

SORBONNE UNIVERSITÉ

TRAVAUX D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

---

# Autour du théorème de Dvoretzky

---

*"It soon became clear that an outstanding breakthrough in Geometric Functional Analysis had been achieved."*

Vitali Milman à propos du théorème de Dvoretzky dans *Dvoretzky theorem - thirty years later*

Mathieu GALLO

*Enseignant* : Omer Friedland

date

## INTRODUCTION

---

Le mémoire suivant suit la série de lectures de Gideon Schetchman , ”*Euclidean sections of convex bodies*” [1].

Alexandre Grothendieck en 1956 dans son article ”*Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le théorème de Dvoretzky-Rogers*” [2], inspiré par le lemme de Dvoretzky-Rogers (1950) propose une conjecture à laquelle Aryeh Dvoretzky répondra positivement en 1961, aboutissant au résultat suivant :

**Théorème 1** (A. Dvoretzky, 1961). Il existe une fonction  $k : ]0, 1[ \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , tel que  $\forall \varepsilon \in ]0, 1[$ ,  $k(\varepsilon, n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout compact convexe symétrique  $K \subset \mathbb{R}^n$ , il existe  $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$  tels que :

- (i)  $\dim V = k(\varepsilon, n)$
- (ii)  $\exists r > 0$  tel que ,  $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1 + \varepsilon)r.(V \cap B_2^n)$

Dans le papier original de Dvortezky l'estimation de  $k$  était :

$$k(\varepsilon, n) \geq c(\varepsilon) \sqrt{\frac{\log n}{\log \log n}} \quad \text{pour un } c(\varepsilon) > 0$$

Vitali Milman en 1971 donna une nouvelle preuve du théorème de Dvoretzky en utilisant le phénomène de concentration de la mesure [3], il a de plus amélioré le théorème en donnant l'estimation de la dépendance en  $n$  pour la dimension de  $V$ ,  $k(\varepsilon, n) \geq c(\varepsilon) \cdot \log(n)$ .

**Théorème 2** (V. Milman, 1971). Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $c > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout compact convexe symétrique  $K \subset \mathbb{R}^n$ , il existe  $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$  tels que :

- (i)  $\dim V \geq c \cdot \log(n)$
- (ii)  $\exists r > 0$  tel que ,  $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1 + \varepsilon)r.(V \cap B_2^n)$

**Définition.** Soit  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  deux espaces normés et  $C > 0$ , on dit que  $X$  s'injecte  $C$ -continûment dans  $Y$ , si il existe  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  tel que pour tout  $x \in X$

$$\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$$

Il existe une reformulation du théorème de Dvoretzky en terme de norme, en utilisant la relation entre un compact convexe symétrique  $K$  et la norme  $\|y\|_K = \inf\{\lambda ; \frac{y}{\lambda} \in K\}$ .

**Théorème 3.** Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour toute normes  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  pour un  $k \geq c \cdot \log(n)$ .

**Notation.** Pour la suite on utiliseras les notations :

- $|\cdot|_n$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ , ou simplement  $|\cdot|$  si il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension.
- $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| = 1\}$ , la  $(n-1)$ -sphère euclidienne.

Montrons que ses deux derniers théorèmes sont équivalents.

(2) $\Rightarrow$ (3) Posons  $K = \text{Adh}(B_{\|\cdot\|}(\mathbf{0}, 1)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  et appliquons le théorème 2, celui-ci nous procure un sous-espace  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $\dim V := k \geq c \cdot \log(n)$  et  $V \cap K$  est  $\varepsilon$ -euclidien.

Donnons-nous une base orthonormée  $\{v_j\}_{1 \leq j \leq k}$  de  $V$  et posons

$$\begin{aligned} \phi: (V, \|\cdot\|) &\mapsto (\mathbb{R}^k, |\cdot|_k) \\ \sum_{i=1}^k x_i v_i &\mapsto \sum_{i=1}^k x_i e_i \end{aligned}$$

Soit  $v \in V \cap K$  tel que  $\|v\| = 1$ , comme  $K \cap V$  est  $\varepsilon$ -euclidien on a que

$$r \leq |v|_n \leq (1 + \varepsilon)r$$

La borne supérieure est immédiate car  $K \cap V \subset r(1 + \varepsilon) \cdot (V \cap B_2^n)$ , pour la borne inférieure il suffit de remarquer que  $(V \cap K)$  est un fermer de  $V$  qui contient l'ouvert  $r \cdot (V \cap B_2^n)$  de  $V$ , comme  $v$  est dans la frontière de  $K \cap V$  il n'est pas dans l'intérieur de  $K \cap V$  et donc dans aucun ouvert contenu dans  $V \cap K$ .

