Universidade do Minho
Escola de Engenharia

Cálculo de Programas

Trabalho Prático (2025/26)

Lic. em Ciências da Computação

Lic. em Engenharia Informática

Grupo G31

a107291 Gabriel Pinto Dantas
a106937 José Lourenço Ferreira Fernandes
a107322 Simão Azevedo Oliveira

janeiro 2026

Preâmbulo

Em Cálculo de Programas pretende-se ensinar a programação de computadores como uma disciplina científica. Para isso parte-se de um repertório de *combinadores* que formam uma álgebra da programação e usam-se esses combinadores para construir programas *composicionalmente*, isto é, agregando programas já existentes.

Na sequência pedagógica dos planos de estudo dos cursos que têm esta disciplina, opta-se pela aplicação deste método à programação em Haskell (sem prejuízo da sua aplicação a outras linguagens funcionais). Assim, o presente trabalho prático coloca os alunos perante problemas concretos que deverão ser implementados em Haskell. Há ainda um outro objectivo: o de ensinar a documentar programas, a validá-los e a produzir textos técnico-científicos de qualidade.

Antes de abordarem os problemas propostos no trabalho, os grupos devem ler com atenção o anexo A onde encontrarão as instruções relativas ao *software* a instalar, etc.

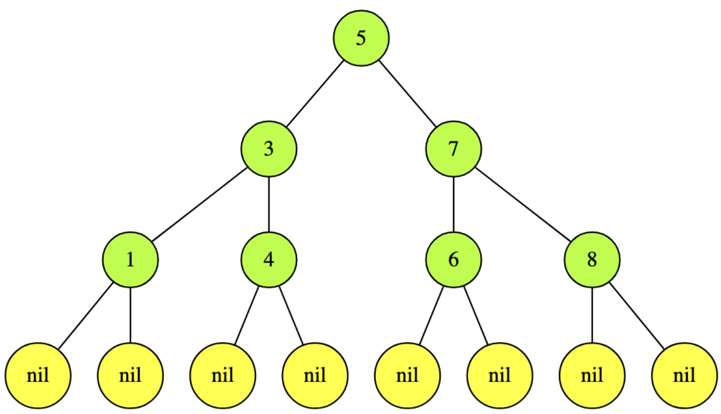
Valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

Avaliação. Faz parte da avaliação do trabalho a sua defesa por parte dos elementos de cada grupo. Estes devem estar preparados para responder a perguntas sobre *qualquer* dos problemas deste enunciado. A prestação *individual* de cada aluno nessa defesa oral será uma componente importante e diferenciadora da avaliação.

Problema 1

Uma serialização (ou travessia) de uma árvore é uma sua representação sob a forma de uma lista. Na biblioteca $BTree$ encontram-se as funções de serialização $inordt$, $preordt$ e $postordt$, que fazem as travessias *in-order*, *pre-order* e *post-order*, respectivamente. Todas essas travessias são catamorfismos que percorrem a árvore argumento em regime *depth-first*.

Pretende-se agora uma função $bforder$ que faça a travessia em regime *breadth-first*, isto é, por níveis. Por exemplo, para a árvore t_1 dada em anexo e mostrada na figura a seguir,



a função deverá dar a lista

$$[5, 3, 7, 1, 4, 6, 8]$$

em que se vê como os níveis 5, depois $3, 7$ e finalmente $1, 4, 6, 8$ foram percorridos.

Pretendemos propor duas versões dessa função:

1. Uma delas envolve um catamorfismo de $BTree$s:

$$\begin{array}{l} bfsLevels :: BTree\ a \rightarrow [a] \\ bfsLevels = concat \cdot levels \end{array}$$

Complete a definição desse catamorfismo:

$$\begin{array}{l} levels :: BTree\ a \rightarrow [[a]] \\ levels = (\!|\, glevels\, |\!) \end{array}$$

2. A segunda proposta,

$$bft :: BTree\ a \rightarrow [a]$$

deverá basear-se num anamorfismo de listas.

Sugestão: estudar o artigo [2] cujo PDF está incluído no material deste trabalho. Quando fizer testes ao seu código pode, se desejar, usar funções disponíveis na biblioteca *Exp* para visualizar as árvores em GraphViz (formato .dot).

Justifique devidamente a sua resolução, que deverá vir acompanhada de diagramas explicativos. Como já se disse, valoriza-se a escrita de *pouco* código que corresponda a soluções simples e elegantes que utilizem os combinadores de ordem superior estudados na disciplina.

Problema 2

Considere a seguinte função em Haskell:

$$\begin{array}{l} f\ x = wrapper \cdot worker\ \textbf{where} \\ \quad wrapper = head \\ \quad worker\ 0 = start\ x \\ \quad worker\ (n+1) = loop\ x\ (worker\ n) \\ loop\ x\ [s, \quad h, \quad k, j, \quad m\ ] = \\ \qquad\quad [h\ /\ k + s, x \uparrow 2 * h, k * j, j + m, m + 8] \\ start\ x = [x, x \uparrow 3, 6, 20, 22] \end{array}$$

Pode-se provar pela lei de recursividade mútua que $f\ x\ n$ calcula o seno hiperbólico de x, $sinh\ x$, para n aproximações da sua série de Taylor. Faça a derivação da função dada a partir da referida série de Taylor, apresentando todos os cálculos justificativos, tal como se faz para outras funções no capítulo respectivo do texto base desta UC [3].

Problema 3

Quem em Braga observar, ao fim da tarde, o tráfego onde a Avenida Clairmont Fernand se junta à N101, aproximadamente na coordenada 41°33'46.8"N 8°24'32.4"W — ver as setas da figura que se segue — reparará nas sequências imparáveis (infinitas!) de veículos provenientes dessas vias de circulação.

Mas também irá observar um comportamento interessante por parte dos condutores desses veículos: por regra, *cada carro numa via deixa passar, à sua frente, exactamente outro carro da outra via.*

Este comportamento *civilizado* chama-se *fair-merge* (ou *fair-interleaving*) de duas sequências infinitas, também designadas *streams* em ciência da computação. Seja dado o tipo dessas sequências em Haskell,

$$\mathbf{data}\ \mathit{Stream}\ a = \mathit{Cons}\ (a, \mathit{Stream}\ a)\ \mathbf{deriving}\ \mathit{Show}$$

para o qual se define também:

$$\mathsf{out}\ (\mathit{Cons}\ (x, xs)) = (x, xs)$$

O referido comportamento civilizado pode definir-se, em Haskell, da forma seguinte:[1]

$$\begin{array}{l}
\mathit{fair_merge} :: (\mathit{Stream}\ a, \mathit{Stream}\ a) + (\mathit{Stream}\ a, \mathit{Stream}\ a) \rightarrow \mathit{Stream}\ a \\
\mathit{fair_merge} = [h, k]\ \mathbf{where} \\
\quad h\ (\mathit{Cons}\ (x, xs), y) = \mathit{Cons}\ (x, k\ (xs, y)) \\
\quad k\ (x, \mathit{Cons}\ (y, ys)) = \mathit{Cons}\ (y, h\ (x, ys))
\end{array}$$

Defina *fair_merge* como um **anamorfismo** de *Streams*, usando o combinador

$$[\!(\, g \,)\!] = \mathit{Cons} \cdot (\mathit{id} \times [\!(\, g \,)\!]) \cdot g$$

e a seguinte estratégia:

- Derivar a lei **dual** da recursividade mútua,

$$[f, g] = [\!(\, [h, k] \,)\!] \quad \equiv \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathit{out} \cdot f = \mathsf{F}\ [f, g] \cdot h \\ \mathit{out} \cdot g = \mathsf{F}\ [f, g] \cdot k \end{array} \right. \tag{1}$$

  tal como se fez, nas aulas, para a que está no formulário.

- Usar (1) na resolução do problema proposto.

Justificar devidamente a resolução, que deverá vir acompanhada de diagramas explicativos.

