

SORBONNE UNIVERSITÉ

TRAVAUX D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

Autour du théorème de Dvoretzky

"It soon became clear that an outstanding breakthrough in Geometric Functional Analysis had been achieved."

Vitali Milman à propos du théorème de Dvoretzky dans *Dvoretzky theorem - thirty years later*

Mathieu GALLO

Enseignant : Omer Friedland

date

1. Introduction

Alexandre Grothendieck en 1956 dans son article "*Sur certaines classes de suites dans les espaces de Banach et le théorème de Dvoretzky-Rogers*", inspiré par le lemme de Dvoretzky-Rogers (1950) propose une conjecture à laquelle Aryeh Dvoretzky répondra positivement en 1961, aboutissant au résultat suivant :

Théorème 1.1 (A. Dvoretzky, 1961). *Il existe une fonction $k :]0, 1[\times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tel que $\forall \varepsilon \in]0, 1[$, $k(\varepsilon, n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe un sous espace $V \subset \mathbb{R}^n$ tels que :*

(i) $\dim V = k(\varepsilon, n)$

(ii) $\exists r > 0$ tel que , $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1 + \varepsilon)r.(V \cap B_2^n)$

V. Milman en 1971 donna une nouvelle preuve du théorème de Dvoretzky en utilisant le phénomène de concentration de la mesure, il a de plus amélioré le théorème en donnant une estimation de la dépendance en n pour la dimension de V , $k(\varepsilon, n) \geq c(\varepsilon) \cdot \log(n)$.

Théorème 1.2 (V. Milman, 1971). *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe un sous espace $V \subset \mathbb{R}^n$ tels que :*

(i) $\dim V \geq c \cdot \log(n)$

(ii) $\exists r > 0$ tel que , $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1 + \varepsilon)r.(V \cap B_2^n)$

Définition. *Soit $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ deux espaces normés et $C > 0$, on dit que X s'injecte C -continûment dans Y , si il existe $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ tel que pour tout $x \in X$*

$$\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X$$

Il existe une reformulation du théorème de Dvoretzky en terme de norme, en utilisant la relation entre un compact convexe symétrique K et la norme $\|y\|_K = \inf\{\lambda ; \frac{y}{\lambda} \in K\}$.

Théorème 1.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute normes $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n , l_2^k s'injecte $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ pour un $k \geq c \cdot \log(n)$.*

Notation. *Pour la suite on utiliseras les notations :*

- $|\cdot|_n$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n , ou simplement $|\cdot|$ si il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension.
- $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| = 1\}$, la $(n-1)$ -sphère euclidienne.

Montrons que ses deux derniers théorèmes sont équivalents.

(2) \Rightarrow (3) Posons $K = \text{Adh}(B_{\|\cdot\|}(\mathbf{0}, 1)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ et appliquons le théorème 2, celui-ci nous procure un sous-espace V de \mathbb{R}^n , avec $\dim V := k \geq c \cdot \log(n)$ et $V \cap K$ est ε -euclidien. Donnons-nous une base orthonormée $\{v_j\}_{1 \leq j \leq k}$ de V et posons

$$\phi: \begin{array}{ll} (V, \|\cdot\|) & \mapsto (\mathbb{R}^k, |\cdot|_k) \\ \sum_{i=1}^k x_i v_i & \rightarrow \sum_{i=1}^k x_i e_i \end{array}$$

Soit $v \in V \cap K$ tel que $\|v\| = 1$, comme $K \cap V$ est ε -euclidien on a que

$$r \leq |v|_n \leq (1 + \varepsilon)r$$

La borne supérieure est immédiate car $K \cap V \subset r(1 + \varepsilon) \cdot (V \cap B_2^n)$, pour la borne inférieure il suffit de remarquer que $(V \cap K)$ est un fermer de V qui contient l'ouvert $r \cdot (V \cap B_2^n)$ de V , comme v est dans la frontière de $K \cap V$ il n'est pas dans l'intérieur de $K \cap V$ et donc dans aucun ouvert contenu dans $V \cap K$.

