Sorbonne Université

Travaux d'étude et de recherche

Autour du théorème de Dvoretzky

"It soon became clear that an outstanding breakthrough in Geometric Functional Analysis had been achieved."

Vitali Milman à propos du théorème de Dvoretzky dans *Dvoretzky theorem - thirty years later*

Mathieu GALLO

Enseignant : Omer Friedland

date

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Le mémoire suivant suit la série de lectures de Gideon Schetchman , "*Euclidean sections of convex bodies*" [1].

Alexandre Grothendieck en 1956 dans son article "*Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le théorème de Dvoretzky-Rogers*" [2], inspiré par le lemme de Dvoretzky-Rogers (1950) propose une conjecture à laquelle Aryeh Dvoretzky répondra positivement en 1961, aboutissant au résultat suivant :

Théorème 1 (A. Dvoretzky, 1961)**.** Il existe une fonction $k :]0,1[\times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tel que $\forall \varepsilon \in]0,1[$, $k(\varepsilon, n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$ tels que :

(i) $\dim V = k(\varepsilon, n)$

(ii) $\exists r > 0$ tel que , $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1+\varepsilon) r.(V \cap B_2^n)$

Dans le papier original de Dvortezky l'estimation de k était :

$$k(\varepsilon, n) \geq c(\varepsilon) \sqrt{\frac{\log n}{\log \log n}} \qquad \text{pour un } c(\varepsilon) > 0$$

Vitali Milman en 1971 donna une nouvelle preuve du théorème de Dvoretzky en utilisant le phénomène de concentration de la mesure [3], il a de plus amélioré le théorème en donnant l'estimation de la dépendance en n pour la dimension de V : $k(\varepsilon, n) \geq c(\varepsilon).\log(n)$.

Théorème 2 (V. Milman, 1971)**.** Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$ tels que :

(i) $\dim V \geq c.\log(n)$

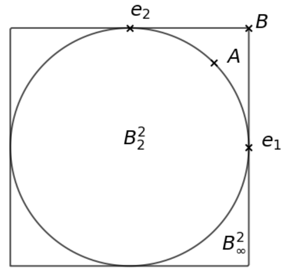
(ii) $\exists r > 0$ tel que , $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1+\varepsilon) r.(V \cap B_2^n)$

La dépendance de c par rapport à ε donné par V.Milman était $c \sim \frac{\varepsilon^2}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$ [3], c'est cette dépendance qui serras démontrée dans ce mémoire. Y.Gordon à montrer en 1988 l'on pouvais prendre $c \sim \varepsilon^2$ avec les même outils que V.Milman dans [4], plus récemment en 2006, G.Schechtman à montrer que l'on pouvais prouver le théorème de Dovretzky avec la même preuve que V. Milman pour $c \sim \varepsilon^2$ en construisant de manière plus précise le θ-net [5] (voir preuve de **théorème 2.4**) .

Notation. Pour la suite on utiliseras les notations :

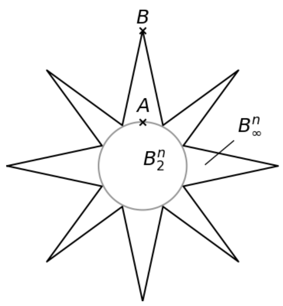
- $|.|_n$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, ou $|.|$ si il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension.
- $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, |x| = 1\}$, la $(n-1)$-sphère euclidienne.

Commençons par donner une légère interprétation géométrique du théorème, prenons l'exemple de $K = B_{||.||_\infty}$ dans le cas $n = 2$ la distance entre un point situé sur un quart du cercle et le coin le plus proche est $\sqrt{2} - 1$, nous pouvons facilement généraliser cela pour $n > 2$. Prenons par exemple les points $A = (\frac{1}{\sqrt{n}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}) \in S^{n-1}$ et $B = (1, ..., 1) \in \partial B^n_\infty$ le coin de B^n_∞ le plus proche de A, on peut joindre A aux points $e_j \in \partial B^n_\infty \cap S^{n-1}$ de la base canonique pour $1 \leq j \leq n$, et on a les distances suivantes :



$$
\begin{aligned}
|A - e_j| &= \sqrt{2(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})} \underset{n\to\infty}{\to} \sqrt{2} \\
|e_i - e_j| &= \sqrt{2} \quad \text{pour } i \neq j \\
|A - B| &= \sqrt{n} - 1 \underset{n\to\infty}{\to} \infty \\
|e_j - B| &= \sqrt{n - 1} \underset{n\to\infty}{\to} \infty
\end{aligned}
$$

Donc lorsque n est grand, si l'on se place sur la $(n-1)$-sphère euclidienne, B^n_∞ semble être formé de 2^n *"piques"* qui sont de plus en plus grands avec n. Mais le théorème de Dvoretzky nous affirme qu'il existe une section C de B^n_∞ de dimension supérieure à $c \log n$ où c ne dépendant pas de n, tel que C soit arbitrairement proche de la boule euclidienne, c'est-à-dire une section sur laquelle on ne voit pas ces *"piques"*. En terme plus mathématique, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$ de dimension plus grande que $c(\varepsilon) \log n$ tel que pour un certain $r > 0$:



$$r.(V \cap B^n_2) \subset V \cap B^n_\infty \subset (1 + \varepsilon) r.(V \cap B^n_2)$$

Nous allons maintenant donner une reformulation du théorème de Dvoretzky en terme de norme, en utilisant la relation entre un compact convexe symétrique K et la norme $||y||_K = \inf\{\lambda \ ; \ \frac{y}{\lambda} \in K\}$.

Défintion. Soit $(X, ||.||_X), (Y, ||.||_Y)$ deux espaces normés et $C > 0$, on dit que X s'injecte C-continûment dans Y, si il existe $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ tel que pour tout $x \in X$

$$||x||_X \leq ||Tx||_Y \leq C||x||_X$$

Théorème 3. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute normes $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$, ℓ^k_2 s'injecte $(1 + \varepsilon)$-continûment dans $(\mathbb{R}^n, ||.||)$ pour un $k \geq c.\log(n)$.

