

SORBONNE UNIVERSITÉ

TRAVAUX D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

---

# Autour du théorème de Dvoretzky

---

*"It soon became clear that an outstanding breakthrough in Geometric Functional Analysis had been achieved."*

Vitali Milman à propos du théorème de Dvoretzky dans *Dvoretzky theorem - thirty years later*

Mathieu GALLO

*Enseignant* : Omer Friedland

date

# TABLE DES MATIÈRES

---

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction</b>   | <b>2</b>  |
| <b>1 Préliminaire</b>   | <b>5</b>  |
| 1.1 Mesures de Haar . . . . .                                   | 5         |
| 1.2 Concentration de la mesure . . . . .                        | 7         |
| 1.3 Ellipsoïdes . . . . .                                       | 8         |
| 1.4 Loi gaussienne . . . . .                                    | 10        |
| <b>2 Démonstration du théorème de Dvoretzky</b>                 | <b>12</b> |
| 2.1 Lemmes d'approximations . . . . .                           | 12        |
| 2.2 Démonstration du théorème de Dvoretzky . . . . .            | 15        |
| <b>3 Sections presque euclidiennes de <math>\ell_p^n</math></b> | <b>18</b> |
| 3.1 cas $1 \leq p < 2$ . . . . .                                | 18        |
| 3.2 cas $2 \leq p < \infty$ . . . . .                           | 18        |
| 3.3 cas $p = \infty$ . . . . .                                  | 21        |
| <b>A - Inégalité de Khinchine</b>                               | <b>22</b> |

## INTRODUCTION

---

Le mémoire suivant suit la série de lectures de Gideon Schechman , "Euclidean sections of convex bodies" [1].

Alexandre Grothendieck en 1956 dans son article "Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le théorème de Dvoretzky-Rogers" [2], inspiré par le lemme de Dvoretzky-Rogers (1950) propose une conjecture à laquelle Aryeh Dvoretzky répondra positivement en 1961, aboutissant au résultat suivant :

**Théorème 1** (A. Dvoretzky, 1961). Il existe une fonction  $k : ]0, 1[ \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , tel que  $\forall \varepsilon \in ]0, 1[$ ,  $k(\varepsilon, n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout compact convexe symétrique  $K \subset \mathbb{R}^n$ , il existe  $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$  tels que :

- (i)  $\dim V = k(\varepsilon, n)$
- (ii)  $\exists r > 0$  tel que ,  $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1 + \varepsilon)r.(V \cap B_2^n)$

Dans le papier original de Dvoretzky l'estimation de  $k$  était :

$$k(\varepsilon, n) \geq c(\varepsilon) \sqrt{\frac{\log n}{\log \log n}} \quad \text{pour un } c(\varepsilon) > 0$$

Vitali Milman en 1971 donna une nouvelle preuve du théorème de Dvoretzky en utilisant le phénomène de concentration de la mesure [3], il a de plus amélioré le théorème en donnant l'estimation de la dépendance en  $n$  pour la dimension de  $V$  :  $k(\varepsilon, n) \geq c(\varepsilon) \cdot \log(n)$ .

**Théorème 2** (V. Milman, 1971). Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $c > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout compact convexe symétrique  $K \subset \mathbb{R}^n$ , il existe  $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$  tels que :

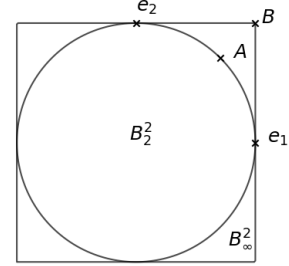
- (i)  $\dim V \geq c \cdot \log(n)$
- (ii)  $\exists r > 0$  tel que ,  $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1 + \varepsilon)r.(V \cap B_2^n)$

La dépendance de  $c$  par rapport à  $\varepsilon$  donné par V.Milman était  $c \sim \frac{\varepsilon^2}{\log \frac{1}{\varepsilon}}$  [3], c'est cette dépendance qui sera démontrée dans ce mémoire. Y.Gordon a montré en 1988 l'on pouvait prendre  $c \sim \varepsilon^2$  avec les mêmes outils que V.Milman dans [4], plus récemment en 2006, G.Schechtman a montré que l'on pouvait prouver le théorème de Dvoretzky avec la même preuve que V. Milman pour  $c \sim \varepsilon^2$  en construisant de manière plus précise le  $\theta$ -net [5] (voir preuve de **théorème 2.4**) .

**Notation.** Pour la suite on utilisera les notations :

- $|\cdot|_n$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ , ou  $|\cdot|$  si il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension.
- $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| = 1\}$ , la  $(n-1)$ -sphère euclidienne.

Commençons par donner une légère interprétation géométrique du théorème, prenons l'exemple de  $K = B_{\|\cdot\|_\infty}$  dans le cas  $n = 2$  la distance entre un point situé sur un quart du cercle et le coin le plus proche est  $\sqrt{2} - 1$ , nous pouvons facilement généraliser cela pour  $n > 2$ . Prenons par exemple les points  $A = (\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}}) \in S^{n-1}$  et  $B = (1, \dots, 1) \in \partial B_\infty^n$  le coin de  $B_\infty^n$  le plus proche de  $A$ , on peut joindre  $A$  aux points  $e_j \in \partial B_\infty^n \cap S^{n-1}$  de la base canonique pour  $1 \leq j \leq n$ , et on a les distances suivantes :



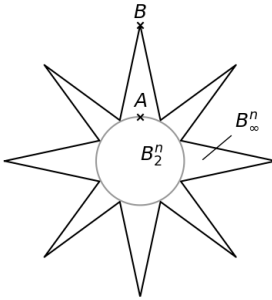
$$|A - e_j| = \sqrt{2(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{2}$$

$$|e_i - e_j| = \sqrt{2} \text{ pour } i \neq j$$

$$|A - B| = \sqrt{n} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

$$|e_j - B| = \sqrt{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

Donc lorsque  $n$  est grand, si l'on se place sur la  $(n-1)$ -sphère euclidienne,  $B_\infty^n$  semble être formé de  $2^n$  "piques" qui sont de plus en plus grands avec  $n$ . Mais le théorème de Dvoretzky nous affirme qu'il existe une section  $C$  de  $B_\infty^n$  de dimension supérieure à  $c \log n$  où  $c$  ne dépendant



pas de  $n$ , tel que  $C$  soit arbitrairement proche de la boule euclidienne, c'est-à-dire une section sur laquelle on ne voit pas ces "piques". En terme plus mathématique, pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $V \subset \mathbb{R}^n$  s.e.v de dimension plus grande que  $c(\varepsilon) \log n$  tel que pour un certain  $r > 0$  :

$$r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap B_\infty^n \subset (1 + \varepsilon)r.(V \cap B_2^n)$$

Nous allons maintenant donner une reformulation du théorème de Dvoretzky en terme de norme, en utilisant la relation entre un compact convexe symétrique  $K$  et la norme  $\|y\|_K = \inf\{\lambda ; \frac{y}{\lambda} \in K\}$ .

**Définition.** Soit  $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$  deux espaces normés et  $C > 0$ , on dit que  $X$  s'injecte  $C$ -continûment dans  $Y$ , si il existe  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  tel que pour tout  $x \in X$

$$\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$$

**Théorème 3.** Pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $c > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour toute normes  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  pour un  $k \geq c \cdot \log(n)$ .

Montrons que le **théorème 2** et le **théorème 3** sont équivalents.

(2) $\Rightarrow$ (3)

Posons  $K = \text{Adh}(B_{\|\cdot\|}(\mathbf{0}, 1)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  et appliquons le théorème 2, celui-ci nous procure un sous-espace  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ , avec  $\dim V := k \geq c \cdot \log(n)$  et  $V \cap K$  est  $\varepsilon$ -euclidien. Donnons-nous une base orthonormée  $\{v_j\}_{1 \leq j \leq k}$  de  $V$  et posons

$$T: \begin{array}{ll} (\mathbb{R}^k, |\cdot|_k) & \mapsto (V, \|\cdot\|) \\ \sum_{i=1}^k x_i e_i & \rightarrow \sum_{i=1}^k x_i v_i \end{array}$$

Soit  $x \in \mathbb{R}^k$  tel que  $\|Tx\| = 1$ , comme  $K \cap V$  est  $\varepsilon$ -euclidien on a que

$$r \leq |Tx|_n \leq (1 + \varepsilon)r, \text{ pour un } r > 0$$

La borne supérieure est immédiate car  $K \cap V \subset r(1 + \varepsilon) \cdot (V \cap B_2^n)$ , pour la borne inférieure il suffit de remarquer que  $(V \cap K)$  est un fermet de  $V$  qui contient l'ouvert  $r \cdot (V \cap B_2^n)$  de  $V$ , comme  $Tx$  est dans la frontière de  $K \cap V$  il n'est pas dans l'intérieur de  $K \cap V$  et donc dans aucun ouvert contenu dans  $V \cap K$ . Remarquons que  $|Tx|_n = |x|_k$ , donc

$$r \leq |x|_k \leq (1 + \varepsilon)r$$

Il suffit d'appliqué cela à  $\frac{x}{\|Tx\|}$  pour  $x \neq 0$

$$r\|Tx\| \leq |x|_k \leq (1 + \varepsilon)r\|Tx\|$$

$$\frac{1}{(1 + \varepsilon)r} |x|_k \leq \|Tx\| \leq \frac{1}{r} |x|_k$$

$$r|x|_k \leq \|\tilde{T}x\| \leq (1 + \varepsilon)r|x|_k$$

avec  $\tilde{T} = r(1 + \varepsilon)T$ , remarquons que la quantité importante est  $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| = \|\tilde{T}\| \cdot \|\tilde{T}^{-1}\| \leq 1 + \varepsilon$ .