Fixons des coordonnées à v dans la base $\{v_j\}_{1 \leq j \leq k}$, $v = \sum_{i=1}^k x_i v_i$, on n'a que $|v|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$ et donc :

$$r \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2} \leq (1 + \varepsilon)r$$

Mais comme $|\phi(v)|_k = |\sum_{i=1}^k x_i e_i| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$, on a que :

$$r \leq |\phi(v)|_k \leq (1 + \varepsilon)r$$

Pour tous $x \in V \setminus \{0\}$ on peut appliquer ce qui précède à $\frac{x}{\|x\|}$, en utilisant la linéarité de ϕ on obtient :

$$r\|x\| \leq |\phi(x)|_k \leq (1 + \varepsilon)r\|x\|$$

(3) \Rightarrow (2) Soit $\varepsilon > 0$, par le théorème 3 il existe $c > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$ il existe un $k > c \cdot \log(n)$ tel que l_2^k s'injecte $(1 + \varepsilon)$ -continûment dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ pour n'importe quelle norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n . Considérons un compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$ et $\|y\| = \inf \left\{ \lambda > 0 ; \frac{y}{\lambda} \in K \right\}$, alors $\exists T : l_2^k \rightarrow (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ linéaire tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^k, |x| \leq \|Tx\| \leq (1 + \varepsilon)|x|$$

ceci implique immédiatement que T est injective, notons $V = \text{Im} T$, alors la co-restriction a V de T est bijective. Soit $y \in \partial(K \cap V)$, c'est-à-dire $\|y\| = 1$, on sait qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^k$ tel que $Tx = y$, on en déduit donc

$$|x| \leq 1 \leq (1 + \varepsilon)|x| \iff \frac{1}{1 + \varepsilon} \leq |x| \leq 1$$

la convexité et la symétrie centrale de $K \cap V$ nous permet de conclure que :

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} T(B_2^k) \subset K \cap V \subset T(B_2^k)$$

...

2. Existence du sous-espace

2.1. Mesures de Haar

Définition & Théorème (Mesures de Haar). *Soit (X, d) un espace métrique, G un groupe topologique localement compact qui agit sur X et tel que :*

$$\forall x, y \in X \quad \forall g \in G, \quad d(gx, gy) = d(x, y) \quad (\star)$$

alors il existe une unique mesure à un coefficient multiplicatif près, régulière définie sur les boréliens de X qui est invariante sous l'action de G , cette mesure est appelée mesure de Haar de X (où G est sous-entendu).

Considérons $X = S^{n-1}$ avec la distance euclidienne et $X = O(n)$ avec la norme $\|M\| = \sup_{|x|=1} |Mx|$ alors $G = O(n)$ le groupe des isométries vérifie (\star) pour la multiplication matricielle sur S^{n-1} et $O(n)$.

Notation. *Par le théorème précédent on peut définir sans ambiguïté μ, ν les mesures de Haar normalisés respectivement sur S^{n-1} et $O(n)$.*

Montrons quelques propriétés qui seront utiles par la suite.

Lemme 2.1. *Soit $f \in C(S^{n-1})$ et $Y = (g_1, \dots, g_n)$ où les $\{g_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sont i.i.d suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, alors*

$$\int_{S^{n-1}} f d\mu = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{Y}{|Y|} \right) \right]$$

Démonstration. Par unicité de la mesure de Haar, il nous suffit de montrer que pour tous $M \in O(n)$ et $f \in C(S^{n-1})$:

$$\mathbb{E} \left[f \left(\frac{MY}{|MY|} \right) \right] = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{Y}{|Y|} \right) \right]$$

$$\mathbb{E} \left[f \left(\frac{MY}{|MY|} \right) \right] = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f \left(\frac{My}{|y|} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} |y|^2 \right\} dy_1 \dots dy_n = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f \left(\frac{y}{|y|} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} |M^{-1}y|^2 \right\} dy_1 \dots dy_n$$

comme $|\det M| = 1$ et $|M^{-1}y| = |y|$, on a :

$$\mathbb{E} \left[f \left(\frac{MY}{|MY|} \right) \right] = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{Y}{|Y|} \right) \right]$$

□

Lemme 2.2. Soit $A \subset S^{n-1}$ un borélien alors pour tous $x \in S^{n-1}$

$$\nu(T \in O(n); Tx \in A) = \mu(A)$$

Démonstration. Soit $M \in O(n)$ et $x \in S^{n-1}$ alors la mesure définie par

$$\omega_x(A) = \nu(T \in O(n); Tx \in A)$$

ω_x vérifie les propriétés suivantes :

$$\omega_x(MA) = \nu(T \in O(n); M^T Tx \in A) = \nu(T \in O(n); Tx \in A) = \omega_x(A)$$

$$\omega_x(\emptyset) = 0$$

$$\begin{aligned} \omega_x \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) &= \nu \left(T \in O(n); Tx \in \bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \right) = \nu \left(\bigsqcup_{i \in \mathbb{N}} \{T \in O(n); Tx \in A_i\} \right) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \nu \left(T \in O(n); Tx \in A_i \right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \omega_x(A_i) \end{aligned}$$