Montrons que le **théorème 2** et le **théorème 3** sont équivalents.

(2)⇒(3)

Posons K = Adh$(B_{||.||}(0, 1))$ = $\{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$ et appliquons le théorème 2, celui-ci nous procure un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$, avec $\dim V := k \geq c.\log(n)$ et $V \cap K$ est ε-euclidien. Donnons-nous une base orthonormée $\{v_j\}_{1\leq j\leq k}$ de V et posons

$$T : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^k, |.|_k) & \mapsto & (V, ||.||) \\ \sum_{i=1}^k x_i e_i & \to & \sum_{i=1}^k x_i v_i \end{array}$$

Soit $x \in \mathbb{R}^k$ tel que $||Tx|| = 1$, comme $K \cap V$ est ε-euclidien on a que

$$r \leq |Tx|_n \leq (1+\varepsilon)r, \text{ pour un } r > 0$$

La borne supérieure est immédiate car $K \cap V \subset r(1+\varepsilon).(V \cap B_2^n)$, pour la borne inférieure il suffit de remarquer que $(V \cap K)$ est un fermer de V qui contient l'ouvert $r.(V \cap B_2^n)$ de V, comme Tx est dans la frontière de $K \cap V$ il n'est pas dans l'intérieur de $K \cap V$ et donc dans aucun ouvert contenu dans $V \cap K$. Remarquons que $|Tx|_n = |x|_k$, donc

$$r \leq |x|_k \leq (1+\varepsilon)r$$

Il suffit d'appliqué cela à $\frac{x}{||Tx||}$ pour $x \neq 0$

$$r||Tx|| \leq |x|_k \leq (1+\varepsilon)r||Tx||$$

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)r}|x|_k \leq ||Tx|| \leq \frac{1}{r}|x|_k$$

$$r|x|_k \leq ||\tilde{T}x|| \leq (1+\varepsilon)r|x|_k$$

avec $\tilde{T} = r(1+\varepsilon)T$, remarquons que la quantité importante est $||T||.||T^{-1}|| = ||\tilde{T}||.||\tilde{T}^{-1}|| \leq 1+\varepsilon$.
(3)⇒(2)
Soit $\varepsilon > 0$, par le théorème 3 il existe $c > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$ il existe un $k > c.\log(n)$ et ℓ_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans $(R^n, ||.||)$ pour n'importe quelle norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$. Considérons un compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$ et $||y|| = \inf\left\{\lambda > 0 ; \frac{y}{\lambda} \in K\right\}$, alors $\exists T : \ell_2^k \to (\mathbb{R}^n, ||.||)$ linéaire tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^k, \ |x| \leq ||Tx|| \leq (1+\varepsilon)|x|$$

ceci implique immédiatement que T est injective, notons $V = \mathrm{Im}T$, alors la co-restriction à V de T est bijective. Soit $y \in \partial(K \cap V)$, c'est-à-dire $||y|| = 1$, on sait qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^k$ tel que $Tx = y$, on en déduit donc

$$|x| \leq 1 \leq (1+\varepsilon)|x| \iff \frac{1}{1+\varepsilon} \leq |x| \leq 1$$

la convexité et la symétrie centrale de $K \cap V$ nous permet de conclure que :

$$\frac{1}{1+\varepsilon}T(B_2^k) \subset K \cap V \subset T(B_2^k)$$

Pour conclure nous nous référençons au **lemme 1.5** qui seras démontrer par la suite qui dit que toutes ellipsoïdes de dimension k admet une section de dimension $[k/2]$ qui soit un multiple d'une boule euclidienne.

1 PRÉLIMINAIRE

1.1. MESURES DE HAAR

Définition & Théorème (Mesures de Haar)**.** Soit (X,d) un espace métrique, G un groupe topologique localement compact qui agit sur X et tel que :

$$\forall x,y \in X \ \ \forall g \in G\,,\ d(gx,gy) = d(x,y) \tag{$\star$}$$

alors il existe une unique mesure à un coefficient multiplicatif près, régulière définie sur les boréliens de X qui est invariante sous l'action de G, cette mesure est appelée mesure de Haar de X (où G est sous-entendu).

Les 3 exemples suivant d'espace métrique vérifie $(\star)$ pour $G = O(n)$,

(i) $X = S^{n-1}$ muni de la distance euclidienne

(ii) $X = O(n)$ avec la norme $||M|| = \sup_{|x|=1}|Mx|$

(iii) $X = G_{n,k}$ l'ensemble des sous espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension k muni de la distance

$$d(E,F) = \sup_{\substack{x\in E\cap S^{n-1}\\ y\in F\cap S^{n-1}}} |x-y|$$

Notation. Par le théorème précédent on peut définir sans ambiguïté μ,ν,σ les mesures de Haar normalisés respectivement sur S^{n-1}, $O(n)$ et $G_{n,k}$.

Montrons quelques propriétés qui seront utiles par la suite.

Lemme 1.1. Soit $f \in C(S^{n-1})$ et $Y = (g_1,\dots,g_n)$ où les $\{g_i\}_{1\le i\le n}$ sont i.i.d suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors

$$\int_{S^{n-1}} f\,d\mu = \mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{Y}{|Y|}\Big)\Big]$$

Démonstration. Par unicité de la mesure de Haar , il nous suffit de montrer que pour tous $M \in O(n)$ et $f \in C(S^{n-1})$:

$$\mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{MY}{|MY|}\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{Y}{|Y|}\Big)\Big]$$

$$\mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{MY}{|MY|}\Big)\Big] = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f\big(\frac{My}{|y|}\big)\exp\Big\{-\frac{1}{2}|y|^2\Big\}dy_1...dy_n = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} \frac{1}{|\det M|} f\big(\frac{y}{|y|}\big)\exp\Big\{-\frac{1}{2}|M^{-1}y|^2\Big\}dy_1...dy_n$$

comme $|\det M| = 1$ et $|M^{-1}y| = |y|$, on a :

$$\mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{MY}{|MY|}\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{Y}{|Y|}\Big)\Big]$$

$\square$

Lemme 1.2.

