Sorbonne Université

Travaux d'étude et de recherche

Autour du théorème de Dvoretzky

Mathieu GALLO

Enseignant : Omer Friedland

date

Partie 1

La genèse du théorème de Dvoretzky provient d'une conjecture proposé par Grothendieck en 1956, inspiré par le théorème de Dvoretzky-Rogers (1950). Dvoretzky répondra positivement a la conjecture en 1960, aboutissant au résultat suivant :

Théorème 1. *Il existe une fonction* $k :]0,1[\times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, tel que* $\forall \varepsilon \in]0,1[$*,* $k(\varepsilon, n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tous compact convexe symétrique* $K \subset \mathbb{R}^n$*, il existe un sous espace* $V \subset \mathbb{R}^n$ *tel que :*

(i) $\dim V = k(\varepsilon, n)$

(ii) $\exists r > 0$ *tel que ,* $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1+\epsilon)r.(V \cap B_2^n)$

V.Milman en 1971 donna une nouvelle preuve du théorème de Dvoretzky en utilisant le phénomène de concentration de la mesure, il a de plus amélioré le théorème en donnant une estimation de la dépendance en n pour la dimension de V, $k(\epsilon, n) \geq c(\epsilon).\log(n)$.

Théorème 2. *Pour toute* $\varepsilon > 0$*, il existe une constante* $c > 0$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour tous corps convexe symétrique* $K \subset \mathbb{R}^n$*, il existe un sous espace* $V \subset \mathbb{R}^n$ *tel que :*

(i) $\dim V \geq c.\log(n)$

(ii) $\exists r > 0$ *tel que ,* $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1+\epsilon)r.(V \cap B_2^n)$

Il existe une reformulation du théorème en terme de norme.

Théorème 3. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $c > 0$ *tel que pour toute* $n \in \mathbb{N}$ *et pour toute norme* $||.||$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *alors* l_2^k *est* $(1+\varepsilon)$*-isomorphe à* $(\mathbb{R}^n, ||.||)$ *pour un* $k \geq c.\log(n)$*.*

Nous allons montrer que ses deux derniers théorème sont équivalent.

(2)⇒(3) Posons $K = \mathrm{Adh}(B_{||.||}(0,1)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$ et appliquons le théorème 2, celui ci nous procure un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$, avec $\dim V := k \geq c.\log(n)$ et $V \cap K$ est ε-ecuclidien.
Donnons nous une base orthonormée $\{v_j\}_{1\leq j \leq k}$ de V et posons

$$\phi : \begin{array}{ccc} (V, ||.||) & \mapsto & (\mathbb{R}^k, |.|_k) \\ \sum_{i=1}^k x_i v_i & \to & \sum_{i=1}^k x_i e_i \end{array}$$

Soit $v \in V \cap K$ tel que $||v|| = 1$, comme $K \cap V$ est ε-euclidien on a que

$$r \leq |v|_n \leq (1+\varepsilon)r$$

La borne supérieur est immédiate car $K \cap V \subset r(1+\varepsilon).(V \cap B_2^n)$, pour la borne inférieur il suffit de remarquer que $(V \cap K)$ est un fermer de V qui contient l'ouvert $r.(V \cap B_2^n)$ de V, comme v est dans la frontière de $K \cap V$ il n'est pas dans l'intérieur de $K \cap V$ et donc dans aucun ouvert contenue dans $V \cap K$.
Fixons des coordonnées à v dans la base $\{v_j\}_{1\leq j\leq k}$, $v = \sum_{i=1}^k x_i v_i$, on a que $|v|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$ et donc :

$$r \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2} \leq (1+\varepsilon)r$$