L'unicité de la mesure de Haar nous permet de conclure que $\omega_x = \mu$, en particulier ω_x ne dépend pas de x . □

2.2. Début de la démonstration du théorème de Dvoretzky

Notation. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme $||.||$ de \mathbb{R}^n utilisé on notera :

- $E = \int_{S^{n-1}} ||x|| d\mu(x)$
- b le plus petit réel tel que $||.|| \leq b|.|$

Théorème 2.1 (Concentration de la mesure sur la sphère). *Soit $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L > 0$, alors*

$$\mu\left\{x \in S^{n-1} ; |f(x) - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon\right\} \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2L^2}}$$

Définition. *Soit (X, d) un espace métrique pré-compact et $\theta > 0$, on dit que $A \subset X$ est un θ -net si*

(i) *A est de cardinal fini.*

(ii) *$\forall x \in X$, $\exists y \in A$ tel que $d(x, y) \leq \theta$*

Lemme 2.3. *Pour tous $0 < \theta < 1$, $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous espace de dimension $k > 0$, alors il existe un θ -net sur $V \cap S^{n-1}$ de cardinal inférieur à $(\frac{3}{\theta})^k$.*

Démonstration. Notons $B_V(x, r) = \{y \in V ; |x - y| < r\}$ la boule de centre $x \in V$ et de rayon $r \geq 0$, soit $N = \{x_i\}_{i=1, \dots, m}$ un sous-ensemble de $V \cap S^{n-1}$ maximal pour la propriété : $x, y \in N$, $|x - y| \geq \theta$, c'est-à-dire pour tous $x \in V \cap S^{n-1} \setminus N$ il existe $i \leq m$ tel que $|x - x_i| < \theta$, donc N est un θ -net et les $\{B_V(x_i, \theta/2)\}_{i=1, \dots, m}$ sont donc disjoints deux à deux et toutes contenues dans $B_V(0, 1 + \frac{\theta}{2})$ d'où :

$$m \text{Vol}(B_V(x_1, \frac{\theta}{2})) = \sum_{i=1}^m \text{Vol}(B_V(x_i, \frac{\theta}{2})) = \text{Vol}(\cup_{1 \leq i \leq m} B_V(x_i, \frac{\theta}{2})) \leq \text{Vol}(B_V(0, 1 + \frac{\theta}{2}))$$

$$m \leq \frac{\text{Vol}(B_V(0, 1 + \frac{\theta}{2}))}{\text{Vol}(B_V(x_1, \frac{\theta}{2}))}$$

Par homogénéité de la mesure de Lebesgue :

$$m \leq \left(\frac{1 + \frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^k = \left(1 + \frac{2}{\theta}\right)^k < \left(\frac{3}{\theta}\right)^k$$

□

Lemme 2.4. Soient $\alpha \in S^{n-1}$, A un θ -net pour un $1 > \theta > 0$, alors il existe $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset A$ et $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tel que

$$\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \beta_i \leq \theta^i$$

Démonstration. Comme A est un θ -net alors il existe $y_0 \in A$ tel que $|\alpha - y_0| < \theta$, et donc

$$\alpha = y_0 + \lambda_1 \alpha'$$

avec $\lambda_1 = |\alpha - y_0| \leq \theta$ et $\alpha' = \frac{\alpha - y_0}{\lambda_1} \in S^{n-1}$, on peut donc itérer le même procédé sur α' et réitérer indéfiniment :

$$\begin{array}{lll} \alpha = y_0 + \lambda_1(y_1 + \lambda_2 \alpha'') = y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_1 \lambda_2 \alpha'' & \text{avec} & \lambda_2 \leq \theta, y_1 \in A \text{ et } \alpha'' \in S^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha = y_0 + \sum_{i=1}^N y_i \left(\prod_{1 \leq k \leq i} \lambda_k \right) + \tilde{\alpha} \prod_{1 \leq k \leq N+1} \lambda_k & \text{avec} & \forall i \leq N+1 \lambda_i \leq \theta, y_i \in A \text{ et } \tilde{\alpha} \in S^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Si l'on pose $S_N = y_0 + \sum_{i=1}^N y_i \left(\prod_{1 \leq k \leq i} \lambda_k \right)$, alors :

