SORBONNE UNIVERSITÉ

TRAVAUX D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

Autour du théorème de Dvoretzky

"It soon became clear that an outstanding breakthrough in Geometric Functional Analysis had been achieved."
Vitali Milman à propos du théorème de Dvoretzky dans *Dvoretzky theorem - thirty years later*

Mathieu GALLO

Enseignant : Omer Friedland

date

Introduction

Alexandre Grothendieck en 1956 dans son article "*sur certains classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers*", inspiré par le lemme de Dvoretzky-Rogers (1950) propose une conjecture, a la quelle Aryeh Dvoretzky répondra positivement en 1961, aboutissant au résultat suivant :

Théorème 1 (A. Dvoretzky, 1961)**.** *Il existe une fonction* $k :]0,1[\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *tel que* $\forall \varepsilon \in]0,1[$, $k(\varepsilon,n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tous compact convexe symétrique* $K \subset \mathbb{R}^n$*, il existe un sous espace* $V \subset \mathbb{R}^n$ *tel que :*

(i) $\dim V = k(\varepsilon, n)$

(ii) $\exists r > 0$ *tel que ,* $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1+\varepsilon)r.(V \cap B_2^n)$

V. Milman en 1971 donna une nouvelle preuve du théorème de Dvoretzky en utilisant le phénomène de concentration de la mesure, il a de plus amélioré le théorème en donnant une estimation de la dépendance en n pour la dimension de V, $k(\varepsilon,n) \geq c(\varepsilon).\log(n)$.

Théorème 2 (V. Milman, 1971)**.** *Pour toute* $\varepsilon > 0$*, il existe une constante* $c > 0$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour tous corps convexe symétrique* $K \subset \mathbb{R}^n$*, il existe un sous espace* $V \subset \mathbb{R}^n$ *tel que :*

(i) $\dim V \geq c.\log(n)$

(ii) $\exists r > 0$ *tel que ,* $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1+\varepsilon)r.(V \cap B_2^n)$

Il existe une reformulation du théorème en terme de norme.

Théorème 3. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $c > 0$ *tel que pour toute* $n \in \mathbb{N}$ *et pour toute norme* $||.||$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *alors* l_2^k *est* $(1+\varepsilon)$*-isomorphe à* $(\mathbb{R}^n, ||.||)$ *pour un* $k \geq c.\log(n)$.

Montrons que ses deux théorème sont équivalents.

(2)⇒(3) Posons $K = \text{Adh}(B_{||.||}(0,1)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$ et appliquons le théorème 2, celui ci nous procure un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$, avec $\dim V := k \geq c.\log(n)$ et $V \cap K$ est ε-ecuclidien.

Donnons nous une base orthonormée $\{v_j\}_{1\leq j\leq k}$ de V et posons

$$\phi : \begin{array}{ccc} (V, ||.||) & \mapsto & (\mathbb{R}^k, |.|_k) \\ \sum_{i=1}^k x_i v_i & \to & \sum_{i=1}^k x_i e_i \end{array}$$

Soit $v \in V \cap K$ tel que $||v|| = 1$, comme $K \cap V$ est ε-euclidien on a que

$$r \leq |v|_n \leq (1+\varepsilon)r$$

La borne supérieur est immédiate car $K \cap V \subset r(1+\varepsilon).(V \cap B_2^n)$, pour la borne inférieur il suffit de remarquer que $(V \cap K)$ est un fermer de V qui contient l'ouvert $r.(V \cap B_2^n)$ de V, comme v est dans la frontière de $K \cap V$ il n'est pas dans l'intérieur de $K \cap V$ et donc dans aucun ouvert contenue dans $V \cap K$.

