Sorbonne Université

Travaux d'étude et de recherche

Autour du théorème de Dvoretzky

"It soon became clear that an outstanding breakthrough in Geometric Functional Analysis had been achieved."
Vitali Milman à propos du théorème de Dvoretzky dans *Dvoretzky theorem - thirty years later*

Mathieu GALLO

Enseignant : Omer Friedland

date

Introduction

Alexandre Grothendieck en 1956 dans son article "*sur certains classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers*", inspiré par le lemme de Dvoretzky-Rogers (1950) propose une conjecture, a la quelle Aryeh Dvoretzky répondra positivement en 1961, aboutissant au résultat suivant :

Théorème 1 (A. Dvoretzky, 1961)**.** *Il existe une fonction* $k :]0,1[\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, tel que* $\forall \varepsilon \in]0,1[$, $k(\varepsilon, n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tous compact convexe symétrique* $K \subset \mathbb{R}^n$*, il existe un sous espace* $V \subset \mathbb{R}^n$ *tel que :*

(i) $\dim V = k(\varepsilon, n)$

(ii) $\exists r > 0$ *tel que ,* $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1+\varepsilon) r.(V \cap B_2^n)$

V. Milman en 1971 donna une nouvelle preuve du théorème de Dvoretzky en utilisant le phénomène de concentration de la mesure, il a de plus amélioré le théorème en donnant une estimation de la dépendance en n pour la dimension de V, $k(\varepsilon, n) \geq c(\varepsilon).\log(n)$.

Théorème 2 (V. Milman, 1971)**.** *Pour toute* $\varepsilon > 0$*, il existe une constante* $c > 0$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour tous corps convexe symétrique* $K \subset \mathbb{R}^n$*, il existe un sous espace* $V \subset \mathbb{R}^n$ *tel que :*

(i) $\dim V \geq c.\log(n)$

(ii) $\exists r > 0$ *tel que ,* $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1+\varepsilon) r.(V \cap B_2^n)$

Il existe une reformulation du théorème en terme de norme.

Théorème 3. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $c > 0$ *tel que pour toute* $n \in \mathbb{N}$ *et pour toute norme* $||.||$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *alors* l_2^k *est* $(1+\varepsilon)$*-isomorphe à* $(\mathbb{R}^n, ||.||)$ *pour un* $k \geq c.\log(n)$*.*

Montrons que ses deux théorème sont équivalents.

(2)⇒(3) Posons $K = \mathrm{Adh}(B_{||.||}(0,1)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$ et appliquons le théorème 2, celui ci nous procure un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$, avec $\dim V := k \geq c.\log(n)$ et $V \cap K$ est ε-ecuclidien.

Donnons nous une base orthonormée $\{v_j\}_{1\leq j\leq k}$ de V et posons

$$\phi : \begin{array}{ccc} (V, ||.||) & \mapsto & (\mathbb{R}^k, |.|_k) \\ \sum_{i=1}^k x_i v_i & \to & \sum_{i=1}^k x_i e_i \end{array}$$

Soit $v \in V \cap K$ tel que $||v|| = 1$, comme $K \cap V$ est ε-euclidien on a que

$$r \leq |v|_n \leq (1+\varepsilon)r$$

La borne supérieur est immédiate car $K \cap V \subset r(1+\varepsilon).(V \cap B_2^n)$, pour la borne inférieur il suffit de remarquer que $(V \cap K)$ est un fermer de V qui contient l'ouvert $r.(V \cap B_2^n)$ de V, comme v est dans la frontière de $K \cap V$ il n'est pas dans l'intérieur de $K \cap V$ et donc dans aucun ouvert contenue dans $V \cap K$.
Fixons des coordonnées à v dans la base $\{v_j\}_{1 \leq j \leq k}$, $v = \sum_{i=1}^k x_i v_i$, on a que $|v|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$ et donc :

$$r \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2} \leq (1+\varepsilon)r$$