$$|\alpha - S_N| \leq |\lambda_1 \dots \lambda_N| |\tilde{\alpha}| \leq \theta^N \rightarrow 0 \quad \text{avec} \quad N \rightarrow \infty$$

il ne reste plus qu'à poser $\beta_0 = 1$ et pour $i > 0$, $\beta_i = \prod_{1 \leq k \leq i} \lambda_k \leq \theta^i$ et l'on a :

$$\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i y_i$$

□

Lemme 2.5. $\forall \varepsilon > 0$, il existe $1 > \theta > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$, si l'on a A un θ -net sur $V \cap S^{n-1}$ pour $V \subset \mathbb{R}^n$ de dimension k , $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n et $T \in \mathcal{L}(l_2^k, \mathbb{R}^n)$, tel que :

$$\forall x \in A, \quad (1 - \theta)E \leq \|Tx\| \leq (1 + \theta)E$$

alors ,

$$\forall x \in V, \quad \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} E|x| \leq \|Tx\| \leq \sqrt{1 + \varepsilon} E|x|$$

de plus si $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$, on peut prendre $\theta = \frac{\varepsilon}{9}$

Démonstration. Soient $1 > \theta > 0$, A un θ -net sur $S(V) = \{x \in V ; |x| = 1\}$ et $x \in S(V)$ par le **lemme 2.4**, il existe $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset A$ et $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tel que

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \beta_i \leq \theta^i$$

Notons $T = (a_1, \dots, a_k)$

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \left\| T \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \right\| \\ &= \left\| \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i \sum_{p=1}^k y_{i,p} a_p \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i \left\| \sum_{p=1}^k y_{i,p} a_p \right\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i \|Ty_i\| \\ &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i (1 + \theta) E = \frac{1 + \theta}{1 - \theta} E \end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned} \|Tx\| &\geq \|Ty_0\| - \|Tx - Ty_0\| \\ &= E(1 - \theta) - \left\| \sum_{p=1}^k a_p \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i y_{i,p} \right\| \\ &\geq E(1 - \theta) - \sum_{i=1}^{+\infty} \theta^i \|Ty_i\| \\ &\geq E \left((1 - \theta) - \theta \frac{1 + \theta}{1 - \theta} \right) = E \frac{1 - 3\theta}{1 - \theta} \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre θ tel que

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \varepsilon} &\geq \frac{1 + \theta}{1 - \theta} \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} &\leq \frac{1 - 3\theta}{1 - \theta} \end{aligned}$$

et pour tous $x \in V \setminus \{0\}$ on a

$$\begin{aligned} E \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} &\leq \left\| T \frac{x}{|x|} \right\| \leq E \sqrt{1 + \varepsilon} \\ E \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}} |x| &\leq \|Tx\| \leq E |x| \sqrt{1 + \varepsilon} \end{aligned}$$

Ce qui fini la première partie de la preuve, dans la suite on suppose $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$. On cherche $\theta =: \theta(\varepsilon) \in]0, 1[$, tel que $\sqrt{1+\varepsilon} \geq \max(\frac{1-\theta}{1-3\theta}, \frac{1+\theta}{1-\theta})$, supposons $\theta \leq \frac{1}{3}$ alors

$$\frac{1-\theta}{1-3\theta} - \frac{1+\theta}{1-\theta} = \frac{4\theta^2}{(1-3\theta)(1-\theta)} > 0$$

Donc $\sqrt{1+\varepsilon} \geq \frac{1-\theta}{1-3\theta}$

$$1+\varepsilon \geq \left(\frac{1-\theta}{1-3\theta}\right)^2$$

$$(9\varepsilon+8)\theta^2 - 2(3\varepsilon+2)\theta + \varepsilon \geq 0$$

les deux racines de ce polynôme sont $0 < \frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon} < \frac{3\varepsilon+2+2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon}$, on cherche donc un θ dans $]0, \frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon}]$. Pour finir

$$\frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon} \geq \frac{3\varepsilon+2-2-2\varepsilon}{8+9\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{8+9\varepsilon}$$

$$\geq \frac{\varepsilon}{9}$$

donc pour $\varepsilon \in]0, 9^{-1}[$ on peu prendre $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{9}$. □