Mais comme $|\phi(v)|_k = \left|\sum_{i=1}^k x_i e_i\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$, on a que :

$$r \leq |\phi(v)|_k \leq (1+\varepsilon)r$$

Pour tous $x \in V \setminus \{0\}$ on peut appliqué ce qui précède à $\frac{x}{||x||}$, en utilisant la linéarité de ϕ on obtient :

$$r||x|| \le |\phi(x)|_k \le (1+\varepsilon) r ||x||$$

(3)⇒(2) Soit $\varepsilon > 0$, par le théorème 3 il existe $c > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$ il existe un $k > c.\log(n)$ tel que l_2^k est $(1+\varepsilon)$-isomorphe à $(R^n, ||.||)$ pour n'importe quelle norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$. Considérons un compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$ et $||y|| = \inf\left\{\lambda > 0\,;\, \frac{y}{\lambda} \in K\right\}$, alors $\exists T : l_2^k \to (\mathbb{R}^n, ||.||)$ linéaire tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^k\,,\ \ |x| \le ||Tx|| \le (1+\varepsilon)|x|$$

ceci implique immédiatement que T est injective, notons $V = \mathrm{Im}\, T$, alors la co-restriction a V de T est bijective. Soit $y \in \partial(K \cap V)$, c'est à dire $||y|| = 1$, on sait qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^k$ tel que $Tx = y$, on en déduit donc

$$|x| \le 1 \le (1+\varepsilon)|x| \iff \frac{1}{1+\varepsilon} \le |x| \le 1$$

la convexité et la symétrie centrale de $K \cap V$ nous permet de conclure que :

$$\frac{1}{1+\varepsilon} T(B_2^k) \subset K \cap V \subset T(B_2^k)$$

Partie 2

Mesures de Haar

Définition & Théorème. *(Mesures de Haar) Soit (X,d) un espace métrique, G un groupe topologique localement compact qui agit sur X et tel que :*

$$\forall x,y \in X \ \ \forall g \in G\,,\ d(gx,gy) = d(x,y) \tag{$\star$}$$

alors il existe une unique mesure à un coefficient multiplicatif près, régulière définit sur les boréliens de X qui est invariante sous l'action de G, cette mesure est appeler mesure de Haar de X (où G est sous-entendu).

Considérons $X = S^{n-1}$ avec la distance euclidienne et $X = O(n)$ avec la norme $||M|| = \sup_{|x|=1}|Mx|$ alors $G = O(n)$ le groupe des isométries vérifie $(\star)$ pour la multiplication matricielle sur S^{n-1} et $O(n)$, par le théorème précédent on peut définir sans ambiguïté μ,ν les mesures de Haar normalisés respectivement sur S^{n-1} et $O(n)$. Montrons quelques propriété qui serons utile par la suite.

Lemme. *Soit $f \in C(S^{n-1})$ et $Y = (g_1,...,g_n)$ où les $\{g_i\}_{1\le i\le n}$ sont i.i.d suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors*

$$\int_{S^{n-1}} f\,d\mu = \mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{Y}{|Y|}\Big)\Big]$$

Démonstration. Par unicité de la mesure de Haar , il nous suffit de montrer que pour tous $M \in O(n)$ et $f \in C(S^{n-1})$:

$$\mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{MY}{|MY|}\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{Y}{|Y|}\Big)\Big]$$

$$\mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{MY}{|MY|}\Big)\Big] = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f\Big(\frac{My}{|y|}\Big)\exp\Big\{-\frac{1}{2}|y|^2\Big\}dy_1...dy_n = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f\Big(\frac{y}{|y|}\Big)\exp\Big\{-\frac{1}{2}|M^{-1}y|^2\Big\}dy_1...dy_n$$

comme $|\det M| = 1$ et $|M^{-1}y| = |y|$, on a :

$$\mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{MY}{|MY|}\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{Y}{|Y|}\Big)\Big]$$

□

Lemme. *Soit $A \subset S^{n-1}$ un borélien alors pour tous $x \in S^{n-1}$*

$$\nu\Big(T \in O(n)\,;\ Tx \in A\Big) = \mu\big(A\big)$$

Démonstration. Soit $M \in O(n)$ et $x \in S^{n-1}$ alors la mesure définis pas $\omega_x(A) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\ Tx \in A\Big)$ vérifie

$$\omega_x(MA) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\ M^T Tx \in A\Big) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\ Tx \in A\Big) = \omega_x(A)$$