Problema 4

Como se sabe, é possível pensarmos em catamorfismos, anamorfismos etc *probabilísticos*, quer dizer, programas recursivos que dão distribuições como resultados. Por exemplo, podemos pensar num combinador

$$\mathit{pcataList} :: (() + (a, b) \rightarrow \mathsf{Dist}\ b) \rightarrow [a] \rightarrow \mathsf{Dist}\ b$$

[1] O facto das sequências serem infinitas não nos deve preocupar, pois em Haskell isso é lidado de forma transparente por lazy evaluation.

que é muito parecido com

$$(\!|\cdot|\!) :: (() + (a,b) \to b) \to [a] \to b$$

da biblioteca List. A principal diferença é que o gene de *pcataList* é uma função probabilística.

Como exemplo de utilização, recorde-se que $(\!|[zero, add]|\!)$ soma todos os elementos da lista argumento, por exemplo:

$$(\!|[zero, add]|\!)\ [20, 10, 5] = 35.$$

Considere-se agora a função *padd* (adição probabilística) que, com probabilidade 90% soma dois números e com probabilidade 10% os subtrai:

$$padd\ (a,b) = D\ [(a+b, 0.9), (a-b, 0.1)]$$

Se se correr

$$d4 = pcataList\ [pzero, padd]\ [20, 10, 5]\ \mathbf{where}\ pzero = return \cdot zero$$

obter-se-á:

```
35  81.0%
25   9.0%
 5   9.0%
15   1.0%
```

Com base neste exemplo, resolva o seguinte

> ***Problema**: Uma unidade militar pretende enviar uma mensagem urgente a outra, mas tem o aparelho de telegrafia meio avariado. Por experiência, o telegrafista sabe que a probabilidade de uma palavra se perder (não ser transmitida) é 5%; e que, no final de cada mensagem, o aparelho envia o código* `"stop"`*, mas (por estar meio avariado), falha 10% das vezes.*
>
> *Qual a probabilidade de a palavra* `"atacar"` *da mensagem*
>
> $words$ `"Vamos atacar hoje"`
>
> *se perder, isto é, o resultado da transmissão ser* `["Vamos","hoje","stop"]`*? E a de seguirem todas as palavras, mas faltar o* `"stop"` *no fim? E a da transmissão ser perfeita?*

Responda a estas perguntas encontrando *gene* tal que

$$transmitir = pcataList\ gene$$

descreve o comportamento do aparelho. Justificar devidamente a resolução, que deverá vir acompanhada de diagramas explicativos.

Anexos

A Natureza do trabalho a realizar

Este trabalho teórico-prático deve ser realizado por grupos de 3 alunos. Os detalhes da avaliação (datas para submissão do relatório e sua defesa oral) são os que forem publicados na página da disciplina na *internet*.

Recomenda-se uma abordagem participativa dos membros do grupo em **todos** os exercícios do trabalho, para assim poderem responder a qualquer questão colocada na *defesa oral* do relatório.

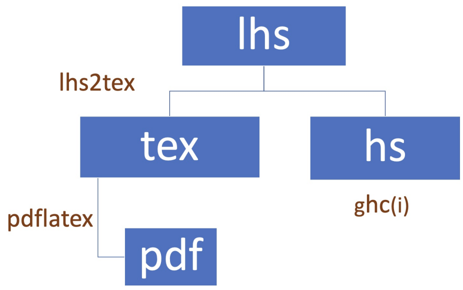
Para cumprir de forma integrada os objectivos do trabalho vamos recorrer a uma técnica de programação dita "literária" [1], cujo princípio base é o seguinte:

> *Um programa e a sua documentação devem coincidir.*

Por outras palavras, o **código fonte** e a **documentação** de um programa deverão estar no mesmo ficheiro.

O ficheiro `cp2526t.pdf` que está a ler é já um exemplo de programação literária: foi gerado a partir do texto fonte `cp2526t.lhs`[1] que encontrará no material pedagógico desta disciplina descompactando o ficheiro `cp2526t.zip`.

Como se mostra no esquema abaixo, de um único ficheiro (*lhs*) gera-se um PDF ou faz-se a interpretação do código Haskell que ele inclui:



Vê-se assim que, para além do GHCi, serão necessários os executáveis pdflatex e lhs2TeX. Para facilitar a instalação e evitar problemas de versões e conflitos com sistemas operativos, é recomendado o uso do Docker tal como a seguir se descreve.

B Docker

Recomenda-se o uso do container cuja imagem é gerada pelo Docker a partir do ficheiro `Dockerfile` que se encontra na diretoria que resulta de descompactar `cp2526t.zip`. Este container deverá ser usado na execução do GHCi e dos comandos relativos ao LaTeX. (Ver também a `Makefile` que é disponibilizada.)

Após instalar o Docker e descarregar o referido zip com o código fonte do trabalho, basta executar os seguintes comandos:

```
$ docker build -t cp2526t .
$ docker run -v ${PWD}:/cp2526t -it cp2526t
```

NB: O objetivo é que o container seja usado *apenas* para executar o GHCi e os comandos relativos ao LaTeX. Deste modo, é criado um *volume* (cf. a opção `-v ${PWD}:/cp2526t`) que permite que a diretoria em que se encontra na sua máquina local e a diretoria `/cp2526t` no container sejam partilhadas.

Pretende-se então que visualize/edite os ficheiros na sua máquina local e que os compile no container, executando:

[1] O sufixo 'lhs' quer dizer *literate Haskell*.

```
$ lhs2TeX cp2526t.lhs > cp2526t.tex
$ pdflatex cp2526t
```

lhs2TeX é o pre-processador que faz "pretty printing" de código Haskell em LaTeX e que faz parte já do container. Alternativamente, basta executar

```
$ make
```

para obter o mesmo efeito que acima.

Por outro lado, o mesmo ficheiro `cp2526t.lhs` é executável e contém o "kit" básico, escrito em Haskell, para realizar o trabalho. Basta executar

```
$ ghci cp2526t.lhs
```

Abra o ficheiro `cp2526t.lhs` no seu editor de texto preferido e verifique que assim é: todo o texto que se encontra dentro do ambiente

```
\begin{code}
...
\end{code}
```

é seleccionado pelo GHCi para ser executado.

C Em que consiste o TP

Em que consiste, então, o *relatório* a que se referiu acima? É a edição do texto que está a ser lido, preenchendo o anexo G com as respostas. O relatório deverá conter ainda a identificação dos membros do grupo de trabalho, no local respectivo da folha de rosto.

Para gerar o PDF integral do relatório deve-se ainda correr os comando seguintes, que actualizam a bibliografia (com BibTeX) e o índice remissivo (com `makeindex`),

```
$ bibtex cp2526t.aux
$ makeindex cp2526t.idx
```

e recompilar o texto como acima se indicou. (Como já se disse, pode fazê-lo correndo simplesmente `make` no container.)

No anexo F disponibiliza-se algum código Haskell relativo aos problemas que são colocados. Esse anexo deverá ser consultado e analisado à medida que isso for necessário.

Deve ser feito uso da programação literária para documentar bem o código que se desenvolver, em particular fazendo diagramas explicativos do que foi feito e tal como se explica no anexo D que se segue.

D Como exprimir cálculos e diagramas em LaTeX/lhs2TeX

Como primeiro exemplo, estudar o texto fonte (lhs) do que está a ler[1] onde se obtém o efeito seguinte:[2]

$$
\begin{aligned}
& id = \langle f, g \rangle \\
\equiv \quad & \{ \text{ universal property } \}
\end{aligned}
$$

[1] Procure e.g. por `"sec:diagramas"`.