Fixons des coordonnées à  $v$  dans la base  $\{v_j\}_{1 \leq j \leq k}$ ,  $v = \sum_{i=1}^k x_i v_i$ , on n'a que  $|v|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$  et donc :

$$r \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2} \leq (1 + \varepsilon) r$$

Mais comme  $|\phi(v)|_k = |\sum_{i=1}^k x_i e_i| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$ , on a que :

$$r \leq |\phi(v)|_k \leq (1 + \varepsilon) r$$

Pour tous  $x \in V \setminus \{0\}$  on peut appliquer ce qui précède à  $\frac{x}{\|x\|}$ , en utilisant la linéarité de  $\phi$  on obtient :

$$r \|x\| \leq |\phi(x)|_k \leq (1 + \varepsilon) r \|x\|$$

(3) $\Rightarrow$ (2) Soit  $\varepsilon > 0$ , par le théorème 3 il existe  $c > 0$  tel que pour tous  $n \in \mathbb{N}$  il existe un  $k > c \cdot \log(n)$  tel que  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  pour n'importe quelle norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Considérons un compact convexe symétrique  $K \subset \mathbb{R}^n$  et  $\|y\| = \inf \left\{ \lambda > 0; \frac{y}{\lambda} \in K \right\}$ , alors  $\exists T : \ell_2^k \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  linéaire tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^k, |x| \leq \|Tx\| \leq (1 + \varepsilon) |x|$$

ceci implique immédiatement que  $T$  est injective, notons  $V = \text{Im } T$ , alors la co-restriction à  $V$  de  $T$  est bijective. Soit  $y \in \partial(K \cap V)$ , c'est-à-dire  $\|y\| = 1$ , on sait qu'il existe un unique  $x \in \mathbb{R}^k$  tel que  $Tx = y$ , on en déduit donc

$$|x| \leq 1 \leq (1 + \varepsilon) |x| \iff \frac{1}{1 + \varepsilon} \leq |x| \leq 1$$

la convexité et la symétrie centrale de  $K \cap V$  nous permet de conclure que :

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} T(B_2^k) \subset K \cap V \subset T(B_2^k)$$

Pour conclure nous nous référençons au **lemme 1.5** qui sera démontré par la suite qui dit que toutes ellipsoïdes de dimension  $k$  admet une section de dimension  $[k/2]$  qui soit un multiple d'une boule euclidienne.

# 1 PRÉLIMINAIRE

---

## 1.1. MESURES DE HAAR

**Définition & Théorème** (Mesures de Haar). Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $G$  un groupe topologique localement compact qui agit sur  $X$  et tel que :

$$\forall x, y \in X \ \forall g \in G, \ d(gx, gy) = d(x, y) \quad (\star)$$

alors il existe une unique mesure à un coefficient multiplicatif près, régulière définie sur les boréliens de  $X$  qui est invariante sous l'action de  $G$ , cette mesure est appelée mesure de Haar de  $X$  (où  $G$  est sous-entendu).

Considérons  $X = S^{n-1}$  avec la distance euclidienne et  $X = O(n)$  avec la norme  $\|M\| = \sup_{|x|=1} |Mx|$  alors  $G = O(n)$  le groupe des isométries vérifie  $(\star)$  pour la multiplication matricielle sur  $S^{n-1}$  et  $O(n)$ .

**Notation.** Par le théorème précédent on peut définir sans ambiguïté  $\mu, \nu$  les mesures de Haar normalisés respectivement sur  $S^{n-1}$  et  $O(n)$ .

Montrons quelques propriétés qui seront utiles par la suite.

**Lemme 1.1.** Soit  $f \in C(S^{n-1})$  et  $Y = (g_1, \dots, g_n)$  où les  $\{g_i\}_{1 \leq i \leq n}$  sont i.i.d suivant une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ , alors

$$\int_{S^{n-1}} f d\mu = \mathbb{E} \left[ f \left( \frac{Y}{|Y|} \right) \right]$$

*Démonstration.* Par unicité de la mesure de Haar, il nous suffit de montrer que pour tous  $M \in O(n)$  et  $f \in C(S^{n-1})$  :

$$\mathbb{E} \left[ f \left( \frac{MY}{|MY|} \right) \right] = \mathbb{E} \left[ f \left( \frac{Y}{|Y|} \right) \right]$$

$$\mathbb{E} \left[ f \left( \frac{MY}{|MY|} \right) \right] = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f \left( \frac{My}{|y|} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} |y|^2 \right\} dy_1 \dots dy_n = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{|\det M|} f \left( \frac{y}{|y|} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} |M^{-1}y|^2 \right\} dy_1 \dots dy_n$$

comme  $|\det M| = 1$  et  $|M^{-1}y| = |y|$ , on a :

$$\mathbb{E} \left[ f \left( \frac{MY}{|MY|} \right) \right] = \mathbb{E} \left[ f \left( \frac{Y}{|Y|} \right) \right]$$