L'unicité de la mesure de Haar nous permet de conclure que $\omega_x = \mu$ car $\omega_x(S^{n-1}) = 1$ et en particulier ω_x ne dépend pas de x. □

Début de la démonstration du théorème de Dvoretzky

Théorème 4. *Soit $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L > 0$, alors*

$$\mu\Big\{x \in S^{n-1}\,;\, |f(x) - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon\Big\} \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2L^2}}$$

Dans cette partie on s'intéresse a démontrer le résultat suivant :

Théorème 5. *Pour tous $\varepsilon > 0$ il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$ il existe un sous-espace $V \subset \mathbb{R}^n$ tel que :*

(i) $\dim V \geq c.\left(\frac{E}{b}\right)^2 n$

(ii) *Pour tous $x \in V$: $(1-\varepsilon)E|x| \leq ||x|| \leq (1+\varepsilon)E|x|$*

où $E = \int_{S^{n-1}} ||y|| d\mu(y)$ et $b > 0$ est le plus petit réel positif tel que $||.|| \leq b|.|$.

Démonstration. Soit $1 > \delta, \theta > 0$ tel que

$$\frac{1}{1-\theta} < 1 + \varepsilon/2 \text{ et } \frac{1-2\theta}{1-\theta} > 1 - \varepsilon/2$$

$$\frac{1+\delta}{1-\theta} < 1 + \varepsilon \text{ et } \frac{1-2\theta-\delta}{1-\theta} > 1 - \varepsilon$$

Posons $\eta = \frac{\delta E}{b}$ et fixons $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace et $M \subset V_0 \cap S^{n-1}$ un θ-net, où $\dim V_0 = k$ avec $|M| < \frac{1}{2}e^{\frac{\eta^2 n}{2}} < (\frac{3}{\theta})^k$. (on justifira l'existence d'un tel ensemble dans lemme qui suit cette démonstration)

$$\nu\Big(\cap_{x\in M}\big\{T \in O(n)\,;\, \big|||Tx|| - E\big| \leq `b\eta\big\}\Big) = 1 - |M|\nu\big(T \in O(n)\,;\, \big|||Ty|| - E\big| > b\eta\big), \text{ pour un } y \in M.$$

or $\nu\big(T \in O(n)\,;\, \big|||Ty|| - E\big| > b\eta\big) = \mu\Big(y \in S^{n-1}\,;\, \big|||y|| - E\big| > b\eta\Big) \leq 2e^{-\frac{\eta^2 n}{2}}$, donc :

$$\nu\Big(\cap_{x\in M}\big\{T \in O(n)\,;\, \big|||Tx|| - E\big| \leq b\eta\big\}\Big) \geq 1 - |M|2e^{-\frac{\eta^2 n}{2}} > 0$$

Il existe donc $T \in O(n)$ tel que pour tous $x \in M$ on ait $\big|||Tx|| - E\big| \leq b\eta$, comme T est une isométrie on a que $N =: TM$ est un θ-net sur $V \cap S^{n-1}$ avec $V =: TV_0$.

Si $x \in V \cap S^{n-1}$, il existe $\{y_i\} \subset N$ et $\{\beta_i\}$ une suite avec $|\beta_i| \leq \theta^i$ tel que $x = y_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i y_i$, on a donc

$$||x|| \leq ||y_1|| + \sum_{i=2}^{\infty} \theta^i ||y_i|| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \theta^i (b\eta + E) = \frac{1}{1-\theta}(b\eta + E)$$

Trouvons maintenant une minoration de $||x||$, on a $||x - y_1|| = \Big|\Big|\sum_{i=2}^{\infty} \beta^i y_i\Big|\Big| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \theta^i ||y_i|| \leq \frac{\theta}{1-\theta}(b\eta + E)$ et donc

$$||x|| \geq ||y_1|| - ||x - y_1|| \geq (b\eta + E) - \frac{\theta}{1-\theta}(E + b\eta) = E\frac{1-2\theta}{1-\theta} - b\eta\frac{1}{1-\theta}$$

$$E\frac{1-2\theta}{1-\theta} - b\eta\frac{1}{1-\theta} \leq ||x|| \leq \frac{1}{1-\theta}(b\eta + E)$$