[2] Exemplos tirados de [3].

$$\left\{\begin{array}{l}\pi_1 \cdot id = f\\ \pi_2 \cdot id = g\end{array}\right.$$

$$\equiv \qquad \{ \text{ identity } \}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\pi_1 = f\\ \pi_2 = g\end{array}\right.$$

$\Box$

Os diagramas podem ser produzidos recorrendo à *package* xymatrix, por exemplo:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \arrow[d, "(\!|g|\!)"'] & 1 + \mathbb{N}_0 \arrow[l, "\mathsf{in}"'] \arrow[d, "id + (\!|g|\!)"] \\
B & 1 + B \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

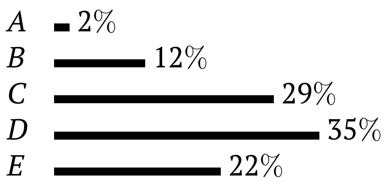
E O mónade das distribuições probabilísticas

Mónades são functores com propriedades adicionais que nos permitem obter efeitos especiais em programação. Por exemplo, a biblioteca Probability oferece um mónade para abordar problemas de probabilidades. Nesta biblioteca, o conceito de distribuição estatística é captado pelo tipo

$$\textbf{newtype}\ \mathsf{Dist}\ a = D\ \{ unD :: [(a, ProbRep)] \} \qquad (2)$$

em que $ProbRep$ é um real de 0 a 1, equivalente a uma escala de 0 a 100%.

Cada par (a, p) numa distribuição $d :: \mathsf{Dist}\ a$ indica que a probabilidade de a é p, devendo ser garantida a propriedade de que todas as probabilidades de d somam 100%. Por exemplo, a seguinte distribuição de classificações por escalões de A a E,



será representada pela distribuição

$$d1 :: \mathsf{Dist}\ Char$$
$$d1 = D\ [(\texttt{'A'}, 0.02), (\texttt{'B'}, 0.12), (\texttt{'C'}, 0.29), (\texttt{'D'}, 0.35), (\texttt{'E'}, 0.22)]$$

que o GHCi mostrará assim:

```
'D'   35.0%
'C'   29.0%
'E'   22.0%
'B'   12.0%
'A'    2.0%
```

É possível definir geradores de distribuições, por exemplo distribuições *uniformes*,

$$d2 = uniform\ (words\ \texttt{"Uma frase de cinco palavras"})$$

isto é

```
     "Uma"  20.0%
   "cinco"  20.0%
      "de"  20.0%
   "frase"  20.0%
"palavras"  20.0%
```

distribuição *normais*, eg.

$$d3 = normal\ [10\mathinner{\ldotp\ldotp}20]$$

etc.[1] Dist forma um **mónade** cuja unidade é $return\ a = D\ [(a, 1)]$ e cuja composição de Kleisli é (simplificando a notação)

$$(f \bullet g)\ a = [(y, q * p) \mid (x, p) \leftarrow g\ a, (y, q) \leftarrow f\ x]$$

em que $g : A \rightarrow \text{Dist } B$ e $f : B \rightarrow \text{Dist } C$ são funções **monádicas** que representam *computações probabilísticas*.

Este mónade é adequado à resolução de problemas de *probabilidades e estatística* usando programação funcional, de forma elegante e como caso particular da programação monádica.

F Código fornecido

Problema 1

Árvores exemplo:

$$
\begin{array}{l}
t_1 :: BTree\ Int \\
t_1 = Node\ (5, (Node\ (3, (Node\ (1, (Empty, Empty)), Node\ (4, (Empty, Empty)))), \\
\quad Node\ (7, (Node\ (6, (Empty, Empty)), Node\ (8, (Empty, Empty))))))) \\
t_2 :: BTree\ Int \\
t_2 = \\
\quad node\ 1 \\
\qquad (node\ 2\ (node\ 4\ Empty\ Empty)\ (node\ 5\ Empty\ Empty)) \\
\qquad (node\ 3\ (node\ 6\ Empty\ Empty)\ (node\ 7\ Empty\ Empty)) \\
t_3 :: BTree\ Char \\
t_3 = \\
\quad node\ \texttt{'A'} \\
\qquad (node\ \texttt{'B'}\ (node\ \texttt{'C'}\ (node\ \texttt{'D'}\ Empty\ Empty)\ Empty)\ Empty) \\
\qquad (node\ \texttt{'E'}\ Empty\ Empty) \\
t_4 :: BTree\ Char \\
t_4 = \\
\quad node\ \texttt{'A'} \\
\qquad (node\ \texttt{'B'}\ (node\ \texttt{'C'}\ (node\ \texttt{'D'}\ Empty\ Empty)\ Empty)\ Empty) \\
\qquad Empty \\
t_5 :: BTree\ Int \\
t_5 = \\
\quad node\ 1
\end{array}
$$

[1] Para mais detalhes ver o código fonte de Probability, que é uma adaptação da biblioteca PFP ("Probabilistic Functional Programming"). Para quem quiser saber mais recomenda-se a leitura do artigo [?].

$$
\begin{array}{l}
\quad (node\ 2\ (node\ 4\ Empty\ Empty)\ Empty) \\
\quad (node\ 3\ Empty\ (node\ 5\ (node\ 6\ Empty\ Empty)\ Empty)) \\
node\ a\ b\ c = Node\ (a, (b, c))
\end{array}
$$

G Soluções dos alunos

Os alunos devem colocar neste anexo as suas soluções para os exercícios propostos, de acordo com o "layout" que se fornece. Não podem ser alterados os nomes ou tipos das funções dadas, mas pode ser adicionado texto ao anexo, bem como diagramas e/ou outras funções auxiliares que sejam necessárias.

Importante: Não pode ser alterado o texto deste ficheiro fora deste anexo.

Problema 1

Solução 1: catamorfismo

Análise intuitiva do problema

Como primeira proposta é desejado que a travessia se baseie num catamorfismo de árvores binárias.

Intuitivamente, dado que desejamos uma travessia por níveis (*breadth-first*), precisamos de uma recursão que percorra a árvore e devolva os elementos ordenados por níveis. Ora, uma recursão implicitamente faz uma travessia em profundidade (*depth-first*), pelo que teremos de manipular o resultado dessa recursão para obter o resultado desejado.

Inicie-se o processo por analisar ambas as funções dadas, *bfsLevels* e *bft*, de modo a a perceber o que cada uma delas deve fazer.

A função *bfsLevels*, dado uma árvore binária de elementos de tipo A, deve devolver uma lista de elementos de A, ordenados por níveis, ou seja, primeiro os elementos do nível 0 (a raiz), depois os do nível 1 (os filhos da raiz), depois os do nível 2 (os netos da raiz), e assim sucessivamente. Esta função é definida à custa de um *concat* após um catamorfismo *levels*.

O catamorfismo *levels*, por sua vez, deve devolver uma lista de listas de elementos de A, onde cada lista interna corresponde a um nível da árvore.

Exemplifique-se o funcionamento deste algoritmo para um entendimento claro do que se pretende alcançar. Dada a árvore t_1, o catamorfismo $levels\ \ t_1$ deve devolver a lista de listas $[[5],[3,7],[1,4,6,8]]$. A função $bfsLevels\ \ t_1$, por sua vez, deve devolver a lista resultante da concatenação das listas internas, ou seja, $[5,3,7,1,4,6,8]$.

Definição do catamorfismo

O objetivo é definir o gene *glevels* de *levels*, de modo a que este catamorfismo devolva a lista de listas de elementos de A ordenados por níveis.

Represente-se esquematicamente este catamorfismo:

$$
\begin{tikzcd}
BTree\ A \arrow[r, "\mathsf{out}"] \arrow[d, "(\!|\, glevels\, |\!)"'] & 1 + A \times (BTree\ A \times BTree\ A) \arrow[d, "id + id \times ((\!|\, glevels\, |\!) \times (\!|\, glevels\, |\!))"] \\
{[[A]]} & 1 + A \times ([[A]] \times [[A]]) \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
$$

Devido à existência do coproduto, sabe-se que o gene do catamorfismo será uma função definida por:

$$g = [g1, g2] \tag{3}$$

Para definir o gene, considere-se o que deve acontecer nos dois casos possíveis da árvore dada como argumento:

- No caso base, em que a árvore é vazia ($Empty$), a lista de níveis deve ser a lista vazia ($[\,]$).
- No caso recursivo, em que a árvore é um nó $Node\ (a, (l, r))$, com raiz a e subárvores l e r, devem ser combinadas as listas de níveis das subárvores l e r, adicionando-se o elemento a a essa combinação de forma pertinente.