□

**Lemme 1.2.** Soit  $A \subset S^{n-1}$  un borélien alors pour tous  $x \in S^{n-1}$

$$\nu(T \in O(n); Tx \in A) = \mu(A)$$

*Démonstration.* Soit  $M \in O(n)$  et  $x \in S^{n-1}$  alors la mesure définie par

$$\omega_x(A) = \nu(T \in O(n); Tx \in A)$$

$\omega_x$  vérifie les propriétés suivantes :

$$\omega_x(MA) = \nu(T \in O(n); M^T Tx \in A) = \nu(T \in O(n); Tx \in A) = \omega_x(A)$$

$$\omega_x(\emptyset) = 0$$

$$\begin{aligned} \omega_x \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) &= \nu \left( T \in O(n); Tx \in \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \nu \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \{T \in O(n); Tx \in A_i\} \right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu \left( T \in O(n); Tx \in A_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \omega_x(A_i) \end{aligned}$$

L'unicité de la mesure de Haar nous permet de conclure que  $\omega_x = \mu$ , en particulier  $\omega_x$  ne dépend pas de  $x$ . □

Le théorème suivant sera admis, c'est une application du théorème de concentration de la mesure de *Paul Lévy*, il est un outil cruciale dans la preuve du théorème de Dvoretzky donné par *Vitali Milman* [3].

**Théorème 1.3** (Concentration de la mesure sur la sphère). Soit  $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Lipschitzienne de constante  $L > 0$ , alors

$$\mu \left\{ x \in S^{n-1}; |f(x) - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon \right\} \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2L^2}}$$

## 1.2. ELLIPSOÏDES

Pour simplifier un peu les calculs nous allons montrer que l'on peut se restreindre aux normes qui vérifient  $\|.\| \leq |.|$  et qui ont de plus la propriété que  $B_2^n$  est l'ellipsoïde de John de  $B_{\|.\|}(\mathbf{0}, 1)$ , c'est à dire l'ellipsoïde de volume maximal incluse dans  $B_{\|.\|}(\mathbf{0}, 1)$ , nous donnons la définition d'un ellipsoïde et un théorème de Fritz John sur l'unicité de l'ellipsoïde de volume maximale qui sera admis.

**Définition.** Un ellipsoïde de  $\mathbb{R}^n$  est l'image de la boule unité euclidienne par un élément de  $GL(n)$ .

**Théorème 1.4** (Ellipsoïde de John). Tous compact convexe symétrique d'intérieur non vide contient un unique ellipsoïde de volume maximale.

Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un compact convexe symétrique et  $D = u(B_2^k)$  (avec  $u \in GL(n)$ ) sont ellipsoïde de John, notons alors  $C =: u^{-1}(K)$ , sont ellipsoïde de John est  $B_2^k$ , supposons que

$$r(B_2^n \cap W) \subset C \cap W \subset r(1 + \varepsilon)(B_2^n \cap W)$$

alors

$$u^{-1}(r(D \cap uW)) \subset u^{-1}(K \cap uW) \subset u^{-1}(r(1 + \varepsilon)(D \cap uW))$$

$$r(D \cap uW) \subset K \cap uW \subset r(1 + \varepsilon)(D \cap uW)$$

Le lemme qui suit, déjà utiliser dans l'introduction nous permet de conclure que quitte à diviser la dimension du sous-espace par deux, on peut se restreindre à montrer le théorème de Dvoretzky pour des compacts dont la boule euclidienne est l'ellipsoïde de John sans perte de généralité.

**Lemme 1.5.** Soit  $\mathcal{E}$  un ellipsoïde de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\exists \lambda > 0$  et  $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$  de dimension  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  tel que :

$$\mathcal{E} \cap V = \lambda B_2^n \cap V$$

*Démonstration.* Quitte à effectuer une rotation on peut supposer que  $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 < 1\}$  pour  $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ . Posons  $\lambda = \text{Mediane}(a_1, \dots, a_n)$  et

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n ; \forall i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sqrt{\lambda - a_i} x_i = \sqrt{a_{n+1-i} - \lambda} x_{n+1-i}\}$$

Alors pour tous  $x \in F$  nous avons  $\forall i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  :

$$a_i x_i^2 + a_{n+1-i} x_{n+1-i}^2 = \lambda (x_i^2 + x_{n+1-i}^2)$$

d'où

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 = \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2$$

□

## 2 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

---

### 2.1. LEMMES D'APPROXIMATIONS

**Définition.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $\theta > 0$ , on dit que  $A \subset X$  est un  $\theta$ -net si

