II – Resposta em Frequência

Processamento de Sinais Multimédia

Sumário

- Resposta em Frequência
  - Definição
  - Propriedades
- Resposta a uma sinusóide
  - Noção de Filtragem
  - Relações no domínio do tempo e frequência
  - Representação Gráfica (noção de dB)
- Filtros ideais

Introdução

- Assumindo que a entrada x[n] é uma exponencial complexa
- A saída y[n] é também uma exponencial complexa mas afectada por H(w) – que se denomina por Resposta em Frequência

$$x[n] = e^{j\hat{w}n} \longrightarrow \boxed{\mathbf{h[n]}} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{j\hat{w}(n-k)}$$

$$y[n] = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\hat{w}k} \right) e^{j\hat{w}n} = H\left(e^{j\hat{w}}\right)e^{j\hat{w}n} = H(\hat{w})e^{j\hat{w}n}$$

Resposta em Frequência

- Resposta em frequência: H(w)
  - Especifica a alteração da amplitude e da fase em função da frequência w

$$H(\widehat{w}) = \begin{cases} \left|H(\widehat{w})\right| \\ \arg\left(H(\widehat{w})\right) \end{cases}$$

  - A resposta em frequência pode ainda ser obtida pela Transformada de Fourier da resposta impulsional

$$TF\{h[n]\} = H(\widehat{w})$$

Resposta em Frequência

- Definição:

$$H(\widehat{\omega}) = H\left(e^{j\widehat{\omega}}\right) = TF\{h[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\widehat{\omega}n}$$

- $h[n]$ - resposta impulsiva

- H(w) periódica de período 2π
- Simetria hermitiana:

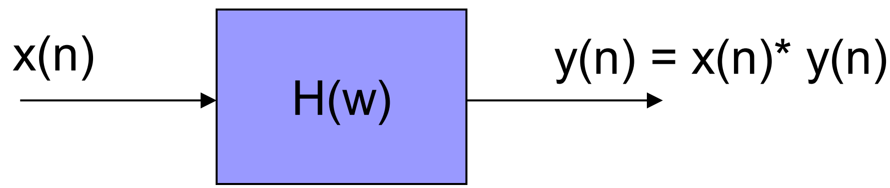
$$\left|H\left(\widehat{w}\right)\right| = \left|H\left(-\widehat{w}\right)\right|$$

Módulo: função par

$$\arg\left(H\left(\widehat{w}\right)\right) = -\arg\left(H\left(-\widehat{w}\right)\right)$$

Fase: função impar

Resposta a uma sinusóide - Filtragem



$$x[n] = \cos[\hat{w}n] \qquad\qquad y[n] = |H(\hat{w})| \cos[\hat{w}n + \angle H(\hat{w})]$$

- Sistemas: não geram novas frequências, são filtros que amplificam ou atenuam frequências presentes no sinal de entrada

Recordar contínuo-discreto

- Relação com sinusóide no tempo contínuo
  - Tempo contínuo:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

  - Tempo Discreto:

$$x[n] = x(nT_s) = A\cos(\omega n T_s + \phi) = A\cos(\hat{\omega} n + \phi)$$

  - Frequência normalizada:

$$\hat{\omega} = \omega T_s = \frac{\omega}{F_s}$$

Frequência tempo continuo:

$$0 < f < Fs$$

Frequência Normalizada

$$0 < \hat{\omega} < 2\pi$$

Relações no domínio do tempo e no domínio da frequência

- Uma convolução no tempo equivale a um produto na frequência:

$$a[n] * b[n] \xleftrightarrow[TF]{} A(\widehat{w}) \times B(\widehat{w})$$

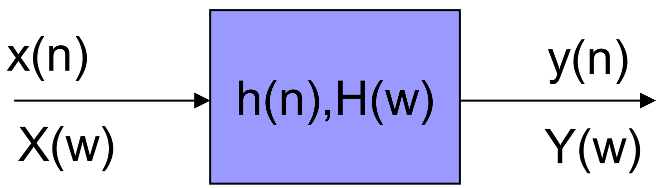
- Aplicando este conceito ao sistemas:

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow[TF]{} X(\widehat{w}) \times H(\widehat{w}) = Y(\widehat{w})$$