(3) $\Rightarrow$ (2)

Soit  $\varepsilon > 0$ , par le théorème 3 il existe  $c > 0$  tel que pour tous  $n \in \mathbb{N}$  il existe un  $k > c \cdot \log(n)$  et  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  pour n'importe quelle norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Considérons un compact convexe symétrique  $K \subset \mathbb{R}^n$  et  $\|y\| = \inf\left\{\lambda > 0; \frac{y}{\lambda} \in K\right\}$ , alors  $\exists T: \ell_2^k \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  linéaire tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^k, |x| \leq \|Tx\| \leq (1 + \varepsilon)|x|$$

ceci implique immédiatement que  $T$  est injective, notons  $V = \text{Im} T$ , alors la co-restriction à  $V$  de  $T$  est bijective. Soit  $y \in \partial(K \cap V)$ , c'est-à-dire  $\|y\| = 1$ , on sait qu'il existe un unique  $x \in \mathbb{R}^k$

tel que  $Tx = y$ , on en déduit donc

$$|x| \leq 1 \leq (1 + \varepsilon)|x| \iff \frac{1}{1 + \varepsilon} \leq |x| \leq 1$$

la convexité et la symétrie centrale de  $K \cap V$  implique :

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} T(B_2^k) \subset K \cap V \subset T(B_2^k)$$

Pour conclure nous nous référençons au **lemme 1.5** qui sera démontré par la suite qui dit que toutes ellipsoïdes de dimension  $k$  admettent une section de dimension  $[k/2]$  qui soit un multiple d'une boule euclidienne.

## 1 PRÉLIMINAIRE

---

### 1.1. MESURES DE HAAR

La mesure de Haar est une notion introduite par Alfred Haar en 1933, il démontre que dans tout groupe localement compact à base dénombrable il existe une mesure borélienne invariante par translation à gauche, en 1935 John V. Neumann montre que de plus cette mesure est unique à un coefficient multiplicatif près, nous admettons le théorème suivant (voir [9]).

**Définition & Théorème** (Mesures de Haar). Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $G$  un groupe topologique localement compact qui agit sur  $X$  et tel que :

$$\forall x, y \in X \quad \forall g \in G, \quad d(gx, gy) = d(x, y) \quad (\star)$$

alors il existe une unique mesure à un coefficient multiplicatif près, régulière définie sur les boréliens de  $X$  qui est invariante sous l'action de  $G$ , cette mesure est appelée mesure de Haar de  $X$  (où  $G$  est sous-entendu).

Les deux exemples suivants d'espace métrique vérifient  $(\star)$  pour  $G = O(n)$ ,

- (i)  $X = S^{n-1}$  muni de la distance euclidienne
- (ii)  $X = O(n)$  avec la norme  $\|T\| = \sup_{|x|=1} |Tx|$

**Notation.** Par le théorème précédent on peut définir sans ambiguïté  $\mu$  et  $\nu$  les mesures de Haar normalisées respectivement sur  $S^{n-1}$  et  $O(n)$ .

Montrons quelques propriétés qui seront utiles par la suite.

**Lemme 1.1.** Soit  $f \in C(S^{n-1})$  et  $Y = (g_1, \dots, g_n)$  où les  $\{g_i\}_{1 \leq i \leq n}$  sont i.i.d suivant une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ , alors

$$\int_{S^{n-1}} f d\mu = \mathbb{E} \left[ f \left( \frac{Y}{|Y|} \right) \right]$$

*Démonstration.* Par unicité de la mesure de Haar, il nous suffit de montrer que pour tous  $M \in O(n)$  et  $f \in C(S^{n-1})$  :

$$\mathbb{E} \left[ f \left( \frac{MY}{|MY|} \right) \right] = \mathbb{E} \left[ f \left( \frac{Y}{|Y|} \right) \right]$$

$$\mathbb{E} \left[ f \left( \frac{MY}{|MY|} \right) \right] = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f \left( \frac{My}{|y|} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} |y|^2 \right\} dy_1 \dots dy_n = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{1}{|\det M|} f \left( \frac{y}{|y|} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} |M^{-1}y|^2 \right\} dy_1 \dots dy_n$$

comme  $|\det M| = 1$  et  $|M^{-1}y| = |y|$ , on a :

$$\mathbb{E} \left[ f \left( \frac{MY}{|MY|} \right) \right] = \mathbb{E} \left[ f \left( \frac{Y}{|Y|} \right) \right]$$

□

**Lemme 1.2.** Soit  $A \subset S^{n-1}$  un borélien alors pour tous  $x \in S^{n-1}$

$$\nu(T \in O(n) ; Tx \in A) = \mu(A)$$

*Démonstration.* Soit  $M \in O(n)$  et  $x \in S^{n-1}$  alors la mesure définie par

$$\omega_x(A) = \nu(T \in O(n) ; Tx \in A)$$

$\omega_x$  vérifie les propriétés suivantes :

$$\omega_x(MA) = \nu(T \in O(n) ; M^T Tx \in A) = \nu(T \in O(n) ; Tx \in A) = \omega_x(A)$$

$$\omega_x(\emptyset) = 0$$

$$\begin{aligned} \omega_x \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) &= \nu \left( T \in O(n) ; Tx \in \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \nu \left( \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \{T \in O(n) ; Tx \in A_i\} \right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu(T \in O(n) ; Tx \in A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \omega_x(A_i) \end{aligned}$$

L'unicité de la mesure de Haar nous permet de conclure que  $\omega_x = \mu$ , en particulier  $\omega_x$  ne dépend pas de  $x$ . □

## 1.2. CONCENTRATION DE LA MESURE

Le phénomène de concentration de la mesure a été mis en avant par V. Milman étendant les travaux de P. Lévy et son inégalité isopérimétrique. On peut formuler la question que cherche à résoudre le théorème comme cela : étant donné  $(X, d)$  un espace métrique muni d'une mesure de probabilité  $P$ , on cherche à regarder où les fonctions 1-Lipschitziennes sont essentiellement constantes. Considérons  $f$  une fonction 1-Lipschitzienne de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  et notons  $m_f$  sa médiane, c'est à dire le réel tel que

$$P(f \geq m_f) \geq \frac{1}{2} \quad \& \quad P(f \leq m_f) \geq \frac{1}{2}$$

L'assertion  $f$  est essentiellement constante se traduit par le fait que l'on puisse donner une borne supérieure à  $P(|f - m_f| \geq \varepsilon)$ , pour  $\varepsilon \geq 0$ .

Posons  $A = \{f \leq m_f\}$ , il est assez naturelle de s'intéresser à l'ensemble suivant

$$A_\varepsilon = \{x \in X ; d(x, A) \leq \varepsilon\}$$

On appelle  $A_\varepsilon$  le  $\varepsilon$ -élargissement de  $A$ , il suit cela :

$$x \in A_\varepsilon \Rightarrow f(x) \leq \varepsilon + m_f \quad \Longleftrightarrow \quad A_\varepsilon \subset \left\{ x \in S^{n-1} ; f(x) \leq \varepsilon + m_f \right\}$$

$$\begin{aligned} P(f > \varepsilon + m_f) &= 1 - P(f \leq \varepsilon + m_f) \\ &\leq 1 - P(A_\varepsilon) \end{aligned}$$

Cette observation a permis à Milman et Gromov de se ramener à une étude ensembliste du problème. Ils introduisent  $\alpha$  une fonction dite de concentration, définit comme le plus petit réel tel que :

$$\forall A \subset X, P(A) \geq \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - P(A_\varepsilon) \leq \alpha(\varepsilon, P)$$

Appliquant ceci au ensemble  $\{f \geq m_f\}$  et  $\{f \leq m_f\}$ , on trouve facilement :

$$P(|f - m_f| > \varepsilon) \leq 2\alpha(\varepsilon, P)$$

Considérons maintenant que  $f$  est  $L$ -Lipschitzienne, alors la médiane de  $\frac{f}{L}$  est  $\frac{m_f}{L}$ , donc par homogénéité

$$P(|f - m_f| > \varepsilon) \leq 2\alpha\left(\frac{\varepsilon}{L}, P\right)$$

L'utilité de cette formulation est que dans certains cas  $\alpha$  décroît très vite vers 0 lorsque  $\varepsilon$  devient grand. Pour certains espace  $X$  il est possible de remplacer la médiane par l'espérance qui est en générale plus simple à calculer, dans le cas où  $X$  est la  $(n-1)$ -sphère euclidienne on



dispose du théorème suivant qui sera admis (voir [6] ou [9]) .

**Théorème 1.3** (Concentration de la mesure sur la sphère). Soit  $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Lipschitzienne de constante  $L > 0$ , alors

$$\mu\left\{x \in S^{n-1} ; |f(x) - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon\right\} \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2L^2}}$$

Où  $\mathbb{E}[f] =: \int_{S^{n-1}} f d\mu$

### 1.3. ELLIPSOÏDES

Dans cette partie nous montrons plusieurs propriétés sur les ellipsoïdes, commençons par les définir :

**Définition.** On appelle ellipsoïde de  $\mathbb{R}^n$  l'image de la boule unité euclidienne par un élément de  $GL(n)$ .