(i) Soit $A \subset S^{n-1}$ un borélien alors pour tous $x \in S^{n-1}$

$$\nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A\Big) = \mu\big(A\big)$$

(ii) Soit $\mathscr{A} \subset G_{n,k}$ un borélien alors pour tous $V \in G_{n,k}$

$$\nu\Big(T \in O(n)\,;\, TV \in \mathscr{A}\Big) = \sigma\big(\mathscr{A}\big)$$

Démonstration. (i) Soit $M \in O(n)$ et $x \in S^{n-1}$ alors la mesure définie par

$$\omega_x(A) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A\Big)$$

ω_x vérifie les propriétés suivantes :

$$\omega_x(MA) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\, M^T Tx \in A\Big) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A\Big) = \omega_x(A)$$

$$\omega_x(\emptyset) = 0$$

$$\begin{aligned}\omega_x\big(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) &= \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \nu\Big(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} \{T \in O(n)\,;\, Tx \in A_i\}\Big)\\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \omega_x(A_i)\end{aligned}$$

L'unicité de la mesure de Haar nous permet de conclure que $\omega_x = \mu$, en particulier ω_x ne dépend pas de x.

(ii) La démonstration de (ii) est exactement la même que celle de (i).

□

Le théorème suivant seras admis, c'est une application du théorèmes de concentration de la mesure de *Paul Lévy*, il est un outil cruciale dans la preuve du théorème de Dvoretzy donné par *Vitali Milman* [3].

Théorème 1.3 (Concentration de la mesure sur la sphère)**.** Soit $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L > 0$, alors

$$\mu\Big\{x \in S^{n-1}\,;\, |f(x) - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon\Big\} \le 2e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2L^2}}$$

Où $\mathbb{E}[f] =: \int_{S^{n-1}} f\, d\mu$

1.2. ELLIPSOÏDES

Pour simplifier un peu les calculs nous allons montrer que l'on peut se restreindre aux normes qui vérifies $||.|| \leq |.|$ et qui ont de plus la propriété que B_2^n est l'ellipsoïde de John de $B_{||.||}(0,1)$, c'est à dire l'ellipsoïde de volume maximal incluse dans $B_{||.||}(0,1)$, nous donnons la définition d'un ellipsoïde et un théorème de Fritz John sur l'unicité de l'ellipsoïde de volume maximale qui seras admis.

Défintion. On appelle ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ l'image de la boule unité euclidienne par un élément de $GL(n)$.

Définition & Théorème (Ellipsoïde de John)**.** Tous compact convexe symétrique d'intérieur non vide contient un unique ellipsoïde de volume maximale, elle est appelée ellipsoïde de John.

Donnons une définition alternative d'un l'ellipsoïde.

Proposition 1.4. Pour toute ellipsoïde $\mathscr{E}$ il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n > 0$ et $v_1, ..., v_n$ une base orthonormé tel que :

$$\mathscr{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \sum_{i=1}^{n} \frac{< x, v_i >^2}{\alpha_i^2} < 1 \right\}$$

Démonstration. Donnons nous $A \in GL(n)$ tel que $AB_2^n = \mathscr{E}$

$$|Ax|^2 = x^T A^T Ax$$

$A^T A$ est symétrique, soit λ une de ses valeur propre et v un vecteur propre associé, alors

$$0 < |Av|^2 = v^T \lambda v = \lambda |v|^2$$

Donc les valeurs propre $A^T A$ sont strictement positive, Comme elle est symétrique, elle est donc diagonalisable dans une base orthonormé, donnons nous $(\lambda_i)_{i \leq n}$ et $(v_i)_{i \leq n}$ une base orthonormé tel que $A^T A v_i = \lambda_i^2 v_i$ pour tous $1 \leq i \leq n$ et définissons les quantités suivante :

- P la matrice définie par $P v_j = \lambda_j v_j$
- $u_j = \lambda_j^{-1} A v_j$

Montrons que les u_j forment une base orthonormée :

$$\begin{aligned}
< u_i, u_j > &= \lambda_j^{-1} v_j^T A^T \lambda_i^{-1} A v_i \\
&= \lambda_j^{-1} \lambda_i^{-1} v_j^T (A^T A v_i) \\
&= \lambda_j^{-1} \lambda_i^{-1} v_j^T \lambda_i^2 v_i \\
&= \frac{\lambda_i}{\lambda_j} < v_j, v_i > = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \in S^{n-1}$

$$\begin{aligned} y =: Ax &= x_1 A v_1 + \ldots + x_n A v_n \\ &= x_1 \lambda_1 u_1 + \ldots + x_n \lambda_n u_n \end{aligned}$$

Les composante de y dans la base $\{u_j\}_{j \le n}$ sont $< y, u_j >= x_j \lambda_j$, donc :

$$\frac{< y, u_1 >^2}{\lambda_1^2} + \ldots + \frac{< y, u_n >^2}{\lambda_n^2} = x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 1$$

Et finalement $\partial \mathscr{E} = \left\{ y_1 u_1 + \ldots + y_n u_n \,;\, \frac{<y,u_1>^2}{\lambda_1^2} + \ldots + \frac{<y,u_n>^2}{\lambda_n^2} = 1 \right\}$. □

Démontrons maintenant le lemme que nous avons utiliser dans l'introduction :

Lemme 1.5. Soit $\mathscr{E}$ un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$, alors $\exists \lambda > 0$ et $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$ de dimension $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ tel que :

$$\mathscr{E} \cap V = \lambda B_2^n \cap V$$

Démonstration. Quitte a effectuer une rotation on peut supposer que $\mathscr{E} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,;\, \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 < 1 \right\}$ pour $0 \le a_1 \le \ldots \le a_n$. Posons $\lambda = \text{Mediane}(a_1, \ldots, a_n)$ et

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,;\, \forall i \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,\, \sqrt{\lambda - a_i} x_i = \sqrt{a_{n+1-i} - \lambda} x_{n+1-i} \right\}$$