Mais comme $|\phi(v)|_k = \left|\sum_{i=1}^k x_i e_i\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$, on a que :

$$r \leq |\phi(v)|_k \leq (1+\varepsilon)r$$

Pour tous $x \in V \backslash \{0\}$ on peut appliqué ce qui précède à $\frac{x}{||x||}$, en utilisant la linéarité de ϕ on obtient :

$$r||x||ă \leq |\phi(x)|_k \leq (1+\varepsilon)r||x||$$

(3)⇒(2) Soit $\varepsilon > 0$, par le théorème 3 il existe $c > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$ il existe un $k > c.\log(n)$ tel que l_2^k est $(1+\varepsilon)$-isomorphe à $(R^n, ||.||)$ pour n'importe quelle norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$. Considérons un compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$ et $||y|| = \inf\left\{\lambda > 0\,;\ \frac{y}{\lambda} \in K\right\}$, alors $\exists T : l_2^k \to (\mathbb{R}^n, ||.||)$ linéaire tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^k,\ |x| \leq ||Tx|| \leq (1+\varepsilon)|x|$$

ceci implique immédiatement que T est injective, notons $V = \mathrm{Im}T$, alors la co-restriction a V de T est bijective. Soit $y \in \partial(K \cap V)$, c'est à dire $||y|| = 1$, on sait qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^k$ tel que $Tx = y$, on en déduit donc

$$|x| \leq 1 \leq (1+\varepsilon)|x| \iff \frac{1}{1+\varepsilon} \leq |x| \leq 1$$

la convexité et la symétrie centrale de $K \cap V$ nous permet de conclure que :

$$\frac{1}{1+\varepsilon} T(B_2^k) \subset K \cap V \subset T(B_2^k)$$

Existence du sous-espace

Mesures de Haar

Définition & Théorème 1 (Mesures de Haar)**.** *Soit* (X,d) *un espace métrique,* G *un groupe topologique localement compact qui agit sur* X *et tel que :*

$$\forall x,y \in X \ \forall g \in G\,,\ d(gx,gy) = d(x,y) \tag{$\star$}$$

alors il existe une unique mesure à un coefficient multiplicatif près, régulière définit sur les boréliens de X *qui est invariante sous l'action de* G*, cette mesure est appeler mesure de Haar de* X *(où* G *est sous-entendu).*

Considérons $X = S^{n-1}$ avec la distance euclidienne et $X = O(n)$ avec la norme $||M|| = \sup_{|x|=1}|Mx|$ alors $G = O(n)$ le groupe des isométries vérifie $(\star)$ pour la multiplication matricielle sur S^{n-1} et $O(n)$, par le théorème précédent on peut définir sans ambiguïté μ,ν les mesures de Haar normalisés respectivement sur S^{n-1} et $O(n)$. Montrons quelques propriétés qui serons utile par la suite.

Lemme 1. *Soit* $f \in C(S^{n-1})$ *et* $Y = (g_1,\dots,g_n)$ *où les* $\{g_i\}_{1\le i\le n}$ *sont i.i.d suivant une loi normale* $\mathcal{N}(0,1)$*, alors*

$$\int_{S^{n-1}} f\,d\mu = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y}{|Y|}\right)\right]$$

Démonstration. Par unicité de la mesure de Haar , il nous suffit de montrer que pour tous $M \in O(n)$ et $f \in C(S^{n-1})$:

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{MY}{|MY|}\right)\right] = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y}{|Y|}\right)\right]$$

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{MY}{|MY|}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f\left(\frac{My}{|y|}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}|y|^2\right\}dy_1\dots dy_n = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f\left(\frac{y}{|y|}\right)\exp\left\{-\frac{1}{2}|M^{-1}y|^2\right\}dy_1\dots dy_n$$

comme $|\det M| = 1$ et $|M^{-1}y| = |y|$, on a :

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{MY}{|MY|}\right)\right] = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y}{|Y|}\right)\right]$$

□

Lemme 2. *Soit* $A \subset S^{n-1}$ *un borélien alors pour tous* $x \in S^{n-1}$

$$\nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A\Big) = \mu\big(A\big)$$