Théorème 2.2. *Pour tous $\varepsilon > 0$ il existe $c(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n , l_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$ -continûment dans $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, pour $k =: \lceil c(\varepsilon) \cdot \left(\frac{E}{b}\right)^2 n \rceil$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, on se donne un $1 > \theta > 0$ donné par le **lemme 2.5** et on note

- $c(\theta) = \frac{\theta^2}{4\log(\frac{3}{\theta})}$
- $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous espace avec $\dim V := k = \lceil c(\theta) \left(\frac{E}{b}\right)^2 n \rceil$
- $\eta = \frac{\theta E}{b}$
- $f(\theta) = 2\left(\frac{3}{\theta}\right)^{c(\theta) \left(\frac{E}{b}\right)^2 n} e^{-\frac{\eta^2 n}{2}} = 2 \exp\left(-\frac{\eta^2 n}{4}\right)$

Distinguons deux cas

◦ $f(\theta) \geq 1$

on a alors :

$$\frac{\eta^2 n}{4} \leq \log(2)$$

$$k \leq \frac{\eta^2}{4\log(3/\theta)} n \leq \frac{\log(2)}{\log(3/\theta)} < 1$$

Donc $k = 0$, dans ce cas il n'y a rien à montrer.

◦ $f(\theta) < 1$

Soit A un θ -net sur $V \cap S^{n-1}$, avec $|A| \leq (\frac{3}{\theta})^k$ nous allons montrer qu'il existe $T \in O(n)$ tel que pour tous $x \in A$

$$(1 - \theta)E \leq \|Tx\| \leq (1 + \theta)E$$

Tous d'abord remarquons ceci :

$$\begin{aligned} 1 > f(\theta) &\geq 2\left(\frac{3}{\theta}\right)^k e^{-\frac{\eta^2}{2}n} \\ &> 2|A|e^{-\frac{\eta^2}{2}n} \end{aligned}$$

On a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \nu\left(\cap_{x \in A} \{T \in O(n) ; \left|\|Tx\| - E\right| \leq b\eta\}\right) &= 1 - \nu\left(\cup_{x \in A} \{T \in O(n) ; \left|\|Tx\| - E\right| > b\eta\}\right) \\ &\geq 1 - |A|\nu\left(T \in O(n) ; \left|\|Ty\| - E\right| > b\eta\right) \quad \text{pour un } y \in A \\ &\geq 1 - |A|\mu\left(y \in S^{n-1} ; \left|\|y\| - E\right| > b\eta\right) \end{aligned}$$

En appliquant la concentration de la mesure

$$\nu\left(\cap_{x \in A} \{T \in O(n) ; \left|\|Tx\| - E\right| \leq b\eta\}\right) \geq 1 - |A|2e^{-\frac{\eta^2}{2}n} > 0$$

Il existe donc $T \in O(n)$ tel que pour tous $x \in A$ on ait $\left|\|Tx\| - E\right| \leq b\eta$, c'est à dire

$$E(1 - \theta) = E - b\eta \leq \|Tx\| \leq E + b\eta = E(1 + \theta)$$

Par le **lemme 2.5** pour tous $x \in V$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon}}|x|E \leq \|Tx\| \leq \sqrt{1 + \varepsilon}|x|E$$

et pour $\varepsilon < 9^{-1}$ on peut prendre $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{9}$ et donc $c(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{4 \times 81 \log(\frac{3 \times 9}{\varepsilon})}$.

□

3. Minoration de la dimension du sous-espace

3.1. Invariance pour des compositions par des applications linéaire

Pour simplifier un peu les calculs nous allons montrer que l'on peut se restreindre aux normes qui vérifient $\|.\| \leq |.|$ et qui ont de plus la propriété d'être l'ellipsoïde de John, c'est à dire l'ellipsoïde de volume maximal incluse dans K , nous donnons la définition d'une ellipsoïde et un théorème de Fritz John sur l'unicité de l'ellipsoïde de volume maximale qui sera admis.

Définition. *Un ellipsoïde de \mathbb{R}^n est l'image de la boule unité euclidienne par un élément de $GL(n)$.*

Théorème 3.1 (Ellipsoïde de John). *Tous compact convexe symétrique d'intérieur non vide contient un unique ellipsoïde de volume maximale.*

...

3.2. Estimation de E

Par la suite on fixe $\|.\|$ une norme sur \mathbb{R}^n , $K = \text{Adh}(B_{\|.\|})$ tel que B_2^n soit l'ellipsoïde de volume maximale incluse dans K , on a donc $b = 1$. Dans cette partie nous allons donner une estimation de E .

