

SORBONNE UNIVERSITÉ

TRAVAUX D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

---

# Autour du théorème de Dvoretzky

---

Mathieu GALLO

*Enseignant* : Omer Friedland

mai 2021

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>1 Préliminaire</b>	<b>5</b>
1.1 Mesures de Haar . . . . .	5
1.2 Concentration de la mesure . . . . .	7
1.3 Ellipsoïdes . . . . .	10
1.4 Loi gaussienne . . . . .	12
<b>2 Démonstration du théorème de Dvoretzky</b>	<b>14</b>
2.1 Lemmes d'approximations . . . . .	14
2.2 Démonstration du théorème de Dvoretzky . . . . .	18
<b>3 Sections presque euclidiennes de <math>\ell_p^n</math></b>	<b>21</b>
<b>A - Inégalité de Prékopa-Leindler</b>	<b>27</b>
<b>B - Martingales &amp; Inégalité de Khinchine</b>	<b>29</b>

## INTRODUCTION

Le mémoire présent suit la série de lectures de Gideon Schetchman , "*Euclidean sections of convex bodies*" [1].

Alexandre Grothendieck en 1956 dans son article "*Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le théorème de Dvoretzky-Rogers*" [2], inspiré par le lemme de Dvoretzky-Rogers (1950) propose une conjecture à laquelle Aryeh Dvoretzky répondra positivement en 1961, aboutissant au résultat suivant :

**Théorème 1** (A. Dvoretzky, 1961). Il existe une fonction  $k : ]0, 1[ \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , telle que  $\forall \varepsilon \in ]0, 1[$ ,  $k(\varepsilon, n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout compact convexe symétrique  $K \subset \mathbb{R}^n$ , il existe  $V \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{R}^n$  tels que :

- (i)  $\dim V = k(\varepsilon, n)$
- (ii)  $\exists r > 0$  tel que ,  $r \cdot (V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1 + \varepsilon) r \cdot (V \cap B_2^n)$

Dans le papier original de Dvortezky, l'estimation de  $k$  était :

$$k(\varepsilon, n) \geq c(\varepsilon) \sqrt{\frac{\log n}{\log \log n}} \quad \text{pour un } c(\varepsilon) > 0$$

Vitali Milman en 1971 [3] donna une nouvelle preuve du théorème de Dvoretzky en utilisant le phénomène de concentration de la mesure. Il a de plus, amélioré le théorème en donnant l'estimation de la dépendance en  $n$  pour la dimension de  $V$  :  $k(\varepsilon, n) \geq c(\varepsilon) \cdot \log(n)$ .

**Théorème 2** (V. Milman, 1971). Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout compact convexe symétrique  $K \subset \mathbb{R}^n$ , il existe  $V \underset{\text{s.e.v.}}{\subset} \mathbb{R}^n$  tels que :

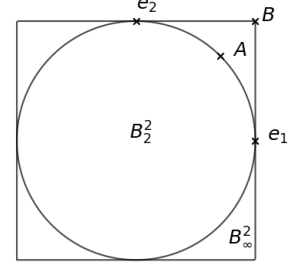
- (i)  $\dim V \geq c \cdot \log(n)$
- (ii)  $\exists r > 0$  tel que ,  $r \cdot (V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1 + \varepsilon) r \cdot (V \cap B_2^n)$

La dépendance de  $c$  par rapport à  $\varepsilon$  donnée par V.Milman était  $c \sim \frac{\varepsilon^2}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$  [3], c'est cette dépendance qui sera démontrée dans ce mémoire. Y.Gordon a montré en 1988 que l'on pouvait prendre  $c \sim \varepsilon^2$  avec les mêmes outils que V.Milman dans [4]. Plus récemment en 2006, G.Schechtman a montré que l'on pouvait prouver le théorème de Dvoretzky avec la même preuve que V. Milman pour  $c \sim \varepsilon^2$  en construisant de manière plus précise le  $\theta$ -net [5] (voir preuve de **théorème 2.4**) .

**Notation.** Pour la suite, on utilisera les notations :

- $|\cdot|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ .
- $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| = 1\}$ , la  $(n-1)$ -sphère euclidienne.
- Pour  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$  on note  $B_{\|\cdot\|} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| \leq 1\}$  la boule unité fermée.

Commençons par donner une légère interprétation géométrique du théorème. Prenons l'exemple de  $K = B_{\|\cdot\|_\infty}$  dans le cas  $n = 2$  la distance entre un point situé sur un quart du cercle et le coin le plus proche est  $\sqrt{2} - 1$ . Nous pouvons facilement généraliser cela pour  $n > 2$ . Prenons par exemple les points  $A = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}) \in S^{n-1}$  et  $B = (1, \dots, 1) \in \partial B_\infty^n$  le coin de  $B_\infty^n$  le plus proche de  $A$ , on peut joindre  $A$  aux points  $e_j \in \partial B_\infty^n \cap S^{n-1}$



de la base canonique pour  $1 \leq j \leq n$ , et on a les distances suivantes :

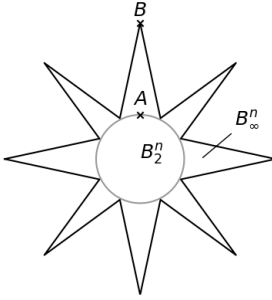
$$|A - e_j| = \sqrt{2(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2}$$

$$|e_i - e_j| = \sqrt{2} \text{ pour } i \neq j$$

$$|A - B| = \sqrt{n} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$|e_j - B| = \sqrt{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Donc lorsque  $n$  est grand, si on se place sur la  $(n-1)$ -sphère euclidienne,  $B_\infty^n$  semble être formée de  $2^n$  "piques" qui sont de plus en plus grands avec  $n$ . Mais le théorème de Dvoretzky nous affirme qu'il existe une section  $F$  de  $B_\infty^n$  de dimension supérieure à  $c \log n$  où  $c$  ne dépendant



pas de  $n$ , telle que  $F$  soit arbitrairement proche de la boule euclidienne, c'est-à-dire une section sur laquelle on ne voit pas ces "piques". En terme plus mathématique, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $V \subset \mathbb{R}^n$  s.e.v de dimension plus grande que  $c(\varepsilon) \log n$  telle que pour un certain  $r > 0$  :

$$r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap B_\infty^n \subset (1 + \varepsilon)r.(V \cap B_2^n)$$

En utilisant la relation entre compact convexe symétrique  $K$  et la norme  $\|y\|_K = \inf\{\lambda ; \frac{y}{\lambda} \in K\}$ , nous allons donner une reformulation du théorème de Dvoretzky en terme de norme.

**Définition.** Soit  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  deux espaces normés et  $C > 0$ , on dit que  $X$  s'injecte  $C$ -continûment dans  $Y$ , si il existe  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  tel que pour tout  $x \in X$

$$\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$$

**Théorème 3.** Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $c > 0$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour toutes normes  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  pour un  $k \geq c \cdot \log(n)$ .

Montrons que le **théorème 2** et le **théorème 3** sont équivalents.

*Démonstration.* (2) $\Rightarrow$ (3)

Posons  $K = B_{\|\cdot\|}$  et appliquons le théorème 2, celui-ci nous procure un sous-espace  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $\dim V := k \geq c \cdot \log(n)$  et  $V \cap K$  est  $\varepsilon$ -euclidien. Donnons-nous une base orthonormée  $\{v_j\}_{1 \leq j \leq k}$  de  $V$  et posons

$$T: \begin{array}{ll} (\mathbb{R}^k, |\cdot|) & \mapsto (V, \|\cdot\|) \\ \sum_{i=1}^k x_i e_i & \rightarrow \sum_{i=1}^k x_i v_i \end{array}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}^k$  tel que  $\|Tx\| = 1$ , comme  $K \cap V$  est  $\varepsilon$ -euclidien, on a que

$$r \leq |Tx| \leq (1 + \varepsilon)r, \text{ pour un } r > 0$$

Remarquons que  $|Tx| = |x|$ , donc

$$r \leq |x| \leq (1 + \varepsilon)r$$

Maintenant si  $x$  est quelconque, il suffit d'appliquer cela à  $\frac{x}{\|Tx\|}$  pour  $x \neq 0$

$$r\|Tx\| \leq |x| \leq (1 + \varepsilon)r\|Tx\|$$

$$\frac{1}{(1 + \varepsilon)r} |x| \leq \|Tx\| \leq \frac{1}{r} |x|$$

$$r|x| \leq \|\tilde{T}x\| \leq (1 + \varepsilon)r|x|$$

avec  $\tilde{T} = r(1 + \varepsilon)T$ , remarquons que la quantité importante est  $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| = \|\tilde{T}\| \cdot \|\tilde{T}^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$ .

(3) $\Rightarrow$ (2)

Soit  $\varepsilon > 0$  par le **théorème 3**, il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  il existe un  $k > c \cdot \log(n)$  et  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  pour n'importe quelle norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Considérons un compact convexe symétrique  $K \subset \mathbb{R}^n$  et  $\|y\| = \inf \left\{ \lambda > 0 ; \frac{y}{\lambda} \in K \right\}$ , alors  $\exists T : \ell_2^k \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  linéaire tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^k, |x| \leq \|Tx\| \leq (1 + \varepsilon)|x|$$

Ceci implique immédiatement que  $T$  est injective, notons  $V = \text{Im} T$ , alors la co-restriction à  $V$  de  $T$  est bijective.

- (i) Soit  $y \in T(B_2^k)$  et  $x \in B_2^k$  tel que  $Tx = y$  alors  $\frac{\|y\|}{1 + \varepsilon} \leq 1$  donc  $\frac{y}{1 + \varepsilon} \in K \cap V$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{1 + \varepsilon} T(B_2^k) \subset K \cap V$ .

- (ii) Soit  $y \in K \cap V$ , il existe  $x \in \mathbb{R}^k$  tel que  $Tx = y$ , alors  $1 \geq \|Tx\| = \|y\| \geq |x|$ , donc  $x \in B_2^k$  c'est-à-dire  $K \cap V \subset T(B_2^k)$ .

Et donc,

$$\frac{1}{1+\varepsilon} T(B_2^k) \subset K \cap V \subset T(B_2^k)$$

Pour conclure, nous nous référençons au **lemme 1.6** qui sera démontré par la suite, qui dit que tout ellipsoïde de dimension  $k$  admet une section de dimension  $\lceil k/2 \rceil$  qui soit un multiple de la boule euclidienne.  $\square$

## 1 PRÉLIMINAIRE

---

### 1.1. MESURES DE HAAR

La mesure de Haar est une notion introduite par Alfred Haar en 1933. Il démontre que dans tout groupe localement compact à base dénombrable, il existe une mesure borélienne invariante par translation à gauche. En 1935, John V. Neumann montre que cette mesure est unique à un coefficient multiplicatif près, nous admettrons le théorème suivant (voir [6]).

**Définition & Théorème** (Mesures de Haar). Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $G$  un groupe topologique localement compact qui agit sur  $X$  et tel que :

$$\forall x, y \in X \quad \forall g \in G, \quad d(gx, gy) = d(x, y) \quad (\star)$$

Alors, il existe une unique mesure à un coefficient multiplicatif près, régulière définie sur les boréliens de  $X$  qui est invariante sous l'action de  $G$ . Cette mesure est appelée mesure de Haar de  $X$  (où  $G$  est sous-entendu).