Démonstration. Soit $M \in O(n)$ et $x \in S^{n-1}$ alors la mesure définis pas $\omega_x(A) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A\Big)$ vérifie

$$\omega_x(MA) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\, M^T Tx \in A\Big) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A\Big) = \omega_x(A)$$

$$\omega_x(\emptyset) = 0$$

$$\begin{aligned}\omega_x\big(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) &= \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \nu\Big(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} \big\{T \in O(n)\,;\, Tx \in A_i\big\}\Big) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \omega_x(A_i)\end{aligned}$$

L'unicité de la mesure de Haar nous permet de conclure que $\omega_x = \mu$, en particulier ω_x ne dépend pas de x. □

Début de la démonstration du théorème de Dvoretzky

Théorème 4 (Concentration de la mesure)**.** *Soit* $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ *une fonction Lipschitzienne de constante* $L > 0$*, alors*

$$\mu\Big\{x \in S^{n-1}\,;\, |f(x) - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon\Big\} \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2L^2}}$$

Lemme 3. *Pour tous* $0 < \varepsilon < 1$ *il existe un* ε*-net sur* S^{k-1} *de cardinal inférieur à* $\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^k$*.*

Démonstration. Soit $N = \{x_i\}_{i=1,\dots,m}$ un sous ensemble de S^{k-1} maximal pour la propriété : $x, y \in N$, $|x-y| \geq \varepsilon$, c'est à dire pour tous $x \in S^{k-1} \backslash N$ il existe $i \leq m$ tel que $|x-x_i| < \varepsilon$, donc N est un ε-net. Les boules de centre x_i et de rayon $\varepsilon/2$ sont donc disjointe deux à deux et toute contenue dans $B(0,1+\frac{\varepsilon}{2})$ d'ou :

$$m\mathrm{Vol}(B(x_1,\frac{\varepsilon}{2})) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}(B(x_i,\frac{\varepsilon}{2})) = \mathrm{Vol}(\cup_{1\leq i\leq m} B(x_i,\frac{\varepsilon}{2})) \leq \mathrm{Vol}(B(0,1+\frac{\varepsilon}{2}))$$

$$m \leq \frac{\mathrm{Vol}(B(0,1+\frac{\varepsilon}{2}))}{\mathrm{Vol}(B(x_1,\frac{\varepsilon}{2}))} = \left(\frac{1+\frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^k = \left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^k \leq (\frac{3}{\varepsilon})^k$$

□

Lemme 4. *Soient* $\alpha \in S^{n-1}$, A *un* δ*-net pour un* $1 > \delta > 0$*, alors il existe* $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ *et* $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ *tel que*

$$\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i\beta_i \quad \textit{et} \quad \forall i \in \mathbb{N},\ \beta_i \leq \delta^i$$

Démonstration. Comme A est un δ-net alors il existe $y_0 \in A$ tel que $|\alpha - y_0| < \delta$, et donc

$$\alpha = y_0 + \lambda_1\alpha'$$

avec $\lambda_1 = |\alpha - y_0| \leq \delta$ et $\alpha' = \frac{\alpha - y_0}{\lambda_1} \in S^{n-1}$, on peut donc itéré le même procédé sur α' et réitéré indéfiniment :

$$\begin{array}{ccc}
\alpha = y_0 + \lambda_1(y_1 + \lambda_2\alpha'') = y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_1\lambda_2\alpha'' & \text{avec} & \lambda_2 \leq \delta,\ y_1 \in A \ \text{ et } \ \alpha'' \in S^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha = y_0 + \sum_{i=1}^{N-1} y_i\left(\prod_{1\leq k\leq i}\lambda_k\right) + \tilde{\alpha}\prod_{1\leq k\leq N}\lambda_k & \text{avec} & \forall i \leq N\ \lambda_i \leq \delta, y_i \in A \ \text{ et } \ \tilde{\alpha} \in S^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Si l'on pose $S_N = y_0 + \sum_{i=1}^{N} y_i\left(\prod_{1\leq k\leq i}\lambda_k\right)$, alors il existe $\tilde{\alpha} \in S^{n-1}$ tel que :

$$|\alpha - S_N| \leq |\lambda_1 \dots \lambda_N||\tilde{\alpha} - y_N| \leq \delta^{N+1} \to 0 \quad \text{avec} \quad N \to \infty$$