- Relação com a Transformada de Fourier:

$$TF\{y[n]\} = TF\{x[n] * h[n]\} = TF\{x[n]\} \times TF\{h[n]\}$$

Sumário SLITs Discretos



- No tempo:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)h(k) = h(n) * x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(n-k)x(k)$$

- Na frequência: $Y(\widehat{w}) = X(\widehat{w})H(\widehat{w})$

$$H(\widehat{w}) = TF\{h(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)e^{-j\widehat{w}n}$$

Desenho gráfico da Resposta em Frequência

$$H(\widehat{w}) = \begin{cases} |H(\widehat{w})| \\ \arg(H(\widehat{w})) \end{cases}$$

- Resposta em Amplitude: $|H(\widehat{w})| = |H(-\widehat{w})|$

$$|H(\widehat{w})| = \left|\frac{Y(\widehat{w})}{X(\widehat{w})}\right|$$

- Resposta de fase: $\arg(H(\widehat{w})) = -\arg(H(-\widehat{w}))$

$$\arg\{H(\widehat{w})\} = \arg\{Y(\widehat{w})\} - \arg\{X(\widehat{w})\}$$

Desenho gráfico da Resposta em Frequência

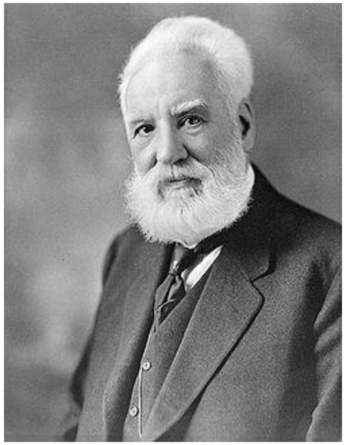
- Usando dB
  - Resposta em Amplitude: $$\left|H\left(\widehat{w}\right)\right|_{dB} = 20\log_{10}\left|H\left(\widehat{w}\right)\right|$$

• dB = deciBel, em homenagem a Alexander Bell é uma unidade de ganho em escala logarítimica

• A função logaritmo goza das seguintes propriedades:

$$\log(a.b) = \log(a) + \log(b)$$

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$



Alexander G. Bell
(1847 - 1922)

dBs

Unidades de Ganho (I)

$$Ganho = \frac{P_o}{P_i}$$

$$\boxed{G_{dB} = 10\log_{10}\left(\frac{P_o}{P_i}\right)}$$

Ganho de potência (W)
em dB (deciBel)

$$G_{dB} = 20\log_{10}\left(\frac{V_o}{V_i}\right)$$

Ganho de amplitude
(tensão eléctrica-V)
em dB (deciBel)

Ganhos de potência	Ganhos de amplitude
$G = 10\log_{10}(g)$	$G = 20\log_{10}(g)$
$g = 10^{\frac{G}{10}}$	$g = 10^{\frac{G}{20}}$

