Chapitre II : Les fractions

Au Moyen Âge, les fractions étaient surtout utilisées pour …le calcul des impôts et les partages de récoltes.
Certaines taxes étaient d’un “quart” ou d’un “dixième”, ce qui a forcé les scribes à manipuler les fractions plus souvent que les marchands !
Un paysan devait donner un quart de sa récolte au seigneur, ou parfois un dixième à l’Église.

- Si le paysan récoltait 120 sacs de blé, il devait en donner un quart :
  $120 \div 4 = 30$ sacs.

- Ou bien, si la taxe était la dîme, il devait donner un dixième :
  $120 \div 10 = 12$ sacs.

Les scribes, les collecteurs d’impôts et les paysans devaient donc être capables de compter en parts égales : partager par 2, 3, 4, 10… bref, manipuler des fractions.

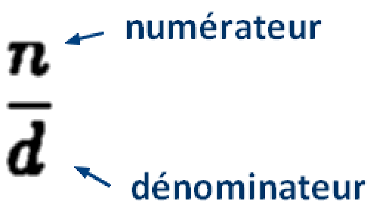
On trouve, dans certains registres seigneuriaux, des notes où les collecteurs se plaignent que les fractions compliquent les comptes quand la récolte n’est pas “pile divisible”.
Par exemple, si un paysan devait 1/10 d’un troupeau de 7 moutons, il fallait partager un mouton (ce qui n’était pas pratique) ou trouver un arrangement. Souvent, on réglait cela en ajoutant des poules ou du grains pour “compléter la fraction manquante”.

I. Définitions

Une **fraction** est une manière d’écrire une partie d’un tout.
On prend une unité (un objet, une quantité, une longueur…) et on la **partage en parts égales**.

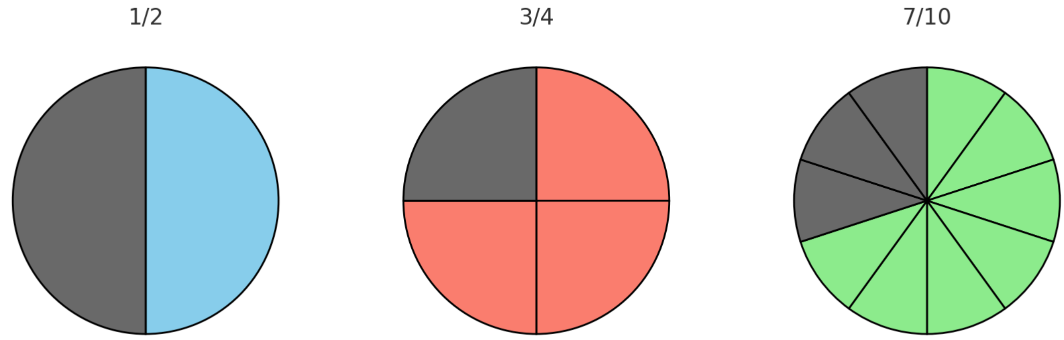
- Dans une fraction, le nombre **au-dessus de la barre** s’appelle le **numérateur** → il indique combien de parts on prend.

- Le nombre **au-dessous de la barre** s’appelle le **dénominateur** → il indique en combien de parts égales on partage l’unité.



Exemples :

- $\frac{1}{2}$: une unité partagée en **2 parts égales**, on en prend **1**.
- $\frac{3}{4}$: une unité partagée en **4 parts égales**, on en prend **3**.
- $\frac{7}{10}$: une unité partagée en **10 parts égales**, on en prend **7**.



II. Fractions égales

A toute fraction correspond un nombre appelé quotient de la fraction, obtenu en divisant le numérateur par le dénominateur.

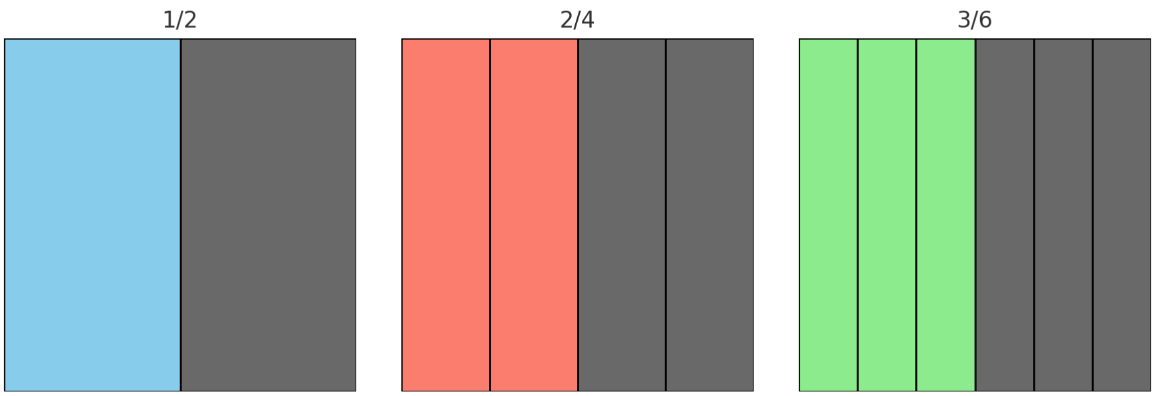
Exemple :