il ne reste plus qu'as poser $\beta_0 = 1$ et pour $i > 0$, $\beta_i = \prod_{1\leq k\leq i} \lambda_k \leq \delta^i$ et l'on a :

$$\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i y_i$$

□

Lemme 5. *$\forall \varepsilon > 0$, il existe $1 > \theta > 0$ tel que pour tous $n \in N$, si l'on a A un θ-net sur S^{n-1} et $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, tel que :*

$$\forall x \in A, \quad (1-\theta)E \leq \left|\left|x\right|\right| \leq (1+\theta)E$$

alors ,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (1-\varepsilon)|x|E \leq \left|\left|x\right|\right| \leq (1+\varepsilon)|x|E$$

de plus si $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$, on peu prendre $\theta = \frac{\varepsilon}{9}$

Démonstration. Soient $1 > \theta > 0$, A un θ-net sur S^{n-1} et $x \in S^{n-1}$ par le lemme 4, il existe $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ et $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tel que

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N},\ \beta_i \leq \theta^i$$

$$\begin{aligned} ||x|| &= \left|\left|\sum_{i=0}^{+\infty} y_i\beta_i\right|\right| \\ &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i ||y_i|| \\ &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i (1+\theta)E = \frac{1+\theta}{1-\theta}E \end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned} ||x|| &\geq ||y_0|| - ||x - y_0|| \\ &\geq E(1-\theta) - \sum_{i=1}^{+\infty} \theta^i ||y_i|| \\ &\geq E\big((1-\theta) - \theta\frac{1+\theta}{1-\theta}\big) = E\frac{1-3\theta}{1-\theta} \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre θ tel que

$$1+\varepsilon \geq \sqrt{1+\varepsilon} \geq \tfrac{1+\theta}{1-\theta}$$
$$1-\varepsilon \leq \tfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \leq \tfrac{1-3\theta}{1-\theta}$$

Ce qui fini la première partie de la preuve, dans la suite on suppose $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$. On cherche $\theta =: \theta(\varepsilon) \in]0,1[$, tel que $\sqrt{1+\varepsilon} \geq \max\left(\frac{1-\theta}{1-3\theta}, \frac{1+\theta}{1-\theta}\right)$, supposons $\theta \leq \frac{1}{3}$ alors

$$\frac{1-\theta}{1-3\theta} - \frac{1+\theta}{1-\theta} = \frac{4\theta^2}{(1-3\theta)(1-\theta)} > 0$$

Donc $\sqrt{1+\varepsilon} \geq \frac{1-\theta}{1-3\theta}$

$$1+\varepsilon \geq \left(\tfrac{1-\theta}{1-3\theta}\right)^2$$
$$(9\varepsilon+8)\theta^2 - 2(3\varepsilon+2)\theta + \varepsilon \geq 0$$

les deux racines de ce polynôme sont $0 < \frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon} < \frac{3\varepsilon+2+2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon}$, on cherche donc un θ dans $]0, \frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon}]$. Pour finir

$$\frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon} \geq \frac{3\varepsilon+2-2-2\varepsilon}{8+9\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{8+9\varepsilon}$$
$$\geq \frac{\varepsilon}{9}$$

donc pour $\varepsilon \in]0, 9^{-1}[$ on peu prendre $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{9}$. □

Théorème 5. *Pour tous $\varepsilon > 0$ il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$ il existe un sous-espace $V \subset \mathbb{R}^n$ tel que :*

(i) $\dim V \geq c.\left(\frac{E}{b}\right)^2 n$

(ii) Pour tous $x \in V$: $(1-\varepsilon)E|x| \leq ||x|| \leq (1+\varepsilon)E|x|$

où $E = \int_{S^{n-1}} ||y|| d\mu(y)$ et $b > 0$ est le plus petit réel positif tel que $||.|| \leq b|.|$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, on se donne un $1 > \theta > 0$ donné par le lemme 5 et

- $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ un sous espace avec $\dim V_0 = k$

