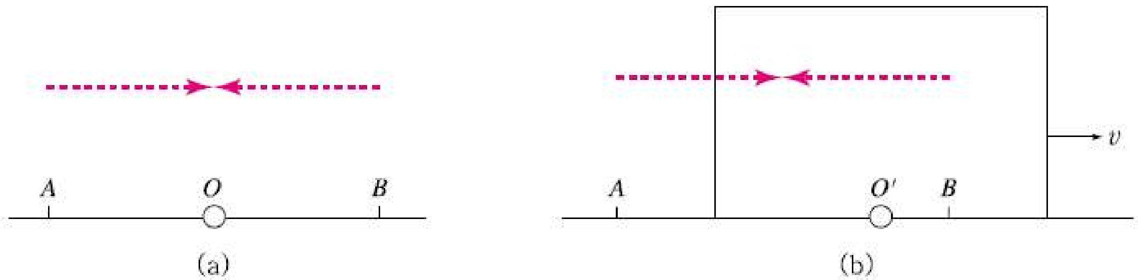


(a)

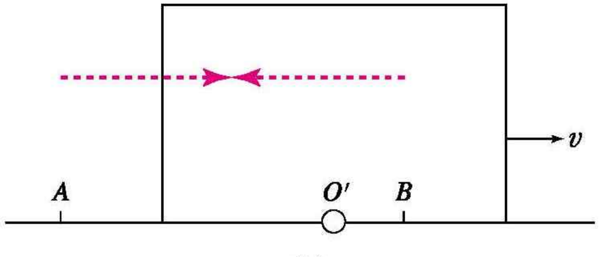
(a) A와 B로부터 동일한 거리에 있는 관찰자 O의 좌표계에서 본 두 빛의 경로. 두 빛은 동시에 켜진 것임을 알 수 있다.

지표면에 대해 정지하고 있는 관측자 O

- 같은 거리만큼 떨어져 있는 A와 B에서 동시에 전등을 켜면 O에서 빛이 만나게 된다
- 관측자 O에게는 두 빛이 동시에 켜진 것이다



▲ **그림 25.2** | 동시성을 알아보는 사고실험. (a) A와 B로부터 동일한 거리에 있는 관찰자 O의 좌표계에서 본 두 빛의 경로. 두 빛은 동시에 켜진 것임을 알 수 있다. (b) v의 속도로 달리고 있는 관찰자 O'의 좌표계에서 본 두 빛의 경로. B에서 켜진 빛이 A에서 켜진 빛보다 더 먼저 도착하므로 더 먼저 켜진 것으로 보인다.



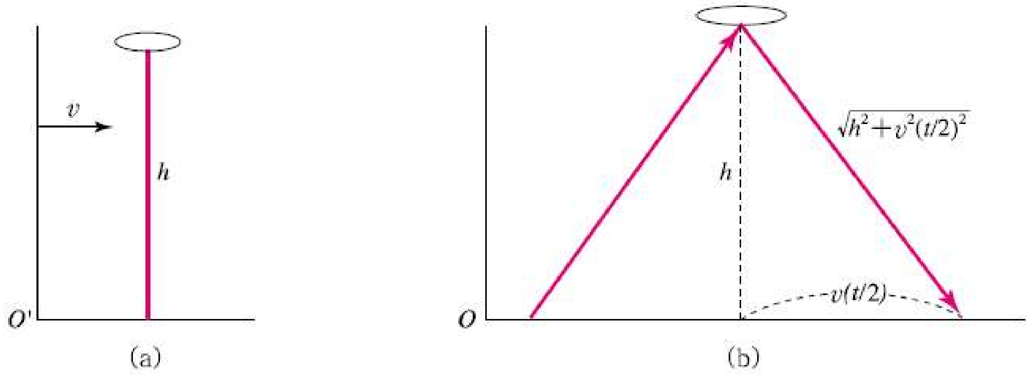
(b) v 의 속도로 달리고 있는 관찰자 O' 의 좌표계에서 본 두 빛의 경로. B에서 켜진 빛이 A에서 켜진 빛보다 더 먼저 도착하므로 더 먼저 켜진 것으로 보인다.

지표면에 대해서 v 의 속도로 움직이는 관측자 O’

- 전등을 켜는 순간 관측자 O와 O’이 지나쳤다고 가정
- 두 빛은 O’의 왼쪽에서 만나게 된다
- 빛의 속력은 일정하므로 관측자 O’에게는 B의 전등이 먼저 켜진 것이다

동시성, 즉 시간은 절대적인 것이 아니라 기준계에 따라 달라진다.