Alors pour tous $x \in F$ nous avons $\forall i \le \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$:

$$a_i x_i^2 + a_{n+1-i} x_{n+1-i}^2 = \lambda (x_i^2 + x_{n+1-i}^2)$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

□

Remarque 1.6. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact convexe symétrique et $D = u(B_2^k)$ (avec $u \in GL(n)$) sont ellipsoïde de John, notons alors $C =: u^{-1}(K)$ dont l'ellipsoïde de John est B_2^k, supposons que

$$r(B_2^n \cap W) \subset C \cap W \subset r(1+\varepsilon)(B_2^n \cap W)$$

alors

$$u^{-1}\big(r(D \cap uW)\big) \subset u^{-1}(K \cap uW) \subset u^{-1}\big(r(1+\varepsilon)(D \cap uW)\big)$$

$$r(D \cap uW) \subset K \cap uW \subset r(1+\varepsilon)(D \cap uW)$$

Le **lemme 1.5** nous permet de conclure que quitte à diviser la dimension du sous-espace W par deux, on peut se restreindre à montrer le théorème de Dvoretzky pour des compacts dont la boule euclidienne est l'ellipsoïde de John sans perte de généralité.

2 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

2.1. LEMMES D'APPROXIMATIONS

Défintion. Soit (X,d) un espace métrique et $\theta > 0$, on dit que $A \subset X$ est un θ-net si

(i) A est de cardinal fini.

(ii) $\forall x \in X$, $\exists y \in A$ tel que $d(x,y) \leq \theta$

Lemme 2.1. Soient $x \in S^{n-1}$, A un θ-net pour un $1 > \theta > 0$, alors il existe $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ et $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tel que

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N},\ \beta_i \leq \theta^i$$

Démonstration. Comme A est un θ-net alors il existe $y_0 \in A$ tel que $|x - y_0| < \theta$, et donc

$$x = y_0 + \lambda_1 x'$$

avec $\lambda_1 = |x - y_0| \leq \theta$ et $x' = \frac{x-y_0}{\lambda_1} \in S^{n-1}$, on peut donc itéré le même procédé sur x' et réitéré indéfiniment :

$$\begin{array}{ccc} x = y_0 + \lambda_1(y_1 + \lambda_2 x'') = y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_1\lambda_2 x'' & \text{avec} & \lambda_2 \leq \theta,\ y_1 \in A \text{ et } x'' \in S^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x = y_0 + \sum_{i=1}^{N} y_i \left(\prod_{1\leq k\leq i} \lambda_k\right) + \tilde{x} \prod_{1\leq k \leq N+1} \lambda_k & \text{avec} & \forall i \leq N+1\ \lambda_i \leq \theta, y_i \in A \text{ et } \tilde{x} \in S^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Si l'on pose $S_N = y_0 + \sum_{i=1}^{N} y_i \left(\prod_{1\leq k\leq i} \lambda_k\right)$, alors :

$$|x - S_N| \leq |\lambda_1 ... \lambda_N||\tilde{x}| \leq \theta^N \to 0 \quad \text{avec} \quad N \to \infty$$

il ne reste plus qu'as poser $\beta_0 = 1$ et pour $i > 0$, $\beta_i = \prod_{1\leq k\leq i} \lambda_k \leq \theta^i$ et l'on a :

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i y_i$$

□

Lemme 2.2. $\forall \varepsilon > 0$, il existe $1 > \theta > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$, si l'on a A un θ-net sur $V \cap S^{n-1}$ pour $V \underset{\text{sev}}{\subset} \mathbb{R}^n$ de dimension k, $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $T \in GL(n)$, tel que :

$$\forall x \in A, \quad (1-\theta) \leq \left|\left|Tx\right|\right| \leq (1+\theta)$$

alors ,

$$\forall x \in V, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}|x| \leq \left|\left|Tx\right|\right| \leq \sqrt{1+\varepsilon}|x|$$

de plus si $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$, on peu prendre $\theta = \frac{\varepsilon}{9}$

Démonstration. Soient $1 > \theta > 0$, A un θ-net sur $S(V) = \{x \in V \,;^{|} x| = 1\}$ et $x \in S(V)$ par le **lemme 2.1**, il existe $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ et $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tel que

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i\beta_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N},\ \beta_i \leq \theta^i$$

Notons $T = (a_1, ..., a_n)$

$$\begin{aligned}
||Tx|| &= \Big|\Big|T\sum_{i=0}^{+\infty} y_i\beta_i\Big|\Big| \\
&= \Big|\Big|\sum_{i=0}^{+\infty}\beta_i\sum_{p=1}^{n} y_{i,p}a_p\Big|\Big| \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty}\theta^i||\sum_{p=1}^{n} y_{i,p}a_p|| \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty}\theta^i||Ty_i|| \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty}\theta^i(1+\theta) = \frac{1+\theta}{1-\theta}
\end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned}
||Tx|| &\geq ||Ty_0|| - ||Tx - Ty_0|| \\
&= (1-\theta) - ||\sum_{p=1}^{n} a_p\sum_{i=1}^{+\infty}\beta_i y_{i,p}|| \\
&\geq (1-\theta) - \sum_{i=1}^{+\infty}\theta^i||Ty_i|| \\
&\geq \Big((1-\theta) - \theta\frac{1+\theta}{1-\theta}\Big) = \frac{1-3\theta}{1-\theta}
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre θ tel que

$$\sqrt{1+\varepsilon} \geq \tfrac{1+\theta}{1-\theta}$$
$$\tfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \leq \tfrac{1-3\theta}{1-\theta}$$

et pour tous $x \in V\backslash\{0\}$ on a

$$\tfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \leq \Big|\Big|T\tfrac{x}{|x|}\Big|\Big| \leq \sqrt{1+\varepsilon}$$
$$\tfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}|x| \leq ||Tx|| \leq |x|\sqrt{1+\varepsilon}$$