Les deux exemples suivants d'espaces métriques vérifient  $(\star)$  pour  $G = O(n)$ ,

- (i)  $X = S^{n-1}$  muni de la distance euclidienne
- (ii)  $X = O(n)$  avec la norme  $\|T\| = \sup_{|x|=1} |Tx|$

**Notation.** Par le théorème précédent, on peut définir sans ambiguïté  $\mu$  et  $\nu$  les mesures de Haar normalisées respectivement sur  $S^{n-1}$  et  $O(n)$ .

Montrons quelques propriétés qui seront utiles par la suite.

**Lemme 1.1.** Soit  $f \in C(S^{n-1})$  et  $Y = (g_1, \dots, g_n)$  où les  $\{g_i\}_{1 \leq i \leq n}$  sont i.i.d suivant une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ , alors

$$\int_{S^{n-1}} f d\mu = \mathbb{E} \left[ f \left( \frac{Y}{|Y|} \right) \right]$$

*Démonstration.* Par unicité de la mesure de Haar, il nous suffit de montrer que pour tout  $M \in O(n)$  et  $f \in C(S^{n-1})$  :

$$\mathbb{E} \left[ f \left( \frac{MY}{|MY|} \right) \right] = \mathbb{E} \left[ f \left( \frac{Y}{|Y|} \right) \right]$$

$$\mathbb{E} \left[ f \left( \frac{MY}{|MY|} \right) \right] = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f \left( \frac{My}{|y|} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} |y|^2 \right\} dy_1 \dots dy_n = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{|\det M|} f \left( \frac{y}{|y|} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} |M^{-1}y|^2 \right\} dy_1 \dots dy_n$$

comme  $|\det M| = 1$  et  $|M^{-1}y| = |y|$ , on a :

$$\mathbb{E} \left[ f \left( \frac{MY}{|MY|} \right) \right] = \mathbb{E} \left[ f \left( \frac{Y}{|Y|} \right) \right]$$

□

**Lemme 1.2.** Soit  $A \subset S^{n-1}$  un borélien, alors pour tout  $x \in S^{n-1}$

$$\nu(T \in O(n) ; Tx \in A) = \mu(A)$$

*Démonstration.* Soit  $x \in S^{n-1}$  alors  $\omega_x$  définie par

$$\omega_x(A) = \nu(T \in O(n) ; Tx \in A)$$

vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall M \in O(n) \quad \forall A \in \text{Bor}(S^{n-1}), \quad \omega_x(MA) = \nu(T \in O(n) ; M^T Tx \in A) = \nu(T \in O(n) ; Tx \in A) = \omega_x(A)$$

$$\omega_x(\emptyset) = 0$$

$$\begin{aligned} \omega_x \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) &= \nu \left( T \in O(n) ; Tx \in \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \nu \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \{T \in O(n) ; Tx \in A_i\} \right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(T \in O(n) ; Tx \in A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \omega_x(A_i) \end{aligned}$$

L'unicité de la mesure de Haar nous permet de conclure que  $\omega_x = \mu$ , en particulier  $\omega_x$  ne dépend pas de  $x$ . □

## 1.2. CONCENTRATION DE LA MESURE

Le phénomène de concentration de la mesure a été mis en avant par V. Milman étendant les travaux de P. Lévy et son inégalité isopérimétrique. On peut formuler la question que cherche à résoudre le théorème comme cela : étant donné  $(X, d)$  un espace métrique muni d'une mesure de probabilité  $P$ , on cherche à regarder où les fonctions 1-Lipschitziennes sont essentiellement constantes. Considérons  $f$  une fonction 1-Lipschitzienne de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , l'assertion  $f$  est essentiellement constante se traduit par le fait que l'on puisse donner une borne supérieure à  $P(|f - M(f)| \geq \varepsilon)$ , pour  $\varepsilon \geq 0$  et  $M(f)$  une constante qui dépend de  $f$ , en pratique  $M(f)$  est la médiane de  $f$  ou son espérance.

Pour un ensemble  $A \subset X$  et  $t > 0$ , on définit son  $t$ -élargissement  $A_t$  par :

$$A_t = \{x \in X ; d(x, A) \leq t\}$$

Dans la suite, on montre une égalité de concentration sur la sphère. Pour cette partie on note  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Théorème 1.3.** Soit  $A \in \text{Bor}(S^{n-1})$  tel que  $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$ , alors pour tout  $t > 0$  :

$$\mu(A_t) \geq 1 - 2e^{-\frac{nt^2}{4}}$$

*Démonstration.* Si  $t > 2$  alors  $A_t = S^{n-1}$ , on peut donc supposer  $t < 2$ . Soit  $x \in A$  et  $y \in A_t^c$  alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{x+y}{2} \right|^2 &= \frac{|x|^2}{2} + \frac{|y|^2}{2} - \left| \frac{x-y}{2} \right|^2 = 1 - \frac{|x-y|^2}{4} \\ &< 1 - \frac{t^2}{4} \end{aligned}$$

or

$$\left(1 - \frac{t^2}{8}\right)^2 = 1 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{8^2} \geq 1 - \frac{t^2}{4}$$

et donc

$$\left| \frac{x+y}{2} \right| < 1 - \frac{t^2}{8}$$

Posons

- $\tilde{A} = \{ax ; a \in [0, 1], x \in A\}$
- $\tilde{B} = \{ax ; a \in [0, 1], x \in A_t^c\}$



et donnons nous  $X = ax \in \tilde{A}$  et  $Y = by \in \tilde{B}$ . Dans le calcul qui suit, les rôles de  $a$  et  $b$  sont symétriques, fixons alors  $a \leq b$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{X+Y}{2} \right| &= \left| \frac{ax+by}{2} \right| \\ &= b \left| \frac{\frac{a}{b}x+y}{2} \right| \\ &\leq \left| \frac{a}{b} \left( \frac{x+y}{2} \right) + \left( 1 - \frac{a}{b} \right) \frac{y}{2} \right| \\ &\leq \frac{a}{b} \left| \frac{x+y}{2} \right| + \left( 1 - \frac{a}{b} \right) \left| \frac{y}{2} \right| \end{aligned}$$

Or pour  $t \leq 2$

$$1 - \frac{t^2}{8} \geq \frac{1}{2} = \left| \frac{y}{2} \right|$$

et donc

$$\left| \frac{X+Y}{2} \right| < 1 - \frac{t^2}{8}$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\tilde{A} + \tilde{B}}{2} \subset \left( 1 - \frac{t^2}{8} \right) B_2^n$$

Remarquons que  $\mu$  peut s'exprimer géométriquement comme  $\mu(C) = \frac{\lambda(\{tx; t \in [0,1], x \in C\})}{\lambda(B_2^n)}$ , pour  $C$  un borélien de  $S^{n-1}$ . Donc  $\mu(A) = \frac{\lambda(\tilde{A})}{\lambda(B_2^n)}$ , par l'inégalité de Brunn-Minkowsky (**corollaire A.3**)

$$\left( 1 - \frac{t^2}{8} \right)^n \lambda(B_2^n) \geq \lambda\left(\frac{\tilde{A} + \tilde{B}}{2}\right) \geq \sqrt{\lambda(\tilde{A})\lambda(\tilde{B})} = \lambda(B_2^n) \sqrt{\mu(A)\mu(A_t^c)}$$

Or  $\sqrt{\mu(A)\mu(A_t^c)} \geq \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \mu(A_t))}$  et finalement :

$$\mu(A_t) \geq 1 - 2\left(1 - \frac{t^2}{8}\right)^{2n} \geq 1 - 2e^{-\frac{t^2 n}{4}}$$

□

Le corollaire qui suit est fondamentale dans la démonstrations du théorème de Dvoretzky.

**Corollaire 1.4** (concentration de la mesure sur la sphère). Pour tout  $t > 0$  et toute fonction  $f$ ,  $L$ -Lipschitzienne de  $S^{n-1}$  dans  $\mathbb{R}$  pour un  $L > 0$  on a :

$$\mu\{|f - \mathbb{E}[f]| > t\} \leq 4e^{-\beta \frac{t^2 n}{L^2}}$$

où  $\mathbb{E}[f] = \int_{S^{n-1}} f d\mu$  et  $1 > \beta > 0$  une constante universelle.

*Démonstration.* Commençons par le montrer pour  $L = 1$ , donnons nous  $m_f$  une médiane de  $f$  et posons  $A = \{f \leq m_f\}$ , alors

$$\begin{aligned} x \in A_t &\Rightarrow \exists y \in A, d(x, y) < t \\ &\Rightarrow |f(x) - f(y)| < Lt = t \\ &\Rightarrow f(x) - m_f \leq f(x) - f(y) + f(y) - m_f \\ &\Rightarrow f(x) \leq m_f + t \end{aligned}$$

donc  $A_t \subset \{f \leq m_f + t\} \iff \{f > m_f + t\} \subset A_t^c$ ,

$$\mu(f > m_f + t) \leq \mu(A_t^c) \leq 2e^{-\frac{t^2 n}{4}}$$

En appliquant exactement le même procédé avec  $A = \{f \geq m_f\}$ , on obtient :

$$\mu(f < m_f - t) \leq 2e^{-\frac{t^2 n}{4}}$$

Il nous faut maintenant remplacer la médiane par  $\mathbb{E}[f]$ , on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} |m_f - \int_{S^{n-1}} f d\mu| &\leq \int_{S^{n-1}} |m_f - f| d\mu \\ &\leq \int_0^{+\infty} \mu(|m_f - f| > t) dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} 4e^{-\frac{t^2 n}{4}} dt = 4\sqrt{\frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

Posons  $\alpha = \frac{\sqrt{\log(2)}}{2\sqrt{\pi} + \sqrt{\log(2)}} \Rightarrow 2e^{\frac{-4\pi\alpha^2}{(1-\alpha)^2}} = 1$ , si  $t > \frac{4}{1-\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$  alors

$$\begin{aligned} \mu(f > \mathbb{E}[f] + t) &\leq \mu(f > m_f - 4\sqrt{\frac{\pi}{n}} + t) \\ &\leq \mu(f > m_f + \alpha t) \\ &\leq 2e^{-\alpha^2 \frac{t^2 n}{4}} \end{aligned}$$

Similairement :

$$\begin{aligned} \mu(f < \mathbb{E}[f] - t) &\leq \mu(f < m_f + 4\sqrt{\frac{\pi}{n}} - t) \\ &\leq \mu(f < m_f - \alpha t) \\ &\leq 2e^{-\alpha^2 \frac{t^2 n}{4}} \end{aligned}$$

Si  $t \leq \frac{4}{1-\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$  alors

$$2e^{-\alpha^2 \frac{t^2 n}{4}} \geq 2e^{\frac{-4\pi\alpha^2}{(1-\alpha)^2}} = 1$$

Dans ce cas, il n'y a rien à montrer et finalement dans tous les cas on obtient :

$$\begin{aligned}\mu(f > \mathbb{E}[f] + t) &\leq 2e^{-\alpha^2 \frac{t^2 n}{4}} \\ \mu(f < \mathbb{E}[f] - t) &\leq 2e^{-\alpha^2 \frac{t^2 n}{4}}\end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\mu(|f - \mathbb{E}[f]| > t) \leq 4e^{-\alpha^2 \frac{t^2 n}{4}}$$

Pour  $L \neq 1$  il suffit d'appliquer ce qui précède à  $\frac{f}{L}$ ,

$$\mu(|f - \mathbb{E}[f]| > t) \leq 4e^{-\alpha^2 \frac{t^2 n}{4L^2}}$$

□

### 1.3. ELLIPSOÏDES

Dans cette partie, nous montrons plusieurs propriétés sur les ellipsoïdes. Commençons par les définir :

**Définition.** On appelle ellipsoïde de  $\mathbb{R}^n$  l'image de la boule unité euclidienne par un élément de  $GL(n)$ .