Pour estimer E nous aurons besoin d'une minoration de $\mathbb{E} \left[\max_{1 \leq i \leq N} g_i \right]$ pour des $\{g_i\}$ i.i.d suivant $\mathcal{N}(0, 1)$, nous démontrons une telle borne dans le lemme suivant.

Lemme 3.1. *il existe $c > 0$ tel que $\forall N > 1$ et $\{g_i\}_{1 \leq i \leq N}$ des variables aléatoire i.i.d suivant une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ on ait :*

$$c\sqrt{\log N} \leq \mathbb{E} \left[\max_{1 \leq i \leq N} |g_i| \right]$$

où $\tilde{N} = \left\lceil \frac{\sqrt{N}}{16\sqrt{2}} \right\rceil$

Démonstration. Commençons par montrer que pour $n > 1$, $\mathbb{P}(|g_1| > \sqrt{\log n}) \geq \frac{1}{n}$, on a :

$$\mathbb{P}(|g_1| > \sqrt{\log n}) = 2 \int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \geq \int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx \quad \text{pour } x > \sqrt{\log(2)} > 1$$

$$\int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) dx = \left[-\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t} \right]_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{n \log n}} > \frac{1}{n}$$

On a $\mathbb{P}(|g_1| > \sqrt{\log \sqrt{N}}) \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$, et donc

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i| \leq \sqrt{\log \sqrt{N}}\right) = \mathbb{P}\left(|g_1| \leq \sqrt{\log \sqrt{N}}\right)^{\tilde{N}} = \left(1 - \mathbb{P}\left(|g_1| > \sqrt{\log \sqrt{N}}\right)\right)^{\tilde{N}}$$

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i| \leq \sqrt{\log \sqrt{N}}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{N}}\right)^{\tilde{N}} \leq e^{-\frac{\tilde{N}}{\sqrt{N}}} \leq e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}$$

Ce qui équivaut à

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i| > \sqrt{\log \sqrt{N}}\right) \geq 1 - e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}$$

Par l'inégalité de Markov on a finalement :

$$\mathbb{E}\left[\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i|\right] \geq \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq \tilde{N}} |g_i| > \sqrt{\log \sqrt{N}}\right) \sqrt{\log \sqrt{N}} \geq \frac{1 - e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \sqrt{\log N}$$

avec $c =: \frac{1 - e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \approx 0.3235$

□

Lemme 3.2 (Dvoretzky-Rogers). *Il existe une base orthonormée $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ tel que $\forall 1 \leq i \leq n$*

$$e^{-1} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \leq \|x_i\| \leq 1$$

Démonstration. S^{n-1} est compact et $\|\cdot\|$ continue, on peut donc prendre un $x_1 \in S^{n-1}$ qui maximise $\|\cdot\|$ c'est à dire $\|x_1\| = 1$, supposons que l'on ai x_1, \dots, x_{k-1} avec $k \leq n$ tel que pour tous $1 \leq i \leq k-1$, x_i maximise $\|\cdot\|$ sur $S^{n-1} \setminus \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1}) \neq \emptyset$ car les $\{x_i\}_{i=1,\dots,k-1}$ sont orthogonaux deux à deux. On peut donc répéter le procédé pour trouver x_k qui maximise

$S^{n-1} \setminus \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k-1})$, par récurrence on peut donc avoir n vecteurs avec ses propriétés. Fixons $1 \leq k \leq n$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ et définissons :

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i ; \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{a_i}{a}\right)^2 + \sum_{i=k}^n \left(\frac{b_i}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

Supposons $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in \mathcal{E}$, alors $\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \in aB_2^n$ et donc $\|\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i\| \leq a$. Si $x \in \text{Vect}(x_k, \dots, x_n) \cap B_2^n$ on a $\|x\| \leq \|x_k\|$ par construction, et donc $\sum_{i=k}^n a_i x_i \in bB_2^n \Rightarrow \|\sum_{i=k}^n a_i x_i\| \leq b\|x_k\|$, ce qui nous donne la majoration suivante

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=k}^n a_i x_i \right\| \leq a + b\|x_k\|$$