Ce qui fini la première partie de la preuve, dans la suite on suppose $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$. On cherche $\theta =: \theta(\varepsilon) \in]0,1[$, tel que $\sqrt{1+\varepsilon} \geq \max\big(\frac{1-\theta}{1-3\theta}, \frac{1+\theta}{1-\theta}\big)$, supposons $\theta \leq \frac{1}{3}$ alors

$$\frac{1-\theta}{1-3\theta} - \frac{1+\theta}{1-\theta} = \frac{4\theta^2}{(1-3\theta)(1-\theta)} > 0$$

Donc $\sqrt{1+\varepsilon} \geq \frac{1-\theta}{1-3\theta}$

$$1+\varepsilon \geq \big(\tfrac{1-\theta}{1-3\theta}\big)^2$$
$$(9\varepsilon+8)\theta^2 - 2(3\varepsilon+2)\theta + \varepsilon \geq 0$$

les deux racines de ce polynôme sont $0 < \frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon} < \frac{3\varepsilon+2+2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon}$, on cherche donc un θ dans $]0, \frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon}]$. Pour finir

$$\begin{aligned}\frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon} &\geq \frac{3\varepsilon+2-2-2\varepsilon}{8+9\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{8+9\varepsilon} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{9}\end{aligned}$$

donc pour $\varepsilon \in]0, 9^{-1}[$ on peu prendre $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{9}$. □

Lemme 2.3. Pour tous $0 < \theta < 1$, $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$, alors il existe un θ-net sur $V \cap S^{n-1}$ de cardinal inférieur à $\left(\frac{3}{\theta}\right)^k$.

Démonstration. Notons $B_V(x,r) = \{y \in V \; ; \; |x-y| < r\}$ la boule de centre $x \in V$ et de rayon $r \geq 0$, soit $N = \{x_i\}_{i=1,\dots,m}$ un sous-ensemble de $V \cap S^{n-1}$ maximal pour la propriété : $x, y \in N$, $|x-y| \geq \theta$, c'est-à-dire pour tous $x \in V \cap S^{n-1} \setminus N$ il existe $i \leq m$ tel que $|x - x_i| < \theta$, donc N est un θ-net et les $\{B_V(x_i, \theta/2)\}_{i=1,\dots,m}$ sont donc disjoints deux à deux et toutes contenues dans $B_V(0, 1+\frac{\theta}{2})$ d'ou :

$$m\mathrm{Vol}(B_V(x_1, \frac{\theta}{2})) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}(B_V(x_i, \frac{\theta}{2})) = \mathrm{Vol}(\cup_{1 \leq i \leq m} B_V(x_i, \frac{\theta}{2})) \leq \mathrm{Vol}(B_V(0, 1+\frac{\theta}{2}))$$

$$m \leq \frac{\mathrm{Vol}(B_V(0, 1+\frac{\theta}{2}))}{\mathrm{Vol}(B_V(x_1, \frac{\theta}{2}))}$$

Par homogénéité de la mesure de Lebesgue :

$$m \leq \left(\frac{1+\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^k = \left(1 + \frac{2}{\theta}\right)^k < \left(\frac{3}{\theta}\right)^k$$

□

2.2. DÉBUT DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

Dans cette partie nous allons montrer un théorème qui seras l'outils principal de la démonstration du théorème de Dvoretzky.

Théorème 2.4. Pour tous $\varepsilon > 0$ il existe $c(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$, ℓ_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans $(\mathbb{R}^n, ||.||)$, pour tous $k \leq \left[c(\varepsilon).\left(\frac{E}{b}\right)^2 n\right]$.
Où $E = \int_{S^{n-1}} ||x|| d\mu(x)$ et $b > 0$ le plus petit réel tel que $||.|| \leq b|.|$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, on se donne un $1 > \theta > 0$ donné par le **lemme 2.2** et on note

- $c(\theta) = \frac{\theta^2}{4\log(\frac{3}{\theta})}$
- $V = \mathrm{Vect}(e_1, .., e_k)$ avec $k \leq \left[c(\theta)\left(\frac{E}{b}\right)^2 n\right]$

- $\eta = \frac{\theta E}{b}$
- $f(\theta) = 2\left(\frac{3}{\theta}\right)^{c(\theta)\left(\frac{E}{b}\right)^2 n} e^{-\frac{\eta^2 n}{2}} = 2\exp\left(-\frac{\eta^2 n}{4}\right)$

Distinguons deux cas

◦ $f(\theta) \geq 1$

on a alors :

$$\frac{\eta^2 n}{4} \leq \log(2)$$

$$k \leq \frac{\eta^2}{4\log(3/\theta)} n \leq \frac{\log(2)}{\log(3/\theta)} < 1$$

Donc $k = 0$, dans ce cas il n'y a rien a montrer.

◦ $f(\theta) < 1$

Soit A un θ-net sur $V \cap S^{n-1}$, avec $|A| \leq (\frac{3}{\theta})^k$ nous allons montrer qu'il existe $T \in O(n)$ tel que pour tous $x \in A$

$$(1-\theta)E \leq ||Tx|| \leq (1+\theta)E$$

Tous d'abord remarquons ceci :

$$\begin{aligned} 1 > f(\theta) &\geq 2(\frac{3}{\theta})^k e^{-\frac{\eta^2}{2}n} \\ &> 2|A|e^{-\frac{\eta^2}{2}n} \end{aligned}$$

On a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \nu\Big(\cap_{x\in A}\left\{T \in O(n)\,;\, \big|||Tx|| - E\big| \leq b\eta\right\}\Big) &= 1 - \nu\big(\cup_{x\in A}\left\{T \in O(n)\,;\, \big|||Tx|| - E\big| > b\eta\right\}\big) \\ &\geq 1 - |A|\nu\big(T \in O(n)\,;\, \big|||Ty|| - E\big| > b\eta\big) && \text{pour un } y \in A \\ &\geq 1 - |A|\mu\Big(y \in S^{n-1}\,;\, \big|||y|| - E\big| > b\eta\Big) && \text{par le } \textbf{lemme 1.2} \end{aligned}$$