Donnons une définition alternative d'un ellipsoïde.

**Proposition 1.5.** Pour tout ellipsoïde  $\mathcal{E}$ , il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$  et  $v_1, \dots, v_n$  une base orthonormée tels que :

$$\mathcal{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, v_i \rangle^2}{\alpha_i^2} < 1 \right\}$$

*Démonstration.* Donnons-nous  $A \in GL(n)$  tel que  $AB_2^n = \mathcal{E}$

$$|Ax|^2 = x^T A^T A x$$

$A^T A$  est symétrique, soit  $\lambda$  une de ses valeurs propres et  $v$  un vecteur propre associé, alors

$$0 < |Av|^2 = v^T \lambda v = \lambda |v|^2$$

Donc les valeurs propres  $A^T A$  sont strictement positives. Comme  $A^T A$  est symétrique, elle est donc diagonalisable dans une base orthonormée. Donnons-nous  $(\lambda_i)_{i \leq n}$  et  $(v_i)_{i \leq n}$  une base orthonormée tels que  $A^T A v_i = \lambda_i^2 v_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  et définissons les quantités suivantes :

- $P \in M_n(\mathbb{R})$  la matrice définie par  $P v_j = \lambda_j v_j$

-  $u_j = \lambda_j^{-1} A v_j$

Montrons que les  $u_j$  forment une base orthonormée :

$$\begin{aligned}\langle u_i, u_j \rangle &= \lambda_j^{-1} v_j^T A^T \lambda_i^{-1} A v_i \\ &= \lambda_j^{-1} \lambda_i^{-1} v_j^T (A^T A v_i) \\ &= \lambda_j^{-1} \lambda_i^{-1} v_j^T \lambda_i^2 v_i \\ &= \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \langle v_j, v_i \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

Soit  $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in S^{n-1}$

$$\begin{aligned}y &=: Ax = x_1 A v_1 + \dots + x_n A v_n \\ &= x_1 \lambda_1 u_1 + \dots + x_n \lambda_n u_n\end{aligned}$$

Les composantes de  $y$  dans la base  $\{u_j\}_{j \leq n}$  sont  $\langle y, u_j \rangle = x_j \lambda_j$ , donc :

$$\frac{\langle y, u_1 \rangle^2}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{\langle y, u_n \rangle^2}{\lambda_n^2} = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

Et finalement  $\partial \mathcal{E} = \{y \in \mathbb{R}^n ; \frac{\langle y, u_1 \rangle^2}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{\langle y, u_n \rangle^2}{\lambda_n^2} = 1\}$ . □

Démontrons maintenant le lemme que nous avons utilisé dans l'introduction :

**Lemme 1.6.** Soit  $\mathcal{E}$  un ellipsoïde de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\exists \lambda > 0$  et  $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$  de dimension  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  tels que :

$$\mathcal{E} \cap V = \lambda B_2^n \cap V$$

*Démonstration.* Quitte à effectuer une rotation, on peut supposer que  $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 < 1\}$  pour  $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ . Posons  $\lambda = \text{Mediane}(a_1, \dots, a_n)$  et

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n ; \forall i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sqrt{\lambda - a_i} x_i = \sqrt{a_{n+1-i} - \lambda} x_{n+1-i}\}$$

Alors, pour tout  $x \in F$  nous avons  $\forall i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  :

$$a_i x_i^2 + a_{n+1-i} x_{n+1-i}^2 = \lambda (x_i^2 + x_{n+1-i}^2)$$

d'où

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 = \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2$$

□

Nous admettons le résultat de F.John :

**Définition & Théorème** (Ellipsoïde de John). Tout compact convexe symétrique d'intérieur non vide contient un unique ellipsoïde de volume maximal, il est appelé ellipsoïde de John.

**Remarque 1.7.** Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un compact convexe symétrique et  $D = u(B_2^n)$  (avec  $u \in GL(n)$ ) son ellipsoïde de John, notons alors  $C =: u^{-1}(K)$  dont l'ellipsoïde de John est  $B_2^n$ . Supposons qu'il existe  $W \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$  tel que

$$r(B_2^n \cap W) \subset C \cap W \subset r(1 + \varepsilon)(B_2^n \cap W)$$

alors

$$u^{-1}(r(D \cap uW)) \subset u^{-1}(K \cap uW) \subset u^{-1}(r(1 + \varepsilon)(D \cap uW))$$

$$r(D \cap uW) \subset K \cap uW \subset r(1 + \varepsilon)(D \cap uW)$$

Le **lemme 1.6** nous permet de conclure que, quitte à diviser la dimension du sous-espace  $W$  par deux, on peut se restreindre à montrer le théorème de Dvoretzky pour des compacts dont la boule euclidienne est l'ellipsoïde de John sans perte de généralité.

#### 1.4. LOI GAUSSIENNE

Pour la preuve du théorème de Dvoretzky, nous aurons besoin de deux résultats sur les variables aléatoires gaussiennes, ce premier combiné avec **lemme 1.2** nous sera utile pour calculer des intégrales par rapport à la mesure de Haar sur la  $(n - 1)$ -sphère.

**Lemme 1.8.** Soit  $g = (g_1, \dots, g_n)$  où les  $(g_i)_{i \leq n}$  sont des variables aléatoires i.i.d suivant une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ , alors  $\frac{g}{|g|}$  et  $|g|$  sont indépendantes.

*Démonstration.* Posons  $Y = \frac{g}{|g|}$  et  $R = |g|$  alors

$$\mathbb{E}[f(Y)g(R)] = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1}{|x|}, \dots, \frac{x_n}{|x|}\right) g(|x|) \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) dx_1 \dots dx_n$$

En passant en coordonnées sphériques avec  $r \geq 0$ ,  $\theta_i \in ]0, \pi[$  pour  $1 \leq i < n-1$  et  $\theta_{n-1} \in ]0, 2\pi[$ ,

$$\begin{aligned}x_1 &= r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1} \\x_2 &= r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\x_3 &= r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2} \\&\vdots \\x_{n-1} &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\x_n &= r \cos \theta_1\end{aligned}$$

On a le déterminant suivant :

$$dx_1 \dots dx_n = r^{n-1} \prod_{1 \leq i \leq n-1} |\sin \theta_i|^{n-1-i} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$$

d'où :

$$\mathbb{E}[f(Y)g(R)] = \int_{\mathbb{R}^+ \times ]0, \pi[^{n-2} \times ]0, 2\pi[} f \circ \varphi(\theta) g(r) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r^{n-1} \prod_{1 \leq i \leq n-1} |\sin \theta_i|^{n-1-i} \frac{dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

$$\mathbb{E}[f(Y)g(R)] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^+} g(r) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r^{n-1} dr \int_{]0, \pi[^{n-2} \times ]0, 2\pi[} f \circ \varphi(\theta) \prod_{1 \leq i \leq n-1} |\sin \theta_i|^{n-1-i} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$$

où  $\varphi(\theta) = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-1}, \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2}, \dots, \cos \theta_1)$ .

Or

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(R)] &= \int_{\mathbb{R}^n} g\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right) \frac{dx_1 \dots dx_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \\&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^+} r^{n-1} g(r) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr \int_{]0, \pi[^{n-2} \times ]0, 2\pi[} \prod_{1 \leq i \leq n-1} |\sin \theta_i|^{n-1-i} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(Y)] &= \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1}{|x|}, \dots, \frac{x_n}{|x|}\right) \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) \frac{dx_1 \dots dx_n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \\&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^+} r^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr \int_{]0, \pi[^{n-2} \times ]0, 2\pi[} f \circ \phi(\theta) \prod_{1 \leq i \leq n-1} |\sin \theta_i|^{n-1-i} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(R)]\mathbb{E}[f(Y)] &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \mathbb{E}[f(Y)g(R)] \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^+} r^{n-1} \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) dr \right) \\&\quad \times \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{]0, \pi[^{n-2} \times ]0, 2\pi[} \prod_{1 \leq i \leq n-1} |\sin \theta_i|^{n-1-i} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1} \right) \\&= \mathbb{E}[f(Y)g(R)] \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) dx_1 \dots dx_n = \mathbb{E}[f(Y)g(R)]\end{aligned}$$

□

Nous aurons besoin de trouver un minorant pour  $\int_{S^{n-1}} \|x\| d\mu(x)$  pour une norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$  et pour cela nous utiliserons le lemme suivant :

**Lemme 1.9.** il existe  $c > 0$  telle que  $\forall N > 1$  et  $\{g_i\}_{1 \leq i \leq N}$  des variables aléatoires i.i.d suivant une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  on ait :

$$\mathbb{E} \left[ \max_{1 \leq i \leq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil} |g_i| \right] \geq c \sqrt{\log N}$$

où  $\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$  est la partie entière supérieure de  $\frac{N}{2}$ .

*Démonstration.* Commençons par montrer que pour  $n > 1$ ,  $\mathbb{P}(|g_1| > \sqrt{\log n}) \geq \frac{1}{n}$ , on a :

$$\mathbb{P}(|g_1| > \sqrt{\log n}) = 2 \int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq \int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \quad \text{pour } x > \sqrt{\log(2)}$$

$$\int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[ -\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \right]_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{n \log n}} > \frac{1}{n}$$

Donc

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq i \leq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil} |g_i| \leq \sqrt{\log N} \right) = \mathbb{P} \left( |g_1| \leq \sqrt{\log N} \right)^{\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil} = \left( 1 - \mathbb{P}(|g_1| > \sqrt{\log N}) \right)^{\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil}$$

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq i \leq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil} |g_i| \leq \sqrt{\log N} \right) \leq \left( 1 - \frac{1}{N} \right)^{\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil} \leq e^{-\frac{\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil}{N}} \leq e^{-\frac{1}{2}}$$

Ce qui équivaut à

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq i \leq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil} |g_i| > \sqrt{\log N} \right) \geq 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

Par l'inégalité de Markov, on a finalement :

$$\mathbb{E} \left[ \max_{1 \leq i \leq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil} |g_i| \right] \geq \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq i \leq \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil} |g_i| > \sqrt{\log N} \right) \sqrt{\log N} \geq (1 - e^{-\frac{1}{2}}) \sqrt{\log N}$$

□

## 2 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

### 2.1. LEMMES D'APPROXIMATIONS

Avant de débiter la démonstration du théorème de Dvoretzky, nous allons avoir besoin de plusieurs lemmes et de la définition suivante :

**Définition.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $\theta > 0$ , on dit que  $A \subset X$  est un  $\theta$ -net si

- (i)  $A$  est de cardinal fini.
- (ii)  $\forall x \in X, \exists y \in A$  tel que  $d(x, y) \leq \theta$

Montrons maintenant que sur une section de la  $(n-1)$ -sphère, on peut trouver un  $\theta$ -net de cardinal borné par une quantité qui varie exponentiellement avec la dimension de la section.

**Lemme 2.1.** Pour tous  $0 < \theta < 1$ ,  $V \subset_{\text{s.e.v}} \mathbb{R}^n$  de dimension  $k > 0$ , alors il existe un  $\theta$ -net sur  $V \cap S^{n-1}$  de cardinal inférieur à  $\left(\frac{3}{\theta}\right)^k$ .