시간 늘어남



▲ 그림 25.3 | 시간 지연을 보여주는 한 예. (a) v의 속력으로 달리고 있는 열차 안의 O'의 좌표계에서 본 빛의 경로 (b) 지상에 정지해 있는 관측자 O의 좌표계에서 본 빛의 경로

- **v 의 속력으로 달리는 열차 안의 관측자 O' 에게 빛이 반사되어 다시 돌아오는 데에 걸리는 시간** : $t' = 2h/c$
- **지상에 정지해 있는 관측자 O 가 측정한 시간** t
  - 진행한 거리 : $2\sqrt{h^2+v^2(t/2)^2}$
  - 진행 속도는 c 로 동일 : $t = 2\sqrt{h^2+v^2(t/2)^2}\;/\,c$
  - $$\boxed{t = \frac{2h}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2h}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \equiv \gamma t'}$$

시간 늘어남 (time dilation)

- 움직이는 계의 관측자(O’)가 느끼는 시간 간격 (t’)이
  정지된 계의 관측자(O)가 느끼는 시간 간격(t)보다 더 작다
- 움직이는 계에서의 시계가 정지된 계에서의 시계보다 더 느리게 간다

고유시간 (proper time) : 정지된 계에서의 시간

- 입자의 수명은 고유시간으로 한다 (입자가 정지되어 있는 계에서)

예제 25.1 입자의 수명

뮤온(muon)의 평균 수명은 2.20×10^{-6} s이다. 지구에 있는 관측자가 0.998c로 움직이고 있는 뮤온을 보았다면, 이 뮤온은 얼마의 거리를 진행할 것인가?

풀이]

- 관측자의 좌표계에서 뮤온의 수명은 γ배 만큼 늘어남

0.998c로 움직이는 뮤온의 수명

$$t = 2.20 \times 10^{-6} \frac{1}{\sqrt{1-0.998^2}} = 3.48 \times 10^{-5}\ \text{s}$$

진행거리

$$d = (0.998c) \times (3.48 \times 10^{-5}\ \text{s}) = (0.998)(3 \times 10^{8}\ \text{m/s}) \times (3.48 \times 10^{-5}\ \text{s})$$

$$= 10.4\ \text{km}$$

비고: 뮤온계에서의 수명을 사용하면 659 m

길이 줄어듦

- **고유 길이** (proper length) : **물체가 정지해 있는 좌표계에서의 길이**

- **거리가 L만큼 떨어진 갑별과 을별을 v 의 속력으로 여행하는 우주선의 운행시간**
  - 지구의 관측자가 측정하면 $\Delta t = L / v$
  - 우주선의 조종사가 느끼는 여행 시간은 시간 늘어남에 의해 $\Delta t' = \Delta t / \gamma$
  - 조종사가 측정하는 두 별 사이이의 거리 L'
  - $$\boxed{L' = v\Delta t' = \frac{v\Delta t}{\gamma} = \frac{L}{\gamma} = L\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

- **관측자에 대해 운동 상태에 있는 물체의 길이는 관측자에 대해 정지해 있을 때의 고유길이 보다 작다**

예제 25.2 상대적 길이 줄어듦

일정한 속도 v=4c/5로 달리는 기차가 있다. 기차 안의 관측자가 100m 이동했다고 측정하는 동안, 지상에서 관측한 기차의 이동거리는 몇 m인가?

풀이]

- 움직이는 관측자가 측정한 길이는 정지한 관측자가 측정한 길이인 고유 길이보다 항상 작다.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} = \frac{5}{3}$$

지상에서 정지한 관측한 기차의 이동거리:

$$L = L'\gamma = (100\,\mathrm{m}) \times \frac{5}{3} = \frac{500}{3}\,\mathrm{m} = 166.67\,\mathrm{m}$$

상대론적 운동량 (relativistic momentum)

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - \mathrm{v}^2 / c^2}} = \gamma m_0 v$$

- m = 정지 질량 (rest mass) : 입자가 정지한 계에서의 질량
- 속력이 작을 때에의 운동량 $m_0 v$
- 질량이 속력에 따라 변하다고 해석할 수도 있다

$$m = \gamma m_0 \qquad p = mv$$

상대론적 운동 방정식

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0 \boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/\mathrm{c}^2}}\right)$$

상대론적 에너지

- 운동 에너지 .... $KE = mc^2 - m_0c^2$
- 정지질량 에너지 .... $E_0 = m_0c^2$
- 총 에너지 .... $E = KE + m_0c^2 = mc^2 = \gamma m_0c^2$
- 운동량과 총 에너지의 관계 .... $E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$
- 질량이 무시되는 경우 (예 : 광자) .... $E = pc$

$$E^2 - E_0^2 = (\gamma^2 - 1)m_0^2c^4 = \frac{v^2/c^2}{1 - v^2/c^2}m_0^2c^4 = (\gamma m_0 v)^2c^2 = p^2c^2$$

예제 25.3 질량에너지

전자의 질량에너지를 계산하라.