- (i)  $A$  est de cardinal fini.
- (ii)  $\forall x \in X, \exists y \in A$  tel que  $d(x, y) \leq \theta$

**Lemme 2.1.** Soient  $x \in S^{n-1}$ ,  $A$  un  $\theta$ -net pour un  $1 > \theta > 0$ , alors il existe  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset A$  et  $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  tel que

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \beta_i \leq \theta^i$$

*Démonstration.* Comme  $A$  est un  $\theta$ -net alors il existe  $y_0 \in A$  tel que  $|x - y_0| < \theta$ , et donc

$$x = y_0 + \lambda_1 x'$$



avec  $\lambda_1 = |x - y_0| \leq \theta$  et  $x' = \frac{x - y_0}{\lambda_1} \in S^{n-1}$ , on peut donc itéré le même procédé sur  $x'$  et réitéré indéfiniment :

$$\begin{array}{lll} x = y_0 + \lambda_1(y_1 + \lambda_2 x'') = y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_1 \lambda_2 x'' & \text{avec} & \lambda_2 \leq \theta, y_1 \in A \text{ et } x'' \in S^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ x = y_0 + \sum_{i=1}^N y_i \left( \prod_{1 \leq k \leq i} \lambda_k \right) + \tilde{x} \prod_{1 \leq k \leq N+1} \lambda_k & \text{avec} & \forall i \leq N+1 \lambda_i \leq \theta, y_i \in A \text{ et } \tilde{x} \in S^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Si l'on pose  $S_N = y_0 + \sum_{i=1}^N y_i \left( \prod_{1 \leq k \leq i} \lambda_k \right)$ , alors :

$$|x - S_N| \leq |\lambda_1 \dots \lambda_N| |\tilde{x}| \leq \theta^N \rightarrow 0 \text{ avec } N \rightarrow \infty$$

il ne reste plus qu'à poser  $\beta_0 = 1$  et pour  $i > 0$ ,  $\beta_i = \prod_{1 \leq k \leq i} \lambda_k \leq \theta^i$  et l'on a :

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i y_i$$

□

**Lemme 2.2.**  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $1 > \theta > 0$  tel que pour tous  $n \in \mathbb{N}$ , si l'on a  $A$  un  $\theta$ -net sur  $V \cap S^{n-1}$  pour  $V \subset \mathbb{R}^n$  de dimension  $k$ ,  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$  et  $T \in GL(n)$ , tel que :

$$\forall x \in A, \quad (1 - \theta) \leq \|Tx\| \leq (1 + \theta)$$

alors ,

$$\forall x \in V, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} |x| \leq \|Tx\| \leq \sqrt{1+\varepsilon} |x|$$

de plus si  $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$ , on peut prendre  $\theta = \frac{\varepsilon}{9}$

*Démonstration.* Soient  $1 > \theta > 0$ ,  $A$  un  $\theta$ -net sur  $S(V) = \{x \in V; |x| = 1\}$  et  $x \in S(V)$  par le **lemme 2.1**, il existe  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset A$  et  $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  tel que

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \beta_i \leq \theta^i$$

Notons  $T = (a_1, \dots, a_n)$

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &= \left\| T \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i \sum_{p=1}^n y_{i,p} a_p \right\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i \left\| \sum_{p=1}^n y_{i,p} a_p \right\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i \|Ty_i\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i (1 + \theta) = \frac{1 + \theta}{1 - \theta}
\end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &\geq \|Ty_0\| - \|Tx - Ty_0\| \\
&= (1 - \theta) - \left\| \sum_{p=1}^n a_p \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i y_{i,p} \right\| \\
&\geq (1 - \theta) - \sum_{i=1}^{+\infty} \theta^i \|Ty_i\| \\
&\geq \left( (1 - \theta) - \theta \frac{1 + \theta}{1 - \theta} \right) = \frac{1 - 3\theta}{1 - \theta}
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre  $\theta$  tel que

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + \varepsilon} &\geq \frac{1 + \theta}{1 - \theta} \\
\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} &\leq \frac{1 - 3\theta}{1 - \theta}
\end{aligned}$$

et pour tous  $x \in V \setminus \{0\}$  on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} &\leq \left\| T \frac{x}{|x|} \right\| \leq \sqrt{1 + \varepsilon} \\
\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} |x| &\leq \|Tx\| \leq |x| \sqrt{1 + \varepsilon}
\end{aligned}$$

Ce qui fini la première partie de la preuve, dans la suite on suppose  $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$ . On cherche  $\theta =: \theta(\varepsilon) \in ]0, 1[$ , tel que  $\sqrt{1 + \varepsilon} \geq \max\left(\frac{1 - \theta}{1 - 3\theta}, \frac{1 + \theta}{1 - \theta}\right)$ , supposons  $\theta \leq \frac{1}{3}$  alors

$$\frac{1 - \theta}{1 - 3\theta} - \frac{1 + \theta}{1 - \theta} = \frac{4\theta^2}{(1 - 3\theta)(1 - \theta)} > 0$$

