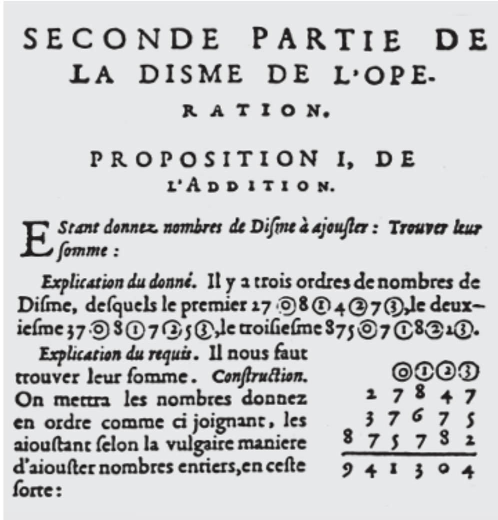
Chapitre II : Les fractions et la notion d'inverse

Au XVII^{e} siècle, avec le développement du commerce maritime, les marchands européens devaient souvent partager la cargaison de leurs navires en parts égales entre investisseurs.
C'est dans ce contexte que le mathématicien Simon Stevin (1548-1620), aux Pays-Bas, a popularisé l'usage des fractions décimales en Europe.
Son livre *La Disme* (1585) expliquait comment utiliser les fractions pour simplifier les calculs de partages et d'intérêts.

C'est grâce à lui que les fractions décimales (comme 0,25 pour un quart) se sont imposées dans la comptabilité et la science.


SECONDE PARTIE DE LA DISME DE L'OPERATION.

PROPOSITION I, DE L'ADDITION.

Estant donnez nombres de Disme à ajouster : Trouver leur somme :

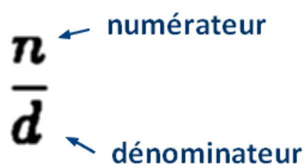
Explication du donné. Il y a trois ordres de nombres de Disme, desquels le premier 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, le deuxiesme 37 ⓪ 8 ① 7 ② 5 ③, le troisiesme 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur somme. *Construction.* On mettra les nombres donnez en ordre comme ci joignant, les aioustant selon la vulgaire maniere d'aiouster nombres entiers, en ceste sorte :

⓪ ① ② ③
2 7 8 4 7
3 7 6 7 5
8 7 5 7 8 2
9 4 1 3 0 4

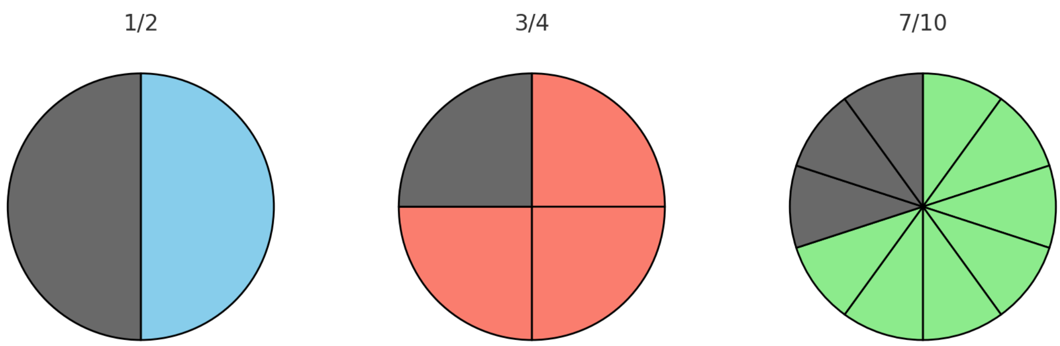
I. Définition et rappels

Dans une fraction, le nombre au-dessus de la barre s'appelle le numérateur, le nombre au-dessous de la barre s'appelle le dénominateur



Exemples :

- $\frac{1}{2}$: une unité partagée en **2 parts égales**, on en prend **1**.
- $\frac{3}{4}$: une unité partagée en **4 parts égales**, on en prend **3**.
- $\frac{7}{10}$: une unité partagée en **10 parts égales**, on en prend **7**.



A toute fraction correspond un nombre appelé quotient de la fraction, obtenu en divisant le numérateur par le dénominateur.

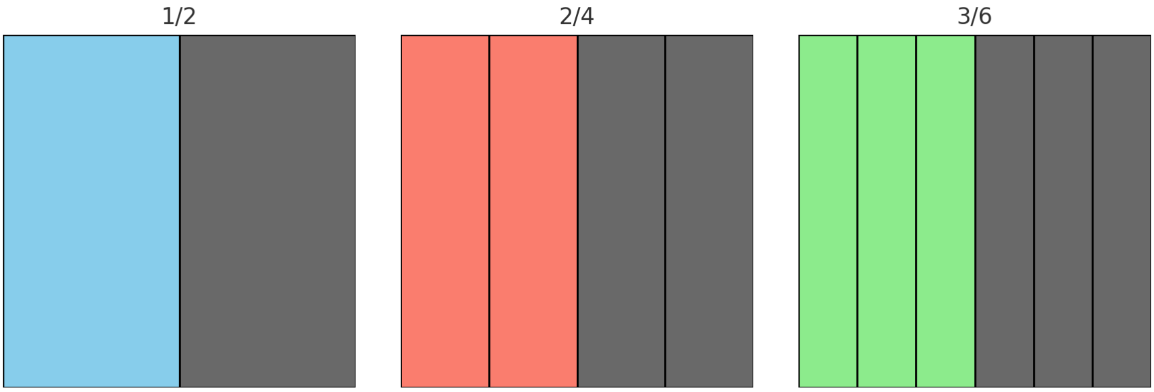
Exemple :

