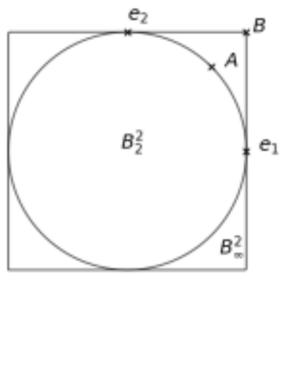
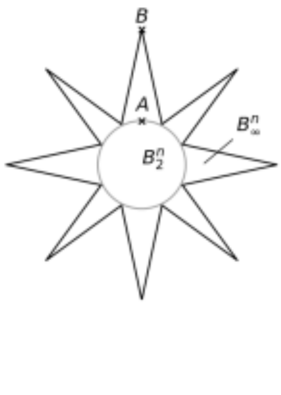
INTRODUCTION

Théorème 1 (A. Dvoretzky, 1961)**.** Il existe une fonction $k :]0,1[\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, telle que $\forall \varepsilon \in]0,1[$, $k(\varepsilon,n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$ tels que :

(i) $\dim V = k(\varepsilon, n)$

(ii) $\exists r > 0$ tel que , $r \cdot (V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1+\varepsilon) r \cdot (V \cap B_2^n)$





INTRODUCTION

Théorème 2 (V. Milman, 1971)**.** Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$ tels que :

(i) $\dim V \geq c.\log(n)$

(ii) $\exists r > 0$ tel que , $r \cdot (V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1+\varepsilon) r \cdot (V \cap B_2^n)$

Théorème 3. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour toutes normes $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$, ℓ_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans $(\mathbb{R}^n, ||.||)$ pour un $k \geq c.\log(n)$.

1 PRÉLIMINAIRE

1.1. MESURES DE HAAR

Définition & Théorème (Mesures de Haar)**.** Soit (X, d) un espace métrique, G un groupe topologique localement compact qui agit sur X et tel que :

$$\forall x, y \in X \ \forall g \in G\,,\ d(gx, gy) = d(x, y) \tag{$\star$}$$

Alors, il existe une unique mesure à un coefficient multiplicatif près, régulière définie sur les boréliens de X qui est invariante sous l'action de G. Cette mesure est appelée mesure de Haar de X (où G est sous-entendu).

1 PRÉLIMINAIRE

1.1. MESURES DE HAAR

Lemme 1.1. Soit $f \in C(S^{n-1})$ et $Y = (g_1, ..., g_n)$ où les $\{g_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sont i.i.d suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors

$$\int_{S^{n-1}} f\,d\mu = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y}{|Y|}\right)\right]$$

1 PRÉLIMINAIRE

1.1. MESURES DE HAAR

Lemme 1.2. Soit $A \subset S^{n-1}$ un borélien, alors pour tout $x \in S^{n-1}$

$$\nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A\Big) = \mu\big(A\big)$$

1.2. CONCENTRATION DE LA MESURE

Théorème 1.3. Soit $A \in \mathrm{Bor}(S^{n-1})$ tel que $\mu(A) \geq \frac{1}{2}$, alors pour tout $t > 0$:

$$\mu(A_t) \geq 1 - 2e^{-\frac{nt^2}{4}}$$

Corollaire 1.4 (concentration de la mesure sur la sphère)**.** Pour tout $t > 0$ et toute fonction f, L-Lipschitzienne de S^{n-1} dans $\mathbb{R}$ pour un $L > 0$ on a :

$$\mu\left\{|f - \mathbb{E}[f]| > t\right\} \leq 4e^{-\beta\frac{t^2 n}{L^2}}$$

où $\mathbb{E}[f] = \int_{S^{n-1}} f\,d\mu$ et $1 > \beta > 0$ une constante universelle.

1.3. ELLIPSOÏDES

Défintion. On appelle ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ l'image de la boule unité euclidienne par un élément de $GL(n)$.

Donnons une définition alternative d'un l'ellipsoïde.

Proposition 1.5. Pour tout ellipsoïde $\mathscr{E}$, il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n > 0$ et $v_1, ..., v_n$ une base orthonormée tels que :

$$\mathscr{E} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \ ; \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} < 1\right\}$$

Lemme 1.6. Soit $\mathscr{E}$ un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$, alors $\exists \lambda > 0$ et $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$ de dimension $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ tels que :

$$\mathscr{E} \cap V = \lambda B_2^n \cap V$$

1.3. ELLIPSOÏDES

Définition & Théorème (Ellipsoïde de John)**.** Tout compact convexe symétrique d'intérieur non vide contient un unique ellipsoïde de volume maximal, il est appelé ellipsoïde de John.

1.4. LOI GAUSSIENNE

Lemme 1.8. Soit $g = (g_1, \ldots, g_n)$ où les $(g_i)_{i \le n}$ sont des variables aléatoires i.i.d suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors $\frac{g}{|g|}$ et $|g|$ sont indépendantes.

Lemme 1.9. il existe $c > 0$ telle que $\forall N > 1$ et $\{g_i\}_{1 \le i \le N}$ des variables aléatoires i.i.d suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$ on ait :

$$\mathbb{E}\Big[\max_{1 \le i \le \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil} |g_i|\Big] \ge c\sqrt{\log N}$$

où $\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$ est la partie entière supérieure de $\frac{N}{2}$.

2 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

2.1. LEMMES D'APPROXIMATIONS

Défintion. Soit (X, d) un espace métrique et $\theta > 0$, on dit que $A \subset X$ est un θ-net si

(i) A est de cardinal fini.