*Démonstration.* Notons  $B_V(x, r) = \{y \in V ; |x - y| < r\}$  la boule de centre  $x \in V$  et de rayon  $r \geq 0$ , soit  $N = \{x_i\}_{i=1, \dots, m}$  un sous-ensemble de  $V \cap S^{n-1}$  maximal pour la propriété :  $x, y \in N$ ,  $|x - y| \geq \theta$ , c'est-à-dire pour tous  $x \in V \cap S^{n-1} \setminus N$  il existe  $i \leq m$  tel que  $|x - x_i| < \theta$ , donc  $N$  est un  $\theta$ -net et les  $\{B_V(x_i, \theta/2)\}_{i=1, \dots, m}$  sont disjoints deux à deux et toutes contenues dans  $B_V(0, 1 + \frac{\theta}{2})$  en notant  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $V$  on a :

$$m\lambda\left\{B_V(x_1, \frac{\theta}{2})\right\} = \sum_{i=1}^m \lambda\left\{B_V(x_i, \frac{\theta}{2})\right\} = \lambda\left\{\bigcup_{1 \leq i \leq m} B_V(x_i, \frac{\theta}{2})\right\} \leq \lambda\left\{B_V(0, 1 + \frac{\theta}{2})\right\}$$

$$m \leq \frac{\lambda\left\{B_V(0, 1 + \frac{\theta}{2})\right\}}{\lambda\left\{B_V(x_1, \frac{\theta}{2})\right\}}$$

Par homogénéité de la mesure de Lebesgue :

$$m \leq \left(\frac{1 + \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^k = \left(1 + \frac{2}{\theta}\right)^k < \left(\frac{3}{\theta}\right)^k$$

□

Le petit lemme qui suit nous permet d'approcher les points de la  $(n-1)$ -sphère par des points situés sur un  $\theta$ -net.

**Lemme 2.2.** Soit  $x \in S^{n-1}$ ,  $A$  un  $\theta$ -net pour un  $1 > \theta > 0$ , alors il existe  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset A$  et  $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  tels que

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \beta_i \leq \theta^i$$

*Démonstration.* Comme  $A$  est un  $\theta$ -net, alors il existe  $y_0 \in A$  tel que  $|x - y_0| < \theta$ , et donc

$$x = y_0 + \lambda_1 x'$$



avec  $\lambda_1 = |x - y_0| \leq \theta$  et  $x' = \frac{x - y_0}{\lambda_1} \in S^{n-1}$ , on peut donc itérer le même procédé sur  $x'$  et réitérer indéfiniment :

$$\begin{array}{lll} x = y_0 + \lambda_1(y_1 + \lambda_2 x'') = y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_1 \lambda_2 x'' & \text{avec} & \lambda_2 \leq \theta, y_1 \in A \text{ et } x'' \in S^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x = y_0 + \sum_{i=1}^N y_i \left( \prod_{1 \leq k \leq i} \lambda_k \right) + \tilde{x} \prod_{1 \leq k \leq N+1} \lambda_k & \text{avec} & \forall i \leq N+1 \lambda_i \leq \theta, y_i \in A \text{ et } \tilde{x} \in S^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Si on pose  $S_N = y_0 + \sum_{i=1}^N y_i \left( \prod_{1 \leq k \leq i} \lambda_k \right)$ , alors :

$$|x - S_N| \leq |\lambda_1 \dots \lambda_N| |\tilde{x}| \leq \theta^N \rightarrow 0 \text{ avec } N \rightarrow \infty$$

il ne reste plus qu'à poser  $\beta_0 = 1$  et pour  $i > 0$ ,  $\beta_i = \prod_{1 \leq k \leq i} \lambda_k \leq \theta^i$  et on a :

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i y_i$$

□

Le **lemme 2.3** va nous permettre de passer d'un ensemble de grande  $\mu$ -mesure à un grand sous-espace au sens des dimensions.

**Lemme 2.3.**  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $1 > \theta > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si on a  $A$  un  $\theta$ -net sur  $V \cap S^{n-1}$  pour  $V \subset \mathbb{R}^n$  de dimension  $k$ ,  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$  et  $T \in GL(n)$ , tels que :

$$\forall x \in A, \quad (1 - \theta) \leq \|Tx\| \leq (1 + \theta)$$

alors ,

$$\forall x \in V, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} |x| \leq \|Tx\| \leq \sqrt{1 + \varepsilon} |x|$$

de plus si  $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$ , on peut prendre  $\theta = \frac{\varepsilon}{9}$

*Démonstration.* Soit  $1 > \theta > 0$ ,  $A$  un  $\theta$ -net sur  $S^{n-1} \cap V$  et  $x \in S^{n-1} \cap V$  par le **lemme 2.2**, il existe  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset A$  et  $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  tels que

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \beta_i \leq \theta^i$$

Notons  $T = (a_1, \dots, a_n)$

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &= \left\| T \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i \sum_{p=1}^n y_{i,p} a_p \right\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i \left\| \sum_{p=1}^n y_{i,p} a_p \right\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i \|Ty_i\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i (1 + \theta) = \frac{1 + \theta}{1 - \theta}
\end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &\geq \|Ty_0\| - \|Tx - Ty_0\| \\
&= (1 - \theta) - \left\| \sum_{p=1}^n a_p \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i y_{i,p} \right\| \\
&\geq (1 - \theta) - \sum_{i=1}^{+\infty} \theta^i \|Ty_i\| \\
&\geq \left( (1 - \theta) - \theta \frac{1 + \theta}{1 - \theta} \right) = \frac{1 - 3\theta}{1 - \theta}
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre  $\theta$  tel que

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + \varepsilon} &\geq \frac{1 + \theta}{1 - \theta} \\
\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} &\leq \frac{1 - 3\theta}{1 - \theta}
\end{aligned}$$

et pour tous  $x \in V \setminus \{0\}$  on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} &\leq \left\| T \frac{x}{|x|} \right\| \leq \sqrt{1 + \varepsilon} \\
\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} |x| &\leq \|Tx\| \leq |x| \sqrt{1 + \varepsilon}
\end{aligned}$$

Ce qui finit la première partie de la preuve. Dans la suite on suppose  $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$ . On cherche  $\theta =: \theta(\varepsilon) \in ]0, 1[$ , tel que  $\sqrt{1 + \varepsilon} \geq \max\left(\frac{1 - \theta}{1 - 3\theta}, \frac{1 + \theta}{1 - \theta}\right)$ . Sachant que  $\varepsilon$  va être petit supposons  $\theta \leq \frac{1}{3}$  alors

$$\frac{1 - \theta}{1 - 3\theta} - \frac{1 + \theta}{1 - \theta} = \frac{4\theta^2}{(1 - 3\theta)(1 - \theta)} > 0$$

Donc  $\sqrt{1 + \varepsilon} \geq \frac{1 - \theta}{1 - 3\theta}$

$$\begin{aligned}
1 + \varepsilon &\geq \left(\frac{1 - \theta}{1 - 3\theta}\right)^2 \\
(9\varepsilon + 8)\theta^2 - 2(3\varepsilon + 2)\theta + \varepsilon &\geq 0
\end{aligned}$$

les deux racines de ce polynôme sont  $0 < \frac{3\varepsilon + 2 - 2\sqrt{1 + \varepsilon}}{8 + 9\varepsilon} < \frac{3\varepsilon + 2 + 2\sqrt{1 + \varepsilon}}{8 + 9\varepsilon}$ , on cherche donc un  $\theta$  dans

$]0, \frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon}]$ . Pour finir

$$\begin{aligned} \frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon} &\geq \frac{3\varepsilon+2-2-2\varepsilon}{8+9\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{8+9\varepsilon} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{9} \end{aligned}$$

donc pour  $\varepsilon \in ]0, 9^{-1}[$  on peut prendre  $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{9}$ . □

## 2.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

La démonstration du théorème de Dvoretzky repose sur le **théorème 2.4** et la **proposition 2.7** qui sont démontrés dans cette partie. Dans un premier temps, nous donnons un résultat de V.Milman qui est en grande partie la preuve du théorème de Dvoretzky.

**Théorème 2.4.** Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $c(\varepsilon) > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ , il existe  $V \subset \mathbb{R}^n$  s.e.v tels que  $\dim V \geq c(\varepsilon)(\frac{M}{b})^2 n$  et pour tout  $x \in V$  :

$$|x| \frac{M}{\sqrt{1+\varepsilon}} \leq \|x\| \leq M\sqrt{1+\varepsilon}|x|$$

Où  $M = \int_{S^{n-1}} \|x\| d\mu(x)$  et  $b > 0$  le plus petit réel tel que  $\|\cdot\| \leq b|\cdot|$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ ,  $\theta =: \theta(\varepsilon) \in ]0, 1[$  donné par le **lemme 2.3**,  $V_0 = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  pour un  $k \leq n$  entier que l'on fixera plus tard et  $A$  un  $\theta$ -net sur  $V_0 \cap S^{n-1}$  avec  $|A| < (\frac{3}{\theta})^k$ , alors

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcap_{x \in A} \{T \in O(n) ; |\|Tx\| - M| \leq M\theta\}\right) &= 1 - \nu\left(\bigcup_{x \in A} \{T \in O(n) ; |\|Tx\| - M| > M\theta\}\right) \\ &\geq 1 - \sum_{y \in A} \nu(T \in O(n) ; |\|Ty\| - M| > M\theta) \\ &\geq 1 - |A| \mu\left(y \in S^{n-1} ; |\|y\| - M| > M\theta\right) \quad \text{par le lemme 1.2} \end{aligned}$$

En appliquant la concentration de la mesure et en utilisant  $|A| < (\frac{3}{\theta})^k$ ,

$$\nu\left(\bigcap_{x \in A} \{T \in O(n) ; |\|Tx\| - M| \leq M\theta\}\right) > 1 - 4\left(\frac{3}{\theta}\right)^k e^{-\beta \frac{\theta^2 M^2}{b^2} n}$$

pour un  $\beta \in ]0, 1[$ .

Donc tant que  $4\left(\frac{3}{\theta}\right)^k e^{-\beta \frac{\theta^2 M^2}{b^2} n} \leq 1$ , on peut trouver  $T \in O(n)$  tel que pour tout  $x \in A$  :

$$|\|Tx\| - M| \leq M\theta \quad (\star)$$

Posons alors  $c(\theta) = \frac{\theta^2 \beta}{4 \log(\frac{3}{\theta})}$  et  $\kappa(\theta) = c(\theta) \left(\frac{M}{b}\right)^2 n$ , on veut donc montrer qu'il existe un  $k \geq \kappa(\theta)$  entier pour lequel on peut trouver un  $T \in O(n)$  qui vérifie  $(\star)$ . Trivialement si  $\kappa(\theta) < 1$ , alors

$k = 1$  convient car toute 1-section est euclidienne. On suppose donc  $\kappa(\theta) \geq 1$  ce qui équivaut à  $\frac{\theta^2 M^2 n \beta}{4b^2} \geq \log(\frac{3}{\theta})$ . Fixons  $k$  entier tel que  $\kappa(\theta) \leq k \leq 2\kappa(\theta)$ , possible car  $\kappa(\theta) \geq 1$ , alors

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcap_{x \in A} \{T \in O(n) ; ||Tx|| - M| \leq M\theta\}\right) &> 1 - 4 \exp\left(2\kappa(\theta) \log\left(\frac{3}{\theta}\right) - \frac{\theta^2 M^2 n \beta}{b^2}\right) \\ &> 1 - 4e^{-\frac{\theta^2 M^2 n \beta}{2b^2}} \\ &> 1 - \frac{4}{3^2} \theta^2 > 0 \quad \text{car } \frac{\theta^2 M^2 n \beta}{2b^2} \geq 2 \log\left(\frac{3}{\theta}\right) \end{aligned}$$

Donc, il existe  $T \in O(n)$  tel que pour tout  $x \in A$ ,  $||Tx|| - M| \leq M\theta$ , c'est-à-dire

$$M(1 - \theta) \leq ||Tx|| \leq M(1 + \theta)$$

Par le **lemme 2.3** pour tout  $x \in V_0$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} |x| M \leq ||Tx|| \leq \sqrt{1 + \varepsilon} |x| M$$

Il suffit donc de prendre  $V = TV_0$  pour conclure.  $\square$

**Remarque 2.5.** Pour  $\varepsilon < 9^{-1}$  on peut prendre  $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{9}$  et donc  $c(\varepsilon) = c_0 \frac{\varepsilon^2}{\log(\frac{c_1}{\varepsilon})}$  pour  $c_0, c_1 > 0$ .