Donnons une définition alternative d'un ellipsoïde.

**Proposition 1.4.** Pour tout ellipsoïde  $\mathcal{E}$  il existe  $\alpha_1, \dots, \alpha_n > 0$  et  $v_1, \dots, v_n$  une base orthonormée tel que :

$$\mathcal{E} = \left\{x \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, v_i \rangle^2}{\alpha_i^2} < 1\right\}$$

*Démonstration.* Donnons nous  $A \in GL(n)$  tel que  $AB_2^n = \mathcal{E}$

$$|Ax|^2 = x^T A^T A x$$

$A^T A$  est symétrique, soit  $\lambda$  une de ses valeurs propres et  $v$  un vecteur propre associé, alors

$$0 < |Av|^2 = v^T \lambda v = \lambda |v|^2$$

Donc les valeurs propres de  $A^T A$  sont strictement positives, Comme elle est symétrique, elle est donc diagonalisable dans une base orthonormée, donnons nous  $(\lambda_i)_{i \leq n}$  et  $(v_i)_{i \leq n}$  une base orthonormée tel que  $A^T A v_i = \lambda_i^2 v_i$  pour tous  $1 \leq i \leq n$  et définissons les quantités suivantes :

- $P$  la matrice définie par  $P v_j = \lambda_j v_j$
- $u_j = \lambda_j^{-1} A v_j$

Montrons que les  $u_j$  forment une base orthonormée :

$$\begin{aligned}
\langle u_i, u_j \rangle &= \lambda_j^{-1} v_j^T A^T \lambda_i^{-1} A v_i \\
&= \lambda_j^{-1} \lambda_i^{-1} v_j^T (A^T A v_i) \\
&= \lambda_j^{-1} \lambda_i^{-1} v_j^T \lambda_i^2 v_i \\
&= \frac{\lambda_i}{\lambda_j} \langle v_j, v_i \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Soit  $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i \in S^{n-1}$

$$\begin{aligned}
y &= Ax = x_1 A v_1 + \dots + x_n A v_n \\
&= x_1 \lambda_1 u_1 + \dots + x_n \lambda_n u_n
\end{aligned}$$

Les composante de  $y$  dans la base  $\{u_j\}_{j \leq n}$  sont  $\langle y, u_j \rangle = x_j \lambda_j$ , donc :

$$\frac{\langle y, u_1 \rangle^2}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{\langle y, u_n \rangle^2}{\lambda_n^2} = x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

Et finalement  $\partial \mathcal{E} = \{y \in \mathbb{R}^n ; \frac{\langle y, u_1 \rangle^2}{\lambda_1^2} + \dots + \frac{\langle y, u_n \rangle^2}{\lambda_n^2} = 1\}$ . □

Démontrons maintenant le lemme que nous avons utiliser dans l'introduction :

**Lemme 1.5.** Soit  $\mathcal{E}$  un ellipsoïde de  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\exists \lambda > 0$  et  $V \underset{\text{s.e.v}}{\subset} \mathbb{R}^n$  de dimension  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$  tel que :

$$\mathcal{E} \cap V = \lambda B_2^n \cap V$$

*Démonstration.* Quitte a effectuer une rotation on peut supposer que  $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R}^n ; \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 < 1\}$  pour  $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_n$ . Posons  $\lambda = \text{Mediane}(a_1, \dots, a_n)$  et

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n ; \forall i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \sqrt{\lambda - a_i} x_i = \sqrt{a_{n+1-i} - \lambda} x_{n+1-i}\}$$

Alors pour tous  $x \in F$  nous avons  $\forall i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  :

$$a_i x_i^2 + a_{n+1-i} x_{n+1-i}^2 = \lambda (x_i^2 + x_{n+1-i}^2)$$

d'où

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 = \lambda \sum_{i=1}^n x_i^2$$

□

Nous admettons le résultat de F.John :

**Définition & Théorème** (Ellipsoïde de John). Tous compact convexe symétrique d'intérieur non vide contient un unique ellipsoïde de volume maximale, elle est appelée ellipsoïde de John.

**Remarque 1.6.** Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un compact convexe symétrique et  $D = u(B_2^n)$  (avec  $u \in GL(n)$ ) son ellipsoïde de John, notons alors  $C =: u^{-1}(K)$  dont l'ellipsoïde de John est  $B_2^n$ , supposons que

$$r(B_2^n \cap W) \subset C \cap W \subset r(1 + \varepsilon)(B_2^n \cap W)$$

alors

$$u^{-1}(r(D \cap uW)) \subset u^{-1}(K \cap uW) \subset u^{-1}(r(1 + \varepsilon)(D \cap uW))$$

$$r(D \cap uW) \subset K \cap uW \subset r(1 + \varepsilon)(D \cap uW)$$

Le **lemme 1.5** nous permet de conclure que quitte à diviser la dimension du sous-espace  $W$  par deux, on peut se restreindre à montrer le théorème de Dvoretzky pour des compacts dont la boule euclidienne est l'ellipsoïde de John sans perte de généralité.

#### 1.4. LOI GAUSSIENNE

Pour la preuve du théorème de Dvoretzky nous aurons besoins de deux résultats sur les variables aléatoires gaussiennes, ce premier combiné avec **lemme 1.2** nous sera utile pour calculer des intégrales par rapport à la mesure de Haar sur la  $(n-1)$ -sphère.

**Lemme 1.7.** Soit  $g = (g_1, \dots, g_n)$  des variables aléatoires i.i.d suivant une loi gaussienne, alors  $\frac{g}{|g|}$  et  $|g|$  sont indépendants.

*Démonstration.* Posons  $Y = \frac{g}{|g|}$  et  $R = |g|$  alors

$$\mathbb{E}[f(Y)g(R)] = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1}{|x|}, \dots, \frac{x_n}{|x|}\right) g(|x|) \exp\left(-\frac{|x|^2}{2}\right) dx_1 \dots dx_n$$

en passant en coordonnées sphériques

$$x_1 = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-1}$$

$$x_2 = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}$$

$$x_3 = r \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$x_n = r \cos \theta_1$$

On a le déterminant suivant :

$$dx_1 \dots dx_n = r^{n-1} \prod_{1 \leq i \leq n-1} (|\sin \theta_i|)^{n-1-i} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$$

d'où :

$$\mathbb{E}[f(Y)g(R)] = \int_{\mathbb{R}^n} f \circ \varphi(\theta) g(r) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r^{n-1} \prod_{1 \leq i \leq n-1} (|\sin \theta_i|)^{n-1-i} dr d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$$

$$\mathbb{E}[f(Y)g(R)] = \int_{\mathbb{R}^+} g(r) \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r^{n-1} dr \int_{]0, \pi[^{n-2} \times ]0, 2\pi[} f \circ \varphi(\theta) \prod_{1 \leq i \leq n-1} (|\sin \theta_i|)^{n-1-i} d\theta_1 \dots d\theta_{n-1}$$

où  $\varphi(\theta) = (\sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-1}, \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \sin \theta_1 \dots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2}, \dots, \cos \theta_1)$ .  $\square$

Nous aurons besoins de trouver un minorant pour  $\int_{S^{n-1}} \|x\| d\mu(x)$  pour une norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$  et pour cela nous utiliserons le lemme suivant :

**Lemme 1.8.** il existe  $c > 0$  tel que  $\forall N > 1$  et  $\{g_i\}_{1 \leq i \leq N}$  des variables aléatoire i.i.d suivant une loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  on ait :

$$\mathbb{E}\left[\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i|\right] \geq c \sqrt{\log N}$$

où  $\tilde{N} = \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$  est la partie entière supérieure de  $\frac{N}{2}$ .

*Démonstration.* Commençons par montrer que pour  $n > 1$ ,  $\mathbb{P}(|g_1| > \sqrt{\log n}) \geq \frac{1}{n}$ , on a :

$$\mathbb{P}(|g_1| > \sqrt{\log n}) = 2 \int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq \int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \quad \text{pour } x > \sqrt{\log(2)}$$

$$\int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[ -\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \right]_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{n \log n}} > \frac{1}{n}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i| \leq \sqrt{\log N}\right) &= \mathbb{P}\left(|g_1| \leq \sqrt{\log N}\right)^{\tilde{N}} = \left(1 - \mathbb{P}\left(|g_1| > \sqrt{\log N}\right)\right)^{\tilde{N}} \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{\tilde{N}} \leq e^{-\frac{\tilde{N}}{N}} \leq e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ce qui équivaut a

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i| > \sqrt{\log N}\right) \geq 1 - e^{-\frac{1}{2}}$$

Par l'inégalité de Markov on a finalement :

$$\mathbb{E}\left[\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i|\right] \geq \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i| > \sqrt{\log N}\right) \sqrt{\log N} \geq (1 - e^{-\frac{1}{2}}) \sqrt{\log N}$$

avec  $c = 1 - e^{-\frac{1}{2}}$   $\square$

## 2 DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

### 2.1. LEMMES D'APPROXIMATIONS

Avant de débiter la démonstration du théorème de Dvoretzky, nous allons avoir besoins de plusieurs lemmes, et de la définition suivante :

**Définition.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $\theta > 0$ , on dit que  $A \subset X$  est un  $\theta$ -net si

- (i)  $A$  est de cardinal fini.
- (ii)  $\forall x \in X, \exists y \in A$  tel que  $d(x, y) \leq \theta$

Montrons maintenant que sur une section de la  $(n-1)$ -sphère on peut trouver un  $\theta$ -net de cardinal borné par une quantité qui varie exponentiellement avec la dimension de la section.