풀이]

- 전자의 질량에너지

$$E_0 = m_e c^2 = (9.11\times10^{-31}\,\mathrm{kg})(3\times10^{8}\ \mathrm{m/s})^2$$

$$= 8.20\times10^{-14}\ \mathrm{J}$$

$$= 0.512\times10^{6}\ \mathrm{eV} \qquad \because 1\mathrm{eV} = 1.6\times10^{-19}\,\mathrm{J}$$

$$= 0.512\,\mathrm{MeV}$$

예제 25.4 전자의 상대론적 질량

운동에너지가 2.53 MeV인 전자가 있다. (a) 총 에너지, (b) 상대론적 운동량, (c) 전자의 상대론적 질량을 구하여라.

풀이]

a) 총에너지

$$E = 2.53\ \text{MeV} + 0.512\ \text{MeV} = 3.042\ \text{MeV}$$

b) 상대론적 운동량

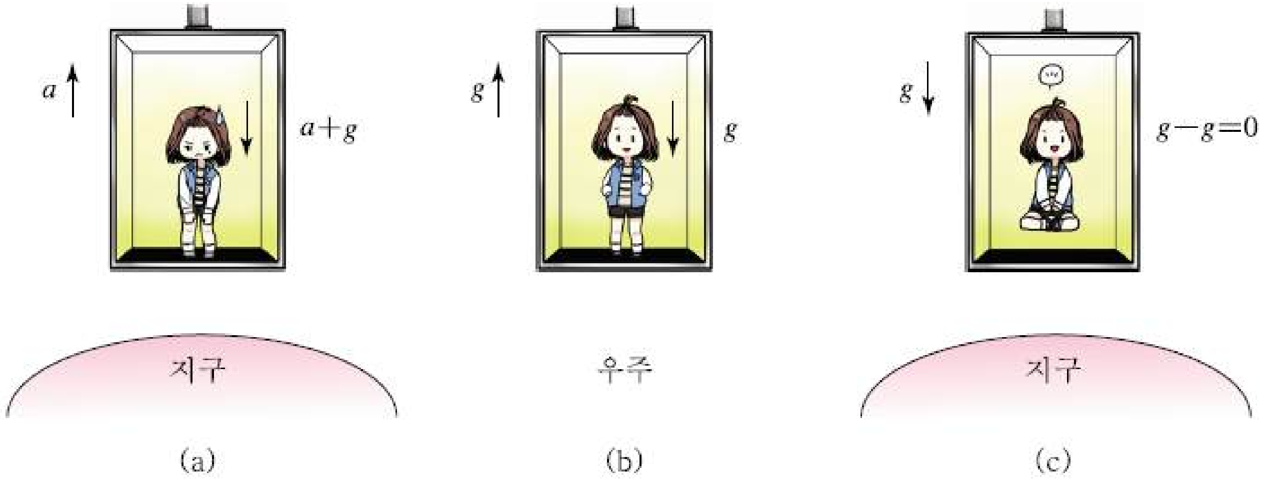
$$pc = \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4} = \sqrt{(3.042\ \text{MeV})^2 - (0.512\ \text{MeV})^2} = 3.00\ \text{MeV}$$

$$p = 3.00\ \text{MeV/c} = 1.6 \times 10^{-21}\ \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

c) 전자의 상대론적 질량

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{E}{m_0 c^2} m_0 = \frac{3.042\ \text{MeV}}{0.512\ \text{MeV}} m_0 = 5.94 m_0 = 5.41 \times 10^{-30}\ \text{kg}$$