En appliquant la concentration de la mesure

$$\nu\Big(\cap_{x\in A}\left\{T \in O(n)\,;\, \big|||Tx|| - E\big| \leq b\eta\right\}\Big) \geq 1 - |A|2e^{-\frac{\eta^2 n}{2}} > 0$$

Il existe donc $T \in O(n)$ tel que pour tous $x \in A$ on ait $\big|||Tx|| - E\big| \leq b\eta$, c'est à dire

$$E(1-\theta) = E - b\eta \leq ||Tx|| \leq E + b\eta = E(1+\theta)$$

Par le **lemme 2.2** pour tous $x \in V$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}|x|E \leq ||Tx|| \leq \sqrt{1+\varepsilon}|x|E$$

et pour $\varepsilon < 9^{-1}$ on peut prendre $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{9}$ et donc $c(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{4\times 81\log(\frac{3\times 9}{\varepsilon})}$ de l'ordre $\frac{\varepsilon^2}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$.

□

2.3. ESTIMATION DE E

Dans cette partie nous allons donner une estimation de $E =: \int_{S^{n-1}} ||x|| d\mu(x)$, pour cela nous aurons besoin d'une minoration de $\mathbb{E}\Big[\max_{1\leq i\leq N} g_i\Big]$ pour des $\{g_i\}$ i.i.d suivant $\mathcal{N}(0,1)$, nous démontrons une telle borne dans le lemme suivant.

Lemme 2.5. il existe $c > 0$ tel que $\forall N > 1$ et $\{g_i\}_{1\leq i\leq N}$ des variables aléatoire i.i.d suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$ on ait :

$$c\sqrt{\log N} \leq \mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq \tilde{N}} |g_i|]$$

où $\tilde{N} = \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$ est la partie entière supérieure de $\frac{N}{2}$.

Démonstration. Commençons par montrer que pour $n > 1$, $\mathbb{P}\big(|g_1| > \sqrt{\log n}\big) \geq \frac{1}{n}$, on a :

$$\mathbb{P}\big(|g_1| > \sqrt{\log n}\big) = 2\int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq \int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + \frac{1}{x^2}) dx \qquad \text{pour } x > \sqrt{\log(2)} > 1$$

$$\int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} (1 + \frac{1}{x^2}) dx = \Big[-\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\Big]_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{n \log n}} > \frac{1}{n}$$

Donc

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq i\leq \tilde{N}} |g_i| \leq \sqrt{\log N}\Big) = \mathbb{P}\Big(|g_1| \leq \sqrt{\log N}\Big)^{\tilde{N}} = \Big(1 - \mathbb{P}\Big(|g_1| > \sqrt{\log N}\Big)\Big)^{\tilde{N}}$$

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq i\leq \tilde{N}} |g_i| \leq \sqrt{\log N}\Big) \leq \Big(1 - \frac{1}{N}\Big)^{\tilde{N}} \leq e^{-\frac{\tilde{N}}{N}} \leq e^{-\frac{1}{2}}$$

Ce qui équivaut a

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq i\leq \tilde{N}} |g_i| \leq \sqrt{\log N}\Big) \geq 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

Par l'inégalité de Markov on a finalement :

$$\mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq \tilde{N}} |g_i|] \geq \mathbb{P}\Big(\max_{1\leq i\leq \tilde{N}} |g_i| \leq \sqrt{\log N}\Big)\sqrt{\log N} \geq (1 - e^{-\frac{1}{2}})\sqrt{\log N}$$

avec $c =: 1 - e^{-\frac{1}{2}}$ □

Lemme 2.6 (Dvoretzky-Rogers)**.** Soit $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ tel que B_2^n est l'ellipsoïde de John de $B_{||.||}$, alors il existe une base orthonormée $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ tel que $\forall 1 \leq i \leq n$

$$e^{-1}\big(1 - \frac{i-1}{n}\big) \leq ||x_i|| \leq 1$$

Démonstration. S^{n-1} est compact et $||.||$ continue, on peux donc prendre un $x_1 \in S^{n-1}$ qui maximise $||.||$ c'est à dire $||x_1|| = 1$, supposons que l'on ai $x_1, ..., x_{k-1}$ avec $k \leq n$ tel que pour tous $1 \leq i \leq k-1$, x_i maximise $||.||$ sur $S^{n-1} \backslash \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_{k-1}) \neq \emptyset$ car les $\{x_i\}_{i=1,...,k-1}$ sont orthogonaux deux à deux. On peut donc répéter le procéder pour trouver x_k qui maximise $S^{n-1} \backslash \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_{k-1})$, par récurrence on peut donc avoir n vecteurs avec ses propriétés. Fixons $1 \leq k \leq n$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ et définissons :

$$\mathscr{E} = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \; ; \; \sum_{i=1}^{k-1} \big(\frac{a_i}{a}\big)^2 + \sum_{i=k}^{n} \big(\frac{b_i}{b}\big)^2 \leq 1 \Big\}$$

Supposons $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in \mathscr{E}$, alors $\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \in a B_2^n$ et donc $||\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i|| \leq a$. Si $x \in \mathrm{Vect}(x_k, ..., x_n) \cap B_2^n$ on a $||x|| \leq ||x_k||$ par construction, et donc $\sum_{i=k}^{n} a_i x_i \in b B_2^n \Rightarrow ||\sum_{i=k}^{n} a_i x_i|| \leq b||x_k||$, ce qui nous donne la majoration suivante

$$||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i|| + ||\sum_{i=k}^{n} a_i x_i|| \leq a + b||x_k||$$

Posons $\phi \in GL(n)$ définit par $\phi(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} a a_i x_i + \sum_{i=k}^{n} b a_i x_i$ on a $\phi = \mathrm{diag}\big(\overbrace{a, ..., a}^{(k-1)\times}, \overbrace{b, ..., b}^{(n-k+1)\times}\big)$ et donc $\det \phi = a^{k-1} b^{n-k+1}$ d'où :

$$\int_{\mathscr{E}} dx_1 ... dx_n = \int_{B_2^n} \det \phi \, dx_1 ... dx_n = a^{k-1} b^{n-k-1} \int_{B_2^n} dx_1 ... dx_n$$

