Chapitre I : Algèbre – Identités remarquables

I. Rappels : Expressions littérales

Une expression littérale est une expression qui contient des lettres.

Exemple :
- $3x + 5$
- $7a - 2b$
- $2(c + 4)$

Les lettres représentent des nombres qui sont appelés variables.

On peut appliquer les mêmes opérations qu'avec les nombres.

Exemples :
- $x + x = 2x$
- $x - x = 0$
- $x + 0 = x$
- $x \times x = x^2$
- $x \div x = 1$ pour $x \neq 0$
- $x \times 1 = x$

II. Rappels : Développement

Développer signifie enlever les parenthèses en utilisant la distributivité.

Propriété (distributivité) : Pour tous nombres relatifs a, b et k, on a l'égalité suivante.

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

Exemples :
- $2(x + 3) = 2 \times x + 2 \times 3 = 2x + 6$
- $-4(2x - 5) = (-4) \times 2x + (-4) \times (-5) = -8x + 20$

Exercice : Développez les expressions suivantes.

a. $2(3x - 5)$
b. $5x(3 - y)$
c. $4(x + 7)$
d. $3(2x - 1 + 5y)$

III. Rappels : Factorisation

La factorisation est l'opération inverse du développement.

Exemples :
- $2x + 6 = 2 \times x + 2 \times 3 = 2(x + 3)$

- $-8x + 20 \quad = (-4) \times 2x + (-4) \times (-5) \qquad = -4(2x - 5)$

Exercice : Factorisez les expressions suivantes

a. $2x + 10$
b. $x - 10x^2$
c. $21y - 15$
d. $8x + 4 + 2y$

La factorisation permet de construire des règles de calcul sur les expressions littérales.

Propriété : Lorsque l'on veut simplifier une somme contenant plusieurs variables, par exemple :

$$S = 1 - 7x + y + x^2 + 2 + 3x - 5x^2 - 6 + 2y$$

1. On commence par rassembler les termes qui ont (strictement) la même variable en séparant aussi les variables de leur puissance. Pour S :
$$S = \left[1 + 2 - 6\right] + \left[-7x + 3x\right] + \left[x^2 - 5x^2\right] + \left[y + 2y\right]$$
La première parenthèse comprend les termes sans variable, la seconde les termes en x, la troisième en x^2 et le dernier ceux en y.
2. Puis, on peut effectuer le calcul dans la première parenthèse qui ne contient pas de variable et effectuer une factorisation sur chacune des parenthèses suivantes. Pour S :
$$S = \left[-3\right] + x \times \left[-7 + 3\right] + x^2 \times [1 - 5] + y\left[1 + 2\right]$$
3. Il ne reste plus qu'à effectuer les calculs entre parenthèses et enlever les parenthèses inutiles avec la règle des signes. Pour S :
$$S = (-3) + x \times (-4) + x^2 \times (-4) + 3y$$
$$S = -3 - 4x - 4x^2 + 3y$$

Exercice : Simplifiez les expressions suivantes.

a. $4x + 8x + 7$
b. $3y + 1 - 7y + y^2 - 3 - 2y^2$
c. $3x - 2y + yx - y + 2xy - x$
d. $3(x + 1) - 2x + 1$

IV. Rappels : Double-développement

Propriété : Dans la formule du développement, on peut remplacer k par $(c + d)$ et obtenir une nouvelle égalité, celle du double-développement. Pour tous nombres a, b, c et d, on a l'égalité

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Exemple :

$(x + 2)(x + 5) \quad = x\times x + x\times 5 + 2\times x + 2\times 5$

$= x^2 + 5x + 2x + 10$

$= x^2 + 7x + 10$

Exercice : Développez et réduisez les expressions suivantes.

a. $(x + 4)(x + 7)$
b. $(2x - 3)(x - 5)$
c. $(x + 1)(x - 1)$
d. $(3x + 2)(x + 5)$

V. Identités remarquables

Le double développement s'effectue mécaniquement, mais son inverse la “double factorisation” elle est plus difficile à effectuer. Nous nous contenterons donc de voir un cas particulier : les identités remarquables.

Propriété : Soit a et b deux nombres. On a les trois égalités suivantes :

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Ses égalités sont appelées les *identités remarquables* et permettent des doubles développements (de gauche à droite) et des doubles factorisations (de droite à gauche) très facilement.

Exemples :

- $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ ici $a = x, b = 1$ et on utilise la 3ème égalité.
- $9x^2 - 12x + 4 = (3x - 1)^2$ ici $a = 3x, b = 2$ et on utilise la 2ème égalité.
- $(x + 7)^2 = x^2 + 14x + 49$ ici $a = x, b = 7$ et on utilise la 1erè égalité.

Exercice :

1. Développez en utilisant les identités remarquables.
   a. $(x + 5)^2$
   b. $(2x - 1)^2$
   c. $(3x - 4)(3x + 4)$
2. Factorisez en utilisant les identités remarquables.
   a. $x^2 + 6x + 9x^2$
   b. $9x^2 - 16$
   c. $x^2 - 14x + 49$