Fixons des coordonnées à v dans la base $\{v_j\}_{1\leq j\leq k}$, $v = \sum_{i=1}^k x_i v_i$, on a que $|v|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$ et donc :

$$r \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2} \leq (1+\varepsilon)r$$

Mais comme $|\phi(v)|_k = \left|\sum_{i=1}^k x_i e_i\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$, on a que :

$$r \leq |\phi(v)|_k \leq (1+\varepsilon)r$$

Pour tous $x \in V\setminus\{0\}$ on peut appliqué ce qui précède à $\frac{x}{||x||}$, en utilisant la linéarité de ϕ on obtient :

$$r||x|| \leq |\phi(x)|_k \leq (1+\varepsilon)r||x||$$

(3)⇒(2) Soit $\varepsilon > 0$, par le théorème 3 il existe $c > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$ il existe un $k > c.\log(n)$ tel que l_2^k est $(1+\varepsilon)$-isomorphe à $(R^n, ||.||)$ pour n'importe quelle norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$. Considérons un compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$ et $||y|| = \inf\left\{\lambda > 0\,;\, \frac{y}{\lambda} \in K\right\}$, alors $\exists T : l_2^k \to (\mathbb{R}^n, ||.||)$ linéaire tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^k,\ \ |x| \leq ||Tx|| \leq (1+\varepsilon)|x|$$

ceci implique immédiatement que T est injective, notons $V = \mathrm{Im}T$, alors la co-restriction a V de T est bijective. Soit $y \in \partial(K \cap V)$, c'est à dire $||y|| = 1$, on sait qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^k$ tel que $Tx = y$, on en déduit donc

$$|x| \leq 1 \leq (1+\varepsilon)|x| \iff \frac{1}{1+\varepsilon} \leq |x| \leq 1$$

la convexité et la symétrie centrale de $K \cap V$ nous permet de conclure que :

$$\frac{1}{1+\varepsilon} T(B_2^k) \subset K \cap V \subset T(B_2^k)$$

Existence du sous-espace

Mesures de Haar

Définition & Théorème (Mesures de Haar)**.** *Soit (X,d) un espace métrique, G un groupe topologique localement compact qui agit sur X et tel que :*

$$\forall x, y \in X \ \ \forall g \in G\,,\ d(gx, gy) = d(x,y) \tag{$\star$}$$

alors il existe une unique mesure à un coefficient multiplicatif près, régulière définit sur les boréliens de X qui est invariante sous l'action de G, cette mesure est appeler mesure de Haar de X (où G est sous-entendu).

Considérons $X = S^{n-1}$ avec la distance euclidienne et $X = O(n)$ avec la norme $||M|| = \sup_{|x|=1} |Mx|$ alors $G = O(n)$ le groupe des isométries vérifie $(\star)$ pour la multiplication matricielle sur S^{n-1} et $O(n)$, par le théorème précédent on peut définir sans ambiguïté μ,ν les mesures de Haar normalisés respectivement sur S^{n-1} et $O(n)$. Montrons quelques propriétés qui serons utile par la suite.

Lemme 1. *Soit $f \in C(S^{n-1})$ et $Y = (g_1, \ldots, g_n)$ où les $\{g_i\}_{1\leq i\leq n}$ sont i.i.d suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, alors*

$$\int_{S^{n-1}} f\,d\mu = \mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{Y}{|Y|}\Big)\Big]$$

Démonstration. Par unicité de la mesure de Haar , il nous suffit de montrer que pour tous $M \in O(n)$ et $f \in C(S^{n-1})$:

$$\mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{MY}{|MY|}\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{Y}{|Y|}\Big)\Big]$$

$$\mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{MY}{|MY|}\Big)\Big] = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f\big(\frac{My}{|y|}\big) \exp\Big\{-\frac{1}{2}|y|^2\Big\} dy_1 \ldots dy_n = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f\big(\frac{y}{|y|}\big) \exp\Big\{-\frac{1}{2}|M^{-1}y|^2\Big\} dy_1 \ldots dy_n$$

comme $|\det M| = 1$ et $|M^{-1}y| = |y|$, on a :

$$\mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{MY}{|MY|}\Big)\Big] = \mathbb{E}\Big[f\Big(\frac{Y}{|Y|}\Big)\Big]$$