Donc  $\sqrt{1+\varepsilon} \geq \frac{1-\theta}{1-3\theta}$

$$1 + \varepsilon \geq \left(\frac{1-\theta}{1-3\theta}\right)^2$$

$$(9\varepsilon + 8)\theta^2 - 2(3\varepsilon + 2)\theta + \varepsilon \geq 0$$

les deux racines de ce polynôme sont  $0 < \frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon} < \frac{3\varepsilon+2+2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon}$ , on cherche donc un  $\theta$  dans  $]0, \frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon}]$ . Pour finir

$$\frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon} \geq \frac{3\varepsilon+2-2-2\varepsilon}{8+9\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{8+9\varepsilon}$$

$$\geq \frac{\varepsilon}{9}$$

donc pour  $\varepsilon \in ]0, 9^{-1}[$  on peu prendre  $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{9}$ . □

**Lemme 2.3.** Pour tous  $0 < \theta < 1$ ,  $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$  de dimension  $k > 0$ , alors il existe un  $\theta$ -net sur  $V \cap S^{n-1}$  de cardinal inférieur à  $\left(\frac{3}{\theta}\right)^k$ .

*Démonstration.* Notons  $B_V(x, r) = \{y \in V ; |x - y| < r\}$  la boule de centre  $x \in V$  et de rayon  $r \geq 0$ , soit  $N = \{x_i\}_{i=1, \dots, m}$  un sous-ensemble de  $V \cap S^{n-1}$  maximal pour la propriété :  $x, y \in N$ ,  $|x - y| \geq \theta$ , c'est-à-dire pour tous  $x \in V \cap S^{n-1} \setminus N$  il existe  $i \leq m$  tel que  $|x - x_i| < \theta$ , donc  $N$  est un  $\theta$ -net et les  $\{B_V(x_i, \theta/2)\}_{i=1, \dots, m}$  sont donc disjoints deux à deux et toutes contenues dans  $B_V(0, 1 + \frac{\theta}{2})$  d'où :

$$m \text{Vol}(B_V(x_1, \frac{\theta}{2})) = \sum_{i=1}^m \text{Vol}(B_V(x_i, \frac{\theta}{2})) = \text{Vol}(\cup_{1 \leq i \leq m} B_V(x_i, \frac{\theta}{2})) \leq \text{Vol}(B_V(0, 1 + \frac{\theta}{2}))$$

$$m \leq \frac{\text{Vol}(B_V(0, 1 + \frac{\theta}{2}))}{\text{Vol}(B_V(x_1, \frac{\theta}{2}))}$$

Par homogénéité de la mesure de Lebesgue :

$$m \leq \left(\frac{1 + \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^k = \left(1 + \frac{2}{\theta}\right)^k < \left(\frac{3}{\theta}\right)^k$$

□

## 2.2. DÉBUT DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

Dans cette partie nous allons montrer un théorème qui sera l'outil principal de la démonstration du théorème de Dvoretzky.

**Théorème 2.4.** Pour tous  $\varepsilon > 0$  il existe  $c(\varepsilon) > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour toute norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ , pour  $k =: \lfloor c(\varepsilon) \cdot \left(\frac{E}{b}\right)^2 n \rfloor$ .  
Où  $E = \int_{S^{n-1}} \|x\| d\mu(x)$  et  $b > 0$  le plus petit réel tel que  $\|\cdot\| \leq b|\cdot|$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ , on se donne un  $1 > \theta > 0$  donné par le **lemme 2.2** et on note

- $c(\theta) = \frac{\theta^2}{4\log(\frac{3}{\theta})}$
- $V \subset_{\text{s.e.v}} \mathbb{R}^n$  avec  $\dim V := k = \lfloor c(\theta) \left(\frac{E}{b}\right)^2 n \rfloor$
- $\eta = \frac{\theta E}{b}$
- $f(\theta) = 2\left(\frac{3}{\theta}\right)^{c(\theta) \left(\frac{E}{b}\right)^2 n} e^{-\frac{\eta^2 n}{2}} = 2 \exp\left(-\frac{\eta^2 n}{4}\right)$

Distinguons deux cas

- $f(\theta) \geq 1$

on a alors :

$$\frac{\eta^2 n}{4} \leq \log(2)$$

$$k \leq \frac{\eta^2}{4\log(3/\theta)} n \leq \frac{\log(2)}{\log(3/\theta)} < 1$$

Donc  $k = 0$ , dans ce cas il n'y a rien à montrer.