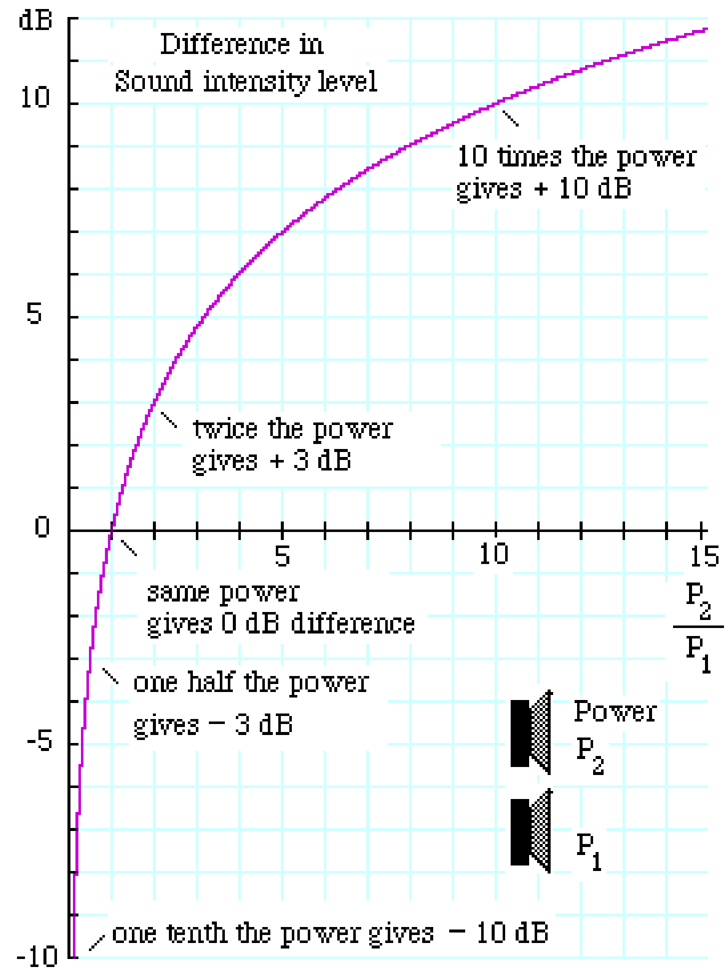
dBs

Linear	Log (dB)
2	3
4	6
10	10
20	13
100	20
1000	30
0,5	-3
0,1	-10
0,01	-20

$$p,\quad \frac{p}{\sqrt{2}},\quad \frac{p}{2},\quad \frac{p}{2\sqrt{2}},\quad \frac{p}{4},\quad \frac{p}{4\sqrt{2}},\quad \frac{p}{8},\quad \frac{p}{8\sqrt{2}},$$

$$I,\quad \frac{I}{2},\quad \frac{I}{4},\quad \frac{I}{8},\quad \frac{I}{16},\quad \frac{I}{32},\quad \frac{I}{64},\quad \frac{I}{128},$$

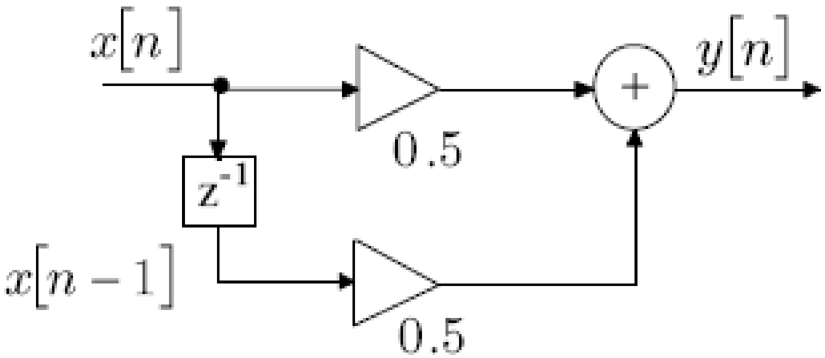
$$L,\ L-3\text{dB},\ L-6\text{dB},\ L-9\text{dB},\ L-12\text{dB},\ L-15\text{dB},\ L-18\text{dB},\ L-21\text{dB}$$



https://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/dB.htm

Exercício

- Considere o seguinte diagrama de blocos



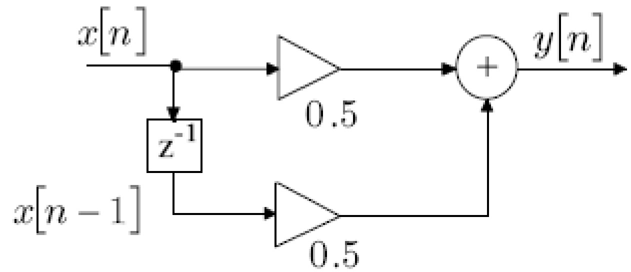
a) Qual a resposta em frequência?

b) Desenhe a Resposta em Amplitude e de Fase do sistema.