**Lemme 2.1.** Pour tous  $0 < \theta < 1$ ,  $V \subset_{\text{s.e.v}} \mathbb{R}^n$  de dimension  $k > 0$ , alors il existe un  $\theta$ -net sur  $V \cap S^{n-1}$  de cardinal inférieur à  $\left(\frac{3}{\theta}\right)^k$ .

*Démonstration.* Notons  $B_V(x, r) = \{y \in V ; |x - y| < r\}$  la boule de centre  $x \in V$  et de rayon  $r \geq 0$ , soit  $N = \{x_i\}_{i=1, \dots, m}$  un sous-ensemble de  $V \cap S^{n-1}$  maximal pour la propriété :  $x, y \in N$ ,  $|x - y| \geq \theta$ , c'est-à-dire pour tous  $x \in V \cap S^{n-1} \setminus N$  il existe  $i \leq m$  tel que  $|x - x_i| < \theta$ , donc  $N$  est un  $\theta$ -net et les  $\{B_V(x_i, \theta/2)\}_{i=1, \dots, m}$  sont donc disjoints deux à deux et toutes contenues dans  $B_V(0, 1 + \frac{\theta}{2})$  d'où :

$$m \text{Vol}(B_V(x_1, \frac{\theta}{2})) = \sum_{i=1}^m \text{Vol}(B_V(x_i, \frac{\theta}{2})) = \text{Vol}(\cup_{1 \leq i \leq m} B_V(x_i, \frac{\theta}{2})) \leq \text{Vol}(B_V(0, 1 + \frac{\theta}{2}))$$

$$m \leq \frac{\text{Vol}(B_V(0, 1 + \frac{\theta}{2}))}{\text{Vol}(B_V(x_1, \frac{\theta}{2}))}$$

Par homogénéité de la mesure de Lebesgue :

$$m \leq \left(\frac{1 + \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^k = \left(1 + \frac{2}{\theta}\right)^k < \left(\frac{3}{\theta}\right)^k$$

□

Le petit lemme qui suit nous permet d'approcher les points de la  $(n-1)$ -sphère par des points situé sur un  $\theta$ -net.

**Lemme 2.2.** Soient  $x \in S^{n-1}$ ,  $A$  un  $\theta$ -net pour un  $1 > \theta > 0$ , alors il existe  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset A$  et  $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  tel que

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \beta_i \leq \theta^i$$

*Démonstration.* Comme  $A$  est un  $\theta$ -net alors il existe  $y_0 \in A$  tel que  $|x - y_0| < \theta$ , et donc

$$x = y_0 + \lambda_1 x'$$

avec  $\lambda_1 = |x - y_0| \leq \theta$  et  $x' = \frac{x - y_0}{\lambda_1} \in S^{n-1}$ , on peut donc itéré le même procédé sur  $x'$  et réitéré indéfiniment :

$$\begin{array}{lll} x = y_0 + \lambda_1(y_1 + \lambda_2 x'') = y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_1 \lambda_2 x'' & \text{avec} & \lambda_2 \leq \theta, y_1 \in A \text{ et } x'' \in S^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x = y_0 + \sum_{i=1}^N y_i \left( \prod_{1 \leq k \leq i} \lambda_k \right) + \tilde{x} \prod_{1 \leq k \leq N+1} \lambda_k & \text{avec} & \forall i \leq N+1 \lambda_i \leq \theta, y_i \in A \text{ et } \tilde{x} \in S^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Si l'on pose  $S_N = y_0 + \sum_{i=1}^N y_i \left( \prod_{1 \leq k \leq i} \lambda_k \right)$ , alors :

$$|x - S_N| \leq |\lambda_1 \dots \lambda_N| |\tilde{x}| \leq \theta^N \rightarrow 0 \text{ avec } N \rightarrow \infty$$

il ne reste plus qu'à poser  $\beta_0 = 1$  et pour  $i > 0$ ,  $\beta_i = \prod_{1 \leq k \leq i} \lambda_k \leq \theta^i$  et l'on a :

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i y_i$$

□

Le **lemme 2.3** va nous permettre de passer d'un ensemble de grande  $\mu$ -mesure à un grand sous-espace au sens des dimensions.

**Lemme 2.3.**  $\forall \varepsilon > 0$ , il existe  $1 > \theta > 0$  tel que pour tous  $n \in \mathbb{N}$ , si l'on a  $A$  un  $\theta$ -net sur  $V \cap S^{n-1}$  pour  $V \subset \mathbb{R}^n$  de dimension  $k$ ,  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$  et  $T \in GL(n)$ , tel que :

$$\forall x \in A, \quad (1 - \theta) \leq \|Tx\| \leq (1 + \theta)$$

alors ,

$$\forall x \in V, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} |x| \leq \|Tx\| \leq \sqrt{1 + \varepsilon} |x|$$

de plus si  $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$ , on peut prendre  $\theta = \frac{\varepsilon}{9}$

*Démonstration.* Soient  $1 > \theta > 0$ ,  $A$  un  $\theta$ -net sur  $S^{n-1} \cap V$  et  $x \in S^{n-1} \cap V$  par le **lemme 2.2**, il existe  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset A$  et  $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$  tel que

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \beta_i \leq \theta^i$$

Notons  $T = (a_1, \dots, a_n)$

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &= \left\| T \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i \sum_{p=1}^n y_{i,p} a_p \right\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i \left\| \sum_{p=1}^n y_{i,p} a_p \right\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i \|Ty_i\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i (1 + \theta) = \frac{1 + \theta}{1 - \theta}
\end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &\geq \|Ty_0\| - \|Tx - Ty_0\| \\
&= (1 - \theta) - \left\| \sum_{p=1}^n a_p \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i y_{i,p} \right\| \\
&\geq (1 - \theta) - \sum_{i=1}^{+\infty} \theta^i \|Ty_i\| \\
&\geq \left( (1 - \theta) - \theta \frac{1 + \theta}{1 - \theta} \right) = \frac{1 - 3\theta}{1 - \theta}
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre  $\theta$  tel que

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + \varepsilon} &\geq \frac{1 + \theta}{1 - \theta} \\
\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} &\leq \frac{1 - 3\theta}{1 - \theta}
\end{aligned}$$

et pour tous  $x \in V \setminus \{0\}$  on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} &\leq \left\| T \frac{x}{|x|} \right\| \leq \sqrt{1 + \varepsilon} \\
\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} |x| &\leq \|Tx\| \leq |x| \sqrt{1 + \varepsilon}
\end{aligned}$$

Ce qui fini la première partie de la preuve, dans la suite on suppose  $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$ . On cherche  $\theta =: \theta(\varepsilon) \in ]0, 1[$ , tel que  $\sqrt{1 + \varepsilon} \geq \max\left(\frac{1 - \theta}{1 - 3\theta}, \frac{1 + \theta}{1 - \theta}\right)$ , sachant que  $\varepsilon$  va être petit supposons  $\theta \leq \frac{1}{3}$  alors

$$\frac{1 - \theta}{1 - 3\theta} - \frac{1 + \theta}{1 - \theta} = \frac{4\theta^2}{(1 - 3\theta)(1 - \theta)} > 0$$

Donc  $\sqrt{1 + \varepsilon} \geq \frac{1 - \theta}{1 - 3\theta}$

$$\begin{aligned}
1 + \varepsilon &\geq \left( \frac{1 - \theta}{1 - 3\theta} \right)^2 \\
(9\varepsilon + 8)\theta^2 - 2(3\varepsilon + 2)\theta + \varepsilon &\geq 0
\end{aligned}$$

les deux racines de ce polynôme sont  $0 < \frac{3\varepsilon + 2 - 2\sqrt{1 + \varepsilon}}{8 + 9\varepsilon} < \frac{3\varepsilon + 2 + 2\sqrt{1 + \varepsilon}}{8 + 9\varepsilon}$ , on cherche donc un  $\theta$  dans  $]0, \frac{3\varepsilon + 2 - 2\sqrt{1 + \varepsilon}}{8 + 9\varepsilon}[$ . Pour finir

$$\begin{aligned}
\frac{3\varepsilon + 2 - 2\sqrt{1 + \varepsilon}}{8 + 9\varepsilon} &\geq \frac{3\varepsilon + 2 - 2 - 2\varepsilon}{8 + 9\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{8 + 9\varepsilon} \\
&\geq \frac{\varepsilon}{9}
\end{aligned}$$

donc pour  $\varepsilon \in ]0, 9^{-1}[$  on peu prendre  $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{9}$ . □

## 2.2. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE DVORETZKY

La démonstration du théorème de Dvoretzky repose sur le **théorème 2.4** et la **proposition 2.7** qui sont démontrés dans cette partie. Dans un premier temps nous donnons un résultat de V.Milman qui est en grande partie la preuve du théorème de Dvoretzky.