Or on a $E\frac{1-2\theta}{1-\theta} - b\eta\frac{1}{1-\theta} = E\frac{1-2\theta-\delta}{1-\theta} > E(1-\varepsilon)$ et $\frac{1}{1-\theta}(b\eta+E) = E\frac{1+\delta}{1-\theta} < E(1+\varepsilon)$ et donc

$$E(1-\varepsilon) \leq ||x|| \leq E(1+\varepsilon)$$

Pour $y \in V$ il suffit de prendre $x = \frac{y}{|y|}$ et l'on a :

$$E(1-\varepsilon)|y| \leq ||y|| \leq E(1+\varepsilon)|y|$$

Il ne nous reste plus qu'as discuté de la minoration de k, en prenant le logarithme dans $\frac{1}{2}e^{\frac{\eta^2 n}{2}} < (\frac{3}{\theta})^k$, on obtient :

$$k > \frac{1}{log(3/\theta)}\Big(\frac{\delta^2 E^2}{2b^2}n - log(2)\Big)$$

Je n'arrive pas a conclure pour la dimension, par rapport au livre de Gideon et Milman j'ai remplacer dans les notations ε par η, ε' par δ, δ par ε □

Lemme. *Pour tous $0 < \varepsilon < 1$ il existe un ε-net sur S^{k-1} de cardinal inférieur à $\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^k$.*

Démonstration. Soit $N = \{x_i\}_{i=1,\ldots,m}$ un sous ensemble de S^{k-1} maximal pour la propriété : $x, y \in N$, $|x-y| \geq \varepsilon$, c'est à dire pour tous $x \in S^{k-1} \backslash N$ il existe $i \leq m$ tel que $|x - x_i| < \varepsilon$, donc N est un ε-net. Les boules de centre x_i et de rayon $\varepsilon/2$ sont donc disjointe deux à deux et toute contenue dans $B(0, 1+\frac{\varepsilon}{2})$ d'ou :

$$m\text{Vol}(B(x_1, \frac{\varepsilon}{2})) = \sum_{i=1}^{m} \text{Vol}(B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})) = \text{Vol}(\cup_{1\leq i\leq m} B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})) \leq \text{Vol}(B(0, 1+\frac{\varepsilon}{2}))$$

$$m \leq \frac{\text{Vol}(B(0,1+\frac{\varepsilon}{2}))}{\text{Vol}(B(x_1,\frac{\varepsilon}{2}))} = \left(\frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^k = \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^k \leq \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^k$$

□

Partie 3

Estimation de la borne inférieur du maximum d'un vecteur gaussien

Dans la suite pour estimer E nous aurons besoin d'une minoration de $\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big]$ pour des g_i i.i.d suivant $\mathcal{N}(0,1)$, nous démontrons une telle borne dans cette section.

Lemme. *(ratio de Mill) Soit g une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors*

$$\mathbb{P}(g > t) \geq \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,t+2}$$

Démonstration. □

Théorème 6. *$\exists A, B > 0$ tel que pour tout $N > 1$, et $(g_1, ..., g_N)$ des variables aléatoires i.i.d suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$, on est :*

$$\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big] \geq A\sqrt{\log N} - B$$

Démonstration. Fixons ces notations :

(i) $C(N) = \sqrt{2 - \frac{2\,\log\log N}{\log N}}$

(ii) $\beta_N = C(N)\sqrt{\log N}$

(iii) $A = \cup_{i\leq N}\Big\{X_i \geq \beta_N\Big\}$

La démonstration va reposer sur l'égalité suivante :

$$\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big] = \mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big|A\Big]\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big|A^c\Big]\mathbb{P}(A^c) \qquad (\star)$$