Exercício

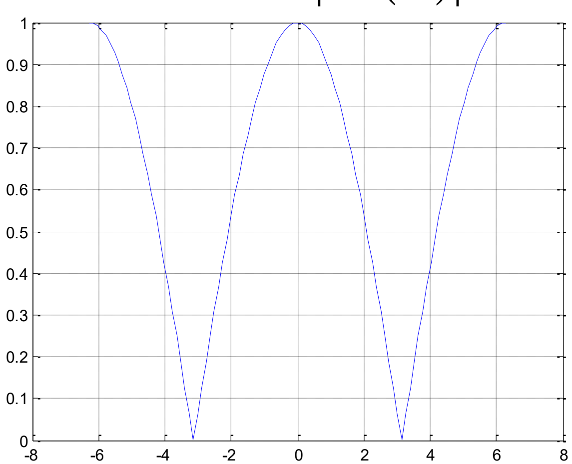
- H(Ω) periódica de período 2π

$$H(\widehat{w}) = 0.5 + 0.5e^{-j\widehat{w}}$$



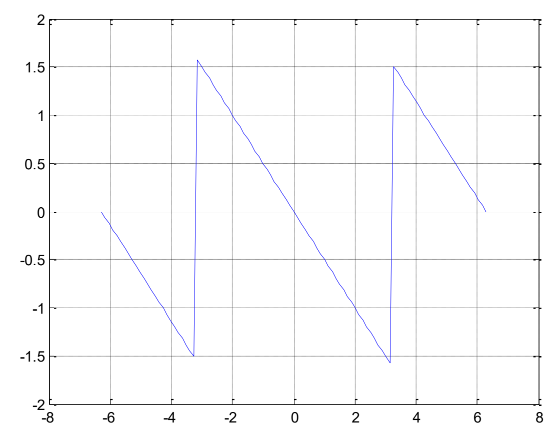
- Resposta em Amplitude

$$|H(\widehat{w})| = \left|\frac{Y(\widehat{w})}{X(\widehat{w})}\right|$$



- Resposta de fase

$$\arg\{H(\widehat{w})\} = \arg\{Y(\widehat{w})\} - \arg\{X(\widehat{w})\}$$



@Python

```
import scipy.signal as sp
import numpy as np

b = [0.5,0.5]
w, h = sp.freqz(b)
import matplotlib.pyplot as plt
fig = plt.figure()
plt.title('Resposta em Amplitude |H(w)|')
ax1 = fig.add_subplot(111)
#plt.semilogy(w, np.abs(h), 'b')
#plt.ylabel('Amplitude (dB)', color='b')
plt.plot(w, np.abs(h), 'b')
plt.xlabel('Frequency (rad/sample)')
plt.grid()
plt.legend()

fig = plt.figure()
plt.title('Resposta de Fase')
ax1 = fig.add_subplot(111)
plt.plot(w, np.angle(h), 'b')
```

Exercício

ISEL - DEETC - LERCM
Processamento Digital de Sinais
5º Mini-teste - 2009/06/19
Duração: 30 minutos

Nome:
Número:

---

1. Considere o SLIT discreto dado pela seguinte equação às diferenças:
   $y[n] = x[n] - 2x[n-1] + 1.5x[n-2] - 0.5x[n-3]$

   (a) Calcule a resposta impulsional que caracteriza o sistema.

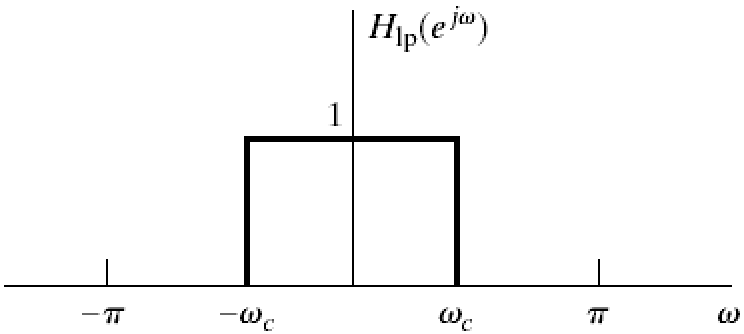
   (b) Calcule a resposta em frequência.