**Théorème 2.4.** Pour tous  $\varepsilon > 0$  il existe  $c(\varepsilon) > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et pour toute norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ , pour un  $k \geq c(\varepsilon) \cdot \left(\frac{M}{b}\right)^2 n$ .  
Où  $M = \int_{S^{n-1}} \|x\| d\mu(x)$  et  $b > 0$  le plus petit réel tel que  $\|\cdot\| \leq b|\cdot|$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$  et  $1 > \theta(\varepsilon) =: \theta > 0$  donné par le **lemme 2.3** nous allons montrer que  $c(\theta(\varepsilon)) =: \frac{\theta^2}{8 \log(\frac{3}{\theta})}$  convient, pour alléger les notations on note

- $\eta =: \frac{\theta M}{b}$
- $\kappa(\theta) =: c(\theta) \left(\frac{M}{b}\right)^2 n$

Évacuons un cas trivial, si  $\kappa(\theta) < 1$  alors  $k = 1$  convient car toute 1-section est euclidienne, pour la suite on suppose donc  $\kappa(\theta) \geq 1 \iff \frac{\eta^2 n}{8} \geq \log(\frac{3}{\theta})$ .

Fixons un  $k$  entier tel que  $\kappa(\theta) \leq k < 2\kappa(\theta)$  possible car  $\kappa(\theta) \geq 1$  et on se donne  $A$  un  $\theta$ -net sur  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \cap S^{n-1}$ , avec  $|A| \leq \left(\frac{3}{\theta}\right)^k$ . On alors :

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcap_{x \in A} \{T \in O(n) ; |\|Tx\| - M| \leq b\eta\}\right) &= 1 - \nu\left(\bigcup_{x \in A} \{T \in O(n) ; |\|Tx\| - M| > b\eta\}\right) \\ &\geq 1 - |A| \nu\left(\{T \in O(n) ; |\|Ty\| - M| > b\eta\}\right) \quad \text{pour un } y \in A \\ &\geq 1 - |A| \mu\left(y \in S^{n-1} ; |\|y\| - M| > b\eta\right) \quad \text{par le lemme 1.2} \end{aligned}$$

En appliquant la concentration de la mesure

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcap_{x \in A} \{T \in O(n) ; |\|Tx\| - M| \leq b\eta\}\right) &\geq 1 - |A| 2e^{-\frac{\eta^2 n}{2}} \\ &> 1 - 2\left(\frac{3}{\theta}\right)^k e^{-\frac{\eta^2 n}{2}} \\ &> 1 - 2 \exp\left(2\kappa(\theta) \log\left(\frac{3}{\theta}\right) - \frac{\eta^2 n}{2}\right) \\ &> 1 - 2e^{-\frac{\eta^2 n}{4}} \\ &> 1 - \frac{2}{3^2} \theta^2 > 0 \quad \text{car } \frac{\eta^2 n}{4} \geq 2 \log\left(\frac{3}{\theta}\right) \end{aligned}$$

Donc il existe  $T \in O(n)$  tel que pour tous  $x \in A$  on ait  $|\|Tx\| - M| \leq b\eta$ , c'est à dire

$$M(1 - \theta) = M - b\eta \leq \|Tx\| \leq M + b\eta = M(1 + \theta)$$



Par le **lemme 2.3** pour tous  $x \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}|x|M \leq \|Tx\| \leq \sqrt{1+\varepsilon}|x|M$$

et pour  $\varepsilon < 9^{-1}$  on peut prendre  $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{9}$  et donc  $c(\varepsilon) = c_0 \frac{\varepsilon^2}{\log(\frac{c_1}{\varepsilon})}$  pour  $c_0, c_1 > 0$ .

□

**Remarque 2.5.** Pour tout  $k \leq c(\varepsilon)(\frac{M}{b})^2 n$ ,  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1+\varepsilon)$ -continûment dans  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$

Il ne nous reste plus qu'à donner une borne inférieure à  $\frac{M}{b}$ , pour cela nous allons utiliser la **remarque 1.6** et le lemme suivant :

**Lemme 2.6** (Dvoretzky-Rogers). Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$  tel que  $B_2^n$  est l'ellipsoïde de John de  $B_{\|\cdot\|}$ , alors il existe une base orthonormée  $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$  tel que  $\forall 1 \leq i \leq n$

$$e^{-1}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \leq \|x_i\| \leq 1$$

*Démonstration.*  $S^{n-1}$  est compact et  $\|\cdot\|$  continue, on peut donc prendre un  $x_1 \in S^{n-1}$  qui maximise  $\|\cdot\|$  c'est à dire  $\|x_1\| = 1$ , supposons que l'on ait  $x_1, \dots, x_{k-1}$  avec  $k \leq n$  tel que pour tous  $1 \leq i \leq k-1$ ,  $x_i$  maximise  $\|\cdot\|$  sur  $S^{n-1} \setminus \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1}) \neq \emptyset$  car les  $\{x_i\}_{i=1, \dots, k-1}$  sont orthogonaux deux à deux. On peut donc répéter le procédé pour trouver  $x_k$  qui maximise  $S^{n-1} \setminus \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1})$ , par récurrence on peut donc avoir  $n$  vecteurs avec ses propriétés. Fixons  $1 \leq k \leq n$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^*$  et définissons :

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i ; \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{a_i}{a}\right)^2 + \sum_{i=k}^n \left(\frac{b_i}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

Supposons  $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in \mathcal{E}$ , alors  $\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \in aB_2^n$  et donc  $\|\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i\| \leq a$ . Si  $x \in \text{Vect}(x_k, \dots, x_n) \cap B_2^n$  on a  $\|x\| \leq \|x_k\|$  par construction, et donc  $\sum_{i=k}^n a_i x_i \in bB_2^n \Rightarrow \|\sum_{i=k}^n a_i x_i\| \leq b\|x_k\|$ , ce qui nous donne la majoration suivante

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=k}^n a_i x_i \right\| \leq a + b\|x_k\|$$

Posons  $\phi \in GL(n)$  définit par  $\phi(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} a a_i x_i + \sum_{i=k}^n b a_i x_i$  on a  $\phi = \text{diag}(\overbrace{a, \dots, a}^{(k-1) \times}, \overbrace{b, \dots, b}^{(n-k+1) \times})$  et donc  $\det \phi = a^{k-1} b^{n-k+1}$  d'où :

$$\int_{\mathcal{E}} dx_1 \dots dx_n = \int_{B_2^n} \det \phi dx_1 \dots dx_n = a^{k-1} b^{n-k+1} \int_{B_2^n} dx_1 \dots dx_n$$

On prend  $a + b\|x_k\| = 1$  de sorte que  $\mathcal{E} \subset K$ , comme  $B_2^n$  est l'ellipsoïde de volume maximale incluse dans  $K$ , on a que

$$1 \geq \frac{\int_{\mathcal{E}} dx_1 \dots dx_n}{\int_{B_2^n} dx_1 \dots dx_n} = a^{k-1} b^{n-k+1}$$

Fixons donc pour  $k \geq 2$ ,  $b = \frac{1-a}{\|x_k\|}$  et  $a = \frac{k-1}{n}$ , en remplaçant dans l'inégalité on obtient :

$$1 \geq a^{k-1} \left( \frac{1-a}{\|x_k\|} \right)^{n-k+1} \iff \|x_k\| \geq a^{\frac{k-1}{n-k+1}} (1-a) = \left( \frac{k-1}{n} \right)^{\frac{k-1}{n-k+1}} \left( 1 - \frac{k-1}{n} \right)$$

et  $\log a^{\frac{k-1}{n-k+1}} = \frac{k-1}{n-k+1} \log \left( \frac{k-1}{n} \right) > -1$ .

□

**Proposition 2.7.** Soit  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$  tel que  $B_2^n$  est l'ellipsoïde de John de  $B_{\|\cdot\|}$ , alors il existe  $c > 0$  tel que

$$M =: \int_{S^{n-1}} \|x\| d\mu(x) \geq c \sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

*Démonstration.* Par le lemme de Dvoretzky-Rogers il existe une base orthonormée  $x_1, \dots, x_n$  tel que pour  $1 \leq i \leq \tilde{n} =: \lceil \frac{n}{2} \rceil$  la partie entière supérieure de  $\frac{n}{2}$ ,  $\|x_i\| \geq e^{-1} \left( 1 - \frac{\tilde{n}-1}{n} \right) \geq e^{-1} \left( 1 - \frac{\frac{n}{2}+1-1}{n} \right) = (2e)^{-1}$ . Comme  $\mu$  est invariante par composition par une transformation orthogonale on a que

$$M =: \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| d\mu(a) = \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n \right\| d\mu(a)$$

et donc

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| d\mu(a) + \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n \right\| d\mu(a) \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} 2 \max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\|, \|a_n x_n\| \right\} d\mu(a) \geq \dots \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq n} \{ |a_i| \|x_i\| \} d\mu(a) \\ &\geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} \{ |a_i| \|x_i\| \} d\mu(a) \geq (2e)^{-1} \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |a_i| d\mu(a) \end{aligned}$$

Soit  $(g_1, \dots, g_n)$ , des variables aléatoires i.i.d de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$  alors

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |a_i| d\mu(a) = \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |g_i| \right]$$

Par le **lemme 1.7**  $(\sum_{i=1}^n g_i^2)^{-\frac{1}{2}} (g_1, \dots, g_n)$  et  $(\sum_{i=1}^n g_i^2)^{\frac{1}{2}}$  sont des variables aléatoires indépendantes, on a donc

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |g_i| \right] \cdot \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \mathbb{E} \left[ \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |g_i| \right]$$

la fonction racine carré est concave, par l'inégalité de Jensen on a donc :

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n g_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \mathbb{E} [g_1^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$

Et finalement par le **lemme 1.8**, il existe  $K > 0$  tel que :

$$M \geq \frac{1}{2e\sqrt{n}} \mathbb{E} \left[ \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |g_i| \right] \geq \frac{K}{2e} \sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

□

On peut donc réunir la **proposition 2.7** et le **théorème 2.4** pour obtenir  $k \geq c(\varepsilon) \log n$  lorsque  $B_2^n$  est l'ellipsoïde de John pour  $B_{\|\cdot\|}$ , en utilisant la **remarque 1.6** quitte à diviser  $k$  par 2, on peut généraliser à toutes les normes et donc conclure la démonstration du théorème de Dvoretzky.