O caso base é simples de definir:

$$g1 = nil \tag{4}$$

Para o caso recursivo, defina-se uma função auxiliar $concatPointWise$:

$$\begin{array}{l} concatPointWise :: [[a]] \to [[a]] \to [[a]] \\ concatPointWise\ [\,]\ ys = ys \\ concatPointWise\ xs\ [\,] = xs \\ concatPointWise\ (x : xs)\ (y : ys) = (x +\!\!+ y) : concatPointWise\ xs\ ys \end{array}$$

Esta função trata de concatenar duas listas de listas de elementos do tipo A. Isto trata de juntar os níveis das duas listas, ponto a ponto. A primeira claúsula trata do caso em que a primeira lista é vazia, retornando a segunda lista. A segunda claúsula trata do caso em que a segunda lista é vazia, retornando a primeira lista. A terceira claúsula trata do caso em que ambas as listas são não vazias, concatenando as cabeças das listas e chamando-se recursivamente para as caudas. Por exemplo,

$$concatPointWise\ [[3], [1, 4]]\ [[7], [6, 8]] = [[3, 7], [1, 4, 6, 8]]$$

Assim, o gene $g2$ pode ser definido como:

$$g2\ (a, (ls, rs)) = singl\ a +\!\!+ concatPointWise\ ls\ rs \tag{5}$$

Em que ls e rs são as listas de níveis das subárvores l e r, respetivamente. O resultado é a lista de níveis das subárvores, combinadas ponto a ponto, com o elemento a adicionado como novo nível no início da lista.

Que, transformando em uma versão pointfree, resulta em:

$$g2 = cons \cdot (singl \times \widehat{concatPointWise}) \tag{6}$$

Definição de *glevels*

Com base nas equações (3), (4) e (6), A definição final de $glevels$ é:

$$glevels = [nil, cons \cdot (singl \times \widehat{concatPointWise})]$$

Definição pointfree da função auxiliar

Com o intuito de embelezar a nossa solução, optámos por desafiar-nos a definir a função de concatenação ponto a ponto $concatPointWise$ de forma pointfree através de um anamorfismo de listas.

Recordemos que a função *concatPointWise* recebe duas listas de listas e combina-as ponto a ponto. Podemos pensá-la como um processo iterativo que constrói progressivamente a lista resultado, o que sugere o uso de um **anamorfismo**.

O anamorfismo de listas tem a forma:

$$[\!(\, g \,)\!] = \mathsf{in}_{List} \cdot (id + id \times [\!(\, g \,)\!]) \cdot g$$

O gene g recebe um estado (neste caso, o par de listas $([[a]], [[a]])$) e decide:

- Se deve parar (devolvendo $i_1\ ()$)
- Ou produzir o próximo elemento e o novo estado (devolvendo $i_2\ (elemento, novo\_estado)$)

Definamos então *concatCondicional* como um anamorfismo:

$$\begin{array}{l}
concatCondicional :: [[a]] \to [[a]] \to [[a]] \\
concatCondicional = \overline{[\!(\, gene \,)\!]} \\
\quad \mathbf{where} \\
\qquad gene = ambasVazias \to stop, \cdot \\
\qquad\quad (listaEsquerdaVazia \to doListaDireita, \cdot \\
\qquad\quad listaDireitaVazia \to doListaEsquerda, doAmbas) \\
\qquad\quad \text{-- Predicados} \\
\qquad ambasVazias = \widehat{(\wedge)} \cdot (null \times null) \\
\qquad listaEsquerdaVazia = null \cdot \pi_1 \\
\qquad listaDireitaVazia = null \cdot \pi_2 \\
\qquad\quad \text{-- Ações} \\
\qquad stop = i_1 \cdot \\
\qquad doListaDireita = i_2 \cdot \langle head \cdot \pi_2, \langle nil, tail \cdot \pi_2 \rangle \rangle \\
\qquad doListaEsquerda = i_2 \cdot \langle head \cdot \pi_1, \langle tail \cdot \pi_1, nil \rangle \rangle \\
\qquad doAmbas = i_2 \cdot \langle \mathsf{conc} \cdot (head \times head), tail \times tail \rangle
\end{array}$$

Explicação detalhada do gene:

O gene implementa uma máquina de estados que analisa o par de listas e decide como proceder. Usa uma cascata de condicionais (*cond p f g*) que funciona como $\mathbf{if}\ p\ \mathbf{then}\ f\ \mathbf{else}\ g$:

1. **Caso base - ambas as listas vazias** $([\,], [\,])$:

   Quando não há mais elementos em nenhuma das listas, o processo termina. O gene devolve $i_1\ ()$ para sinalizar paragem ao anamorfismo.

   $$stop = i_1 \cdot$$

   Este é o critério de terminação que garante que a recursão não é infinita.

2. **Caso degenerado - só a lista esquerda está vazia** $([\,], y : ys)$:

   Neste caso, não há mais elementos da lista esquerda para combinar, mas ainda existem elementos em *ys* que devem ser incluídos no resultado final.

   A ação *doListaDireita* constrói o próximo elemento da lista resultado e o novo estado:

   - **Elemento emitido**: $head \cdot \pi_2$ extrai y (a primeira sublista de *ys*)
   - **Novo estado**: $([\,], tail \cdot \pi_2)$ resulta em $([\,], ys')$ onde ys' são as sublistas restantes

$$doListaDireita = i_2 \cdot \langle head \cdot \pi_2, \langle nil, tail \cdot \pi_2 \rangle \rangle$$

Em termos práticos: como não há nada à esquerda, simplesmente copiamos y para o resultado e continuamos com $([\,], ys')$.

3. **Caso simétrico - só a lista direita está vazia** $(x : xs, [\,])$:

   Situação simétrica ao caso anterior: esgotaram-se os elementos de ys mas ainda há elementos em xs para processar.

   A ação *doListaEsquerda* funciona analogamente:

   - **Elemento emitido**: $head \cdot \pi_1$ extrai x (a primeira sublista de xs)
   - **Novo estado**: $(tail \cdot \pi_1, [\,])$ resulta em $(xs', [\,])$ onde xs' são as sublistas restantes

   $$doListaEsquerda = i_2 \cdot \langle head \cdot \pi_1, \langle tail \cdot \pi_1, nil \rangle \rangle$$

   Interpretação: copiamos x para o resultado e prosseguimos com $(xs', [\,])$.

4. **Caso geral - ambas as listas não-vazias** $(x : xs, y : ys)$:

   Este é o caso principal onde efetivamente combinamos elementos de ambas as listas. Queremos concatenar x com y (ambas são sublistas) e continuar o processo com os elementos restantes.

   A ação *doAmbas* realiza esta operação:

   - **Elemento emitido**: $\text{conc} \cdot (head \times head)$
     - $(head \times head)$ extrai (x, y) — as primeiras sublistas de cada lado
     - conc concatena-as, produzindo $x +\!\!+ y$
   - **Novo estado**: $(tail \times tail)$ produz (xs, ys) — os restantes elementos de ambas as listas

   $$doAmbas = i_2 \cdot \langle \text{conc} \cdot (head \times head), tail \times tail \rangle$$

   Esta é a operação central da concatenação ponto a ponto: combinar x e y em $x +\!\!+ y$ e avançar para o próximo par de sublistas.

Fluxo de controlo:

A cascata de condicionais funciona como uma árvore de decisão:

if *ambasVazias* **then**
  stop
else if *listaEsquerdaVazia* **then**
  doListaDireita
else if *listaDireitaVazia* **then**
  doListaEsquerda
else
  doAmbas

Esta estrutura garante que tratamos todos os casos possíveis de forma exaustiva e mutuamente exclusiva.