- A un θ-net sur $V_0 \cap S^{n-1}$, avec $|A| < \left(\frac{3}{\theta}\right)^k$ par le lemme *
- $\eta = \frac{\theta E}{b}$

où k est choisi tel que $|A| < \frac{1}{2} e^{\frac{\eta^2 n}{2}} < (\frac{3}{\theta})^k$. Dans un premier temps nous allons montrer qu'il existe $T \in O(n)$ tel que pour tous $x \in A$

$$(1-\theta)E \leq ||Tx|| \leq (1+\theta)$$

On a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \nu\Big(\cap_{x\in A}\left\{T \in O(n)\,;\, \big|||Tx||-E\big| \leq b\eta\right\}\Big) &= 1-\nu\big(\cup_{x\in A}\left\{T \in O(n)\,;\, \big|||Ty||-E\big| > b\eta\right\}\big) \quad \text{pour un } y \in A \\ &\geq 1-|A|\nu\big(T \in O(n)\,;\, \big|||Ty||-E\big| > b\eta\big) \\ &\geq 1-|A|\mu\Big(y \in S^{n-1}\,;\, \big|||y||-E\big| > b\eta\Big) \end{aligned}$$

En appliquant la concentration de la mesure

$$\nu\Big(\cap_{x\in A}\left\{T \in O(n)\,;\, \big|||Tx||-E\big| \leq b\eta\right\}\Big) \geq 1-|A|2e^{-\frac{\eta^2 n}{2}} > 0$$

Il existe donc $T \in O(n)$ tel que pour tous $x \in A$ on ait $\big|||Tx||-E\big| \leq b\eta$, c'est à dire

$$E(1-\theta) = E - b\eta \leq ||Tx|| \leq E + b\eta = E(1+\theta)$$

Par le lemme 5 appliqué au θ-net TA, pour tous $x \in \mathbb{R}^n$

$$(1-\varepsilon)|x|E \leq ||x|| \leq (1+\varepsilon)|x|E$$

Il ne nous reste plus qu'as discuté de la minoration de k, en prenant le logarithme dans $\frac{1}{2} e^{\frac{\eta^2 n}{2}} < (\frac{3}{\theta})^k$, on obtient :

$$k > \frac{1}{log(\frac{3}{\theta})}\left(\frac{\theta^2 E^2}{2b^2} n - log(2)\right)$$

toujours pas réussi a conclure ! □

Minoration de la dimension du sous-espace

Par la suite on fixe $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, $K = \mathrm{Adh}\big(B_{||.||}\big)$ tel que B_2^n soit l'ellipsoïde de volume maximale incluse dans K, on a donc $b = 1$. Dans cette partie nous allons donner une estimation de E.

Défintion 1. *Un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ est l'image de la boule unité euclidienne par un élément de $GL(n)$.*

Admettons le théorème suivant de Fritz John (1910-1994) :

Théorème 6 (Ellipsoïde de John)**.** *Tous compact convexe symétrique d'intérieur non vide contient un unique ellipsoïde de volume maximale.*

Pour estimer E nous aurons besoin d'une minoration de $\mathbb{E}\Big[\max_{1\le i\le N} g_i\Big]$ pour des $\{g_i\}$ i.i.d suivant $\mathcal{N}(0,1)$, nous démontrons une telle borne dans le lemme suivant.

Lemme 6. *il existe $c > 0$ tel que $\forall N > 1$ et $\{g_i\}_{1\le i\le N}$ des variables aléatoire i.i.d suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$ on ait :*

$$c\sqrt{\log N} \le \mathbb{E}[\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i|]$$

où $\tilde{N} = \left[\frac{\sqrt{N}}{16\sqrt{2}}\right]$

Démonstration. Commençons par montrer que pour $n > 1$, $\mathbb{P}\big(|g_1| > \sqrt{\log n}\big) \ge \frac{1}{n}$, on a :

$$\mathbb{P}\big(|g_1| > \sqrt{\log n}\big) = 2\int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \ge \int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}(1+\frac{1}{x^2})\,dx \qquad \text{pour } x > \sqrt{\log(2)} > 1$$

$$\int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}(1+\frac{1}{x^2})\,dx = \Big[-\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\Big]_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{n\log n}} > \frac{1}{n}$$