Il ne nous reste plus qu'à donner une borne inférieure à  $\frac{M}{b}$ , pour cela nous allons utiliser la **remarque 1.7** et le lemme suivant :

**Lemme 2.6** (Dvoretzky-Rogers). Soit  $||\cdot||$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$  telle que  $B_2^n$  est l'ellipsoïde de John de  $B_{||\cdot||}$ , alors il existe une base orthonormée  $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$  telle que pour  $1 \leq i \leq n$

$$e^{-1} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \leq ||x_i|| \leq 1$$

*Démonstration.*  $S^{n-1}$  est compact et  $||\cdot||$  continue, on peut donc prendre un  $x_1 \in S^{n-1}$  qui maximise  $||\cdot||$  c'est-à-dire  $||x_1|| = 1$ . Supposons que l'on ait  $x_1, \dots, x_{k-1}$  avec  $k \leq n$  tel que pour tous  $1 \leq i \leq k-1$ ,  $x_i$  maximise  $||\cdot||$  sur  $S^{n-1} \setminus \text{Vect}(x_1, \dots, x_{i-1}) \neq \emptyset$  car les  $\{x_i\}_{i=1, \dots, i-1}$  sont orthogonaux deux à deux. On peut donc répéter le procédé pour trouver  $x_k$  qui maximise  $S^{n-1} \setminus \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1}) \neq \emptyset$ . Par récurrence, on peut donc avoir  $n$  vecteurs avec ses propriétés. Fixons  $1 \leq k \leq n$ ,  $a, b > 0$  et définissons :

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i ; \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{a_i}{a}\right)^2 + \sum_{i=k}^n \left(\frac{b_i}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

Supposons  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in \mathcal{E}$ , alors  $\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \in aB_2^n$  et donc  $||\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i|| \leq |\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i| \leq a$ . Si  $x \in \text{Vect}(x_k, \dots, x_n) \cap B_2^n$  on a  $||x|| \leq ||x_k||$  par construction, et donc  $\sum_{i=k}^n a_i x_i \in bB_2^n \Rightarrow ||\sum_{i=k}^n a_i x_i|| \leq$

$b\|x_k\|$  , ce qui nous donne la majoration suivante

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=k}^n a_i x_i \right\| \leq a + b\|x_k\|$$

Posons  $\phi \in GL(n)$  défini par  $\phi(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} a a_i x_i + \sum_{i=k}^n b a_i x_i$  on a  $\phi = \text{diag}(\overbrace{a, \dots, a}^{(k-1) \times}, \overbrace{b, \dots, b}^{(n-k+1) \times})$  et donc  $\det \phi = a^{k-1} b^{n-k+1}$  d'où :

$$\int_{\mathcal{E}} dx_1 \dots dx_n = \int_{B_2^n} \det \phi dx_1 \dots dx_n = a^{k-1} b^{n-k+1} \int_{B_2^n} dx_1 \dots dx_n$$

On prend  $a + b\|x_k\| = 1$  de sorte que  $\mathcal{E} \subset K$ , comme  $B_2^n$  est l'ellipsoïde de volume maximal incluse dans  $K$ , on a que

$$1 \geq \frac{\int_{\mathcal{E}} dx_1 \dots dx_n}{\int_{B_2^n} dx_1 \dots dx_n} = a^{k-1} b^{n-k+1}$$

Fixons donc pour  $k \geq 2$  ,  $b = \frac{1-a}{\|x_k\|}$  et  $a = \frac{k-1}{n}$ , en remplaçant dans l'inégalité on obtient :

$$1 \geq a^{k-1} \left( \frac{1-a}{\|x_k\|} \right)^{n-k+1} \iff \|x_k\| \geq a^{\frac{k-1}{n-k+1}} (1-a) \geq e^{-1} \left( 1 - \frac{k-1}{n} \right)$$

car  $\log a^{\frac{k-1}{n-k+1}} = \frac{k-1}{n-k+1} \log \left( \frac{k-1}{n} \right) > -1$  (étudier  $f(X) = \frac{X}{1-X} \log(X)$ ). Pour  $k = 1$  il faut prendre  $a = 1 - e^{-1}$  alors  $1 \geq \left( \frac{1-a}{\|x_1\|} \right)^n \Rightarrow \|x_1\| \geq e^{-1}$ .

□

**Proposition 2.7.** Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$  tel que  $B_2^n$  est l'ellipsoïde de John de  $B_{\|\cdot\|}$ , alors il existe  $c > 0$  tel que

$$M =: \int_{S^{n-1}} \|x\| d\mu(x) \geq c \sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

*Démonstration.* Par le lemme de Dvoretzky-Rogers, il existe une base orthonormée  $x_1, \dots, x_n$  telle que pour  $1 \leq i \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  la partie entière supérieure de  $\frac{n}{2}$ ,  $\|x_i\| \geq e^{-1} \left( 1 - \frac{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil - 1}{n} \right) \geq e^{-1} \left( 1 - \frac{\frac{n}{2} + 1 - 1}{n} \right) = (2e)^{-1}$ . Comme  $\mu$  est invariante par composition par une transformation orthogonale, on a

$$M =: \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| d\mu(a) = \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n \right\| d\mu(a)$$

et donc

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| d\mu(a) + \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n \right\| d\mu(a) \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} 2 \max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\|, \|a_n x_n\| \right\} d\mu(a) \geq \dots \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ |a_i| \|x_i\| \right\} d\mu(a) \\ &\geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \left\{ |a_i| \|x_i\| \right\} d\mu(a) \geq (2e)^{-1} \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} |a_i| d\mu(a) \end{aligned}$$

Soit  $(g_1, \dots, g_n)$ , des variables aléatoires i.i.d de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  alors par le **lemme 1.1** :

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil} |a_i| d\mu(a) = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil} |g_i| \right]$$

Par le **lemme 1.8**  $(\sum_{i=1}^n g_i^2)^{-\frac{1}{2}}(g_1, \dots, g_n)$  et  $(\sum_{i=1}^n g_i^2)^{\frac{1}{2}}$  sont des variables aléatoires indépendantes, on a donc

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil} |g_i| \right] \cdot \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \mathbb{E} \left[ \max_{1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil} |g_i| \right]$$

la fonction racine carrée est concave par l'inégalité de Jensen, on a donc :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n g_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \mathbb{E}[g_1^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$

Et finalement par le **lemme 1.9**, il existe  $K > 0$  tel que :

$$M \geq \frac{1}{2e\sqrt{n}} \mathbb{E} \left[ \max_{1 \leq i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil} |g_i| \right] \geq \frac{K}{2e} \sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

□

On peut donc réunir la **proposition 2.7** et le **théorème 2.4** pour obtenir  $k \geq c(\varepsilon) \log n$  lorsque  $B_2^n$  est l'ellipsoïde de John pour  $B_{\|\cdot\|}$ . En utilisant la **remarque 1.7**, quitte à diviser  $k$  par 2, on peut généraliser à toutes les normes et donc conclure la démonstration du théorème de Dvoretzky.

### 3 SECTIONS PRESQUE EUCLIDIENNES DE $\ell_p^N$

Dans cette section, on applique le **théorème 2.4** pour donner une estimation de la dimension critique des espaces  $\ell_p^n$ .

**Définition.** (Dimension critique) Soit  $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  pour  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ , pour  $\varepsilon > 0$  on note  $k(X, \varepsilon)$  le plus grand entier tel que  $\ell_2^{k(X, \varepsilon)}$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $X$ .

Remarquons alors ce corollaire du **théorème 2.4**.

**Corollaire 3.1.** Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $c(\varepsilon) > 0$ , tels que pour tout  $p, q \in ]1, \infty[$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  on a,

$$k(\ell_p^n, \varepsilon) \cdot k(\ell_q^n, \varepsilon) \geq c(\varepsilon) \cdot n^{1 + \frac{2}{p}}$$

*Démonstration.* Fixons  $p \geq 2$  et donc  $q \leq 2$  par l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} &\leq n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

En appliquant le **théorème 2.4**  $\exists c(\varepsilon) > 0$  tel que

$$\begin{aligned} k(\ell_p^n, \varepsilon) &\geq c(\varepsilon) M_p^2 n \\ k(\ell_q^n, \varepsilon) &\geq c(\varepsilon) \left( \frac{M_q}{n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}} \right)^2 n = c(\varepsilon) M_q^2 n^{\frac{2}{p}} \end{aligned}$$

où  $M_v = \int_{S^{n-1}} \|y\|_v d\mu(y)$  pour  $v = p$  ou  $v = q$ . Remarquons alors que par l'inégalité de Hölder

$$1 = \int_{S^{n-1}} |x| d\mu(x) \leq \int_{S^{n-1}} \|x\|_p^{\frac{1}{2}} \|x\|_q^{\frac{1}{2}} d\mu(x) \leq \left( \int_{S^{n-1}} \|x\|_p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{S^{n-1}} \|x\|_q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{M_p M_q}$$

Et finalement

$$\begin{aligned} k(\ell_p^n, \varepsilon) k(\ell_q^n, \varepsilon) &\geq c(\varepsilon)^2 (M_p M_q)^2 n^{1+\frac{2}{p}} \\ &\geq c(\varepsilon)^2 n^{1+\frac{2}{p}} \end{aligned}$$

□

Pour la proposition suivante, nous allons utiliser l'inégalité de Khinchine qui est démontrée dans l'annexe B.