Exemplo de execução:

Para $[[3], [1, 4]]$ e $[[7], [6, 8]]$:

$$
\begin{array}{l}
concatCondicional\ [[3],[1,4]]\ [[7],[6,8]] \\
\quad = (\!|\, gene\, |\!)\ ([[3],[1,4]],[[7],[6,8]]) \\
\quad = \quad \text{-- gene devolve i2 ([3,7], ([[1,4]], [[6,8]]))} \\
\quad = [3,7] : (\!|\, gene\, |\!)\ ([[1,4]],[[6,8]]) \\
\quad = \quad \text{-- gene devolve i2 ([1,4,6,8], ([], []))} \\
\quad = [3,7] : [1,4,6,8] : (\!|\, gene\, |\!)\ ([\,],[\,]) \\
\quad = \quad \text{-- gene devolve i1 ()} \\
\quad = [[3,7],[1,4,6,8]]
\end{array}
$$

E assim podemos definir a função glevels de forma mais elegante:

$$
glevels1 = [nil, cons \cdot (singl \times \widehat{concatCondicional})]
$$

Solução 2: anamorfismo

Motivação: limitações da solução por catamorfismo

A solução anterior baseada em *levels* funciona corretamente, mas tem uma ineficiência: constrói toda a estrutura de níveis $[[A]]$ para depois a concatenar. Para árvores grandes, isto consome memória desnecessária.

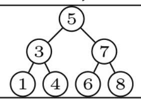
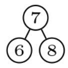
Idealmente, gostaríamos de gerar diretamente a lista final $[A]$ sem construir a estrutura intermédia. Isto sugere o uso de um **anamorfismo**.

Intuição: processamento por níveis com uma fila

Para fazer uma travessia *breadth-first*, o algoritmo clássico usa uma fila (queue), tal como sugerido no artigo [2]. Pensámos inicialmente num algoritmo iterativo que funciona da seguinte forma:

1. Inicializamos a fila com a árvore argumento
2. Repetidamente:
   - Retiramos uma árvore da frente da fila
   - Se for $Empty$, ignoramos
   - Se for $Node\ (a,(l,r))$, emitimos a e adicionamos l e r ao fim da fila
3. Paramos quando a fila fica vazia

Exemplo ilustrativo: Para a árvore t_1 o processamento da fila procede da seguinte forma:

Fila (Queue)	Saída	Ação
	[]	Inicia
	[5]	Processa 5
 1 4	[5,3]	Processa 3
1 4 6 8	[5,3,7]	Processa 7
4 6 8	[5,3,7,1]	Processa 1
6 8	[5,3,7,1,4]	Processa 4
8	[5,3,7,1,4,6]	Processa 6
	[5,3,7,1,4,6,8]	Termina

Nota: Ocultam-se os *Empty*s para simplificar a ilustração.

Do algoritmo iterativo ao anamorfismo

O algoritmo acima é iterativo e gera uma lista progressivamente, processando primeiro os nós de nível n antes dos de nível $n+1$. Esta estrutura corresponde precisamente a um anamorfismo de listas, que constrói uma lista a partir de um estado através de um gene $g :: B \to 1 + A \times B$.

O gene recebe um estado B e devolve $i_1\ ()$ quando não há mais elementos (terminação), ou $i_2\ (a, b')$ onde a é o próximo elemento a emitir e b' é o novo estado. No nosso caso, o estado será a fila $[BTree\ A]$ que contém as árvores ainda por processar.

Representemos o anamorfismo através do seguinte diagrama:

$$\begin{tikzcd}
[BTree\ A] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "[\![g]\!]"'] & 1 + A \times [BTree\ A] \arrow[d, "id + id \times [\![g]\!]"] \\
[A] & 1 + A \times [A] \arrow[l, "\mathsf{in}_{List}"]
\end{tikzcd}$$

O gene $g :: [BTree\ A] \to 1 + A \times [BTree\ A]$ deve inspecionar a fila e decidir o que fazer. Caso esta esteja vazia, termina devolvendo $i_1\ ()$; caso contrário, retira a primeira árvore, emite a sua raiz e adiciona os filhos ao fim da fila. No entanto, se a árvore for *Empty*, deve ser ignorada e o gene deve processar o restante da fila recursivamente.

Podemos expressar isto de forma simples:

$$\begin{array}{l}
g' :: [BTree\ a] \to () + (a, [BTree\ a]) \\
g'\ [\,] = i_1\ () \\
g'\ (Empty : queue) = g'\ queue \\
g'\ (Node\ (a, (l, r)) : queue) = i_2\ (a, queue +\!\!+ [l, r])
\end{array}$$

A função *bft* inicia o processo com uma fila contendo apenas a árvore argumento, aplicando depois o anamorfismo com o gene g':

$$bft = [\![g']\!] \cdot singl$$

Problema 2

Parta-se da definição matemática da série de Taylor do seno hiperbólico:

$$sinh\ x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

A aproximação de $sinh\ x$ com n termos da série será dada por:

$$sinh\ x\ n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$$

Definição recursiva direta

Podemos definir $sinh\ x\ n$ recursivamente como:

$$sinh\ x\ n = \begin{cases} x & \text{se } n = 0 \\ \frac{x^{2(n-1)+1}}{(2(n-1)+1)!} + sinh\ x\ (n-1) & \text{se } n > 0 \end{cases} \tag{7}$$

No entanto, esta definição é ineficiente, pois cada termo envolve o cálculo de potências e fatoriais.

Descoberta de uma definição eficiente por recursividade mútua

Podemos escrever a soma como uma recursão simples:

$$s\ x\ n = \begin{cases} x & \text{se } n = 0 \\ s\ x\ (n-1) + \frac{h\ x\ (n-1)}{k\ x\ (n-1)} & \text{se } n > 0 \end{cases} \tag{8}$$

onde $s\ x\ n$ é a soma dos primeiros $n+1$ termos, $h\ x\ n$ é o numerador do termo n e $k\ x\ n$ é o denominador do termo n.

Descoberta de h por recursividade mútua

Observando que cada termo tem a forma $\frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}$, procuramos uma relação de recorrência para o numerador h.

Para o termo na posição n, o numerador é x^{2n+1}, e para o termo na posição $n+1$, o numerador é $x^{2(n+1)+1} = x^{2n+3}$.

A relação entre numeradores consecutivos é:

$$h_{n+1} = x^{2n+3} = x^{2n+1} \cdot x^2 = h_n \cdot x^2$$

Portanto, o numerador do próximo termo é x^2 vezes o numerador do termo atual. Assim:

$$h\ x\ n = \begin{cases} x^3 & \text{se } n = 1 \\ x^2 \cdot h\ x\ (n-1) & \text{se } n > 1 \end{cases} \tag{9}$$

Descoberta de k por recursividade mútua (2ª iteração)

Calculemos a relação de recorrência para o denominador k. O denominador do termo na posição n considerando que este começa em $n = 1$ é $(2n + 3)!$. Para o termo na posição $n + 1$, o denominador é $(2(n + 1) + 3)! = (2n + 5)!$. A relação entre denominadores consecutivos é:

$$\frac{k_{n+1}}{k_n} = \frac{(2n+5)!}{(2n+3)!} = (2n+5)(2n+4)$$

Portanto, o denominador do próximo termo é $(2n+5)(2n+4)$ vezes o denominador do termo atual.

Para o caso base $n = 1$, temos $k\ x\ 1 = 3! = 6$. Assim:

$$k\ x\ n = \begin{cases} 6 & \text{se } n = 1 \\ k\ x\ n \cdot (2n+5)(2n+4) & \text{se } n > 1 \end{cases} \tag{10}$$

Aplicar-se-á a lei de recursividade mútua novamente para obter uma definição de k que não dependa de n diretamente.