- $f(\theta) < 1$

Soit  $A$  un  $\theta$ -net sur  $V \cap S^{n-1}$ , avec  $|A| \leq \left(\frac{3}{\theta}\right)^k$  nous allons montrer qu'il existe  $T \in O(n)$  tel que pour tous  $x \in A$

$$(1 - \theta)E \leq \|Tx\| \leq (1 + \theta)E$$

Tous d'abord remarquons ceci :

$$1 > f(\theta) \geq 2\left(\frac{3}{\theta}\right)^k e^{-\frac{\eta^2}{2} n}$$

$$> 2|A|e^{-\frac{\eta^2}{2} n}$$

On a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned}
\nu\left(\cap_{x \in A} \{T \in O(n) ; ||Tx|| - E| \leq b\eta\}\right) &= 1 - \nu\left(\cup_{x \in A} \{T \in O(n) ; ||Tx|| - E| > b\eta\}\right) \\
&\geq 1 - |A|\nu(T \in O(n) ; ||Ty|| - E| > b\eta) \quad \text{pour un } y \in A \\
&\geq 1 - |A|\mu(y \in S^{n-1} ; ||y|| - E| > b\eta) \quad \text{par le \textbf{lemme 1.2}}
\end{aligned}$$

En appliquant la concentration de la mesure

$$\nu\left(\cap_{x \in A} \{T \in O(n) ; ||Tx|| - E| \leq b\eta\}\right) \geq 1 - |A|2e^{-\frac{\eta^2 n}{2}} > 0$$

Il existe donc  $T \in O(n)$  tel que pour tous  $x \in A$  on ait  $||Tx|| - E| \leq b\eta$ , c'est à dire

$$E(1 - \theta) = E - b\eta \leq ||Tx|| \leq E + b\eta = E(1 + \theta)$$

Par le **lemme 2.2** pour tous  $x \in V$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}}|x|E \leq ||Tx|| \leq \sqrt{1 + \varepsilon}|x|E$$

et pour  $\varepsilon < 9^{-1}$  on peut prendre  $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{9}$  et donc  $c(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{4 \times 81 \log(\frac{3 \times 9}{\varepsilon})}$  de l'ordre  $c(\varepsilon) = c_0 \frac{\varepsilon^2}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$  pour un  $c_0 > 0$ .

□

### 2.3. ESTIMATION DE $E$

Dans cette partie nous allons donner une estimation de  $E = \int_{S^{n-1}} ||x|| d\mu(x)$ , pour cela nous aurons besoin d'une minoration de  $\mathbb{E}\left[\max_{1 \leq i \leq N} g_i\right]$  pour des  $\{g_i\}$  i.i.d suivant  $\mathcal{N}(0, 1)$ , nous démontrons une telle borne dans le lemme suivant.

**Lemme 2.5.** il existe  $c > 0$  tel que  $\forall N > 1$  et  $\{g_i\}_{1 \leq i \leq N}$  des variables aléatoire i.i.d suivant une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  on ait :

$$c\sqrt{\log N} \leq \mathbb{E}\left[\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i|\right]$$

où  $\tilde{N} = \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$  est la partie entière supérieure de  $\frac{N}{2}$ .

*Démonstration.* Commençons par montrer que pour  $n > 1$ ,  $\mathbb{P}(|g_1| > \sqrt{\log n}) \geq \frac{1}{n}$ , on a :

$$\mathbb{P}(|g_1| > \sqrt{\log n}) = 2 \int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq \int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \quad \text{pour } x > \sqrt{\log(2)} > 1$$

$$\int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[ -\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \right]_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{n \log n}} > \frac{1}{n}$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i| \leq \sqrt{\log N}\right) = \mathbb{P}\left(|g_1| \leq \sqrt{\log N}\right)^{\tilde{N}} = \left(1 - \mathbb{P}\left(|g_1| > \sqrt{\log N}\right)\right)^{\tilde{N}}$$

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i| \leq \sqrt{\log N}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\tilde{N}} \leq e^{-\frac{\tilde{N}}{N}} \leq e^{-\frac{1}{2}}$$

Ce qui équivaut a

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i| \leq \sqrt{\log N}\right) \geq 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

Par l'inégalité de Markov on a finalement :

$$\mathbb{E}\left[\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i|\right] \geq \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i| \leq \sqrt{\log N}\right) \sqrt{\log N} \geq (1 - e^{-\frac{1}{2}}) \sqrt{\log N}$$

avec  $c =: 1 - e^{-\frac{1}{2}}$

□

**Lemme 2.6** (Dvoretzky-Rogers). Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$  tel que  $B_2^n$  est l'ellipsoïde de John de  $B_{\|\cdot\|}$ , alors il existe une base orthonormée  $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$  tel que  $\forall 1 \leq i \leq n$

$$e^{-1} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \leq \|x_i\| \leq 1$$