**Proposition 3.2.** Soit  $2 < p < \infty$  et  $0 < \varepsilon < 1$ , alors il existe  $c_p(\varepsilon) > 0$  tel que,

$$k(\ell_p^n, \varepsilon) \leq c_p(\varepsilon) n^{\frac{2}{p}}$$

*Démonstration.* Considérons  $T = (a_{ij})_{j \leq k}^{i \leq n} \subset \mathbb{R}^n$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^k$

$$|x| \leq \|Tx\|_p \leq (1 + \varepsilon)|x|$$

Notons  $r_i(t) = \text{sign}(\sin(\pi 2^i t))$  pour  $t \in ]0, 1[$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$  (voir annexe B pour les détails).

$$\forall t \in ]0, 1[, \quad |(r_1(t), \dots, r_k(t))| \leq \|T(r_1(t), \dots, r_k(t))\|_p \leq (1 + \varepsilon)|(r_1(t), \dots, r_k(t))|$$

Or  $|(r_1(t), \dots, r_k(t))|^2 = \sum_{i=1}^k r_i^2(t) = k$  presque sûrement. En intégrant entre 0 et 1 :

$$k^{\frac{p}{2}} \leq \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^k a_{ij} r_j(t) \right|^p dt$$

Par l'inégalité de Khinchine (**théorème B.3**)  $\exists B_p > 0$  tel que :

$$\left( \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^k a_{ij} r_j(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left( \sum_{j=1}^k a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$k^{\frac{p}{2}} \leq \sum_{i=1}^n B_p^p \left( \sum_{j=1}^k a_{ij}^2 \right)^{\frac{p}{2}} \quad (\star)$$

Fixons  $1 \leq \nu \leq n$ , alors pour  $x = (a_{\nu,j})_{j \leq k}$ , on a

$$\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^k a_{ij} a_{\nu j} \right|^p \geq \left| \sum_{j=1}^k a_{\nu j}^2 \right|^p$$

et donc :

$$\left| \sum_{j=1}^k a_{\nu j}^2 \right|^p \leq \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^k a_{ij} a_{\nu j} \right|^p \leq (1 + \varepsilon)^p \left| \sum_{j=1}^k a_{\nu j}^2 \right|^{\frac{p}{2}}$$

c'est-à-dire  $\left| \sum_{j=1}^k a_{\nu j}^2 \right|^{\frac{1}{2}} \leq 1 + \varepsilon$ , et finalement en injectant dans  $(\star)$  :

$$k \leq B_p^2 (1 + \varepsilon)^2 n^{\frac{2}{p}}$$

□

**Corollaire 3.3.** Soit  $p \in [1, +\infty[$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $c_p(\varepsilon) > 0$  tel que pour tout  $n \geq 2$ ,

$$k(\ell_p^n, \varepsilon) \geq \begin{cases} c_p(\varepsilon) n & \text{si } 1 \leq p < 2 \\ c_p(\varepsilon) n^{\frac{2}{p}} & \text{si } 2 \leq p < \infty \end{cases}$$

*Démonstration.* Si  $p = 1$  alors ,

$$\mathbb{E} \left( \sum_{i=1}^n |x_i| \right) = n \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

et donc

$$M =: \int_{S^{n-1}} \|x\|_1 d\mu(x) \geq \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

par le **théorème 2.4** avec  $b = \sqrt{n}$ ,

$$k(\ell_p^n, \varepsilon) \geq c(\varepsilon) \left( \frac{\sqrt{\frac{2n}{\pi}}}{\sqrt{n}} \right)^2 n =: \tilde{c}(\varepsilon) n$$

Si  $p > 2$  posons  $1 < q < 2$  défini par  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , par le **corollaire 3.1** on a

$$k(\ell_p^n, \varepsilon) \cdot k(\ell_q^n, \varepsilon) \geq c(\varepsilon) n^{1 + \frac{2}{p}}$$



Donc en appliquant le **proposition 3.2**,

$$c_p(\varepsilon) \cdot n^{\frac{2}{p}} \cdot k(\ell_q^n, \varepsilon) \geq c(\varepsilon) n^{1+\frac{2}{p}}$$

$$k(\ell_q^n, \varepsilon) \geq \tilde{c}_q(\varepsilon) n$$

Comme  $n \geq k(\ell_q^n, \varepsilon)$  on a tout de suite

$$k(\ell_p^n, \varepsilon) \geq c(\varepsilon) n^{\frac{2}{p}}$$

ce qui permet déjà de conclure. Lorsque  $2 < p$  est petit devant  $n$ , on peut donner une meilleure estimation de la dépendance en  $p$ . Supposons  $p < \log n$ ,

$$M =: \int_{S^{n-1}} \|x\|^p d\mu(x) = \mathbb{E} \left[ \frac{(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}}{(\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = \frac{\mathbb{E} \left[ (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \right]}{\mathbb{E} \left[ (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \right]}$$

Par l'inégalité de Hölder on a  $\|x\|_p \leq \|x\|_2$ , donc  $b \leq 1$ . Posons  $m =: \lfloor e^p \rfloor$  et divisons  $\{1, \dots, n\}$  en  $N = \lceil \frac{n}{m} \rceil$  parties disjointes  $I_1, \dots, I_N$  tel que pour  $j < N$ ,  $\text{card}(I_j) = m$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n |g_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j \leq N} \sum_{i \in I_j} |g_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j \leq N} (\max_{i \in I_j} |g_i|)^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &\geq \left( \sum_{j \leq N} (\mathbb{E} [\max_{i \in I_j} |g_i|])^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq (N-1)^{\frac{1}{p}} c \sqrt{\log m} \text{ par le lemme 1.9} \end{aligned}$$

Où  $c > 0$  est une constante universelle, de plus :

$$\begin{aligned} \frac{(N-1)^{\frac{1}{p}}}{N^{\frac{1}{p}}} &= \left( \frac{N-1}{N} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( 1 - \frac{1}{N} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Car  $N \geq 2$  par hypothèse, et finalement :

$$\begin{aligned} M &\geq N^{\frac{1}{p}} 2^{-\frac{1}{p}} c \sqrt{\log \lfloor e^p \rfloor} n^{-\frac{1}{2}} \\ &\geq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} C_p \end{aligned}$$

Où  $C_p = 2^{-\frac{1}{p}} c \sqrt{\log \lfloor e^p \rfloor} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} c \sqrt{p}$ .

Par le **théorème 2.4**  $\exists c(\varepsilon) > 0$  tel que  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $\ell_p^n$ , pour

$$\begin{aligned} k &\geq c(\varepsilon) \left( \frac{M}{b} \right)^2 n \\ &\geq c_p(\varepsilon) n^{\frac{2}{p}}, \quad \text{avec } c_p(\varepsilon) = c(\varepsilon) C_p^2 \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \tilde{c}(\varepsilon) p \end{aligned}$$

□

En condensant ce qui précède, on obtient le résultat suivant,

**Corollaire 3.4.** Soit  $0 < \varepsilon < 1$ ,

- Pour  $1 \leq p < 2$ ,  $\frac{k(\ell_{p,\varepsilon}^n)}{n}$  est bornée entre deux constantes qui ne dépendent que de  $p$  et  $\varepsilon$ .
- Pour  $2 \leq p < \infty$ ,  $\frac{k(\ell_{p,\varepsilon}^n)}{n^{\frac{2}{p}}}$  est bornée entre deux constantes qui ne dépendent que de  $p$  et  $\varepsilon$ .

Intéressons-nous maintenant au cas  $p = \infty$ .

**Proposition 3.5.** Soit  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{32}$ , il existe  $c, C > 0$  des constantes universelles tel que :

$$k(\ell_{\infty,\varepsilon}^n) \leq \frac{C \log(n)}{\log(\frac{1}{c\varepsilon})}$$

*Démonstration.* Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$  tel que pour tous  $x \in \mathbb{R}^k$ ,

$$\frac{1}{1+\varepsilon} |x| \leq \|Tx\|_{\infty} \leq |x|$$

Comme  $1 - \varepsilon \leq \frac{1}{1+\varepsilon}$ , en posant  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$  les lignes de  $T$  dans la base canonique, alors

$$(1 - \varepsilon) |x| \leq \max_{i \leq n} |\langle a_i, x \rangle| \leq |x|$$

En prenant  $x = a_p$  on obtient  $(1 - \varepsilon) |a_p| \leq \max_{i \leq n} |\langle a_i, a_p \rangle| \leq |a_p| \Rightarrow |a_p|^2 \leq |a_p| \Rightarrow |a_p| \leq 1$ .

Prenons  $x \in S^{k-1}$ , alors il existe  $i \leq n$  tel que  $|\langle a_i, x \rangle| \geq (1 - \varepsilon)$ , donc

$$|x - a_i|^2 = |x|^2 + |a_i|^2 - 2\langle x, a_i \rangle \leq 2 - 2(1 - \varepsilon) = 2\varepsilon$$

Prenons  $1 > |x| > 1 - \sqrt{2\varepsilon}$ , alors il existe  $i$  tel que  $\left| \frac{x}{|x|} - a_i \right| \leq \sqrt{2\varepsilon}$  et donc :

$$\begin{aligned} |x - a_i| &\leq \left| x - \frac{x}{|x|} \right| + \left| \frac{x}{|x|} - a_i \right| \\ &\leq |1 - |x|| + \sqrt{2\varepsilon} \\ &\leq 2\sqrt{2\varepsilon} \end{aligned}$$

Donc  $\bigcup_{i \leq n} B_2^k(a_i, 2\sqrt{2\varepsilon})$  contient  $B_2^k \setminus (1 - \sqrt{2\varepsilon})B_2^k$ .

$$n(2\sqrt{2\varepsilon})^k \lambda(B_2^k) \geq \lambda\left(\bigcup_{i \leq n} B_2^k(a_i, 2\sqrt{2\varepsilon})\right) \geq \lambda(B_2^k \setminus (1 - \sqrt{2\varepsilon})B_2^k) = \lambda(B_2^k) - (1 - \sqrt{2\varepsilon})^k \lambda(B_2^k)$$

$$n(2\sqrt{2\varepsilon})^k \geq 1 - (1 - \sqrt{2\varepsilon})^k \geq \sqrt{2\varepsilon}(1 - \sqrt{2\varepsilon})^{k-1}$$

car

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{2\varepsilon})^k &= (1 - \sqrt{2\varepsilon})^{k-1} - \sqrt{2\varepsilon}(1 - \sqrt{2\varepsilon})^{k-1} \\ &\leq 1 - \sqrt{2\varepsilon}(1 - \sqrt{2\varepsilon})^{k-1} \end{aligned}$$

Alors pour  $\varepsilon < \frac{1}{32}$  on a  $\frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}} - \frac{1}{2} > \frac{7}{16\sqrt{2\varepsilon}}$  et donc

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}} - \frac{1}{2} \right)^{k-1} \\ &\geq \frac{1}{2} \left( \frac{7}{16\sqrt{2\varepsilon}} \right)^{k-1} \\ &\geq \frac{1}{2} \left( \frac{7}{16\sqrt{2\varepsilon}} \right)^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

et finalement

$$k \leq \frac{2 \log n}{\log \left( \frac{7}{16\sqrt{2\varepsilon}} \right)}$$

□

**Proposition 3.6.** Soit  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $\ell_\infty^n$  pour  $k = \left\lceil \frac{\log n}{\log(\frac{3}{\varepsilon})} \right\rceil$ .

*Démonstration.* Comme  $\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^k \leq n$ , on peut prendre un  $\varepsilon$ -net sur  $S^{k-1}$  de cardinal  $n$ . donnons-nous  $\{y_i\}_{i \leq n}$  un tel  $\varepsilon$ -net et

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^k &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\rightarrow (1 + \varepsilon) \langle x, y_i \rangle_{i \leq n} \end{aligned}$$

Alors, pour tout  $x \in S^{k-1}$  il existe  $i \leq n$  tel que  $|x - y_i| < \varepsilon$ , d'où

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &> |x - y_i|^2 = |x|^2 + |y_i|^2 - 2\langle x, y_i \rangle \\ &= 2(1 - \langle x, y_i \rangle) \end{aligned}$$

$$\langle x, y_i \rangle > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

Car  $1 - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{1}{1+\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}(1-\varepsilon)(\varepsilon+2) > 0$ , finalement avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$1 \geq \max_{1 \leq j \leq n} |\langle x, y_j \rangle| \geq |\langle x, y_i \rangle| \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$$

C'est à dire pour tout  $x \in S^{k-1}$

$$1 \leq \|Tx\|_\infty \leq 1 + \varepsilon$$

□

## A - INÉGALITÉ DE PRÉKOPA-LEINDLER

Le but de cette annexe est de démontrer l'inégalité de Brunn-Minkowsky utilisée dans la démonstration du **corollaire 1.4**. Nous allons pour cela monter une inégalité plus générale, celle de Prékopa-Leindler.