Descoberta de j por recursividade mútua (3ª iteração)

Introduzamos uma nova função $j\ x\ n = (2\ n + 5)\ (2\ n + 4)$ para simplificar a expressão de k.

Teremos uma relação entre termos consecutivos de j de:

$$j_{n+1} - j_n = (2(n+1)+5)(2(n+1)+4) - (2n+5)(2n+4) = 4n^2 + 26n + 42 - 4n^2 - 18n - 20 = 8n + 22$$

No caso base $n = 0$, temos $j\ x\ 0 = (2 * 0 + 5)\ (2 * 0 + 4) = 20$.

Portanto, podemos definir j como:

$$j\ x\ n = \begin{cases} 20 & \text{se } n = 0 \\ j\ x\ n + 8n + 22 & \text{se } n > 0 \end{cases} \tag{11}$$

Descoberta de m por recursividade mútua (4ª iteração)

Para simplificar ainda mais, introduzimos $m\ x\ n = 8\ n + 22$.

Temos então a relação entre termos consecutivos de m de:

$$m_{n+1} - m_n = 8(n+1) + 22 - (8n + 22) = 8$$

No caso base $n = 0$, temos $m\ x\ 0 = 8 * 0 + 22 = 22$.

Portanto, podemos definir m como:

$$m\ x\ n = \begin{cases} 22 & \text{se } n = 0 \\ m\ x\ n + 8 & \text{se } n > 0 \end{cases} \tag{12}$$

Tendo chegado a um ponto onde m é uma função linear simples, podemos agora expressar todas as funções em termos de recursividade mútua.

Sistema final de recursividade mútua

Reunindo todas as definições recursivas obtidas:

$$\begin{aligned}
s\ x\ n &= \begin{cases} x & \text{se } n = 0 \\ s\ x\ (n-1) + \frac{h\ x\ (n-1)}{k\ x\ (n-1)} & \text{se } n > 0 \end{cases} \\
h\ x\ n &= \begin{cases} x^3 & \text{se } n = 1 \\ x^2 \cdot h\ x\ (n-1) & \text{se } n > 1 \end{cases} \\
k\ x\ n &= \begin{cases} 6 & \text{se } n = 1 \\ k\ x\ (n-1) \cdot j\ x\ (n-1) & \text{se } n > 1 \end{cases} \\
j\ x\ n &= \begin{cases} 20 & \text{se } n = 0 \\ j\ x\ (n-1) + m\ x\ (n-1) & \text{se } n > 0 \end{cases} \\
m\ x\ n &= \begin{cases} 22 & \text{se } n = 0 \\ m\ x\ (n-1) + 8 & \text{se } n > 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Pela lei de recursividade mútua, este sistema pode ser expresso como:

$$(s, h, k, j, m) = \text{for } (\text{loop } x)\ (\text{start } x)$$

onde *start* x representa os valores iniciais e *loop* x representa a função de transição.

Para determinar *start* x e *loop* x, observemos que a função for $\cdot\ \cdot$ itera n vezes, começando do estado inicial e aplicando repetidamente a função *loop*.

Os valores iniciais correspondem a $n = 0$:

$$\text{start } x = (x, x^3, 6, 20, 22)$$

A função *loop* x transforma o estado (s, h, k, j, m) no próximo estado, incrementando implicitamente n:

$$\text{loop } x\ (s, h, k, j, m) = (s + \frac{h}{k}, x^2 \cdot h, k \cdot j, j + m, m + 8)$$

Finalmente, a função *sinh* $x\ n$ corresponde à primeira componente do estado após n iterações:

$$\text{sinh } x\ n = \pi_1 \cdot \text{for } (\text{loop } x)\ (\text{start } x)\ n$$

ou, usando *head* para extrair a primeira componente:

$$\text{sinh}\ x\ n = \text{head} \cdot \text{for}\ (\text{loop}\ x)\ (\text{start}\ x)\ n$$

Esta é precisamente a estrutura da função $f\ x\ n$ fornecida no enunciado, provando que $f\ x\ n$ calcula o seno hiperbólico de x com n aproximações da série de Taylor.

Transpondo para o código Haskell obtemos:

```
sinh :: Floating a => a -> Int -> a
sinh x n = p1 . for (loop x) (start x) $ n
     where
          start x = (x, x^3, 6, 20, 22)
          loop x (s, h, k, j, m) =
               (s + h / k, x^2 * h, k * j, j + m, m + 8)
```

Com pequenos ajustes, modificando os tuplos para listas e usando funções auxiliares, obtemos a definição final de *sinh* igual à fornecida no enunciado.

$$\begin{aligned}
&s :: Floating\ a \Rightarrow a \rightarrow Int \rightarrow a\\
&s\ x\ n = head \cdot \text{for}\ loop\ x\ start\ x\ \$\ n\\
&\quad \textbf{where}\\
&\qquad start\ x = [x, x \uparrow 3, 6, 20, 22]\\
&\qquad loop\ x\ [s, h, k, j, m] = [s + h\ /\ k, x \uparrow 2 * h, k * j, j + m, m + 8]
\end{aligned}$$

Comparação de eficiências

A definição recursiva direta de *sinh x n* é ineficiente devido ao cálculo repetido de potências e fatoriais, resultando em complexidade exponencial.

A definição por recursividade mútua é muito mais eficiente, com complexidade linear O(n), pois cada termo é calculado a partir do anterior usando multiplicações simples.

Para comprovar empiricamente a diferença de eficiências, podemos medir o tempo de execução de ambas as implementações para um valor fixo de x e um número elevado de termos n.

Dada a definiçao direta de *sinh_direct*:

$$\begin{aligned}
&sinh_direct :: Floating\ a \Rightarrow a \rightarrow Int \rightarrow a\\
&sinh_direct\ x\ 0 = x\\
&sinh_direct\ x\ n =\\
&\quad \textbf{let}\ exponent = 2 * (n - 1) + 1\\
&\qquad numerador = x \uparrow exponent\\
&\qquad denominador = fromIntegral\ (factorial\ (fromIntegral\ exponent))\\
&\quad \textbf{in}\ sinh_direct\ x\ (n - 1) + numerador\ /\ denominador\\
&factorial :: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}\\
&factorial\ 0 = 1\\
&factorial\ n = n * factorial\ (n - 1)
\end{aligned}$$

E a função de medição de tempo:

$$\begin{aligned}
&measure :: String \rightarrow Double \rightarrow \text{IO}\ Double\\
&measure\ label\ expr = \textbf{do}\\
&\quad start \leftarrow getCPUTime
\end{aligned}$$

```
    expr `deepseq` return ()
    end ← getCPUTime
    let t = fromIntegral (end − start) / 1e12
    putStrLn (label ++ " levou " ++ show t ++ " s")
    return expr
```

Podemos então definir os testes:

```
test1 :: IO Double
test1 = measure "sinh_direct" $
    sum [sinh_direct 1.2 50 | _ ← [1 .. 1000]]

test2 :: IO Double
test2 = measure "s" $
    sum [s 1.2 50 | _ ← [1 .. 1000]]
```

Aos quais temos o seguinte resultado esperado:

```
ghci> test1
sinh_direct levou 0.993274742 s
2709.4613554122184
ghci> test2
s levou 0.16554923 s
1509.4613554121977
```

Comprovando, assim, a superior eficiência da definição por recursividade mútua.

Problema 3

Análise do problema

O objetivo é fundir duas listas ordenadas em uma única lista ordenada, de forma justa, ou seja, intercalando os elementos das duas listas sempre que possível.

Derivação da lei dual da recursividade mútua

Comece-se por provar a lei dual da recursividade mútua (de Fokkinga), que nos permitirá definir a função *fair_merge′* como um anamorfismo de listas. Esta lei relaciona funções mutuamente recursivas com anamorfismos.