□

Lemme 2. *Soit $A \subset S^{n-1}$ un borélien alors pour tous $x \in S^{n-1}$*

$$\nu\Big(T \in O(n)\,;\ Tx \in A\Big) = \mu\big(A\big)$$

Démonstration. Soit $M \in O(n)$ et $x \in S^{n-1}$ alors la mesure définis pas $\omega_x(A) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\ Tx \in A\Big)$ vérifie

$$\omega_x(MA) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\ M^T T x \in A\Big) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\ Tx \in A\Big) = \omega_x(A)$$

$$\omega_x(\emptyset) = 0 \ \text{ et } \ \omega_x(S^{n-1}) = 1$$

L'unicité de la mesure de Haar nous permet de conclure que $\omega_x = \mu$, en particulier ω_x ne dépend pas de x. □

Début de la démonstration du théorème de Dvoretzky

Théorème 4 (Concentration de la mesure). *Soit $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L > 0$, alors*

$$\mu\Big\{x \in S^{n-1} \,;\, |f(x) - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon\Big\} \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2L^2}}$$

Lemme 3. *Pour tous $0 < \varepsilon < 1$ il existe un ε-net sur S^{k-1} de cardinal inférieur à $\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^k$.*

Démonstration. Soit $N = \{x_i\}_{i=1,\ldots,m}$ un sous ensemble de S^{k-1} maximal pour la propriété : $x, y \in N$, $|x - y| \geq \varepsilon$, c'est à dire pour tous $x \in S^{k-1} \backslash N$ il existe $i \leq m$ tel que $|x - x_i| < \varepsilon$, donc N est un ε-net. Les boules de centre x_i et de rayon $\varepsilon/2$ sont donc disjointe deux à deux et toute contenue dans $B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2})$ d'ou :

$$m\mathrm{Vol}(B(x_1, \frac{\varepsilon}{2})) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}(B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})) = \mathrm{Vol}(\cup_{1\leq i\leq m} B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})) \leq \mathrm{Vol}(B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}))$$

$$m \leq \frac{\mathrm{Vol}(B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}))}{\mathrm{Vol}(B(x_1, \frac{\varepsilon}{2}))} = \left(\frac{1 + \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}}\right)^k = \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^k \leq \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^k$$

$\square$

Théorème 5. *Pour tous $\varepsilon > 0$ il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$ il existe un sous-espace $V \subset \mathbb{R}^n$ tel que :*

(i) $\dim V \geq c.\left(\frac{E}{b}\right)^2 n$

(ii) Pour tous $x \in V$: $(1 - \varepsilon)E|x| \leq ||x|| \leq (1 + \varepsilon)E|x|$

où $E = \int_{S^{n-1}} ||y|| d\mu(y)$ et $b > 0$ est le plus petit réel positif tel que $||.|| \leq b|.|$.

Démonstration. Soit $1 > \delta, \theta > 0$ tel que

$$\frac{1}{1 - \theta} < 1 + \varepsilon/2 \text{ et } \frac{1 - 2\theta}{1 - \theta} > 1 - \varepsilon/2$$

$$\frac{1 + \delta}{1 - \theta} < 1 + \varepsilon \text{ et } \frac{1 - 2\theta - \delta}{1 - \theta} > 1 - \varepsilon$$

Posons $\eta = \frac{\delta E}{b}$ et fixons $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace et $M \subset V_0 \cap S^{n-1}$ un θ-net, où $\dim V_0 = k$ avec $|M| < \frac{1}{2} e^{\frac{\eta^2 n}{2}} < \left(\frac{3}{\theta}\right)^k$. (on justifira l'existence d'un tel ensemble dans lemme qui suit cette démonstration)

$$\nu\Big(\cap_{x\in M} \{T \in O(n) \,;\, \big|||Tx|| - E\big| \leq `b\eta\}\Big) = 1 - |M|\nu\big(T \in O(n) \,;\, \big|||Ty|| - E\big| > b\eta\big), \text{ pour un } y \in M.$$

or $\nu\Big(T \in O(n)\,;\, \big|||Ty|| - E\big| > b\eta\Big) = \mu\Big(y \in S^{n-1}\,;\, \big|||y|| - E\big| > b\eta\Big) \leq 2e^{-\frac{\eta^2 n}{2}}$, donc :

$$\nu\Big(\cap_{x\in M}\big\{T \in O(n)\,;\, \big|||Tx|| - E\big| \leq b\eta\big\}\Big) \geq 1 - |M| 2e^{-\frac{\eta^2 n}{2}} > 0$$