**Lemme A.1.** Soit  $A, B$  deux compacts non vides de  $\mathbb{R}$ , alors

$$\lambda(A+B) \geq \lambda(A) + \lambda(B)$$

*Démonstration.* Comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation, on peut supposer que  $\max A = 0$  et  $\min B = 0$ , alors  $A \cup B \subset A+B$ ,

$$\lambda(A+B) \geq \lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$$

□

**Théorème A.2** (Prékopa-Leindler). Soit  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $f, g, h \in L^\infty(\mathbb{R}^n, [0, +\infty))$  tel que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$h(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq f(x)^\alpha g(y)^{1-\alpha}$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} h d\lambda \geq \left( \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda \right)^\alpha \left( \int_{\mathbb{R}^n} g d\lambda \right)^{1-\alpha}$$

*Démonstration.* Commençons par le montrer pour  $n = 1$  et  $f, g$  de norme infinie égale à 1.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{f(x)} dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\|f\|_\infty} \mathbb{1}_{\{f(x) > t\}} dt dx \\ &= \int_0^1 \lambda(x \in \mathbb{R}; f(x) > t) dt \end{aligned}$$

et de même pour  $g$ . Posons alors  $A(t) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) > t\}$  et  $B(t) = \{x \in \mathbb{R}; g(x) > t\}$ , on a alors

$$\begin{aligned} z \in \alpha A(t) + (1 - \alpha)B(t) &\Rightarrow z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \text{ avec } x \in A(t) \text{ et } y \in B(t) \\ &\Rightarrow h(z) \geq f(x)^\alpha g(y)^{1-\alpha} > t \end{aligned}$$

et donc  $\alpha A(t) + (1 - \alpha)B(t) \subset \{x \in \mathbb{R}; h(x) > t\}$ , par le **lemme A.1** ,

$$\begin{aligned} \alpha \lambda(A(t)) + (1 - \alpha)\lambda(B(t)) &\leq \lambda(\alpha A(t) + (1 - \alpha)B(t)) \\ &\leq \lambda(\{x \in \mathbb{R}; h(x) > t\}) \end{aligned}$$

En utilisant la concavité du logarithme, on a l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} f d\lambda\right)^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}} g d\lambda\right)^{1-\alpha} &\leq \alpha \int_{\mathbb{R}} f d\lambda + (1 - \alpha) \int_{\mathbb{R}} g d\lambda \\ &\leq \int_0^1 \alpha \lambda(A(t)) + (1 - \alpha)\lambda(B(t)) dt \\ &\leq \int_0^1 \lambda(\{x \in \mathbb{R}; h(x) > t\}) dt \\ &\leq \int_0^{+\infty} \lambda(\{x \in \mathbb{R}; h(x) > t\}) dt = \int_{\mathbb{R}} h d\lambda \end{aligned}$$

Pour  $f, g$  de norme infinie différente de 1, posons  $\tilde{f} = \frac{f}{\|f\|_\infty}$ ,  $\tilde{g} = \frac{g}{\|g\|_\infty}$  et  $\tilde{h} = \frac{h}{\|f\|_\infty^\alpha \|g\|_\infty^{1-\alpha}}$ , on a tout de suite  $\tilde{h}(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq \tilde{f}^\alpha(x) \tilde{g}^{1-\alpha}(y)$  en appliquant ce qui précède, on obtient :

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f d\lambda\right)^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}} g d\lambda\right)^{1-\alpha} \leq \int_{\mathbb{R}} h d\lambda$$

Ce qui finit la preuve pour le cas  $n = 1$ . Si  $n > 1$  supposons que pour  $n - 1$  l'inégalité soit

démontrée et montrons le résultat par récurrence. Posons  $f_t : \begin{matrix} \mathbb{R}^{n-1} & \rightarrow & [0, +\infty) \\ x & \rightarrow & f(t, x) \end{matrix}$  pour  $t \in \mathbb{R}$  et

de même pour  $g$  et  $h$ . Pour  $t, s \in \mathbb{R}$  et  $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,

$$h_{s\alpha + (1-\alpha)t}(\alpha x + (1 - \alpha)y) \geq f_s(x)^\alpha g_t(y)^{1-\alpha}$$

donc par hypothèse :

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{s\alpha + (1-\alpha)t} d\lambda \geq \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_s d\lambda\right)^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_t d\lambda\right)^{1-\alpha}$$

Donc les trois fonctions  $F, G, H$  définies par

$$F(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_t d\lambda(t) \quad \& \quad G(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_t d\lambda(t) \quad \& \quad H(t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_t d\lambda(t)$$

vérifient :

$$H(\alpha s + (1 - \alpha)t) \geq F(t)^\alpha G(s)^{1-\alpha}$$

Donc par le cas  $n = 1$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h d\lambda = \int_{\mathbb{R}} H d\lambda \geq \left( \int_{\mathbb{R}} F d\lambda \right)^\alpha \left( \int_{\mathbb{R}} G d\lambda \right)^{1-\alpha} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda \right)^\alpha \left( \int_{\mathbb{R}^n} g d\lambda \right)^{1-\alpha}$$

Ce qui permet de conclure la preuve par récurrence.  $\square$

**Corollaire A.3** (Brunn-Minkowsky). Soit  $A, B$  deux compacts non vides de  $\mathbb{R}^n$ , on a

- (i) Pour  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $\lambda(\alpha A + (1 - \alpha)B) \geq \lambda(A)^\alpha \lambda(B)^{1-\alpha}$
- (ii)  $\lambda(A + B)^{\frac{1}{n}} \geq \lambda(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda(B)^{\frac{1}{n}}$

*Démonstration.* (i) Prenons  $f = \mathbb{1}_A$ ,  $g = \mathbb{1}_B$  et  $h = \mathbb{1}_{\alpha A + (1-\alpha)B}$ , alors  $f, g, h$  vérifient les hypothèses du théorème de Prékopa-Leindler. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} h d\lambda &\geq \left( \int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda \right)^\alpha \left( \int_{\mathbb{R}^n} g d\lambda \right)^{1-\alpha} \\ \lambda(\alpha A + (1 - \alpha)B) &\geq \lambda(A)^\alpha \lambda(B)^{1-\alpha} \end{aligned}$$

(ii) On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda(B)^{\frac{1}{n}}} \lambda(A + B)^{\frac{1}{n}} &= \lambda\left( \frac{A + B}{\lambda(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda(B)^{\frac{1}{n}}} \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= \lambda\left( \frac{\lambda(A)^{\frac{1}{n}}}{\lambda(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda(B)^{\frac{1}{n}}} \frac{A}{\lambda(A)^{\frac{1}{n}}} + \frac{\lambda(B)^{\frac{1}{n}}}{\lambda(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda(B)^{\frac{1}{n}}} \frac{B}{\lambda(B)^{\frac{1}{n}}} \right)^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Appliquons le point (i) aux ensembles  $\frac{A}{\lambda(A)^{\frac{1}{n}}}$  et  $\frac{B}{\lambda(B)^{\frac{1}{n}}}$  avec  $\alpha = \frac{\lambda(A)^{\frac{1}{n}}}{\lambda(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda(B)^{\frac{1}{n}}}$ , on obtient

$$\frac{1}{\lambda(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda(B)^{\frac{1}{n}}} \lambda(A + B)^{\frac{1}{n}} \geq \lambda\left( \frac{A}{\lambda(A)^{\frac{1}{n}}} \right)^{\alpha/n} \lambda\left( \frac{B}{\lambda(B)^{\frac{1}{n}}} \right)^{(1-\alpha)/n} = 1$$

$\square$

## B - MARTINGALES & INÉGALITÉ DE KHINCHINE

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé,  $\mathcal{G}$  une sous-tribus de  $\mathcal{F}$ , pour tout  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  par le théorème de Randon-Nikodym, il existe un unique  $h \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$  tel que pour tout  $A \in \mathcal{G}$  on ait

$$\int_A h dP = \int_A f dP$$

**Notation.** Par la suite, on note  $h = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$  l'espérance conditionnelle de  $f$ .

Donnons quelques propriétés associées :

**Proposition B.1.**

- (i) Pour toute sous-tribus  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{G}$  on a  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{H})$ .
- (ii) Pour tout  $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\mathbb{E}(f \cdot g|\mathcal{G}) = g \cdot \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ .
- (iii) Si  $f$  et  $\mathcal{G}$  sont indépendantes alors  $\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[f]$ .
- (iv) Si  $f$  est  $\mathcal{G}$ -mesurable alors  $\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) = f$ .

*Démonstration.* (i) Par définition  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{H})$  est l'unique fonction de  $L^1(\Omega, \mathcal{H}, P)$  tel que pour tous  $A \in \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$  :

$$\int_A \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{H}) dP = \int_A \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) dP = \int_A f dP$$

Par unicité  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{H})$ .

(ii) Nous allons le montrer en plusieurs étapes. Premièrement, si  $g = \mathbb{1}_B$  pour  $B \in \mathcal{F}$ , alors pour tout  $A \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}(\mathbb{1}_B f|\mathcal{G}) dP &= \int_A \mathbb{1}_B f dP \\ &= \int_{A \cap B} f dP \\ &= \int_{A \cap B} \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) dP \quad \text{car } A \cap B \subset A \in \mathcal{G} \\ &= \int_A \mathbb{1}_B \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) dP \end{aligned}$$

par unicité  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B f|\mathcal{G}) = \mathbb{1}_B \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ . La linéarité de l'espérance permet de conclure pour des fonctions en escaliers. Or pour toute fonction positive  $g$  mesurable, il existe une suite de fonctions en escaliers  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante telle que  $g = \lim g_n$  presque partout, et donc par le théorème de convergence monotone pour  $A \in \mathcal{G}$  :

$$\int_A g f dP = \lim_n \int_A g_n f dP = \lim_n \int_A \mathbb{E}(g_n \cdot f|\mathcal{G}) dP = \lim_n \int_A g_n \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) dP = \int_A g \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) dP$$

Finalement si  $g$  est une fonction mesurable, alors on écrit  $g = |g|\mathbb{1}_{\{g>0\}} - |g|\mathbb{1}_{\{g<0\}}$  et on applique le point précédent à  $|g|\mathbb{1}_{\{g>0\}}$  et  $|g|\mathbb{1}_{\{g<0\}}$ .

(iii) Soit  $A \in \mathcal{G}$ ,

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) dP &= \int_A f dP \\ &= \mathbb{E}[f] \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_A] \quad \text{par indépendance} \\ &= \int_A \mathbb{E}[f] dP \end{aligned}$$

L'unicité permet de conclure.

(iv) Évident par la définition et l'unicité. □

**Définition.** Soit  $\mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_N \subset \mathcal{F}$  une suite de sous-tribus, alors une suite de fonctions  $f_1, \dots, f_N$  avec  $f_i \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_i, P)$  pour tout  $1 \leq i \leq N$  est appelées martingales de  $\{\mathcal{F}_i\}_{1 \leq i \leq N}$  si pour tout  $i > 2$ ,  $\mathbb{E}(f_i|\mathcal{F}_i) = f_{i-1}$ .