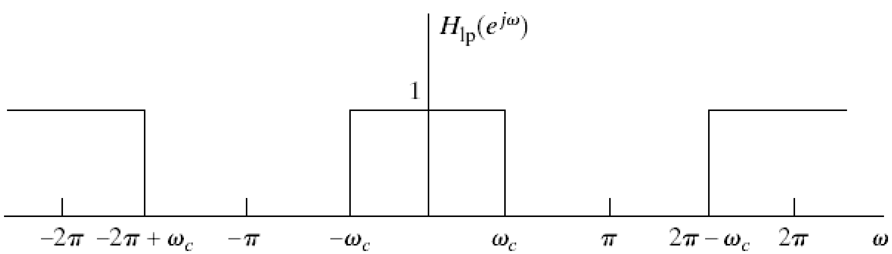
   (c) Qual a saída do sistema, $y[n]$, quando na entrada esta presente o sinal $x[n] = 10 + 5\cos[\frac{2\pi}{3}n] + \cos[\pi n]$?

   (d) Classifique o sistema quanto às seguintes propriedades: causalidade, estabilidade e invertibilidade.

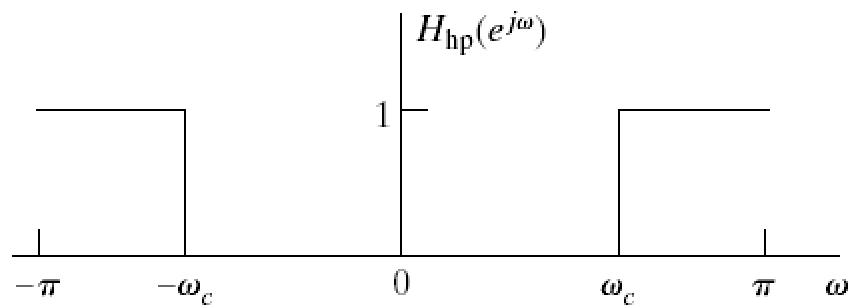
Filtros Ideais

- Passa Baixo



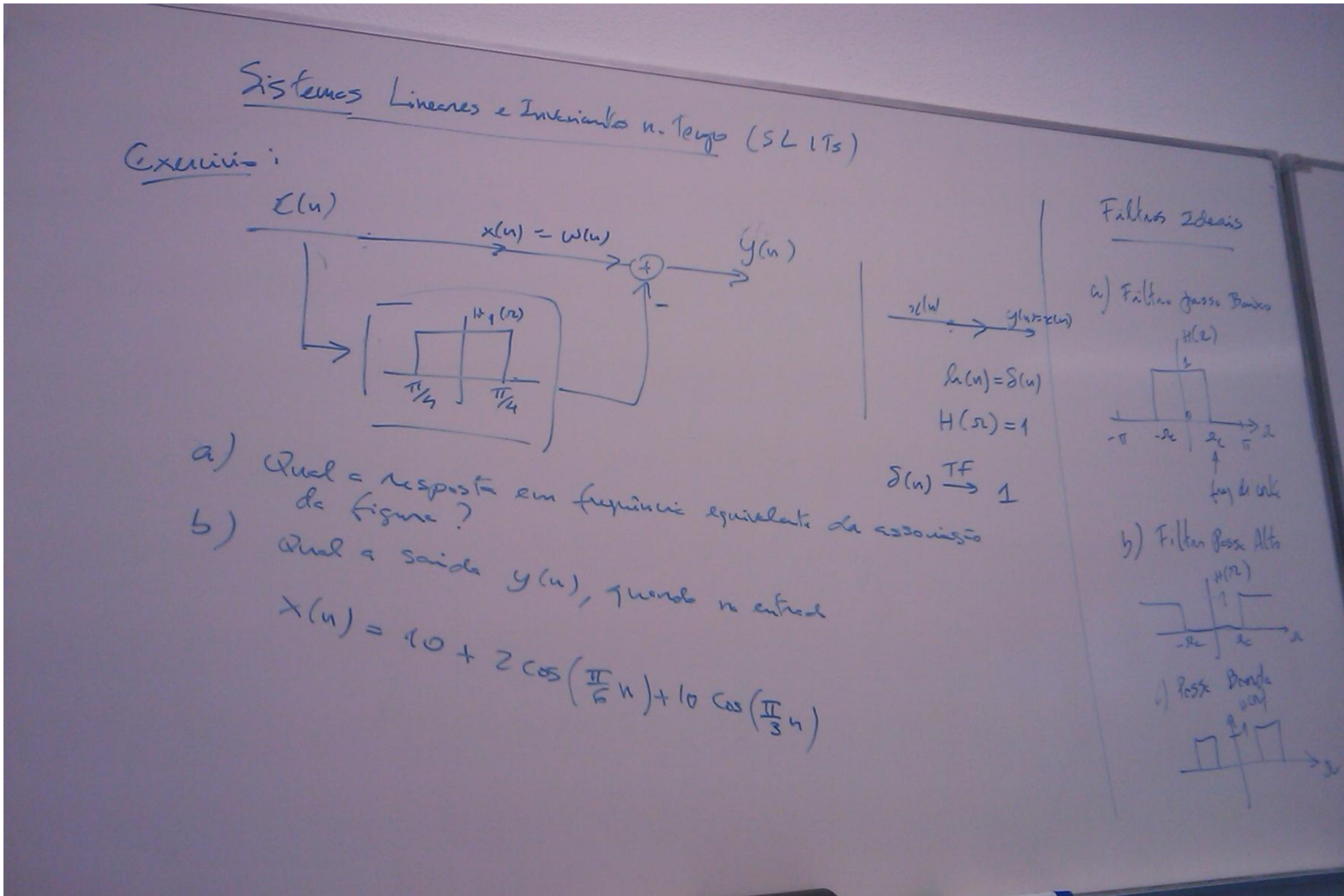


- Passa Alto



$$H_{hp}(\Omega) = 1 - H_{lp}(\Omega)$$

Exercícios



Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo (SLITs)
Exercício:
x(n) − w(n)
y(n)
π/4
π/4
a) Qual a resposta em frequência equivalente da associação da figura?
b) Qual a saída y(n), quando na entrada
x(n) = 10 + 2 cos(π/6 n) + 10 cos(π/3 n)