### 3 SECTIONS PRESQUE EUCLIDIENNES DE $\ell_p^N$

**Définition.** (Dimension critique) Soit  $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$  pour  $\|\cdot\|$  une norme sur  $\mathbb{R}^n$ , pour  $\varepsilon > 0$  on note  $k(X, \varepsilon)$  le plus grand entier tel que pour tout  $k \leq k(X, \varepsilon)$ ,  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $X$ .

#### 3.1. CAS $1 \leq p < 2$

**Proposition 3.1.** Soit  $1 \leq p < 2$ , pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $c(\varepsilon) > 0$  tel que pour tout  $n \geq 2$ , alors

$$k(\ell_p^n, \varepsilon) \geq c(\varepsilon)n$$

*Démonstration.* Par l'inégalité de Hölder  $\|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}|x|$ , c'est-à-dire  $b \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ . Comme les normes sont des applications convexes, par l'inégalité de Jensen :

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \geq \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[|x_i|^p]\right)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Et donc

$$\begin{aligned} M &= \int_{S^{n-1}} \|x\|_p d\mu(x) \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{\|x\|_p}{|x|}\right] \\ &= \frac{\mathbb{E}[\|x\|_p]}{\mathbb{E}[|x|]} \geq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Par le **théorème 2.4**  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $\ell_p^n$  pour un  $k \geq c(\varepsilon)(\frac{M}{b})^2 n = \tilde{c}(\varepsilon)n$ .  $\square$

#### 3.2. CAS $2 \leq p < \infty$

On pourrait utiliser la même inégalité que dans la **proposition 3.1**, cela nous donnerais une estimation de l'ordre de  $k \geq c(\varepsilon)n^{\frac{2}{p}}$  (car ici  $b \leq 1$ ), mais il se trouve que l'on peut donner de

meilleure estimation en séparant les cas en deux, lorsque  $k$  est petit devant  $n$  on a la proposition suivante :

**Proposition 3.2.** Pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $2 \leq p$ , il existe  $c_p(\varepsilon) > 0$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  avec  $p < \log n$ , alors

$$k(\ell_p^n, \varepsilon) \geq c_p(\varepsilon) n^{\frac{2}{p}}$$

*Démonstration.*

$$M =: \int_{S^{n-1}} \|x\|^p d\mu(x) = \mathbb{E} \left[ \frac{\left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}}{\left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \right] = \frac{\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right]}{\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]}$$

Par l'inégalité de Hölder on a  $\|x\|_p \leq \|x\|_2$ , donc  $b \leq 1$ . Posons  $m =: \lfloor e^p \rfloor$  et divisons  $\{1, \dots, n\}$  en  $N = \lceil \frac{n}{m} \rceil$  parties disjointes  $I_1, \dots, I_N$  tel que pour  $j < N$ ,  $\text{card}(I_j) = m$ , on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{i=1}^n |g_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] &= \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j \leq N} \sum_{i \in I_j} |g_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &\geq \mathbb{E} \left[ \left( \sum_{j \leq N} \left( \max_{i \in I_j} |g_i|^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &\geq \left( \sum_{j \leq N} \left( \mathbb{E} \left[ \max_{i \in I_j} |g_i| \right]^p \right) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq (N-1)^{\frac{1}{p}} c \sqrt{\log m} \text{ par le lemme 1.8} \end{aligned}$$

Où  $c > 0$  est une constante universelle, de plus :

$$\begin{aligned} \frac{(N-1)^{\frac{1}{p}}}{N^{\frac{1}{p}}} &= \left( \frac{N-1}{N} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left( 1 - \frac{1}{N} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \left( 1 - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{p}} = 2^{-\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Car  $N \geq 2$  par hypothèse, et finalement :

$$\begin{aligned} M &\geq N^{\frac{1}{p}} 2^{-\frac{1}{p}} c \sqrt{\log \lfloor e^p \rfloor} n^{-\frac{1}{2}} \\ &\geq n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} C_p \end{aligned}$$

Où  $C_p = 2^{-\frac{1}{p}} c \sqrt{\log \lfloor e^p \rfloor} \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} c \sqrt{p}$ .

Par le **théorème 2.4**  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $\ell_p^n$ , pour

$$\begin{aligned} k &\geq c(\varepsilon) \left( \frac{E}{b} \right)^2 n \\ &\geq c_p(\varepsilon) n^{\frac{2}{p}}, \text{ avec } c_p(\varepsilon) = c(\varepsilon) C_p^2 \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} \tilde{c}(\varepsilon) p \end{aligned}$$

□

**Remarque 3.3.** Dans le cas contraire si  $p \geq \log n$ , alors  $n^{\frac{2}{p}} \leq e^2$  donc dans ce cas la meilleur estimation est celle donné par le théorème de Dvoretzky.

Pour la proposition suivante nous allons utiliser l'inégalité de Khinchine qui est démontrer en annexe.

**Proposition 3.4.** Soit  $2 < p < \infty$  et  $0 < \varepsilon < 1$ , alors il existe  $c_p(\varepsilon) > 0$  tel que,

$$k(\ell_p^n, \varepsilon) \leq c_p(\varepsilon) n^{\frac{2}{p}}$$

*Démonstration.* Considérons  $T = (a_{ij})_{j \leq k}^{i \leq n} \subset \mathbb{R}^n$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}^k$

$$|x| \leq \|Tx\|_p \leq (1 + \varepsilon)|x|$$

Notons  $r_i(t) = \text{sign}(\sin(\pi 2^i t))$  pour  $t \in ]0, 1[$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$  (voir section 4 pour les détails).

$$\forall t \in ]0, 1[, \quad |(r_1(t), \dots, r_k(t))| \leq \|T(r_1(t), \dots, r_k(t))\|_p \leq (1 + \varepsilon)|(r_1(t), \dots, r_k(t))|$$

Or  $|(r_1(t), \dots, r_k(t))|^2 = \sum_{i=1}^k r_i^2(t) = k$  presque sûrement. En intégrant entre 0 et 1 :

$$k^{\frac{p}{2}} \leq \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^k a_{ij} r_j(t) \right|^p dt$$

Par l'inégalité de Khinchine (**théorème A.3**)  $\exists B_p > 0$  tel que :

$$\left( \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^k a_{ij} r_j(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left( \sum_{j=1}^k a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$k^{\frac{p}{2}} \leq \sum_{i=1}^n B_p^p \left( \sum_{j=1}^k a_{ij}^2 \right)^{\frac{p}{2}} \quad (\star)$$

Fixons  $1 \leq v \leq n$ , alors pour  $x = (a_{v,j})_{j \leq k}$ , on a

$$\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^k a_{ij} a_{vj} \right|^p \geq \left| \sum_{j=1}^k a_{vj}^2 \right|^p$$

et donc :

$$\left| \sum_{j=1}^k a_{vj}^2 \right|^p \leq \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^k a_{ij} a_{vj} \right|^p \leq (1 + \varepsilon)^p \left| \sum_{j=1}^k a_{vj}^2 \right|^{\frac{p}{2}}$$

c'est-à-dire  $\left| \sum_{j=1}^k a_{vj}^2 \right|^{\frac{1}{2}} \leq 1 + \varepsilon$ , et finalement en injectant dans  $(\star)$  :

$$k \leq B_p^2 (1 + \varepsilon)^2 n^{\frac{2}{p}}$$

□

**Remarque 3.5.** Dans la démonstration de l'inégalité de Khinchine, on montre que

$$B_p = \left( 2p \int_0^{+\infty} s^{p-1} e^{-\frac{s^2}{4}} ds \right)^{\frac{1}{p}}$$

### 3.3. CAS $P = \infty$

**Proposition 3.6.** Soit  $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{32}$ , si  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $\ell_\infty^n$  alors  $k \leq \frac{C \log(n)}{\log(\frac{1}{c\varepsilon})}$  avec  $c, C > 0$  des constantes universelles.

*Démonstration.* Soit  $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$  tel que pour tous  $x \in \mathbb{R}^k$ ,

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} |x| \leq \|Tx\|_\infty \leq |x|$$

Comme  $1 - \varepsilon \leq \frac{1}{1 + \varepsilon}$ , en posant  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^k$  les lignes de  $T$  dans la base canonique, alors

$$(1 - \varepsilon) |x| \leq \max_{i \leq n} | \langle a_i, x \rangle | \leq |x|$$

En prenant  $x = a_p$  on obtient  $(1 - \varepsilon) |a_p| \leq \max_{i \leq n} | \langle a_i, a_p \rangle | \leq |a_p| \Rightarrow |a_p|^2 \leq |a_p| \Rightarrow |a_p| \leq 1$ .