Il existe donc $T \in O(n)$ tel que pour tous $x \in M$ on ait $\big|||Tx|| - E\big| \leq b\eta$, comme T est une isométrie on a que $N =: TM$ est un θ-net sur $V \cap S^{n-1}$ avec $V =: TV_0$.
Si $x \in V \cap S^{n-1}$, il existe $\{y_i\} \subset N$ et $\{\beta_i\}$ une suite avec $|\beta_i| \leq \theta^i$ tel que $x = y_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i y_i$, on a donc

$$||x|| \leq ||y_1|| + \sum_{i=2}^{\infty} \theta^i ||y_i|| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \theta^i (b\eta + E) = \frac{1}{1-\theta}(b\eta + E)$$

Trouvons maintenant une minoration de $||x||$, on a $||x - y_1|| = \Big|\Big|\sum_{i=2}^{\infty} \beta^i y_i\Big|\Big| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \theta^i ||y_i|| \leq \frac{\theta}{1-\theta}(b\eta + E)$ et donc

$$||x|| \geq ||y_1|| - ||x - y_1|| \geq (b\eta + E) - \frac{\theta}{1-\theta}(E + b\eta) = E\frac{1-2\theta}{1-\theta} - b\eta\frac{1}{1-\theta}$$

$$E\frac{1-2\theta}{1-\theta} - b\eta\frac{1}{1-\theta} \leq ||x|| \leq \frac{1}{1-\theta}(b\eta + E)$$

Or on a $E\frac{1-2\theta}{1-\theta} - b\eta\frac{1}{1-\theta} = E\frac{1-2\theta-\delta}{1-\theta} > E(1-\varepsilon)$ et $\frac{1}{1-\theta}(b\eta + E) = E\frac{1+\delta}{1-\theta} < E(1+\varepsilon)$ et donc

$$E(1-\varepsilon) \leq ||x|| \leq E(1+\varepsilon)$$

Pour $y \in V$ il suffit de prendre $x = \frac{y}{|y|}$ et l'on a :

$$E(1-\varepsilon)|y| \leq ||y|| \leq E(1+\varepsilon)|y|$$

Il ne nous reste plus qu'as discuté de la minoration de k, en prenant le logarithme dans $\frac{1}{2}e^{\frac{\eta^2 n}{2}} < (\frac{3}{\theta})^k$, on obtient :

$$k > \frac{1}{log(3/\theta)}\Big(\frac{\delta^2 E^2}{2b^2} n - log(2)\Big)$$

Je n'arrive pas a conclure pour la dimension, par rapport au livre de Gideon et Milman j'ai remplacer dans les notations ε par η, ε' par δ, δ par ε □

Minoration de la dimension du sous-espace

Par la suite on fixe $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, $K = \mathrm{Adh}\big(B_{||.||}\big)$ tel que B_2^n soit l'ellipsoïde de volume maximale incluse dans K, on a donc $b = 1$. Dans cette partie nous allons donner une estimation de E.

Défintion. *Un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ est l'image de la boule unité euclidienne par un élément de $GL(n)$.*

Admettons le théorème suivant de Fritz John (1910-1994) :

Théorème 6 (Ellipsoïde de John)**.** *Tous compact convexe symétrique d'intérieur non vide contient un unique ellipsoïde de volume maximale.*

Pour estimer E nous aurons besoin d'une minoration de $\mathbb{E}\Big[\max_{1\le i\le N} g_i\Big]$ pour des $\{g_i\}$ i.i.d suivant $\mathcal{N}(0,1)$, nous démontrons une telle borne dans le lemme suivant.