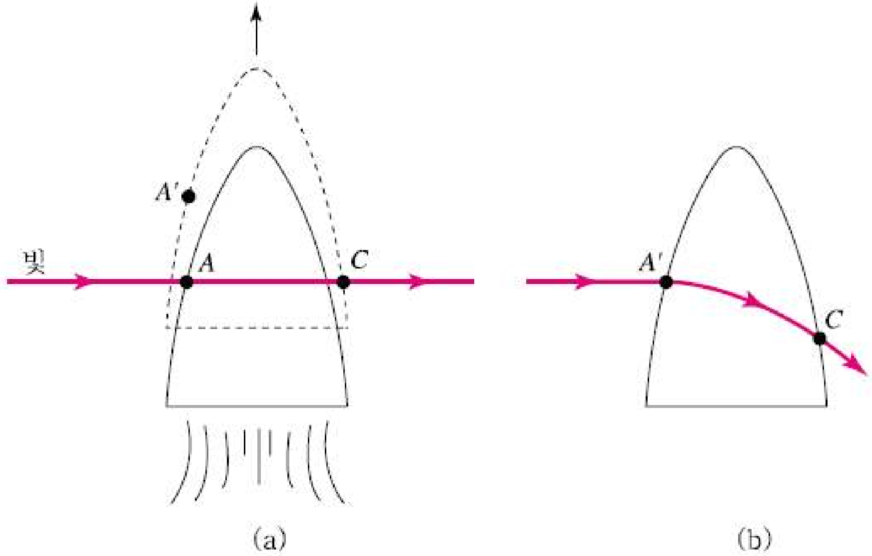
비관성 좌표계와 중력을 받는 관성 좌표계



▲ **그림 25.4** | 가속되는 좌표계에서의 관성력을 보이는 그림. (a) 지구의 중력장하에서 위로 가속되는 엘리베이터 안의 사람은 중력에 더해져 아랫방향으로 힘을 받는다. (b) 중력장이 없는 공간에서 위로 가속되는 엘리베이터 안의 사람은 아랫방향으로 관성력만을 받는다. 따라서 마치 지구 위에 서 있는 것과 같은 편안한 느낌일 것이다. (c) 중력가속도로 떨어지고 있는 엘리베이터 안의 사람은 중력의 반대 방향으로 중력과 같은 힘을 받으므로 상대적으로 아무런 힘도 못 느끼게 된다. 이른바 무중력 상태가 된다.

- 무중력 상태에서 위로 g 의 가속도로 가속되는 엘리베이터 안에서는 지구 위에서 정지하고 있는 엘리베이터 안과 같은 일이 벌어진다
- 지구 중력장에서 자유 낙하하는 엘리베이터 안은 무중력상태가 된다
- 중력과 관성력은 같은 효과를 준다.

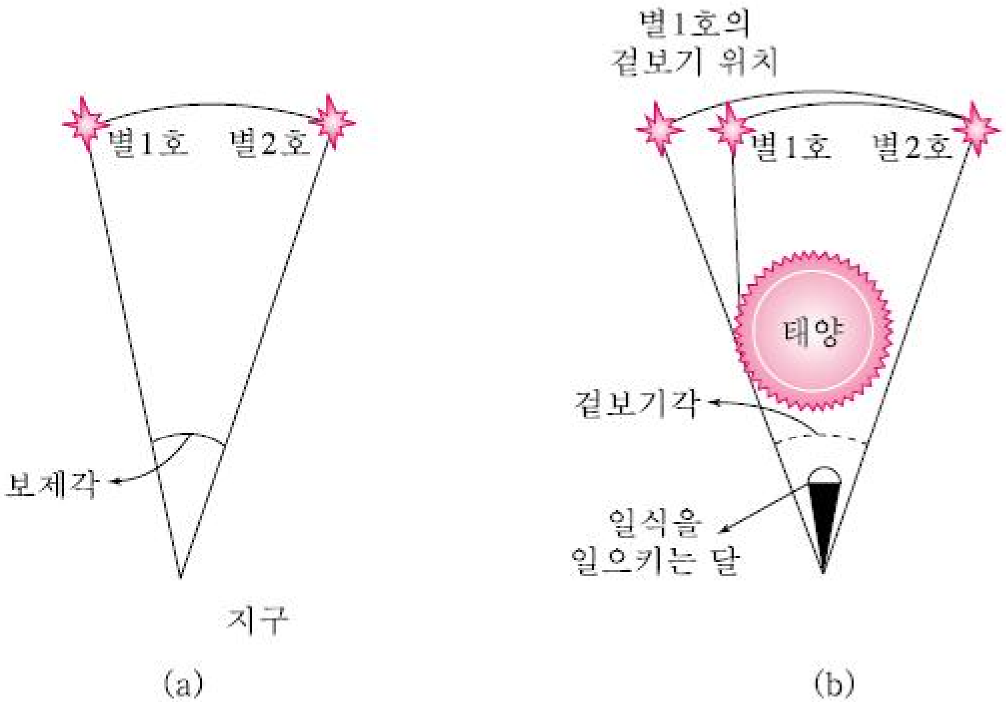
중력에 의한 빛의 굽은 경로



▲ 그림 25.5 | 빛의 굽은 경로. (a) 빛이 가속되는 우주선을 가로로 통과해 지나가면 A점으로 들어가 C점으로 나올 것이다. (b) 이 현상을 우주선 안의 관측자가 본다면, 우주선 가속으로 말미암아 빛이 굽은 경로를 따라 지나갔다고 느낄 것이다.