Dans un premier temps, on s'intéresse à minoré la partie $\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big|A^c\Big]$.

$$\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big|A^c\Big] \geq \mathbb{E}\Big[g_1\Big|A^c\Big] = \frac{1}{\mathbb{P}(A^c)}\int_{\mathbb{R}^N} x_1 \mathbb{1}_{A^c}(x_1,...,x_N)\prod_{i=1}^{N}\frac{\exp\big(-\frac{1}{2}x_i^2\big)}{\sqrt{2\pi}}dx_1...dx_N$$

$$\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big|A^c\Big] \geq \frac{1}{\mathbb{P}\big(g_1 \leq \beta_N\big)^N}\Big(\int_{\mathbb{R}}\frac{\exp\big(-\frac{1}{2}x^2\big)}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{1}_{\{g_1\leq\beta_N\}}dx\Big)^{N-1}\int_{-\infty}^{\beta_N} x\exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big|A^c\Big] \geq \frac{1}{\mathbb{P}\big(g_1 \leq 0\big)}\int_{-\infty}^{0} x\exp\Big(-\frac{1}{2}x^2\Big)\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

En substituant dans $(\star)$:

$$\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big] \geq \beta_N\mathbb{P}(A) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-\mathbb{P}(A)) = \Big(\beta_N + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big)\mathbb{P}(A) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

On s'intéresse maintenant a minoré $\mathbb{P}(A)$.

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \big(1 - \mathbb{P}(g_1 > \beta_N)\big)^N$$

avec $1 - x \leq \exp(-x)$ on a :

$$\mathbb{P}(A) \geq 1 - \exp\big(-N\mathbb{P}(g_1 > \beta_N)\big)$$

avec le ratio de Mill on obtient :

$$\mathbb{P}(A) \geq 1 - \exp\Big(-N\exp\big(-\frac{\beta_N^2}{2}\big)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta_N + 2}\Big)$$

On peut simplifier a l'intérieur de l'exponentielle :

$$N\exp\big(-\frac{\beta_N^2}{2}\big)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta_N + 2} = N^{1-\frac{C(N)^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}C(N)\sqrt{\log N} + 2}$$

$$1 - \frac{C(N)^2}{2} = 1 - 1 + \frac{\log\log N}{\log N} = \frac{\log\log N}{\log N}$$

$$N^{\frac{\log\log N}{\log N}} = \exp\Big(\log\log N\Big) = \log N$$

$$N\exp\big(-\frac{\beta_N^2}{2}\big)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\beta_N + 2} = \frac{\log N}{\sqrt{2\pi}C(N)\sqrt{\log N} + 2} \geq \frac{\sqrt{\log N}}{\sqrt{2\pi}C(N) + 2}$$

d'où

$$\mathbb{P}(A) \geq 1 - \exp\big(-\frac{\sqrt{\log N}}{\sqrt{2\pi}C(N) + 2}\big)$$

Lemme. *Pour $N \geq 2$ on a $C(N) \leq C =: C(2) \approx 1,749$*

Démonstration. $C'(x) = \frac{1-\log\log x}{2xC(x)\log(x)^2}$, donc $C'(x) = 0$ si et seulement si $x = e^e$, si $x < e^e$ alors $C'(x) < 0$ et si $x > e^e$ alors $C'(x) > 0$, de plus

$$\lim_{x\to+\infty} C(x) = \lim_{x\to\infty}\sqrt{2 - \frac{2\,\log\log x}{\log x}} = \sqrt{2}$$

Comme $C > \sqrt{2}$ on a $C(x) \leq C$ pour tous $x \geq 2$. □

Par le lemme on a donc

$$\mathbb{P}(A) \geq 1 - \exp\big(-K\sqrt{\log N}\big)\text{, avec } K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}C + 2} \approx 0.157.$$

On injecte finalement dans $\mathbb{E}\big[\max_{i\leq N} g_i\big]$

$$\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big] \geq \big(\beta_N + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\big)(1 - \exp\big(-K\sqrt{\log N}\big)) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big] \geq \big(\sqrt{2\log N - 2\,\log\log N} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\big)(1 - \exp\big(-K\sqrt{\log N}\big)) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