Lemme 4. *il existe $c > 0$ tel que $\forall N > 1$ et $\{g_i\}_{1\le i\le N}$ des variables aléatoire i.i.d suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$ on ait :*

$$c\sqrt{\log N} \le \mathbb{E}[\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i|]$$

où $\tilde{N} = \left[\frac{\sqrt{N}}{16\sqrt{2}}\right]$

Démonstration. Commençons par montrer que pour $n > 1$, $\mathbb{P}\big(|g_1| > \sqrt{\log n}\big) \ge \frac{1}{n}$, on a :

$$\mathbb{P}\big(|g_1| > \sqrt{\log n}\big) = 2\int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \ge \int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}(1+\frac{1}{x^2})dx \qquad \text{pour } x > \sqrt{\log(2)} > 1$$

$$\int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}(1+\frac{1}{x^2})dx = \Big[-\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\Big]_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{n\log n}} > \frac{1}{n}$$

On à $\mathbb{P}\big(|g_1| > \sqrt{\log\sqrt{N}}\big) \ge \frac{1}{\sqrt{N}}$, et donc

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i| \le \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big) = \mathbb{P}\Big(|g_1| \le \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big)^{\tilde{N}} = \Big(1 - \mathbb{P}\Big(|g_1| > \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big)\Big)^{\tilde{N}}$$

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i| \le \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big) \le \Big(1 - \frac{1}{\sqrt{N}}\Big)^{\tilde{N}} \le e^{-\frac{\tilde{N}}{\sqrt{N}}} \le e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}$$

Ce qui équivaut a

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i| > \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big) \ge 1 - e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}$$

Par l'inégalité de Markov on a finalement :

$$\mathbb{E}[\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i|] \ge \mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i| > \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big)\sqrt{\log\sqrt{N}} \ge \frac{1 - e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\log N}$$

avec $c =: \frac{1-e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \approx 0.3235$ □

Lemme 5 (Dvoretzky-Rogers)**.** *Il existe une base orthonormée* $\{x_i\}_{i=1,...,n}$ *tel que* $\forall 1 \leq i \leq n$

$$e^{-1}\big(1 - \frac{i-1}{n}\big) \leq ||x_i|| \leq 1$$

Démonstration. S^{n-1} est compact et $||.||$ continue, on peux donc prendre un $x_1 \in S^{n-1}$ qui maximise $||.||$ c'est à dire $||x_1|| = 1$, supposons que l'on ai $x_1, ..., x_{k-1}$ avec $k \leq n$ tel que pour tous $1 \leq i \leq k-1$, x_i maximise $||.||$ sur $S^{n-1} \cap_{j<i} x_j \neq \emptyset$ car les $\{x_i\}_{i=1,...,k-1}$ sont orthogonaux deux à deux et est compact, on peut donc répéter le procéder pour trouver x_k qui maximise $S^{n-1} \cap_{j<k} x_j$, par récurrence on peut donc avoir n vecteurs avec ses propriétés. Fixons $1 \leq k \leq n$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ et définissons :

$$\mathscr{E} = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \, ; \, \sum_{i=1}^{k-1} \big(\frac{a_i}{a}\big)^2 + \sum_{i=k}^{n} \big(\frac{b_i}{b}\big)^2 \leq 1 \Big\}$$

Supposons $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in \mathscr{E}$, alors $\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \in aB_2^n$ et donc $||\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i|| \leq a$. Si $x \in \mathrm{Vect}(x_k, ..., x_n) \cap B_n^2$ on a $||x|| \leq ||x_k||$ par construction, et donc $\sum_{i=k}^n a_i x_i \in bB_2^n \Rightarrow ||\sum_{i=k}^n a_i x_i|| \leq b||x_k||$, ce qui nous donne la majoration suivante

$$||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i|| + ||\sum_{i=k}^{n} a_i x_i|| \leq a + b||x_k||$$

Posons $\phi \in GL(n)$ définit par $\phi(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} a a_i x_i + \sum_{i=k}^n b a_i x_i$ on a $\phi = \mathrm{diag}\big(\overbrace{a, ..., a}^{(k-1)\times}, \overbrace{b, ..., b}^{(n-k+1)\times}\big)$ et donc $\det\phi = a^{k-1} b^{n-k+1}$ d'où :

$$\int_{\mathscr{E}} dx_1 ... dx_n = \int_{B_2^n} \det\phi dx_1 ... dx_n = a^{k-1} b^{n-k-1} \int_{B_2^n} dx_1 ... dx_n$$