Sejam $f :: A \to F\ B$ e $g :: A \to F\ C$ duas funções mutuamente recursivas, onde F é um functor, e $[f, g] :: A \to F\ (B + C)$ a função que combina f e g. Sejam $h :: D \to B$ e $k :: D \to C$ duas funções tais que:

$$[f, g] = [\!(\ [h, k]\ )\!] \tag{13}$$

Então, as seguintes equações são satisfeitas:

$$
\begin{aligned}
[f,g] = [\![[h,k]]\!] &\equiv (\textit{universal property of ana}) \\
out \cdot [f,g] = \mathsf{F}\,[f,g] \cdot [h,k] &\equiv (\textit{coproduct fusion } x2) \\
[out \cdot f, out \cdot g] = [\mathsf{F}\,[f,g] \cdot h, \mathsf{F}\,[f,g] \cdot k] &\equiv (\textit{coproduct equals law}) \\
\begin{cases} out \cdot f = \mathsf{F}\,[f,g] \cdot h \\ out \cdot g = \mathsf{F}\,[f,g] \cdot k \end{cases}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Provou-se, assim, a lei dual da recursividade mútua.

Aplicação da lei dual ao *fair-merge*

Considere-se o tipo de streams definido no enunciado:

$$\textbf{data}\ Stream\ a = Cons\ (a, Stream\ a)$$

E o respetivo destrutor:

$$
\begin{aligned}
&out :: Stream\ a \to (a, Stream\ a) \\
&out\ (Cons\ (x, xs)) = (x, xs)
\end{aligned}
$$

O functor associado a este tipo é, portanto:

$$F\ S = A \times S$$

Isto representa que cada elemento de um stream é um par composto por um valor do tipo arbitrário A (que representa o tipo dos elementos do stream) e o restante da estrutura do stream.

Pretende-se definir a função

$$fair\_merge :: (Stream\ a, Stream\ a) \to Stream\ a$$

como um anamorfismo.

Dada a definição mutuamente recursiva de *fair_merge*:

$$
\begin{aligned}
&fair\_merge = [h, k] \\
&\quad \textbf{where} \\
&\qquad h\ (Cons\ (x, xs), y) = Cons\ (x, k\ (xs, y)) \\
&\qquad k\ (x, Cons\ (y, ys)) = Cons\ (y, h\ (x, ys))
\end{aligned}
$$

Aplicando a lei dual da recursividade mútua, provada anteriormente (equação 14), tem-se que:

$$[h,k] = [\![g]\!] \tag{15}$$

se, e só se, se verificarem as equações:

$$
\begin{cases} out \cdot h = F[h,k] \cdot g_L \\ out \cdot k = F[h,k] \cdot g_R \end{cases}
$$

onde $g = [g_L, g_R]$.

Como $F\ X = A \times X$, tem-se:

$$F\ [h, k] = id \times [h, k]$$

Assim, definem-se as componentes do gene do anamorfismo, g, da seguinte forma:

$$g_L(Cons(x, xs), y) = (x,\ Right(xs, y))$$
$$g_R(x, Cons(y, ys)) = (y,\ Left(x, ys))$$

Verifica-se então que:

$$\begin{aligned} out \cdot h(Cons(x, xs), y) &= (x,\ k(xs, y)) \\ &= (id \times [h, k])(x,\ Right(xs, y)) \\ &= F[h, k] \cdot g_L(Cons(x, xs), y) \end{aligned}$$

De forma análoga:

$$\begin{aligned} out \cdot k(x, Cons(y, ys)) &= (y,\ h(x, ys)) \\ &= (id \times [h, k])(y,\ Left(x, ys)) \\ &= F[h, k] \cdot g_R(x, Cons(y, ys)) \end{aligned}$$

Logo, ambas as equações da lei dual são satisfeitas.

Síntese: Transformação em anamorfismo

Tendo provado que o gene satisfaz as equações da lei dual de Fokkinga (equações acima), pela propriedade universal do anamorfismo, podemos agora expressar *fair_merge* diretamente como:

$$fair\_merge' = [\![g]\!]$$

onde $g = [g\_L, g\_R]$ com as componentes já derivadas anteriormente. Escrevendo g de forma explícita e única, obtem-se a definição final do gene com:

$$g :: (Stream\ a, Stream\ a) + (Stream\ a, Stream\ a) \to (a, (Stream\ a, Stream\ a) + (Stream\ a, Stream\ a))$$
$$g\ (i_1\ (Cons\ (x, xs), y)) = (x, i_2\ (xs, y))$$
$$g\ (i_2\ (x, Cons\ (y, ys))) = (y, i_1\ (x, ys))$$

A definição obtida caracteriza *fair_merge* como um processo iterativo infinito, no qual cada passo: (i) seleciona o próximo elemento de uma das streams, (ii) alterna a stream ativa, e (iii) continua o processo a partir do novo par de streams.

Esta abordagem evita a utilização de recursão explícita, tornando evidente o caráter justo da fusão das duas streams.

Problema 4

Queremos descobrir a probabilidade da frase que abaixo se apresenta ser gerada por um processo probabilístico que pode parar a qualquer momento, emitindo a palavra "stop", ou continuar a emitir palavras da frase original com alta probabilidade.

$$frase = [\texttt{"Vamos"}, \texttt{"atacar"}, \texttt{"hoje"}]$$

Para modelar este processo, utilizamos o mónade de distribuições de probabilidade Dist, que nos permite representar escolhas probabilísticas de forma elegante.

Define-se, primeiramente, um catamorfismo probabilístco, pcataList, que processa a lista de palavras e aplica uma função gene, g, que determina as probabilidades de parar ou continuar a geração da frase. Este usa a notação **do**, que facilita a manipulação de ações monádicas. Na sua essência, a operação executada por pcataList, descreve-se como:

$$
\begin{aligned}
&\mathit{pcataList}\ g\ [\,] = g\ (i_1\ ())\\
&\mathit{pcataList}\ g\ (x : xs) = \mathbf{do}\ \{y \leftarrow \mathit{pcataList}\ g\ xs; g\ (i_2\ (x, y))\}
\end{aligned}
$$

Interpretação probabilística e origem de `pcataList`

Seja `M` um mónade, com operações `return` e »= (bind). Define-se o *operador monádico* (também designado por composição de Kleisli) por:

$$f \bullet g = \lambda x \rightarrow g\ x \ggg\!= f$$

Este operador permite compor funções que produzem efeitos monádicos, encadeando corretamente esses efeitos.

No caso do mónade das distribuições de probabilidade `Dist`, o operador • corresponde à combinação sequencial de escolhas aleatórias, propagando as probabilidades dos resultados.

Considere-se agora a definição recursiva de `pcataList`:

$$\mathit{pcataList}\ g\ (x : xs) = \mathit{pcataList}\ g\ xs \ggg\!= (\lambda y \rightarrow g\ (i_2\ (x, y)))$$

Usando a definição do operador monádico, esta expressão pode ser reescrita como:

$$\mathit{pcataList}\ g\ (x : xs) = \lambda y \rightarrow g\ (i_2\ (x, y)) \bullet \mathit{pcataList}\ g\ xs$$

Esta forma mostra que `pcataList` é construída exclusivamente através de composições monádicas, sem recorrer a recursão explícita sobre efeitos.

Origem da definição de `pcataList`

A função `pcataList` processa uma lista da direita para a esquerda, combinando os efeitos monádicos produzidos pelo gene g.

O gene:

$$g :: \mathit{Either}()(a, b) \rightarrow \mathit{Dist}\, b$$

descreve o comportamento local do processo:

- quando recebe `Left ()`, decide probabilisticamente se o processo termina imediatamente;
- quando recebe `Right (x,y)`, decide se o processo continua, incorporando a palavra x, ou se termina nesse ponto.

Em cada passo, o resultado probabilístico da cauda da lista é combinado com o efeito descrito por g usando o operador monádico •. Este encadeamento garante que todas as probabilidades são corretamente propagadas.