On à $\mathbb{P}\Big(|g_1| > \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big) \ge \frac{1}{\sqrt{N}}$, et donc

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le\tilde{N}} |g_i| \le \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big) = \mathbb{P}\Big(|g_1| \le \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big)^{\tilde{N}} = \Big(1-\mathbb{P}\Big(|g_1| > \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big)\Big)^{\tilde{N}}$$

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le \tilde N}|g_i|\le\sqrt{\log\sqrt{N}}\Big)\le\Big(1-\frac{1}{\sqrt{N}}\Big)^{\tilde N}\le e^{-\frac{\tilde N}{\sqrt N}}\le e^{-\frac{1}{16\sqrt2}}$$

Ce qui équivaut a

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le \tilde N}|g_i|>\sqrt{\log\sqrt{N}}\Big)\ge 1-e^{-\frac{1}{16\sqrt2}}$$

Par l'inégalité de Markov on a finalement :

$$\mathbb{E}\big[\max_{1\le i\le \tilde N}|g_i|\big]\ge\mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le \tilde N}|g_i|>\sqrt{\log\sqrt{N}}\Big)\sqrt{\log\sqrt{N}}\ge\frac{1-e^{-\frac{1}{16\sqrt2}}}{\sqrt2}\sqrt{\log N}$$

avec $c =: \frac{1-e^{-\frac{1}{16\sqrt2}}}{\sqrt2}\approx 0.3235$ □

Lemme 7 (Dvoretzky-Rogers)**.** *Il existe une base orthonormée* $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ *tel que* $\forall 1\le i\le n$

$$e^{-1}\big(1-\frac{i-1}{n}\big)\le ||x_i||\le 1$$

Démonstration. S^{n-1} est compact et $||.||$ continue, on peux donc prendre un $x_1\in S^{n-1}$ qui maximise $||.||$ c'est à dire $||x_1||=1$, supposons que l'on ai $x_1,\dots,x_{k-1}$ avec $k\le n$ tel que pour tous $1\le i\le k-1$, x_i maximise $||.||$ sur $S^{n-1}\backslash\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{k-1})\neq\emptyset$ car les $\{x_i\}_{i=1,\dots,k-1}$ sont orthogonaux deux à deux. On peut donc répéter le procéder pour trouver x_k qui maximise $S^{n-1}\backslash\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{k-1})$, par récurrence on peut donc avoir n vecteurs avec ses propriétés. Fixons $1\le k\le n$, $a,b\in\mathbb{R}^*$ et définissons :

$$\mathscr{E}=\Big\{\sum_{i=1}^n a_ix_i\,;\,\sum_{i=1}^{k-1}\big(\frac{a_i}{a}\big)^2+\sum_{i=k}^n\big(\frac{b_i}{b}\big)^2\le 1\Big\}$$

Supposons $\sum_{i=1}^n a_ix_i\in\mathscr{E}$, alors $\sum_{i=1}^{k-1}a_ix_i\in aB_2^n$ et donc $||\sum_{i=1}^{k-1}a_ix_i||\le a$. Si $x\in\mathrm{Vect}(x_k,\dots,x_n)\cap B_2^n$ on a $||x||\le||x_k||$ par construction, et donc $\sum_{i=k}^n a_ix_i\in bB_2^n\Rightarrow||\sum_{i=k}^n a_ix_i||\le b||x_k||$, ce qui nous donne la majoration suivante

$$||\sum_{i=1}^n a_ix_i||\le||\sum_{i=1}^{k-1}a_ix_i||+||\sum_{i=k}^n a_ix_i||\le a+b||x_k||$$

Posons $\phi \in GL(n)$ définit par $\phi(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} a a_i x_i + \sum_{i=k}^n b a_i x_i$ on a $\phi = \mathrm{diag}(\overbrace{a,...,a}^{(k-1)\times}, \overbrace{b,...,b}^{(n-k+1)\times})$ et donc $\det\phi = a^{k-1} b^{n-k+1}$ d'où :

$$\int_{\mathscr{E}} dx_1...dx_n = \int_{B_2^n} \det\phi dx_1...dx_n = a^{k-1} b^{n-k-1} \int_{B_2^n} dx_1...dx_n$$