Démontrons l'inégalité de concentration suivante :

**Lemme B.2.** Soit  $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ , alors pour tous  $\varepsilon > 0$  :

$$P(|f - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4 \sum_{i=1}^N \|d_i\|_\infty^2}\right)$$

Où  $d_i = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})$

*Démonstration.* En utilisant l'inégalité  $e^x \leq x + e^{x^2}$  on a pour tous  $\lambda \neq 0$  :

$$\mathbb{E}(e^{\lambda d_i}|\mathcal{F}_{i-1}) \leq \mathbb{E}(\lambda d_i|\mathcal{F}_{i-1}) + \mathbb{E}(e^{\lambda^2 d_i^2}|\mathcal{F}_{i-1})$$

Remarquons alors que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda d_i|\mathcal{F}_{i-1}) &= \lambda \mathbb{E}(d_i|\mathcal{F}_{i-1}) \\ &= \lambda \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)|\mathcal{F}_{i-1}) - \lambda \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})|\mathcal{F}_{i-1}) \\ &= \lambda \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) - \lambda \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\lambda d_i}|\mathcal{F}_{i-1}) &\leq \mathbb{E}(e^{\lambda^2 d_i^2}|\mathcal{F}_{i-1}) \\ &\leq \mathbb{E}(e^{\lambda^2 \|d_i\|_\infty^2}|\mathcal{F}_{i-1}) \\ &\leq e^{\lambda^2 \|d_i\|_\infty^2} \end{aligned}$$



En utilisant la **proposition B.1.ii**, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda \sum_{j=1}^i d_j\right) \middle| \mathcal{F}_{i-1}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{i-1} \lambda d_j\right) e^{\lambda d_i} \middle| \mathcal{F}_{i-1}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{i-1} \lambda d_j\right) \mathbb{E}(e^{\lambda d_i} | \mathcal{F}_{i-1})\right)$$

D'où :

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda \sum_{j=1}^i d_j\right) \middle| \mathcal{F}_{i-1}\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{i-1} e^{\lambda d_j}\right) e^{\lambda^2 \|d_i\|_\infty^2}\right)$$

d'autre part, on a  $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda \sum_{j=1}^i d_j\right) \middle| \mathcal{F}_{i-1}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda \sum_{j=1}^i d_j\right)\right)$  et donc on a

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda \sum_{j=1}^i d_j\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{i-1} e^{\lambda d_j}\right) e^{\lambda^2 \|d_i\|_\infty^2}\right)$$

Par récurrence, on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda \sum_{j=1}^i d_j\right)\right) \leq \exp\left(\lambda^2 \sum_{j=1}^i \|d_j\|_\infty^2\right) \quad (\star)$$

Remarquons maintenant ceci :

$$\sum_{i=1}^N d_i = \mathbb{E}(f | \mathcal{F}) - \mathbb{E}(f | \{\emptyset, \Omega\}) = f - \mathbb{E}[f]$$

Donc pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$\begin{aligned} P(f - \mathbb{E}[f] > \varepsilon) &= P\left(\sum_{i=1}^N d_i > \varepsilon\right) \\ &= P\left(\exp\left(\lambda \sum_{i=1}^N d_i - \varepsilon \lambda\right) > 1\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \sum_{i=1}^N d_i - \varepsilon \lambda\right)\right] \quad \text{par l'inégalité de Markov} \\ &\leq \exp\left(\lambda^2 \sum_{i=1}^N \|d_i\|_\infty^2\right) e^{-\varepsilon \lambda} \quad \text{par } (\star) \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} P(\mathbb{E}[f] - f > \varepsilon) &= P\left(-\sum_{i=1}^N d_i > \varepsilon\right) \\ &= P\left(\exp\left(-\varepsilon \lambda - \lambda \sum_{i=1}^N d_i\right) > 1\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^N d_i\right)\right] e^{-\varepsilon \lambda} \quad \text{par l'inégalité de Markov} \\ &\leq \exp\left(\lambda^2 \sum_{i=1}^N \|d_i\|_\infty^2\right) e^{-\varepsilon \lambda} \quad \text{par } (\star) \end{aligned}$$

finalement

$$P(|f - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(\lambda^2 \sum_{i=1}^N \|d_i\|_\infty^2\right) e^{-\varepsilon \lambda}$$

avec  $\lambda = \frac{\varepsilon}{2 \sum_{i=1}^N \|d_i\|_\infty^2}$  on obtient le résultat recherché :

$$P(|f - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4 \sum_{i=1}^N \|d_i\|_\infty^2}\right)$$

□

Introduisons maintenant les fonctions de Rademacher déjà utilisées dans la preuve de la **proposition 3.2**.

**Définition & Proposition.** On note  $r_k \in L^2([0, 1])$  définie par :

$$r_k(t) = \text{sign}(\sin(\pi 2^k t))$$

les  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont appelées fonctions de Rademacher et elles vérifient les propriétés suivantes :

- (i) Pour  $p \neq q$ ,  $r_p$  et  $r_q$  sont orthogonaux dans  $L^2$ .
- (ii) Pour tous  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^1 r_j d\lambda = 0$ .

*Démonstration.* (i) Supposons  $p < q$ , on a l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \text{sign}(\sin \pi 2^p t) \text{sign}(\sin \pi 2^q t) dt = \sum_{i=0}^{2^p-1} \int_{i2^{-p}}^{(i+1)2^{-p}} \text{sign}(\sin \pi 2^p t) \text{sign}(\sin \pi 2^q t) dt$$

Or pour tout  $t \in ]i2^{-p}, (i+1)2^{-p}[$ , on a  $\text{sign}(\sin \pi 2^p t) = (-1)^i$  et de plus

$$\pi 2^q t \in ]i2^{q-p}\pi, (i+1)2^{q-p}\pi[$$

un intervalle de taille un multiple de  $2\pi$ , et pour finir  $\text{sign}(\sin \pi 2^q t)$  prend les valeurs 1 et  $-1$  sur des intervalles de mêmes longueurs pour  $t \in ]i2^{-p}, (i+1)2^{-p}[$ , donc chaque terme de la somme est nul.

(ii) Pour  $t \in ]0, 1[$  on a  $\pi 2^j t \in ]0, 2^j \pi[$  un intervalle de taille un multiple de  $2\pi$ . Donc  $\sin(\pi 2^j t)$  prend des valeurs positives et négatives sur des ensembles de mêmes mesures, et donc  $\int_0^1 r_j d\lambda = 0$  par symétrie. □

**Théorème B.3** (Inégalité de Khinchine). Pour tout  $1 \leq p < \infty$ , il existe des constantes  $0 < A_p < B_p$  telles que pour tous  $n$  et tous  $(a_i)_{i \leq n} \subset \mathbb{R}$  :

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{A_p} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

*Démonstration.* Soit  $(a_i)_{i \leq n} \neq (0, \dots, 0)$ , posons  $b_i = \frac{a_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{\frac{1}{2}}}$  et  $f = \sum_{i=1}^n b_i r_i$ , on veut appliquer le lemme qui précède à  $f$ . Pour cela, il nous faut définir une suite de sous-tribus de  $\text{Bor}([0, 1])$ . On la construit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_0 &= \{\emptyset, [0, 1]\} \\ \mathcal{F}_1 &= \sigma(r_1) \\ \mathcal{F}_2 &= \sigma(r_1, r_2) \\ &\vdots \\ \mathcal{F}_n &= \sigma(r_1, \dots, r_n) \\ \mathcal{F}_{n+1} &= \text{Bor}([0, 1])\end{aligned}$$

Où  $\sigma(r_1, \dots, r_k)$  désigne la tribus engendrées par les variables aléatoires  $r_1, \dots, r_k$ . On a alors

$$\begin{aligned}d_i &= \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(b_j r_j|\mathcal{F}_i) - \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(b_j r_j|\mathcal{F}_{i-1})\end{aligned}$$

remarquons alors que

- Si  $1 \leq j \leq i < n$ ,  $r_j$  est  $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_i$  mesurable, donc  $\mathbb{E}(r_j|\mathcal{F}_i) = r_j$ .
- Si  $j > i$ ,  $r_j$  est indépendante de  $\mathcal{F}_i$  et donc  $\mathbb{E}(r_j|\mathcal{F}_i) = \mathbb{E}(r_j) = 0$

et donc si  $1 < i \leq n$  :

$$d_i = \sum_{j=1}^i b_j r_j - \sum_{j=1}^{i-1} b_j r_j = b_i r_i$$

et

$$\begin{aligned}d_1 &= b_1 r_1 - \mathbb{E}(b_1 r_1) = b_1 r_1 \\ d_{n+1} &= \mathbb{E}(f|\mathcal{F}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n) = f - f = 0\end{aligned}$$

et on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \|d_i\|_{\infty}^2 = \sum_{i=1}^n |b_i|^2 = 1$$

par le **lemme B.2** pour tout  $\varepsilon > 0$  :

$$\lambda(|f| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)$$

Par changement de variable  $s^p = t$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f|^p d\lambda &= \int_0^{+\infty} \lambda(|f|^p > t) dt = \int_0^{+\infty} p s^{p-1} \lambda(|f| > s) ds \\ &\leq 2p \int_0^{+\infty} s^{p-1} e^{-\frac{s^2}{4}} ds \\ &\leq B_p^p\end{aligned}$$

avec  $B_p = (2p \int_0^{+\infty} s^{p-1} e^{-\frac{s^2}{4}} ds)^{\frac{1}{p}}$ .

Donc pour  $p \geq 2$  :

$$1 = \left( \int_0^1 |f|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_0^1 |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p$$

$$\left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Pour  $p = 1$ , soit  $\theta \in ]0, 1[$  alors

$$\int_0^1 |f|^2 d\lambda = \int_0^1 |f|^{2\theta} |f|^{2(1-\theta)} d\lambda \leq \left( \int_0^1 |f| d\lambda \right)^{2\theta} \left( \int_0^1 |f|^4 d\lambda \right)^{\frac{1-\theta}{2}}$$

$$1 = \left( \int_0^1 |f|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_0^1 |f| d\lambda \right)^{\theta} B_4^{1-\theta}$$

Avec  $\theta = \frac{1}{3}$  on obtient :

$$B_4^{-2} \leq \int_0^1 |f| d\lambda$$

Et pour  $1 \leq p < 2$  on a finalement :

$$B_4^{-2} \leq \int_0^1 |f| d\lambda \leq \left( \int_0^1 |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_0^1 |f|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

c'est-à-dire

$$B_4^{-2} \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

□

## RÉFÉRENCES

---

- [1] G. SCHECHTMAN, “Euclidean sections of convex bodies,” 2008.
- [2] A. GROTHENDIECK, “Sur certains classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers,” 1956.
- [3] V. MILMAN, “New proof of the theorem of A. Dvoretzky on intersections of convex bodies,” 1971.
- [4] Y. GORDON, “On Milman’s inequality and random subspaces which escape through a mesh in  $\mathbb{R}^n$ ,” 1988.
- [5] G. SCHECHTMAN, “A remark concerning the dependence on  $\varepsilon$  in dvoretzky’s theorem,” 1989.
- [6] V. MILMAN et G. SCHECHTMAN, *Asymptotic theory of finite dimensional normed space*. Springer, 1986.

- [7] G. PISIER, *The volume of convex bodies and Banach space geometry*. Cambridge University Press, 1989.
- [8] V. MILMAN, “Dvoretzky theorem - thirty years later,” 1992.