Pour $x \geq 2$ on a $\exp(-K\sqrt{\log x}) \leq \exp(-K\sqrt{\log 2})$, en effet comme

$$\big(\exp(-K\sqrt{\log x})\big)' = -\frac{K}{2\sqrt{\log x}}\exp(-K\sqrt{\log x}) < 0$$

par la suite posons $a =: 1 - \exp(-K\sqrt{\log 2}) \approx 0,123$

$$\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big] \geq \Big(\sqrt{2\log N - 2\ \log\log N} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Big)a - \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big] \geq a\sqrt{2\log N - 2\ \log\log N} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-a)$$

$$\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big] \geq aC(N)\sqrt{\log N} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-a)$$

$$\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big] \geq aC(e^e)\sqrt{\log N} - \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-a)$$

posons finalement $A = aC(e^e) \approx 0.138$ et $B = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1-a) \approx 0,699$ alors on a :

$$\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big] \geq A\sqrt{\log N} - B$$

□

Estimation de E

Par la suite on fixe $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, $K = \mathrm{Adh}\big(B_{||.||}\big)$ tel que B_2^n soit l'ellipsoïde de volume maximale incluse dans K, on a donc $b = 1$. Dans cette partie nous allons donner une estimation de E.

Défintion. *Un ellipsoïde D de $\mathbb{R}^n$ est l'image de la boule unité euclidienne par un élément de $GL(n)$.*

Admettons le théorème suivant de Fritz John (1910-1994) :

Théorème 7. *(Ellipsoïde de John) Tous compact convexe symétrique d'intérieur non vide contient un unique ellipsoïde de volume maximale.*

Lemme. *(Dvoretzky-Rogers) Il existe une base orthonormée $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ tel que*

$$\forall 1 \leq i \leq n,\ \ e^{-1}\Big(1 - \frac{i-1}{n}\Big) \leq ||x_i|| \leq 1$$

Démonstration. S^{n-1} est compact et $||.||$ continue, on peux donc prendre un $x_1 \in S^{n-1}$ qui maximise $||.||$ c'est à dire $||x_1|| = 1$, supposons que l'on ai $x_1, \dots, x_{k-1}$ avec $k \leq n$ tel que pour tous $1 \leq i \leq k-1$, x_i maximise $||.||$ sur $S^{n-1} \cap_{j<i} x_j \neq \emptyset$ car les $\{x_i\}_{i=1,\dots,k-1}$ sont orthogonaux deux à deux et est compact, on peut donc répéter le procéder pour trouver

x_k qui maximise $S^{n-1} \cap_{j<k} x_j$, par récurrence on peut donc avoir n vecteurs avec ses propriétés. Fixons $1 \le k \le n$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ et définissons :

$$\mathscr{E} = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \,;\, \sum_{i=1}^{k-1} (\frac{a_i}{a})^2 + \sum_{i=k}^{n} (\frac{b_i}{b})^2 \le 1 \Big\}$$

Supposons $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in \mathscr{E}$, alors $\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \in aB_2^n$ et donc $||\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i|| \le a$. Si $x \in \mathrm{Vect}(x_k, ..., x_n) \cap B_n^2$ on a $||x|| \le ||x_k||$ par construction, et donc $\sum_{i=k}^{n} a_i x_i \in bB_2^n \Rightarrow ||\sum_{i=k}^{n} a_i x_i|| \le b||x_k||$, ce qui nous donne la majoration suivante

$$||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| \le ||\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i|| + ||\sum_{i=k}^{n} a_i x_i|| \le a + b||x_k||$$