On prend $a + b||x_k|| = 1$ de sorte que $\mathscr{E} \subset K$, comme B_2^n est l'ellipsoïde de volume maximale inclue dans K, on a que

$$1 \geq \frac{\int_{\mathscr{E}} dx_1...dx_n}{\int_{B_2^n} dx_1...dx_n} = a^{k-1} b^{n-k+1}$$

Fixons donc pour $k \geq 2$, $b = \frac{1-a}{||x_k||}$ et $a = \frac{k-1}{n}$, en remplaçant dans l'inégalité on obtient :

$$1 \geq a^{k-1} \Big(\frac{1-a}{||x_k||}\Big)^{n-k+1} \iff ||x_k|| \geq a^{\frac{k-1}{n-k+1}} (1-a) = \Big(\frac{k-1}{n}\Big)^{\frac{k-1}{n-k+1}} \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)$$

et $\log a^{\frac{k-1}{n-k+1}} = \frac{k-1}{n-k+1} \log\Big(\frac{k-1}{n}\Big) > -1.$ □

Proposition 1 (Estimation de E)**.** *Il existe* $c > 0$ *tel que* $E \geq c\sqrt{\frac{\log n}{n}}$.

Démonstration. Par le lemme de Dvoretzky-Rogers il existe une base orthonormé $x_1, ..., x_n$ tel que pour $1 \leq i \leq \tilde{n} =: [\frac{\sqrt{n}}{16\sqrt{2}}] (\leq n)$, $||x_i|| \geq e^{-1}\Big(1 - \frac{\tilde{n}-1}{n}\Big) \geq e^{-1}\Big(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{16\sqrt{2n}}\Big) \geq (2e)^{-1}$. Comme μ est invariante par composition par une transformation orthogonale on a que

$$E =: \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^n a_i x_i|| d\mu(a) = \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n|| d\mu(a)$$

et donc

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^n a_i x_i|| d\mu(a) + \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n|| d\mu(a) \\
&\geq \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} 2 \max\Big\{||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i||, ||a_n x_n||\Big\} d\mu(a) \geq ... \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq n} \Big\{|a_i|\, ||x_i||\Big\} d\mu(a) \\
&\geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} \Big\{|a_i|\, ||x_i||\Big\} d\mu(a) \geq (2e)^{-1} \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |a_i| d\mu(a)
\end{aligned}$$

Soit $(g_1,...,g_n)$, des variables aléatoire i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1\le i\le \tilde{n}} |a_i| d\mu(a) = \mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{-\frac{1}{2}} \max_{1\le i\le \tilde{n}} |g_i| \Big]$$

Lemme 8. $\big(\sum_{i=1}^n g_i^2\big)^{-\frac{1}{2}}(g_1,...,g_n)$ *et* $\big(\sum_{i=1}^n g_i^2\big)^{\frac{1}{2}}$ *sont indépendants.*

Démonstration du lemme. □

Par le lemme on à donc

$$\mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{-\frac{1}{2}} \max_{1\le i\le \tilde{n}} |g_i| \Big] . \mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{\frac{1}{2}} \Big] = \mathbb{E}[\max_{1\le i\le \tilde{n}} |g_i|]$$

la fonction racine carré est concave, par l'inégalité de Jensen on a donc :

$$\mathbb{E}[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{\frac{1}{2}}] \le \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} g_i^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\mathbb{E}[g_1^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$

Et finalement par le lemme 4, il existe $K > 0$ tel que :

$$E \ge \frac{1}{2e\sqrt{n}} \mathbb{E}[\max_{1\le i\le \tilde{n}} |g_i|] \ge \frac{K}{2e}\sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

Pour finir il suffit de poser $c =: \frac{K}{2e}$ □

Sources

- Euclidean sections of convex bodies , Gideon Schechtman (2008)

- Sur certains classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers, Alexandre Grothendieck (1956)

-Dvoretzky theorem - thirty years later , Vitali Milman (1992)