h(n) = δ(n)
H(Ω) = 1
δ(n) TF → 1
Filtros Ideais
a) Filtro Passa Baixo
H(Ω)
b) Filtro Passa Alto
H(Ω)
c) Passa Banda

Exercícios

ISEL - DEETC - LERCM
Processamento Digital de Sinais
Exame de 1ª Época - 2010/01/15
Duração: 2h 30m

3. Considere o SLIT discreto caracterizado pela resposta em frequência $H(\Omega)$, para $-\pi < \Omega < \pi$.

$$H(\Omega) = 1 - u\left(\Omega + \frac{\pi}{2}\right) + u\left(\Omega - \frac{\pi}{2}\right)$$

   (a) Represente graficamente $H(\Omega)$.

   (b) Trata-se de um sistema passa-baixo, passa-banda ou passa-alto? Justifique.

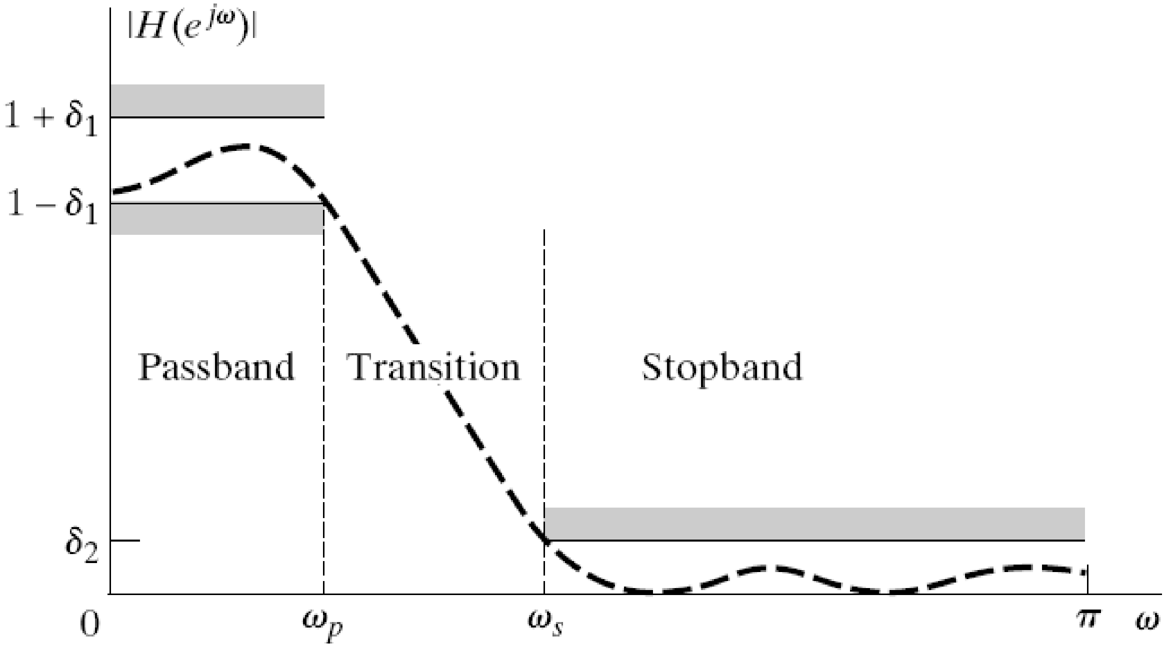
   (d) Qual a saída do sistema, $y_1[n]$, quando a entrada é o sinal $x_1[n]$:

$$x_1[n] = 1 + 2\cos(\frac{\pi}{4}n)$$

   (e) Qual a saída do sistema, $y_2[n]$, quando a entrada é o sinal $x_2[n]$:

$$x_2[n] = 3\cos(\pi n)$$

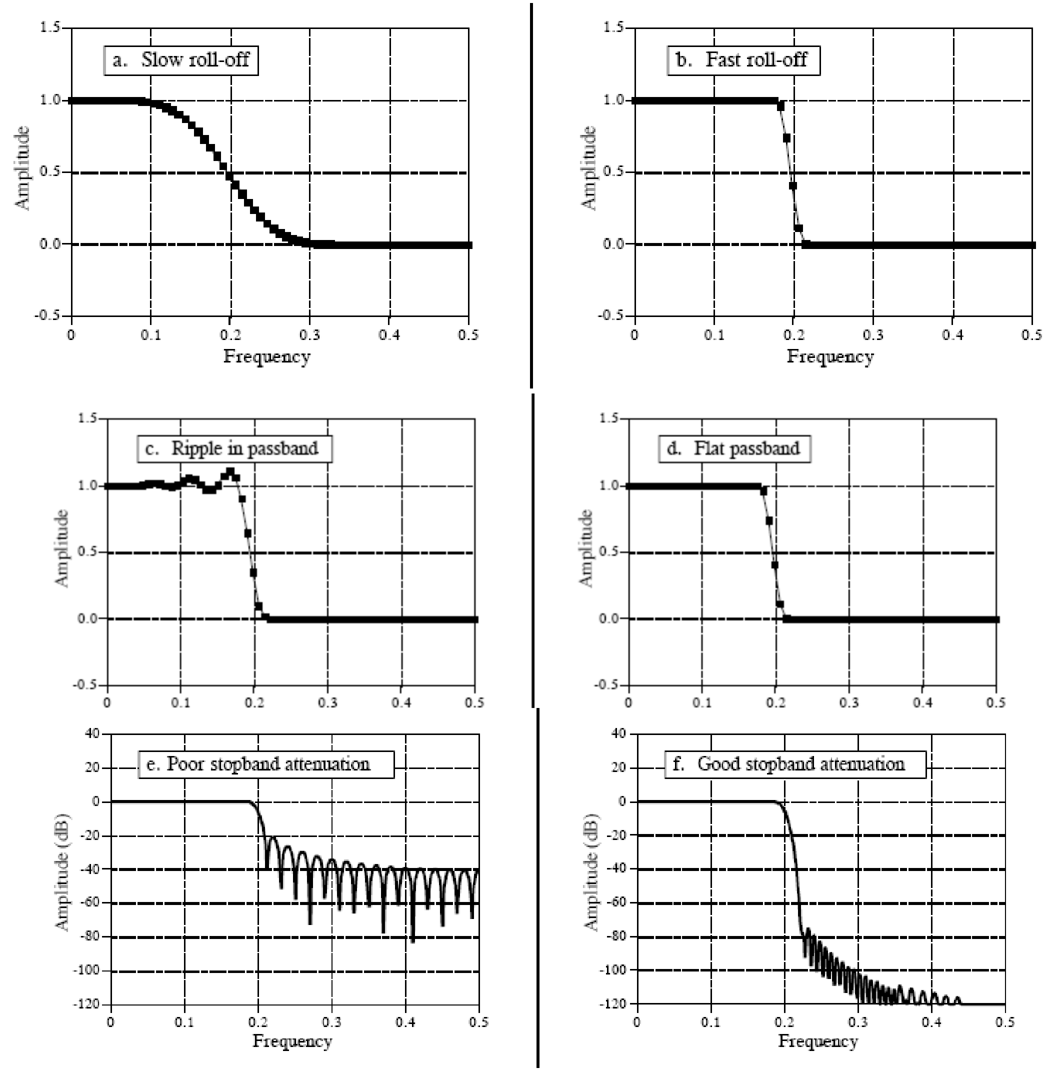
Características dos Filtros



- Frequência de corte
- Banda de passagem, transição e de corte
- Atenuações

Características dos Filtros

- Banda de Transição (Transition Band)
  - Roll – off
- Banda de Passagem (PassBand)