(ii) $\forall x \in X$, $\exists y \in A$ tel que $d(x, y) \leq \theta$

Lemme 2.1. Pour tous $0 < \theta < 1$, $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$, alors il existe un θ-net sur $V \cap S^{n-1}$ de cardinal inférieur à $\left(\frac{3}{\theta}\right)^k$.

2 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

2.1. LEMMES D'APPROXIMATIONS

Lemme 2.2. Soit $x \in S^{n-1}$, A un θ-net pour un $1 > \theta > 0$, alors il existe $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ et $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tels que

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N},\ \beta_i \leq \theta^i$$

2 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

2.1. LEMMES D'APPROXIMATIONS

Lemme 2.3. $\forall \varepsilon > 0$, il existe $1 > \theta > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on a A un θ-net sur $V \cap S^{n-1}$ pour $V \underset{\text{sev}}{\subset} \mathbb{R}^n$ de dimension k, $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $T \in GL(n)$, tels que :

$$\forall x \in A, \quad (1-\theta) \leq \left|\left|Tx\right|\right| \leq (1+\theta)$$

alors ,

$$\forall x \in V, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}|x| \leq \left|\left|Tx\right|\right| \leq \sqrt{1+\varepsilon}|x|$$

de plus si $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$, on peut prendre $\theta = \frac{\varepsilon}{9}$

2 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

2.1. LEMMES D'APPROXIMATIONS

2.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

Théorème 2.4. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, il existe $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$ tels que $\mathbf{dim}\, V \geq c(\varepsilon)(\frac{M}{b})^2 n$ et pour tout $x \in V$:

$$|x|\frac{M}{\sqrt{1+\varepsilon}} \leq ||x|| \leq M\sqrt{1+\varepsilon}|x|$$

Où $M = \int_{S^{n-1}} ||x|| d\mu(x)$ et $b > 0$ le plus petit réel tel que $||.|| \leq b|.|$

2.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

2.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

Lemme 2.6 (Dvoretzky-Rogers). Soit $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ telle que B_2^n est l'ellipsoïde de John de $B_{||.||}$, alors il existe une base orthonormée $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ telle que pour $1 \leq i \leq n$

$$e^{-1}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \leq ||x_i|| \leq 1$$

2.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

2.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

Proposition 2.7. Soit $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ tel que B_2^n est l'ellipsoïde de John de $B_{||.||}$, alors il existe $c > 0$ tel que

$$M =: \int_{S^{n-1}} ||x|| d\mu(x) \geq c\sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

2.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

Défintion. (Dimension critique) Soit $X = (\mathbb{R}^n, ||.||)$ pour $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, pour $\varepsilon > 0$ on note $k(X, \varepsilon)$ le plus grand entier tel que $\ell_2^{k(X,\varepsilon)}$ s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans X.

Corollaire 3.1. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $c(\varepsilon) > 0$, tels que pour tout $p, q \in]1, \infty[$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a,

$$k(\ell_p^n, \varepsilon).k(\ell_q^n, \varepsilon) \geq c(\varepsilon).n^{1+\frac{2}{p}}$$

Proposition 3.2. Soit $2 < p < \infty$ et $0 < \varepsilon < 1$, alors il existe $c_p(\varepsilon) > 0$ tel que,

$$k(\ell_p^n, \varepsilon) \leq c_p(\varepsilon) n^{\frac{2}{p}}$$

Corollaire 3.3. Soit $p \in [1, +\infty[$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c_p(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $n \geq 2$,

$$k(\ell_p^n, \varepsilon) \geq \begin{cases} c_p(\varepsilon) n & \text{si } 1 \leq p < 2 \\ c_p(\varepsilon) n^{\frac{2}{p}} & \text{si } 2 \leq p < \infty \end{cases}$$

Proposition 3.5. Soit $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{32}$, il existe $c, C > 0$ des constantes universelles tel que :

$$k(\ell_\infty^n, \varepsilon) \leq \frac{C \log(n)}{\log(\frac{1}{c\varepsilon})}$$

Proposition 3.6. Soit $0 < \varepsilon < 1$, ℓ_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans ℓ_∞^n pour $k = \left\lceil \frac{\log n}{\log(\frac{3}{\varepsilon})} \right\rceil$.

A - INÉGALITÉ DE PRÉKOPA-LEINDLER

Lemme A.1. Soit A,B deux compacts non vides de $\mathbb{R}$, alors

$$\lambda(A+B) \geq \lambda(A) + \lambda(B)$$

Théorème A.2 (Prékopa-Leindler)**.** Soit $\alpha \in]0,1[$, $f,g,h \in L^\infty(\mathbb{R}^n, [0,+\infty))$ tel que pour tout $x,y \in \mathbb{R}^n$,

$$h\left(\alpha x + (1-\alpha)y\right) \geq f(x)^\alpha g(y)^{1-\alpha}$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} h d\lambda \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\lambda\right)^\alpha \left(\int_{\mathbb{R}^n} g d\lambda\right)^{1-\alpha}$$

Corollaire A.3 (Brunn-Minkowsky)**.** Soit A,B deux compacts non vides de $\mathbb{R}^n$, on a

(i) Pour $\alpha \in]0,1[$, $\lambda\Big(\alpha A + (1-\alpha)B\Big) \geq \lambda(A)^{\alpha}\lambda(B)^{1-\alpha}$

(ii) $\lambda(A+B)^{\frac{1}{n}} \geq \lambda(A)^{\frac{1}{n}} + \lambda(B)^{\frac{1}{n}}$