Interpretação probabilística

A expressão:

$$(\lambda y \to g(\text{Right}(x,y))) \bullet pcataList\ g\ xs$$

significa que:

1. primeiro se gera, de forma probabilística, o resultado associado à cauda da lista;
2. para cada resultado possível, se aplica o gene g;
3. as distribuições resultantes são combinadas segundo as leis da Mónade `Dist`.

Assim, `pcataList` modela um processo probabilístico que pode interromper a geração da frase a qualquer momento, mas que respeita a estrutura da lista e a semântica dos mónades.

Construção do gene a partir de distribuições explícitas

A função gene descreve o comportamento local do processo probabilístico responsável pela geração da frase. Em cada passo, o processo pode parar ou continuar, de acordo com probabilidades previamente definidas.

O tipo de gene é:

$$gene :: () + (String, [String]) \to \mathsf{Dist}\ [String]$$

Para justificar a sua definição, começa-se por descrever explicitamente as distribuições de probabilidade pretendidas em cada caso.

Caso base: distribuição explícita

No caso base, correspondente ao valor `Left ()`, pretende-se modelar a possibilidade de o processo terminar imediatamente.

Define-se a distribuição de probabilidade pretendida como:

Resultado	Probabilidade
$[\text{"}stop\text{"}]$	0.9
	0.1

Esta distribuição indica que, com elevada probabilidade, o processo termina e emite a palavra `"stop"`, mas que existe ainda uma pequena probabilidade de não emitir nenhuma palavra.

Em termos da Mónade `Dist`, esta distribuição poderia ser representada explicitamente como:

$$[(0.9, [\text{"}stop\text{"}]), (0.1, [])]$$

No entanto, para maior clareza e concisão, esta distribuição é encapsulada através do combinador:

$$choose\ p\ x\ y$$

que representa uma escolha probabilística entre os valores x e y, com probabilidade p e $1-p$, respetivamente.

Assim, a distribuição anterior pode ser escrita como:

$$g_1() = choose\ 0.9\ [\text{"}stop\text{"}]\ []$$

Caso recursivo: distribuição explícita

No caso recursivo, correspondente ao valor `Right (w,rest)`, pretende-se decidir se a palavra atual w é incluída na frase gerada ou se o processo termina nesse ponto.

A distribuição desejada é:

Resultado	Probabilidade
$w : rest$	0.95
$rest$	0.05

Esta distribuição traduz a ideia de que o processo tende a continuar, mas pode parar com pequena probabilidade.

De forma explícita, esta distribuição seria:

$$[(0.95, w : rest), (0.05, rest)]$$

Tal como no caso base, esta distribuição é posteriormente expressa de forma mais compacta usando o combinador `choose`:

$$g_2(w, rest) = choose\ 0.95\ (w : rest)\ rest$$

Definição final do gene

Tendo definido separadamente os comportamentos probabilísticos dos dois casos, estes são combinados utilizando a função `either`, obtendo-se a definição final de gene:

$gene :: () + (String, [String]) \rightarrow \mathsf{Dist}\ [String]$
$gene = [g1, g2]$
where
-- Caso Base: Parar a geração com a palavra 'stop'
$g1\ () = choose\ 0.9\ [\texttt{"stop"}]\ [\,]$
$g2\ (w, rest) = choose\ 0.95\ (w : rest)\ rest$

Cálculo da probabilidade da frase

Aplicando o gene definido anteriormente à frase e usando a definição de `transmitir` do enunciado, obtém-se:

$$resultado = transmitir\ frase$$

A variável `resultado` conterá a distribuição de probabilidade associada a todas as frases possíveis geradas pelo processo.

Correndo o código, obtém-se as probabilidades associadas a cada frase:

`["Vamos","atacar","hoje","stop"]`	77.2%
`["Vamos","atacar","hoje"]`	8.6%
`["Vamos","atacar","stop"]`	4.1%
`["Vamos","hoje","stop"]`	4.1%
`["atacar","hoje","stop"]`	4.1%
`["Vamos","atacar"]`	0.5%
`["Vamos","hoje"]`	0.5%
`["atacar","hoje"]`	0.5%
`["Vamos","stop"]`	0.2%
`["atacar","stop"]`	0.2%
`["hoje","stop"]`	0.2%
`["atacar"]`	0.0%
`["hoje"]`	0.0%
`["Vamos"]`	0.0%
`["stop"]`	0.0%
`[]`	0.0%

Portanto, respondendo às questões iniciais:

- A probabilidade de a palavra `"atacar"` se perder é de $\mathbf{4.1}\%$
- A probabilidade de seguirem todas as palavras, mas faltar o `"stop"` é de $\mathbf{8.6}\%$
- A probabilidade de transmissão perfeita é de $\mathbf{77.2}\%$

Comprovação dos resultados

Para comprovar os resultados obtidos, calculemos a probabilidade de cada perda ou sucesso unitário de forma manual. Temos que:

- $P(\text{perder palavra}) = 0.05\,\%$
- $P(\text{transmitir palavra}) = 1 - P(\text{perder palavra}) = 0.95\,\%$
- $P(\text{não enviar stop}) = 0.1\,\%$
- $P(\text{enviar stop}) = 1 - P(\text{não enviar stop}) = 0.9\,\%$

Calculamos agora as probabilidades dos eventos pedidos:

- **Probabilidade de "atacar" se perder**:

$$\begin{aligned}P(\text{"atacar" se perder}) &= P(\text{transmitir "Vamos"}) \times P(\text{perder "atacar"}) \\ &\times P(\text{transmitir "hoje"}) \times P(\text{enviar stop}) \\ &= 0.95 \times 0.05 \times 0.95 \times 0.9 = 0.0406125 \approx 4.1\%\end{aligned}$$

- **Probabilidade de faltar "stop"**:

$$\begin{aligned}P(\text{faltar "stop"}) &= P(\text{transmitir "Vamos"}) \times P(\text{transmitir "atacar"}) \\ &\times P(\text{transmitir "hoje"}) \times P(\text{não enviar stop}) \\ &= 0.95 \times 0.95 \times 0.95 \times 0.1 = 0.0857375 \approx 8.6\%\end{aligned}$$

- **Probabilidade de transmissão perfeita**:

$$\begin{aligned}P(\text{transmissão perfeita}) &= P(\text{transmitir "Vamos"}) \times P(\text{transmitir "atacar"}) \\ &\times P(\text{transmitir "hoje"}) \times P(\text{enviar stop}) \\ &= 0.95 \times 0.95 \times 0.95 \times 0.9 = 0.7716375 \approx 77.2\%\end{aligned}$$

Index

LaTeX, 5, 6
  bibtex, 6
  lhs2TeX, 5, 6
  makeindex, 6
  pdflatex, 5
  xymatrix, 7

Combinador "pointfree"
  ana, 3
  cata
    Naturais, 7
  either, 3, 4
  split, 6
Cálculo de Programas, 1, 4
  Material Pedagógico, 5
    List.hs, 4

Docker, 5
  container, 5, 6

Functor, 3, 7, 8
Função
  π_1, 7
  π_2, 7

Haskell, 1, 5, 6
  Biblioteca
    PFP, 8
    Probability, 7, 8
  interpretador
    GHCi, 5–7
  Lazy evaluation, 3
  Literate Haskell, 5

Números naturais ($\mathbb{N}$), 7

Programação
  literária, 5, 6

References

[1] D.E. Knuth. *Literate Programming*. CSLI Lecture Notes Number 27. Stanford University Center for the Study of Language and Information, Stanford, CA, USA, 1992.

[2] Chris Okasaki. Breadth-first numbering: lessons from a small exercise in algorithm design. In Martin Odersky and Philip Wadler, editors, *Proceedings of the Fifth ACM SIGPLAN International Conference on Functional Programming (ICFP '00), Montreal, Canada, September 18-21, 2000*, pages 131–136. ACM, 2000.

[3] J.N. Oliveira. Program Design by Calculation, 2024. Draft of textbook in preparation. First version: 1998. Current version: Sep. 2024. Informatics Department, University of Minho (pdf).