On prend $a + b||x_k|| = 1$ de sorte que $\mathscr{E} \subset K$, comme B_2^n est l'ellipsoïde de volume maximale inclue dans K, on a que

$$1 \geq \frac{\int_{\mathscr{E}} dx_1 ... dx_n}{\int_{B_2^n} dx_1 ... dx_n} = a^{k-1} b^{n-k+1}$$

Fixons donc pour $k \geq 2$, $b = \frac{1-a}{||x_k||}$ et $a = \frac{k-1}{n}$, en remplaçant dans l'inégalité on obtient :

$$1 \geq a^{k-1} \Big(\frac{1-a}{||x_k||}\Big)^{n-k+1} \iff ||x_k|| \geq a^{\frac{k-1}{n-k+1}} (1-a) = \Big(\frac{k-1}{n}\Big)^{\frac{k-1}{n-k+1}} \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)$$

et $\log a^{\frac{k-1}{n-k+1}} = \frac{k-1}{n-k+1} \log\Big(\frac{k-1}{n}\Big) > -1$.

□

Proposition 2.7. Soit $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ tel que B_2^n est l'ellipsoïde de John de $B_{||.||}$, alors il existe $c > 0$ tel que

$$E =: \int_{S^{n-1}} ||x|| d\mu(x) \geq c \sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

Démonstration. Par le lemme de Dvoretzky-Rogers il existe une base orthonormé $x_1, ..., x_n$ tel que pour $1 \leq i \leq \tilde{n} =: \lceil \frac{n}{2} \rceil$ la partie entière supérieure de $\frac{n}{2}$, $||x_i|| \geq e^{-1}\Big(1 - \frac{\tilde{n}-1}{n}\Big) \geq e^{-1}\Big(1 - \frac{\frac{n}{2}+1-1}{n}\Big) = (2e)^{-1}$. Comme μ est invariante par composition par une transformation orthogonale on a que

$$E =: \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| d\mu(a) = \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n|| d\mu(a)$$

et donc

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i||d\mu(a) + \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n||d\mu(a) \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} 2\max\Big\{||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i||, ||a_n x_n||\Big\} d\mu(a) \geq \ldots \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} \Big\{|a_i|\,||x_i||\Big\} d\mu(a) \\
&\geq \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} \Big\{|a_i|\,||x_i||\Big\} d\mu(a) \geq (2e)^{-1}\int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |a_i| d\mu(a)
\end{aligned}$$

Soit $(g_1,...,g_n)$, des variables aléatoire i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |a_i| d\mu(a) = \mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{-\frac{1}{2}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |g_i|\Big]$$

Par le **lemme A.1** $\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{-\frac{1}{2}}(g_1,...,g_n)$ et $(\sum_{i=1}^{n} g_i^2)^{\frac{1}{2}}$ sont des variables aléatoires indépendantes, on a donc

$$\mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{-\frac{1}{2}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |g_i|\Big].\mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big] = \mathbb{E}\big[\max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |g_i|\big]$$

la fonction racine carré est concave, par l'inégalité de Jensen on a donc :

$$\mathbb{E}\big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{\frac{1}{2}}\big] \leq \mathbb{E}\big[\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\mathbb{E}[g_1^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$

Et finalement par le **lemme 2.5**, il existe $K > 0$ tel que :

$$E \geq \frac{1}{2e\sqrt{n}}\mathbb{E}\big[\max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |g_i|\big] \geq \frac{K}{2e}\sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

□

On peut donc réunir la **proposition 2.7** et le **théorème 2.4** pour obtenir :

$$k \geq [c(\varepsilon)\log n]$$

3 SECTIONS PRESQUE EUCLIDIENNES DE ℓ_P^N

3.1. CAS $1 \leq P < 2$

Proposition 3.1. Soit $1 \leq p < 2$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c(\varepsilon) > 0$ tel que pour tous $n \geq 2$, ℓ_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans ℓ_p^n pour un $k \geq c(\varepsilon)n$.

Démonstration. Par l'inégalité de Hölder $||x||_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|x|$, c'est-à-dire $b \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$. Comme les normes sont des applications convexes, par l'inégalité de Jensen :

$$\mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\big)^{\frac{1}{p}}\Big] \geq \big(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[|x_i|]^p\big)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Et donc

$$\begin{aligned} E =: &\int_{S^{n-1}} ||x||_p d\mu(x) \\ &= \mathbb{E}\Big[\frac{||x||_p}{|x|}\Big] \\ &= \frac{\mathbb{E}\big[||x||_p\big]}{\mathbb{E}\big[|x|\big]} \geq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Par le **théorème 2.4** ℓ_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans ℓ_p^n pour un $k \geq c(\varepsilon)(\frac{E}{b})^2 n = \tilde{c}(\varepsilon)n$. □

3.2. CAS $2 \leq P < \infty$

Proposition 3.2. Soit $2 \leq p < \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c(\varepsilon) > 0$ tel que pour tous $n \geq 2$, ℓ_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans ℓ_p^n pour un $k \geq c(\varepsilon)n^{\frac{2}{p}}$.

Démonstration. Par l'inégalité de Hölder $||x||_p \leq |x|$, c'est-à-dire $b \leq 1$. Comme pour la proposition qui précède :

$$\mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\big)^{\frac{1}{p}}\Big] \geq \big(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|x_i|]^p\big)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Et donc

$$\begin{aligned} E =: &\int_{S^{n-1}} ||x||_p d\mu(x) \\ &= \mathbb{E}\Big[\frac{||x||_p}{|x|}\Big] \\ &= \frac{\mathbb{E}\big[||x||_p\big]}{\mathbb{E}\big[|x|\big]} \geq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Par le **théorème 2.4** ℓ_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans ℓ_p^n pour un $k \geq c(\varepsilon)(\frac{E}{b})^2 n = \tilde{c}(\varepsilon)n^{\frac{2}{p}}$. □

Si p n'est pas trop grand par rapport à n on peut amélioré la proposition précédente , en remplaçant $c(\varepsilon)$ par une fonction $c_p(\varepsilon) \underset{p\to\infty}{\sim} \tilde{c}(\varepsilon)p$.