Posons $\phi \in GL(n)$ définit par $\phi(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} a a_i x_i + \sum_{i=k}^{n} b a_i x_i$ on a $\phi = \mathrm{diag}(\overbrace{a, ..., a}^{(k-1)\times}, \overbrace{b, ..., b}^{(n-k+1)\times})$ et donc $\det\phi = a^{k-1} b^{n-k+1}$ d'où :

$$\int_{\mathscr{E}} dx_1...dx_n = \int_{B_2^n} \det\phi dx_1...dx_n = a^{k-1} b^{n-k-1} \int_{B_2^n} dx_1...dx_n$$

On prend $a + b||x_k|| = 1$ de sorte que $\mathscr{E} \subset K$, comme B_2^n est l'ellipsoïde de volume maximale inclue dans K, on a que

$$1 \ge \frac{\int_{\mathscr{E}} dx_1...dx_n}{\int_{B_2^n} dx_1...dx_n} = a^{k-1} b^{n-k+1}$$

Fixons donc pour $k \ge 2$, $b = \frac{1-a}{||x_k||}$ et $a = \frac{k-1}{n}$, en remplaçant dans l'inégalité on obtient :

$$1 \ge a^{k-1} \Big(\frac{1-a}{||x_k||}\Big)^{n-k+1} \iff ||x_k|| \ge a^{\frac{k-1}{n-k+1}} (1-a) = \Big(\frac{k-1}{n}\Big)^{\frac{k-1}{n-k+1}} \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)$$

et $\log a^{\frac{k-1}{n-k+1}} = \frac{k-1}{n-k+1} \log\Big(\frac{k-1}{n}\Big) > -1.$ □

Proposition. *(Estimation de E) Il existe $c = c(\varepsilon) > 0$ tel que $E \ge c\sqrt{\frac{\log n}{n}}$.*

Démonstration. Par le lemme de Dvoretzky-Rogers il existe une base orthonormé $x_1, ..., x_n$ tel que pour $1 \le i \le [n/2]$, $||x_i|| \ge e^{-1}\Big(1 - \frac{n/2-1}{n}\Big) = e^{-1}\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\Big) \ge (2e)^{-1}$. Comme μ est invariante par composition par une transformation orthogonale on a que

$$E =: \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i||\, d\mu(a) = \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n||\, d\mu(a)$$

et donc

$$\int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i||\, d\mu(a) = \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i||\, d\mu(a) + \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n||\, d\mu(a)$$

$$\int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i||\, d\mu(a) \ge \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} 2\max\Big\{||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i||, ||a_n x_n||\Big\} d\mu(a) \ge ... \ge \int_{S^{n-1}} \max_{1\le i\le n} \Big\{|a_i|\, ||x_i||\Big\} d\mu(a)$$

$$\int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i||\, d\mu(a) \ge \int_{S^{n-1}} \max_{1\le i\le [n/2]} \Big\{|a_i|\, ||x_i||\Big\} d\mu(a) \ge (2e)^{-1} \int_{S^{n-1}} \max_{1\le i\le [n/2]} |a_i| d\mu(a)$$

Soit $(g_1,...,g_n)$, des variables aléatoire i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq [n/2]} |a_i| d\mu(a) = \mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{-\frac{1}{2}} \max_{1\leq i\leq [n/2]} |g_i|\Big]$$

Lemme. *$\left(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\right)^{\frac{1}{2}}(g_1,...,g_n)$ et $\left(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ sont indépendants.*

Démonstration du lemme. □

Par le lemme on à donc

$$\mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{-\frac{1}{2}} \max_{1\leq i\leq [n/2]} |g_i|\Big].\mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big] = \mathbb{E}\big[\max_{1\leq i\leq [n/2]} |g_i|\big]$$

la fonction racine carré est concave, par l'inégalité de Jensen on a donc :

$$\mathbb{E}\big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{\frac{1}{2}}\big] \leq \mathbb{E}\big[\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\mathbb{E}[g_1^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$

Et finalement par le théorème 6 :

$$E \geq (2e\sqrt{n})^{-1}\mathbb{E}\big[\max_{1\leq i\leq [n/2]} |g_i|\big] \geq \frac{(2e\sqrt{n})^{-1}}{A\sqrt{\log(n/2)} - B}$$

□