Prenons  $x \in S^{k-1}$ , alors il existe  $i \leq n$  tel que  $| \langle a_i, x \rangle | \geq (1 - \varepsilon)$ , donc

$$|x - a_i|^2 = |x|^2 + |a_i|^2 - 2 \langle x, a_i \rangle \leq 2 - 2(1 - \varepsilon) = 2\varepsilon$$

Prenons  $1 > |x| > 1 - \sqrt{2\varepsilon}$ , alors il existe  $i$  tel que  $|\frac{x}{|x|} - a_i| \leq \sqrt{2\varepsilon}$  et donc :

$$\begin{aligned} |x - a_i| &\leq \left| x - \frac{x}{|x|} \right| + \left| \frac{x}{|x|} - a_i \right| \\ &\leq |1 - |x|| + \sqrt{2\varepsilon} \\ &\leq 2\sqrt{2\varepsilon} \end{aligned}$$

Donc  $\bigcup_{i \leq n} B_2^k(a_i, 2\sqrt{2\varepsilon})$  contient  $B_2^k \setminus (1 - \sqrt{2\varepsilon}) B_2^k$ .

$$n(2\sqrt{2\varepsilon})^k \lambda(B_2^k) \geq \lambda\left(\bigcup_{i \leq n} B_2^k(a_i, 2\sqrt{2\varepsilon})\right) \geq \lambda(B_2^k \setminus (1 - \sqrt{2\varepsilon}) B_2^k) = \lambda(B_2^k) - (1 - \sqrt{2\varepsilon})^k \lambda(B_2^k)$$

$$n(2\sqrt{2\varepsilon})^k \geq 1 - (1 - \sqrt{2\varepsilon})^k \geq \sqrt{2\varepsilon}(1 - \sqrt{2\varepsilon})^{k-1}$$

car

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{2\varepsilon})^k &= (1 - \sqrt{2\varepsilon})^{k-1} - \sqrt{2\varepsilon}(1 - \sqrt{2\varepsilon})^{k-1} \\ &\leq 1 - \sqrt{2\varepsilon}(1 - \sqrt{2\varepsilon})^{k-1} \end{aligned}$$

Alors pour  $\varepsilon < \frac{1}{32}$  on a  $\frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}} - \frac{1}{2} > \frac{7}{16\sqrt{2\varepsilon}}$  et donc

$$\begin{aligned} n &\geq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}} - \frac{1}{2} \right)^{k-1} \\ &\geq \frac{1}{2} \left( \frac{7}{16\sqrt{2\varepsilon}} \right)^{k-1} \\ &\geq \frac{1}{2} \left( \frac{7}{16\sqrt{2\varepsilon}} \right)^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

et donc

$$k \leq \frac{2 \log n}{\log\left(\frac{7}{16\sqrt{2\varepsilon}}\right)}$$

□

**Proposition 3.7.** Soit  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\ell_2^k$  s'injecte  $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans  $\ell_\infty^n$  pour  $k = \left\lfloor \frac{\log n}{\log(\frac{3}{\varepsilon})} \right\rfloor$

*Démonstration.* Comme  $\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^k \leq n$  on peut prendre un  $\varepsilon$ -net sur  $S^{k-1}$  de cardinal  $n$ , donnons nous  $\{y_i\}_{i \leq n}$  un tel  $\varepsilon$ -net et

$$T: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & \rightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \rightarrow & (1 + \varepsilon)(\langle x, y_i \rangle)_{i \leq n} \end{array}$$

Alors pour tout  $x \in S^{k-1}$ , il existe  $i \leq n$  tel que  $|x - y_i| < \varepsilon$ , alors

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &> |x - y_i|^2 = |x|^2 + |y_i|^2 - 2\langle x, y_i \rangle \\ &= 2(1 - \langle x, y_i \rangle) \end{aligned}$$

$$\langle x, y_i \rangle > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

Car  $1 - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{1}{1 + \varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2(1 + \varepsilon)}(1 - \varepsilon)(\varepsilon + 2) > 0$ , finalement avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$1 \geq \max_{1 \leq j \leq n} |\langle x, y_j \rangle| \geq |\langle x, x_i \rangle| \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

C'est à dire pour tout  $x \in S^{k-1}$

$$1 \leq \|Tx\|_\infty \leq 1 + \varepsilon$$

□

## A - INÉGALITÉ DE KHINCHINE

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé,  $\mathcal{G}$  une sous tribus de  $\mathcal{F}$ , pour tous  $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$  par le théorème de Randon-Nikodym il existe un unique  $h \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$  tel que pour tous  $A \in \mathcal{G}$  on ait

$$\int_A h dP = \int_A f dP$$

**Notation.** Par la suite on note  $h = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$  l'espérance conditionnelle de  $f$ .

Donnons quelques propriétés associées :

**Proposition A.1.**

- (i) Pour toute sous tribus  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{G}$  on a  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{H})$ .
- (ii) Pour tous  $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\mathbb{E}(f \cdot g|\mathcal{G}) = g \cdot \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ .
- (iii) Si  $f$  et  $\mathcal{G}$  sont indépendant alors  $\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[f]$ .
- (iv) Si  $f$  est  $\mathcal{G}$  mesurable alors  $\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) = f$ .

*Démonstration.* (i) Par définition  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{H})$  est l'unique fonction de  $L^1(\Omega, \mathcal{H}, P)$  tel que pour tous  $A \in \mathcal{H} \subset \mathcal{G}$  :

$$\int_A \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{H}) dP = \int_A \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) dP = \int_A f dP$$

Par unicité  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{H}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{H})$ .

(ii) Nous allons le montrer en plusieurs étapes, premièrement si  $g = \mathbb{1}_B$  pour  $B \in \mathcal{F}$  alors pour tous  $A \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}(\mathbb{1}_B f|\mathcal{G}) dP &= \int_A \mathbb{1}_B f dP \\ &= \int_{A \cap B} f dP \\ &= \int_{A \cap B} \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) dP \quad \text{car } A \cap B \subset A \in \mathcal{G} \\ &= \int_A \mathbb{1}_B \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) dP \end{aligned}$$

Par unicité  $\mathbb{E}(\mathbb{1}_B f|\mathcal{G}) = \mathbb{1}_B \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ . La linéarité de l'espérance permet de conclure pour des fonctions en escaliers, or pour toute fonction positive  $g$  mesurable il existe une suite de fonctions en escalier  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante tel que  $g = \lim g_n$  presque partout, et donc par le théorème de convergence monotone pour  $A \in \mathcal{G}$  :

$$\int_A g f dP = \lim_n \int_A g_n f dP = \lim_n \int_A \mathbb{E}(g_n \cdot f|\mathcal{G}) dP = \lim_n \int_A g_n \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) dP = \int_A g \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) dP$$

finalement si  $g$  est une fonction mesurable alors on écrit  $g = |g|\mathbb{1}_{\{g>0\}} - |g|\mathbb{1}_{\{g<0\}}$  et on applique le point précédent à  $|g|\mathbb{1}_{\{g>0\}}$  et  $|g|\mathbb{1}_{\{g<0\}}$ .

(iii) Soit  $A \in \mathcal{G}$ ,

$$\begin{aligned} \int_A \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) dP &= \int_A f dP \\ &= \mathbb{E}[f] \cdot \mathbb{E}[\mathbb{1}_A] \quad \text{par indépendance} \\ &= \int_A \mathbb{E}[f] dP \end{aligned}$$



L'unicité permet de conclure.

(iv) Évident par la définition et l'unicité. □

**Lemme A.2.** Soit  $f \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \dots \subset \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$ , alors pour tous  $\varepsilon > 0$  :

$$P(|f - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4 \sum_{i=1}^N \|d_i\|_\infty}\right)$$

Où  $d_i = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})$

*Démonstration.* En utilisant l'inégalité  $e^x \leq x + e^{x^2}$  on a pour tous  $\lambda \neq 0$  :

$$\mathbb{E}(e^{\lambda d_i} | \mathcal{F}_{i-1}) \leq \mathbb{E}(\lambda d_i | \mathcal{F}_{i-1}) + \mathbb{E}(e^{\lambda^2 d_i^2} | \mathcal{F}_{i-1})$$

Remarquons alors que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\lambda d_i | \mathcal{F}_{i-1}) &= \lambda \mathbb{E}(d_i | \mathcal{F}_{i-1}) \\ &= \lambda \mathbb{E}(\mathbb{E}(f | \mathcal{F}_i) | \mathcal{F}_{i-1}) - \lambda \mathbb{E}(\mathbb{E}(f | \mathcal{F}_{i-1}) | \mathcal{F}_{i-1}) \\ &= \lambda \mathbb{E}(f | \mathcal{F}_{i-1}) - \lambda \mathbb{E}(f | \mathcal{F}_{i-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc finalement

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\lambda d_i} | \mathcal{F}_{i-1}) &\leq \mathbb{E}(e^{\lambda^2 d_i^2} | \mathcal{F}_{i-1}) \\ &\leq \mathbb{E}(e^{\lambda^2 \|d_i\|_\infty^2} | \mathcal{F}_{i-1}) \\ &\leq e^{\lambda^2 \|d_i\|_\infty^2} \end{aligned}$$

En utilisant la **proposition A.1.ii** on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda \sum_{j=1}^i d_j\right) | \mathcal{F}_{i-1}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{i-1} \lambda d_j\right) e^{\lambda d_i} | \mathcal{F}_{i-1}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{i-1} \lambda d_j\right) \mathbb{E}(e^{\lambda d_i} | \mathcal{F}_{i-1})\right)$$

D'où :

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda \sum_{j=1}^i d_j\right) | \mathcal{F}_{i-1}\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{i-1} e^{\lambda d_j}\right) e^{\lambda^2 \|d_i\|_\infty^2}\right)$$

d'autres part on a  $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda \sum_{j=1}^i d_j\right) | \mathcal{F}_{i-1}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda \sum_{j=1}^i d_j\right)\right)$  et donc on a