  - Ripple
- Banda de Corte (StopBand)
  - Atenuação



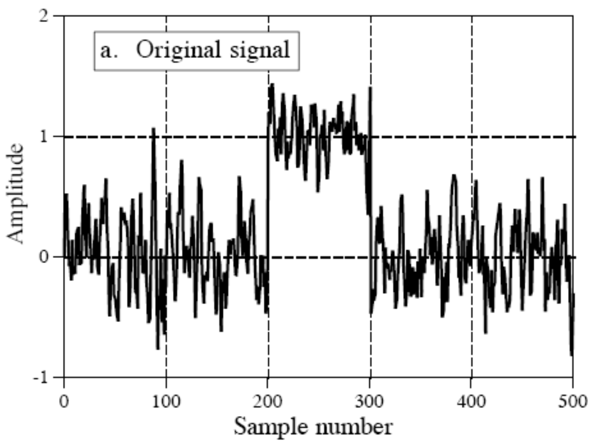
Exemplo: Filtros Média Móvel (Moving Average)

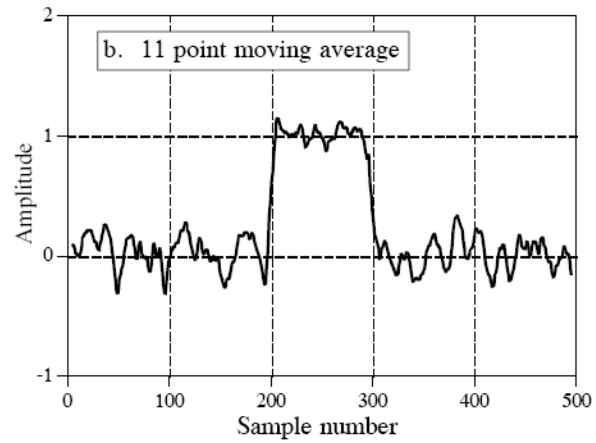
$$y[i] = \frac{1}{M}\sum_{j=0}^{M-1} x[i+j]$$

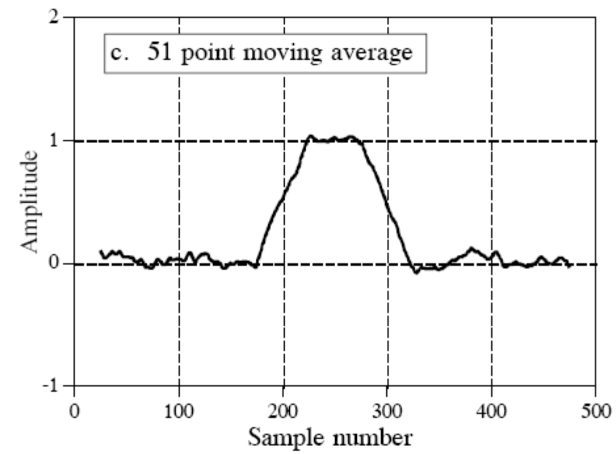
$$y[i] = y[i-1] + x[i+p] - x[i-q]$$

where: $p = (M-1)/2$

$q = p + 1$







$$H[f] = \frac{\sin(\pi f M)}{M \sin(\pi f)}$$