Proposition 3.3. Soit $2 \leq p$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c_p(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $p < \log n$, ℓ_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans ℓ_p^n, pour $k \geq c_p(\varepsilon)n^{\frac{2}{p}}$.

Démonstration.

$$E =: \int_{S^{n-1}} ||x||^p d\mu(x) = \mathbb{E}\Bigg[\frac{\big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\big)^{\frac{1}{p}}}{\big(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\big)^{\frac{1}{2}}}\Bigg] = \frac{\mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\big)^{\frac{1}{p}}\Big]}{\mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big]}$$

Par l'inégalité de Hölder on a $||x||_p \leq |x|$, donc $b \leq 1$. Posons $m =: \lfloor e^p \rfloor$ et divisons $\{1,...,n\}$ en $N = \lceil \frac{n}{m} \rceil$ parties disjointes $I_1,...,I_N$ tel que pour $j < N$, $\mathrm{card}(I_j) = m$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} |g_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j\leq N}\sum_{i\in I_j} |g_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big] \\
&\geq \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{j\leq N} (\max_{i\in I_j}|g_i|)^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big] \\
&\geq \Big(\sum_{j\leq N} \big(\mathbb{E}[\max_{i\in I_j}|g_i|]\big)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq (N-1)^{\frac{1}{p}} c\sqrt{\log m} \ \text{ par le } \textbf{lemme 2.5}
\end{aligned}$$

Où $c > 0$ est une constante universelle, de plus :

$$\begin{aligned}
\frac{(N-1)^{\frac{1}{p}}}{N^{\frac{1}{p}}} &= \big(\frac{N-1}{N}\big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \big(1 - \frac{1}{N}\big)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \big(1 - \frac{1}{2}\big)^{\frac{1}{p}} = 2^{-\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Car $N \geq 2$ par hypothèse, et finalement :

$$\begin{aligned}
E &\geq N^{\frac{1}{p}} 2^{-\frac{1}{p}} c\sqrt{\log\lfloor e^p \rfloor}\, n^{-\frac{1}{2}} \\
&\geq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} C_p
\end{aligned}$$

Où $C_p = 2^{-\frac{1}{p}} c\sqrt{\log\lfloor e^p \rfloor} \underset{p\to\infty}{\sim} c\sqrt{p}$.
Par le **théorème 2.4** ℓ_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans ℓ_p^n, pour

$$\begin{aligned}
k &\geq c(\varepsilon)\big(\frac{E}{b}\big)^2 n \\
&\geq c_p(\varepsilon) n^{\frac{2}{p}}, \quad \text{avec } c_p(\varepsilon) = c(\varepsilon) C_p^2 \underset{p\to\infty}{\sim} \tilde{c}(\varepsilon) p
\end{aligned}$$

□

Remarque 3.4. Dans le cas contraire si $p \geq \log n$, alors $n^{\frac{2}{p}} \leq e^2$ donc dans ce cas la meilleur estimation est celle donné par le théorème de Dvoretzky.

Annexes

A - VECTEURS GAUSSIENS

Lemme A.1. Soit $g=(g_1,...,g_n)$ des variables aléatoire i.i.d suivant une loi gaussienne, alors $\frac{g}{|g|}$ et $|g|$ sont indépendants.

Démonstration. Posons $Y=\frac{g}{|g|}$ et $R=|g|$ alors

$$\mathbb{E}\big[f(Y)g(R)\big]=\int_{\mathbb{R}^n} f\Big(\frac{x_1}{|x|},...,\frac{x_n}{|x|}\Big)g(|x|)\exp\Big(-\frac{|x|^2}{2}\Big)dx_1...dx_n$$

en passant en coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
x_1 &= r\sin\theta_1...\sin\theta_{n-1}\\
x_2 &= r\sin\theta_1...\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1}\\
x_3 &= r\sin\theta_1...\sin\theta_{n-3}\cos\theta_{n-2}\\
&\vdots\\
x_n &= r\cos\theta_1
\end{aligned}$$

On a le déterminant suivant :

$$dx_1...dx_n = r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2...\sin\theta_{n-2}drd\theta_1...d\theta_{n-1}$$

d'où :

$$\mathbb{E}\big[f(Y)g(R)\big]=\int_{\mathbb{R}^n} f\big(\sin\theta_1...\sin\theta_{n-1},...,\cos\theta_1\big)g(r)\exp\Big(-\frac{r^2}{2}\Big)r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2...\sin\theta_{n-2}drd\theta_1...d\theta_{n-1}$$

$$\mathbb{E}\big[f(Y)g(R)\big]=\int_{\mathbb{R}} g(r)\exp\Big(-\frac{r^2}{2}\Big)r^{n-1}dr\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f\big(\sin\theta_1...\sin\theta_{n-1},...,\cos\theta_1\big)\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2...\sin\theta_{n-2}d\theta_1...d\theta_{n-1}$$

$\square$

RÉFÉRENCES

[1] G. Schechtman, “Euclidean sections of convex bodies,” 2008.

[2] A. Grothendieck, “Sur certains classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers,” 1956.

[3] V. Milman, “New proof of the theorem of A. Dvoretzky on intersections of convex bodies,” 1971.

[4] Y. Gordon, “On Milman’s inequality and random subspaces which escape through a mesh in $\mathbb{R}^n$,” 1988.

[5] G. Schechtman, “A remark concerning the dependence on ε in dvoretzky’s theorem,” 2006.

[6] G. pisier, *The volume of convex bodies and Banach space geometry*. Cambridge University Press, 1989.

[7] V. Milman, “Dvoretzky theorem - thirty years later,” 1992.

[8] V. Milman et G. Schechtman, *Asymptotic theory of finite dimensional normed space*. Springer, 1986.