$$\frac{1}{2} = 1 \div 2 = 0,5$$

Mais plusieurs fractions peuvent avoir la même quotient, dans ce cas on dit que les deux fractions sont égales.

Exemples :

$\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{2}{4} = 0,5$; $\frac{3}{6} = 0,5$



On notera alors :

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

Propriété : On peut multiplier et diviser par un même nombre différent de 0 le numérateur et le dénominateur d'une fraction, sans changer son quotient.

Exemple :

$$\frac{2}{5} = 2 \div 5 = 0,4$$

On peut alors multiplier le numérateur et le dénominateur par le nombre de notre choix, par exemple 3, sans changer la valeur de la fraction :

$$\frac{2\times3}{5\times3} = \frac{6}{15} = 6 \div 15 = 0,4$$

II.Lien avec l'arithmétique

Définition : On dit qu'un nombre entier $b \neq 0$ est un diviseur d'un nombre entier a, si $a \div b$ est un nombre entier.

Exemples :

- 5 est un diviseur de 100. Car $100 \div 5 = 20$.
- 3 est un diviseur de 9. Car $9 \div 3 = 3$.
- 2 n'est **pas** un diviseur de 13. Car $13 \div 2 = 6,5$.

Remarque : Tous les nombres sont divisibles par 1

Définition : Une fraction est écrite sous la forme irréductible, si le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers dont le seul diviseur commun est 1.

Exemples :

• $\frac{8}{15}$ est une fraction irréductible.	Car les diviseurs de 8 sont : 1 ; 2 ; 4 et 8, Alors que les diviseurs de 15 sont 1 ; 3 ; 5 et 15.
• $\frac{2}{10}$ n'est pas une fraction irréductible.	Car les diviseurs de 2 sont : 1 et **2**, Alors que les diviseurs de 10 sont 1 ; **2** ; 5 et 10. Ils ont donc 2, comme diviseurs communs.

Méthode : *Rendre une fraction irréductible*

1. Lister les diviseurs du dénominateur et numérateur.

Exemple : $\frac{8}{24}$
Diviseurs de 8 : 1, 2, 4, 8
Diviseurs de 24 : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

2. On cherche le plus grand diviseur commun.

Exemple : $\frac{8}{24}$
Dans notre exemple c'est 8 !

3. On divise le numérateur et le dénominateur par le plus grand diviseur commun. On obtient ainsi la forme irréductible de notre fraction.

Exemple : $\frac{8}{24}$

$$8 \div 8 = 1 \quad \text{et} \quad 24 \div 8 = 3$$

Donc la forme irréductible de $\frac{8}{24}$ est $\frac{1}{3}$.

III.Addition et soustraction de fractions

Règles :

- On peut effectuer l'addition ou la soustraction de deux fractions qui ont ***le même dénominateur***, en additionnant/soustrayant seulement les numérateurs.

- Si les dénominateurs sont différents, il faut mettre les fractions au même dénominateur avant d'additionner/soustraire.

Exemples :

- Cas simple : les dénominateurs sont les mêmes.
$$\frac{5}{8}+\frac{4}{8}=\frac{5+4}{8}=\frac{9}{8}$$
- Cas plus difficile : les dénominateurs sont différents.
$$\frac{3}{4}+\frac{2}{10}$$
Ici on doit mettre les fractions sur les mêmes dénominateurs. On va donc utiliser le fait que $4\times 10 = 10\times 4 = 40$. On va donc passer les deux dénominateurs à 40.
$$\frac{3\times10}{4\times10}+\frac{2\times4}{10\times4}=\frac{30}{40}+\frac{8}{40}=\frac{38}{40}$$

IV. Multiplication par une fraction

Règle : Pour multiplier deux fractions entre elles, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}$$

Exemple :

$$\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{4\times3}{9\times2}=\frac{12}{18}$$

V. Notion d'inverse et division par une fraction

Définition : L'inverse d'une fraction non nulle $\frac{a}{b}$ est la fraction $\frac{b}{a}$.

Exemple :

$\frac{3}{7}$ a pour inverse $\frac{7}{3}$.

Remarque : Multiplier une fraction par son inverse donne toujours 1.

Propriété : Diviser par une fraction revient à multiplier par son inverse.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{a\times d}{b\times c}$$

Exemple :

$$\frac{4}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{4\times3}{5\times2}=\frac{12}{10}$$

Le développement et la factorisation