$$\frac{1}{2} = 1 \div 2 = 0,5$$

Mais plusieurs fractions peuvent avoir le même quotient, dans ce cas on dit que les deux fractions sont égales.

Exemple :

$\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{2}{4} = 0,5$; $\frac{3}{6} = 0,5$



On notera alors :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

Propriété : On peut multiplier et diviser par un même nombre différent de 0 le numérateur et le dénominateur d'une fraction, sans changer son quotient.

Exemple :

$$\frac{2}{5} = 2 \div 5 = 0,4$$

On peut alors multiplier le numérateur et le dénominateur par le nombre de notre choix, par exemple 3, sans changer la valeur de la fraction :

$$\frac{2\times3}{5\times3} = \frac{6}{15} = 6 \div 15 = 0,4$$

III.Lien avec l'arithmétique

Définition : On dit qu'un nombre entier $b \neq 0$ est un diviseur d'un nombre entier a, si $a \div b$ est un nombre entier.

Exemples :
- 5 est un diviseur de 100. Car $100 \div 5 = 20$.
- 3 est un diviseur de 9. Car $9 \div 3 = 3$.
- 2 n'est **pas** un diviseur de 13. Car $13 \div 2 = 6,5$.

Remarques : Tous les nombres sont divisible par 1

Définition : Une fraction est écrite sous la forme irréductible, si le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers dont le seul diviseur commun est 1.

Exemples :

● $\frac{8}{15}$ est une fraction irréductible.	Car les diviseurs de 8 sont : 1 ; 2 ; 4 et 8, Alors que les diviseurs de 15 sont 1 ; 3 ; 5 et 15.
● $\frac{2}{10}$ n'est pas une fraction irréductible.	Car les diviseurs de 2 sont : 1 et **2**, Alors que les diviseurs de 10 sont 1 ; **2** ; 5 et 10. Ils ont donc 2 comme diviseurs communs.

Méthode : *Rendre une fraction irréductible*

1. Lister les diviseurs du dénominateur et numérateur.

Exemple : $\frac{8}{24}$
Diviseurs de 8 : 1, 2, 4, 8
Diviseurs de 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

2. On cherche le plus grand diviseur commun.

Exemple : $\frac{8}{24}$
Dans notre exemple c'est 8 !

3. On divise le numérateur et le dénominateur par le plus grand diviseur commun. On obtient ainsi la forme irréductible de notre fraction.

Exemple : $\frac{8}{24}$

$$8 \div 8 = 1 \text{ et } 24 \div 8 = 3$$

Donc la forme irréductible de $\frac{8}{24}$ est $\frac{1}{3}$.

III.Addition et soustraction de fractions

Règles :

- On peut effectuer l'addition ou la soustraction de deux fractions qui ont **le même dénominateur,** en additionnant/soustrayant seulement les numérateurs.
- Si les dénominateurs sont différents, il faut **mettre les fractions au même dénominateur** avant d'additionner/soustraire.

Exemples :

- Cas simple : les dénominateurs sont les mêmes.
$$\frac{5}{8} + \frac{4}{8} = \frac{5+4}{8} = \frac{9}{8}$$
- Cas plus difficile : les dénominateurs sont différents.
$$\frac{3}{7} + \frac{2}{21}$$
Ici on doit mettre les fractions sur les mêmes dénominateurs. On sait que $7 \times 3 = 21$, on va donc multiplier le numérateur et le dénominateur de la première fraction par 3.
$$\frac{3\times3}{3\times7} + \frac{2}{21} = \frac{9}{21} + \frac{2}{21}$$
On se retrouve ensuite dans le cas simple.
$$\frac{9}{21} + \frac{2}{21} = \frac{11}{21}$$

IV. Multiplication de fractions

Règle : Pour multiplier deux fractions entre elles, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\times c}{b\times d}$$

Exemple :

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{4\times3}{9\times2} = \frac{12}{18}$$