On prend $a + b||x_k|| = 1$ de sorte que $\mathscr{E} \subset K$, comme B_2^n est l'ellipsoïde de volume maximale inclue dans K, on a que

$$1 \geq \frac{\int_{\mathscr{E}} dx_1 ... dx_n}{\int_{B_2^n} dx_1 ... dx_n} = a^{k-1} b^{n-k+1}$$

Fixons donc pour $k \geq 2$, $b = \frac{1-a}{||x_k||}$ et $a = \frac{k-1}{n}$, en remplaçant dans l'inégalité on obtient :

$$1 \geq a^{k-1} \Big(\frac{1-a}{||x_k||}\Big)^{n-k+1} \iff ||x_k|| \geq a^{\frac{k-1}{n-k+1}} (1-a) = \Big(\frac{k-1}{n}\Big)^{\frac{k-1}{n-k+1}} \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)$$

et $\log a^{\frac{k-1}{n-k+1}} = \frac{k-1}{n-k+1} \log\Big(\frac{k-1}{n}\Big) > -1.$ □

Proposition (Estimation de E)**.** *Il existe* $c > 0$ *tel que* $E \geq c\sqrt{\frac{\log n}{n}}$.

Démonstration. Par le lemme de Dvoretzky-Rogers il existe une base orthonormé $x_1, ..., x_n$ tel que pour $1 \leq i \leq \tilde{n} =:$ $\big[\frac{\sqrt{n}}{16\sqrt{2}}\big] (\leq n)$, $||x_i|| \geq e^{-1}\Big(1 - \frac{\tilde{n}-1}{n}\Big) \geq e^{-1}\Big(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{16\sqrt{2n}}\Big) \geq (2e)^{-1}$. Comme μ est invariante par composition par une transformation orthogonale on a que

$$E =: \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| \, d\mu(a) = \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n|| \, d\mu(a)$$

et donc

$$\int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i||\, d\mu(a) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i||\, d\mu(a) + \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n||\, d\mu(a)$$

$$\int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i||\, d\mu(a) \geq \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} 2\max\Big\{||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i||, ||a_n x_n||\Big\} d\mu(a) \geq \ldots \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq n} \Big\{|a_i|\, ||x_i||\Big\} d\mu(a)$$

$$\int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i||\, d\mu(a) \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} \Big\{|a_i|\, ||x_i||\Big\} d\mu(a) \geq (2e)^{-1}\int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |a_i| d\mu(a)$$

Soit $(g_1, ..., g_n)$, des variables aléatoire i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |a_i| d\mu(a) = \mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{-\frac{1}{2}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |g_i|\Big]$$

Lemme 6. *$\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{-\frac{1}{2}}(g_1, ..., g_n)$ et $\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{\frac{1}{2}}$ sont indépendants.*

Démonstration du lemme. □

Par le lemme on à donc

$$\mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{-\frac{1}{2}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |g_i|\Big].\mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big] = \mathbb{E}\big[\max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |g_i|\big]$$

la fonction racine carré est concave, par l'inégalité de Jensen on a donc :

$$\mathbb{E}\big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{\frac{1}{2}}\big] \leq \mathbb{E}\big[\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\mathbb{E}[g_1^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$

Et finalement par le lemme 4, il existe $K > 0$ tel que :

$$E \geq \frac{1}{2e\sqrt{n}}\mathbb{E}\big[\max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |g_i|\big] \geq \frac{K}{2e}\sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

Pour finir il suffit de poser $c =: \frac{K}{2e}$ □

Sources

- Euclidean sections of convex bodies , Gideon Schechtman (2008)
- "SUR CERTAINS CLASSES DE SUITES DANS LES ESPACES DE BANACH, ET LE THÉORÈME DE DVORETSKY-ROGERS" , ALEXANDRE GROTHENDIECK (1956)
-DVORETZKY’S THEOREM- THIRTY YEARS LATER , Vitali Milman (1992)