Posons $\phi \in GL(n)$ définit par $\phi(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} a a_i x_i + \sum_{i=k}^n b a_i x_i$ on a $\phi = \text{diag}(\overbrace{a, \dots, a}^{(k-1) \times}, \overbrace{b, \dots, b}^{(n-k+1) \times})$ et donc $\det \phi = a^{k-1} b^{n-k+1}$ d'où :

$$\int_{\mathcal{E}} dx_1 \dots dx_n = \int_{B_2^n} \det \phi dx_1 \dots dx_n = a^{k-1} b^{n-k+1} \int_{B_2^n} dx_1 \dots dx_n$$

On prend $a + b\|x_k\| = 1$ de sorte que $\mathcal{E} \subset K$, comme B_2^n est l'ellipsoïde de volume maximale incluse dans K , on a que

$$1 \geq \frac{\int_{\mathcal{E}} dx_1 \dots dx_n}{\int_{B_2^n} dx_1 \dots dx_n} = a^{k-1} b^{n-k+1}$$

Fixons donc pour $k \geq 2$, $b = \frac{1-a}{\|x_k\|}$ et $a = \frac{k-1}{n}$, en remplaçant dans l'inégalité on obtient :

$$1 \geq a^{k-1} \left(\frac{1-a}{\|x_k\|} \right)^{n-k+1} \iff \|x_k\| \geq a^{\frac{k-1}{n-k+1}} (1-a) = \left(\frac{k-1}{n} \right)^{\frac{k-1}{n-k+1}} \left(1 - \frac{k-1}{n} \right)$$

et $\log a^{\frac{k-1}{n-k+1}} = \frac{k-1}{n-k+1} \log \left(\frac{k-1}{n} \right) > -1$.

□

Proposition 3.1 (Estimation de E). *Il existe $c > 0$ tel que $E \geq c \sqrt{\frac{\log n}{n}}$.*

Démonstration. Par le lemme de Dvoretzky-Rogers il existe une base orthonormé x_1, \dots, x_n tel que pour $1 \leq i \leq \tilde{n} =: \lfloor \frac{\sqrt{n}}{16\sqrt{2}} \rfloor (\leq n)$, $\|x_i\| \geq e^{-1} \left(1 - \frac{\tilde{n}-1}{n}\right) \geq e^{-1} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{16\sqrt{2}n}\right) \geq e^{-1} \left(1 - \frac{1}{16\sqrt{2}}\right)$, posons donc $C =: e^{-1} \left(1 - \frac{1}{16\sqrt{2}}\right) \approx 0,3516$. Comme μ est invariante par composition par une transformation orthogonale on a que

$$E =: \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| d\mu(a) = \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n \right\| d\mu(a)$$

et donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| d\mu(a) + \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n \right\| d\mu(a) \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} 2 \max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\|, \|a_n x_n\| \right\} d\mu(a) \geq \dots \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ |a_i| \|x_i\| \right\} d\mu(a) \\ &\geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} \left\{ |a_i| \|x_i\| \right\} d\mu(a) \geq C \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |a_i| d\mu(a) \end{aligned}$$

Soit (g_1, \dots, g_n) , des variables aléatoire i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |a_i| d\mu(a) = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |g_i| \right]$$

Lemme 3.3. $(\sum_{i=1}^n g_i^2)^{-\frac{1}{2}}(g_1, \dots, g_n)$ et $(\sum_{i=1}^n g_i^2)^{\frac{1}{2}}$ sont indépendants.

Démonstration du lemme.

□

Par le lemme on à donc

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |g_i| \right] \cdot \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] = \mathbb{E} \left[\max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |g_i| \right]$$

la fonction racine carré est concave, par l'inégalité de Jensen on a donc :

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \leq \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^n g_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n} \mathbb{E} [g_1^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$

Et finalement par le lemme 4, il existe $K > 0$ tel que :

$$E \geq \frac{C}{\sqrt{n}} \mathbb{E} \left[\max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |g_i| \right] \geq KC \sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

Pour finir il suffit de poser $c =: KC \approx 0.1137$

□

On peut donc réunir les résultats **proposition 3.1** et **théorème 2.2** pour obtenir :

$$k \geq \lceil c(\varepsilon) \log(n) \rceil$$

avec $c(\varepsilon) = c_0 \frac{\varepsilon^2}{\log(\frac{21}{\varepsilon})}$ pour $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$.

3. Sources

- Euclidean sections of convex bodies , Gideon Schechtman (2008)
- Sur certains classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers, Alexandre Grothendieck (1956)
- Dvoretzky theorem - thirty years later , Vitali Milman (1992)