- 빛이 가속되는 우주선 안을 통과할 때, 우주선 안에 있는 관측자에게는 빛이 휘어진 것으로 보인다
- 중력에 의해서도 같은 효과가 일어나야 하므로, 빛의 궤적은 중력에 의해서도 휜다
- 중력은 공간을 휘게 한다

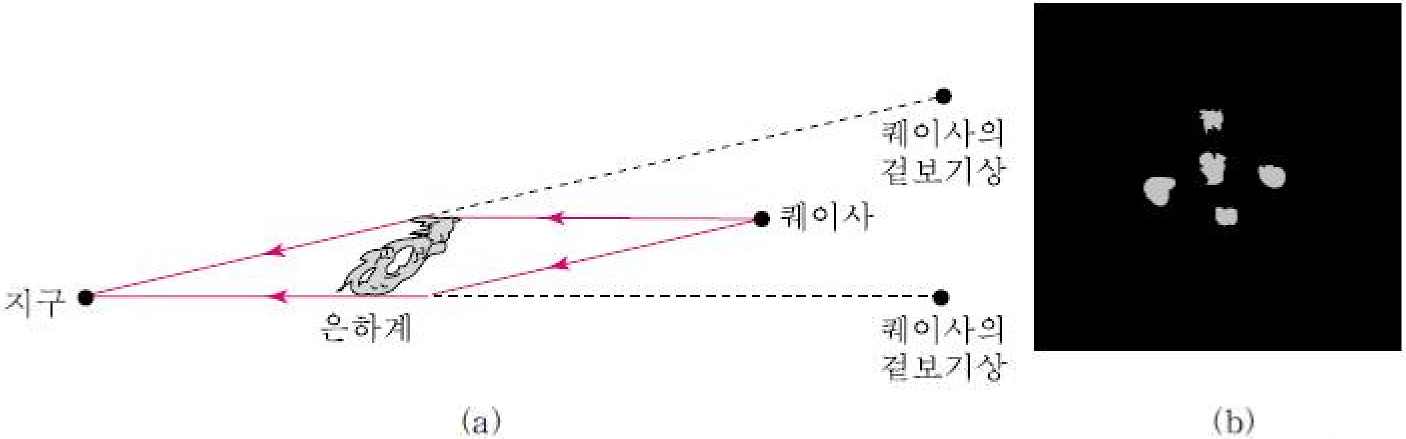
중력에 의해 휘어진 빛의 경로 관측



▲ **그림 25.6** | 중력장에 의해 휘는 빛. (a) 보통 때의 두 별 간의 각거리. (b) 일식 때는 중간에 낀 강력한 태양의 중력장 때문에 빛이 휘어져, 실제의 각거리보다 더 커져 보인다.

- 1919년 개기 일식 때 별들 사이의 각거리를 측정
- 태양에 의해 빛이 휘어 별들 사이의 각거리가 커지는 것을 관측

중력장의 초점 효과



▲ **그림 25.7** | 중력장의 초점 효과. (a) 가운데에 무거운 은하계가 있을 때, 빛은 굽어져 하나 이상의 상을 맺는다. (b) 똑같은 퀘이사의 상이 네 개나 맺힌 사진이다. 이로부터 중간의 은하계를 발견할 수 있었다.

예제 25.5 Black hole 반경

태양이 중력에 의해 점차로 압축되어 블랙홀이 되려면 반경이 얼마나 되어야 하는지 계산하여 보아라.

풀이]

- 사건의 경계
  – 빛의 탈출속도를 고려한 반경
- 탈출속도(중력)

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$R = \frac{2GM_S}{c^2} = \frac{(2)(6.67\times10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2})(2.0\times10^{30}\ \mathrm{kg})}{(3.0\times10^{8}\ \mathrm{m/s})^2}$$

$$= 3.0\times10^{3}\ \mathrm{m}$$

현재 태양의 반경 $= 7.0\times10^{5}\ \mathrm{km}$