*Démonstration.*  $S^{n-1}$  est compact et  $\|\cdot\|$  continue, on peut donc prendre un  $x_1 \in S^{n-1}$  qui maximise  $\|\cdot\|$  c'est à dire  $\|x_1\| = 1$ , supposons que l'on ai  $x_1, \dots, x_{k-1}$  avec  $k \leq n$  tel que pour tous  $1 \leq i \leq k-1$ ,  $x_i$  maximise  $\|\cdot\|$  sur  $S^{n-1} \setminus \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1}) \neq \emptyset$  car les  $\{x_i\}_{i=1,\dots,k-1}$  sont orthogonaux deux à deux. On peut donc répéter le procédé pour trouver  $x_k$  qui maximise

$S^{n-1} \setminus \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1})$ , par récurrence on peut donc avoir  $n$  vecteurs avec ses propriétés. Fixons  $1 \leq k \leq n$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^*$  et définissons :

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i ; \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{a_i}{a}\right)^2 + \sum_{i=k}^n \left(\frac{b_i}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

Supposons  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in \mathcal{E}$ , alors  $\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \in aB_2^n$  et donc  $\|\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i\| \leq a$ . Si  $x \in \text{Vect}(x_k, \dots, x_n) \cap B_2^n$  on a  $\|x\| \leq \|x_k\|$  par construction, et donc  $\sum_{i=k}^n a_i x_i \in bB_2^n \Rightarrow \|\sum_{i=k}^n a_i x_i\| \leq b\|x_k\|$ , ce qui nous donne la majoration suivante

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=k}^n a_i x_i \right\| \leq a + b\|x_k\|$$

Posons  $\phi \in GL(n)$  définit par  $\phi(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} a a_i x_i + \sum_{i=k}^n b a_i x_i$  on a  $\phi = \text{diag}(\overbrace{a, \dots, a}^{(k-1) \times}, \overbrace{b, \dots, b}^{(n-k+1) \times})$  et donc  $\det \phi = a^{k-1} b^{n-k+1}$  d'où :

$$\int_{\mathcal{E}} dx_1 \dots dx_n = \int_{B_2^n} \det \phi dx_1 \dots dx_n = a^{k-1} b^{n-k+1} \int_{B_2^n} dx_1 \dots dx_n$$

On prend  $a + b\|x_k\| = 1$  de sorte que  $\mathcal{E} \subset K$ , comme  $B_2^n$  est l'ellipsoïde de volume maximale incluse dans  $K$ , on a que

$$1 \geq \frac{\int_{\mathcal{E}} dx_1 \dots dx_n}{\int_{B_2^n} dx_1 \dots dx_n} = a^{k-1} b^{n-k+1}$$

Fixons donc pour  $k \geq 2$ ,  $b = \frac{1-a}{\|x_k\|}$  et  $a = \frac{k-1}{n}$ , en remplaçant dans l'inégalité on obtient :

$$1 \geq a^{k-1} \left( \frac{1-a}{\|x_k\|} \right)^{n-k+1} \iff \|x_k\| \geq a^{\frac{k-1}{n-k+1}} (1-a) = \left( \frac{k-1}{n} \right)^{\frac{k-1}{n-k+1}} \left( 1 - \frac{k-1}{n} \right)$$

et  $\log a^{\frac{k-1}{n-k+1}} = \frac{k-1}{n-k+1} \log \left( \frac{k-1}{n} \right) > -1$ .

□

**Proposition 2.7** (Estimation de  $E$ ). Sous les conditions du **théorème 2.4** et en supposant que  $B_2^n$  est l'ellipsoïde de John de  $B_{\|\cdot\|}$ , il existe  $c > 0$  tel que  $E =: \int_{S^{n-1}} \|x\| d\mu(x) \geq c \sqrt{\frac{\log n}{n}}$ .

*Démonstration.* Par le lemme de Dvoretzky-Rogers il existe une base orthonormée  $x_1, \dots, x_n$  tel que pour  $1 \leq i \leq \tilde{n} =: \lceil \frac{n}{2} \rceil$  la partie entière supérieure de  $\frac{n}{2}$ ,  $\|x_i\| \geq e^{-1} \left(1 - \frac{\tilde{n}-1}{n}\right) \geq e^{-1} \left(1 - \frac{\frac{n}{2}+1-1}{n}\right) = (2e)^{-1}$ . Comme  $\mu$  est invariante par composition par une transformation orthogonale on a que

$$E =: \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| d\mu(a) = \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n \right\| d\mu(a)$$

et donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| d\mu(a) + \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n \right\| d\mu(a) \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} 2 \max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\|, \|a_n x_n\| \right\} d\mu(a) \geq \dots \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} \left\{ |a_i| \|x_i\| \right\} d\mu(a) \\ &\geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} \left\{ |a_i| \|x_i\| \right\} d\mu(a) \geq (2e)^{-1} \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |a_i| d\mu(a) \end{aligned}$$