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda \sum_{j=1}^i d_j\right)\right) \leq \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{j=1}^{i-1} e^{\lambda d_j}\right) e^{\lambda^2 \|d_i\|_\infty^2}\right)$$

Par récurrence on obtient :

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\lambda \sum_{j=1}^i d_j\right)\right) \leq \exp\left(\lambda^2 \sum_{j=1}^i \|d_j\|_\infty^2\right) \quad (\star)$$

Remarquons maintenant ceci :

$$\sum_{i=1}^N d_i = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}) - \mathbb{E}(f|\{\emptyset, \Omega\}) = f - \mathbb{E}[f]$$

Donc pour tous  $\lambda > 0$ ,

$$\begin{aligned} P(f - \mathbb{E}[f] > \varepsilon) &= P\left(\sum_{i=1}^N d_i > \varepsilon\right) \\ &= P\left(\exp\left(\lambda \sum_{i=1}^N d_i - \varepsilon \lambda\right) > 1\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(\lambda \sum_{i=1}^N d_i - \varepsilon \lambda\right)\right] \quad \text{par l'inégalité de Markov} \\ &\leq \exp\left(\lambda^2 \sum_{i=1}^N \|d_i\|_\infty^2\right) e^{-\varepsilon \lambda} \quad \text{par } (\star) \end{aligned}$$

de même

$$\begin{aligned} P(\mathbb{E}[f] - f > \varepsilon) &= P\left(-\sum_{i=1}^N d_i > \varepsilon\right) \\ &= P\left(\exp\left(-\varepsilon \lambda - \lambda \sum_{i=1}^N d_i\right) > 1\right) \\ &\leq \mathbb{E}\left[\exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^N d_i\right)\right] e^{-\varepsilon \lambda} \quad \text{par l'inégalité de Markov} \\ &\leq \exp\left(\lambda^2 \sum_{i=1}^N \|d_i\|_\infty^2\right) e^{-\varepsilon \lambda} \quad \text{par } (\star) \end{aligned}$$

finalement

$$P(|f - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(\lambda^2 \sum_{i=1}^N \|d_i\|_\infty^2\right) e^{-\varepsilon \lambda}$$

avec  $\lambda = \frac{\varepsilon}{2 \sum_{i=1}^N \|d_i\|_\infty^2}$  on obtient le resultat rechercher :

$$P(|f - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4 \sum_{i=1}^N \|d_i\|_\infty^2}\right)$$

□

**Définition & Proposition.** On note  $r_k \in L^2([0,1])$  définie par :

$$r_k(t) = \text{sign}(\sin(\pi 2^k t))$$

les  $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont appelées fonctions de Rademacher et elles vérifient les propriétés suivantes :

- (i) Pour  $p \neq q$ ,  $r_p$  et  $r_q$  sont orthogonaux dans  $L^2$ .
- (ii) Pour tous  $j \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^1 r_j d\lambda = 0$ .

*Démonstration.* (i) Supposons  $p < q$ , on a l'égalité suivante :

$$\int_0^1 \text{sign}(\sin \pi 2^p t) \text{sign}(\sin \pi 2^q t) dt = \sum_{i=0}^{2^p-1} \int_{i2^{-p}}^{(i+1)2^{-p}} \text{sign}(\sin \pi 2^p t) \text{sign}(\sin \pi 2^q t) dt$$

Or pour tout  $t \in ]i2^{-p}, (i+1)2^{-p}[$ , on a  $\text{sign}(\sin \pi 2^p t) = (-1)^i$  et de plus

$$\pi 2^q t \in ]i2^{q-p}\pi, (i+1)2^{q-p}\pi[$$

un intervalle de taille un multiple de  $2\pi$ , et pour finir  $\text{sign}(\sin \pi 2^q t)$  prends les valeurs 1 et  $-1$  sur des intervalles de mêmes longueurs pour  $t \in ]i2^{-p}, (i+1)2^{-p}[$ , donc chaque termes de la somme est nulle.

(ii) Pour  $t \in ]0,1[$  on a  $\pi 2^j t \in ]0, 2^j \pi[$  un intervalle de taille un multiple de  $2\pi$ , donc  $\sin(\pi 2^j t)$  prend des valeurs positives et négatives sur des ensembles de mêmes mesures, et donc  $\int_0^1 r_j d\lambda = 0$ .  $\square$

**Théorème A.3** (Inégalité de Khinchine). Pour tous  $1 \leq p < \infty$ , il existe des constantes  $0 < A_p < B_p$  tel que pour tous  $n$  et tous  $(a_i)_{i \leq n} \subset \mathbb{R}$  :

$$\left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{A_p} \leq \left( \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

*Démonstration.* Soit  $(a_i)_{i \leq n} \neq (0, \dots, 0)$ , posons  $b_i = \frac{a_i}{(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{\frac{1}{2}}}$  et  $f = \sum_{i=1}^n b_i r_i$ , on veut appliquer le lemme qui précède à  $f$ , pour cela il nous faut définir une suite de sous-tribus de  $\text{Bor}([0,1])$ , on la construit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \{\emptyset, [0,1]\} \\ \mathcal{F}_1 &= \sigma(r_1) \\ \mathcal{F}_2 &= \sigma(r_1, r_2) \\ &\vdots \\ \mathcal{F}_n &= \sigma(r_1, \dots, r_n) \\ \mathcal{F}_{n+1} &= \text{Bor}([0,1]) \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} d_i &= \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(b_j r_j | \mathcal{F}_i) - \sum_{j=1}^n \mathbb{E}(b_j r_j | \mathcal{F}_{i-1}) \end{aligned}$$

remarquons alors que

- Si  $1 \leq j \leq i < n$ ,  $r_j$  est  $\mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_i$  mesurable, donc  $\mathbb{E}(r_j | \mathcal{F}_i) = r_j$ .
- Si  $j > i$ ,  $r_j$  est indépendante de  $\mathcal{F}_i$  et donc  $\mathbb{E}(r_j | \mathcal{F}_i) = \mathbb{E}(r_j) = 0$

et donc si  $1 < i \leq n$  :

$$d_i = \sum_{j=1}^i b_j r_j - \sum_{j=1}^{i-1} b_j r_j = b_i r_i$$

et

$$d_1 = b_1 r_1 - \mathbb{E}(b_1 r_1) = b_1 r_1$$

$$d_{n+1} = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n) = f - f = 0$$

et l'on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \|d_i\|_{\infty}^2 = \sum_{i=1}^n |b_i|^2 = 1$$

par le **lemme A.2** pour tous  $\varepsilon > 0$  :

$$\lambda(|f| > \varepsilon) \leq 2 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)$$

Par changement de variable  $s^p = t$  on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f|^p d\lambda &= \int_0^{+\infty} \lambda(|f|^p > t) dt = \int_0^{+\infty} p s^{p-1} \lambda(|f| > s) ds \\ &\leq 2p \int_0^{+\infty} s^{p-1} e^{-\frac{s^2}{4}} ds \\ &\leq B_p^p \end{aligned}$$

avec  $B_p = \left(2p \int_0^{+\infty} s^{p-1} e^{-\frac{s^2}{4}} ds\right)^{\frac{1}{p}}$ .

Donc pour  $p \geq 2$  :

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\int_0^1 |f|^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 |f|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \\ \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right|^p d\lambda\right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Pour  $p = 1$ , soit  $\theta \in ]0, 1[$  alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f|^2 d\lambda &= \int_0^1 |f|^{2\theta} |f|^{2(1-\theta)} d\lambda \leq \left(\int_0^1 |f| d\lambda\right)^{2\theta} \left(\int_0^1 |f|^4 d\lambda\right)^{\frac{1-\theta}{2}} \\ 1 &= \left(\int_0^1 |f|^2 d\lambda\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 |f| d\lambda\right)^{\theta} B_4^{1-\theta} \end{aligned}$$

Avec  $\theta = \frac{1}{3}$  on obtient :

$$B_4^{-2} \leq \int_0^1 |f| d\lambda$$

Et pour  $1 \leq p < 2$  on a finalement :

$$B_4^{-2} \leq \int_0^1 |f| d\lambda \leq \left( \int_0^1 |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_0^1 |f|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} = 1$$

c'est-à-dire

$$B_4^{-2} \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left( \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i \right|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

□

## RÉFÉRENCES

---

- [1] G. SCHECHTMAN, “Euclidean sections of convex bodies,” 2008.
- [2] A. GROTHENDIECK, “Sur certains classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers,” 1956.
- [3] V. MILMAN, “New proof of the theorem of A. Dvoretzky on intersections of convex bodies,” 1971.
- [4] Y. GORDON, “On Milman’s inequality and random subspaces which escape through a mesh in  $\mathbb{R}^n$ ,” 1988.
- [5] G. SCHECHTMAN, “A remark concerning the dependence on  $\varepsilon$  in dvoretzky’s theorem,” 1989.
- [6] G. SCHECHTMAN, “Concentration results and applications,” 2003.
- [7] G. PISIER, *The volume of convex bodies and Banach space geometry*. Cambridge University Press, 1989.
- [8] V. MILMAN, “Dvoretzky theorem - thirty years later,” 1992.
- [9] V. MILMAN et G. SCHECHTMAN, *Asymptotic theory of finite dimensional normed space*. Springer, 1986.