Soit  $(g_1, \dots, g_n)$ , des variables aléatoire i.i.d de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  alors

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |a_i| d\mu(a) = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |g_i| \right]$$

**Lemme 2.8.**  $(\sum_{i=1}^n g_i^2)^{-\frac{1}{2}}(g_1, \dots, g_n)$  et  $(\sum_{i=1}^n g_i^2)^{\frac{1}{2}}$  sont indépendants.

*Démonstration du lemme.* □

Par le lemme on a donc

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |g_i| \right] \cdot \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \mathbb{E} \left[ \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |g_i| \right]$$

la fonction racine carré est concave, par l'inégalité de Jensen on a donc :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n g_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \mathbb{E}[g_1^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$

Et finalement par le **lemme 2.5**, il existe  $K > 0$  tel que :

$$E \geq \frac{1}{2e\sqrt{n}} \mathbb{E} \left[ \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |g_i| \right] \geq \frac{K}{2e} \sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

Pour finir il suffit de poser  $c =: \frac{K}{2e}$  □



On peut donc réunir les résultats **proposition 2.7** et **théorème 2.4** pour obtenir :

$$k \geq \lceil c(\varepsilon) \log(n) \rceil$$

avec  $c(\varepsilon) = c_0 \frac{\varepsilon^2}{\log(\frac{21}{\varepsilon})}$  pour  $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$ , en réalité Y. Gordon en 1988 [4] à prouvé que l'on pouvait prendre  $c(\varepsilon) = c_0 \varepsilon^2$ .

### 3 APPLICATIONS

---

#### 3.1. ESPACE $\ell_p$

Montrons la proposition suivante qui n'est en réalité qu'un corollaire du **théorème 2.4**.

**Proposition 3.1.** Soit  $1 \leq p < \infty$  alors, pour tous  $\varepsilon > 0$  il existe  $c(\varepsilon) > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $\ell_p^n$ , pour

$$k \geq \begin{cases} c(\varepsilon)n & \text{si } 1 \leq p < 2 \\ c(\varepsilon)n^{\frac{2}{p}} & \text{si } p > 2 \end{cases}$$

*Démonstration.* L'existence de l'injection sera prouvée par le **théorème 2.4**, il suffit donc de minorer  $\frac{E}{b}$  avec les notations de la partie précédente.

$$E =: \int_{S^{n-1}} \|x\|^p d\mu(x) = \mathbb{E} \left[ \frac{(\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}}{(\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = \frac{\mathbb{E} \left[ (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \right]}{\mathbb{E} \left[ (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} \right]}$$

Comme les normes sont des applications convexes, par l'inégalité de Jensen :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \geq \left( \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|x_i|^p] \right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Donc  $E \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}} n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}$ , séparons deux cas :

$1 < p < 2$  : Par l'inégalité de Hölder on a  $\|x\|_p \leq |x|$ , donc  $b \leq 1$  et donc par le **théorème 2.4** , on a

$$k(\varepsilon, n) \geq c(\varepsilon) \left(\frac{E}{b}\right)^2 n \geq c(\varepsilon) \frac{\pi}{2} n^{\frac{2}{p}-1} n = \tilde{c}(\varepsilon) n^{\frac{2}{p}}$$

$2 < p < \infty$  : Par l'inégalité de Hölder on a  $\|x\|_p \leq |x| n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ , donc  $b \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$  et donc par le **théorème 2.4** , on a

$$k(\varepsilon, n) \geq c(\varepsilon) \frac{\pi}{2} n = \tilde{c}(\varepsilon) n$$

□

## RÉFÉRENCES

---

- [1] G. SCHECHTMAN, “Euclidean sections of convex bodies,” 2008.
- [2] A. GROTHENDIECK, “Sur certains classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers,” 1956.
- [3] V. MILMAN, “New proof of the theorem of A. Dvoretzky on intersections of convex bodies,” 1971.
- [4] Y. GORDON, “On Milman’s inequality and random subspaces which escape through a mesh in  $\mathbb{R}^n$ ,” 1988.
- [5] G. PISIER, *The volume of convex bodies and Banach space geometry*. Cambridge University Press, 1989.
- [6] V. MILMAN, “Dvoretzky theorem - thirty years later,” 1992.
- [7] V. D. G. SCHECHTMAN, *Asymptotic theory of finite dimensional normed space*. Springer, 1986.