Sorbonne Université

Travaux d'étude et de recherche

Autour du théorème de Dvoretzky

"It soon became clear that an outstanding breakthrough in Geometric Functional Analysis had been achieved."

Vitali Milman à propos du théorème de Dvoretzky dans *Dvoretzky theorem - thirty years later*

Mathieu GALLO

Enseignant : Omer Friedland

date

1. Introduction

Alexandre Grothendieck en 1956 dans son article "*sur certains classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers*", inspiré par le lemme de Dvoretzky-Rogers (1950) propose une conjecture, a la quelle Aryeh Dvoretzky répondra positivement en 1961, aboutissant au résultat suivant :

Théorème 1.1 (A. Dvoretzky, 1961)**.** *Il existe une fonction* $k :]0,1[\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, tel que* $\forall \varepsilon \in]0,1[$, $k(\varepsilon, n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tous compact convexe symétrique* $K \subset \mathbb{R}^n$*, il existe un sous espace* $V \subset \mathbb{R}^n$ *tel que :*

(i) $\dim V = k(\varepsilon, n)$

(ii) $\exists r > 0$ *tel que ,* $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1+\varepsilon) r.(V \cap B_2^n)$

V. Milman en 1971 donna une nouvelle preuve du théorème de Dvoretzky en utilisant le phénomène de concentration de la mesure, il a de plus amélioré le théorème en donnant une estimation de la dépendance en n pour la dimension de V, $k(\varepsilon, n) \geq c(\varepsilon).\log(n)$.

Théorème 1.2 (V. Milman, 1971)**.** *Pour toute* $\varepsilon > 0$*, il existe une constante* $c > 0$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour tous compact convexe symétrique* $K \subset \mathbb{R}^n$*, il existe un sous espace* $V \subset \mathbb{R}^n$ *tel que :*

(i) $\dim V \geq c.\log(n)$

(ii) $\exists r > 0$ *tel que ,* $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1+\varepsilon) r.(V \cap B_2^n)$

Défintion. *Soit* $(X, ||.||_X), (Y, ||.||_Y)$ *deux espaces normés et* $C > 0$*, on dis que* X *s'injecte* C*-continûment dans* Y*, si il existe* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ *tel que pour tous* $x \in X$

$$||x||_X \leq ||Tx||_Y \leq C||x||_X$$

Il existe une reformulation du théorème de Dvoretzky en terme de norme, en utilisant la relation entre un compact convexe symétrique K et la norme $||y||_K = \inf\left\{\lambda \ ; \ \frac{y}{\lambda} \in K\right\}$.

Théorème 1.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c > 0$ tel que pour toute $n \in \mathbb{N}$ et pour toute norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$, l_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans $(\mathbb{R}^n, ||.||)$ pour un $k \geq c.\log(n)$.*

Notation. *Pour la suite on utiliseras les notations :*

- $|.|_n$ *la norme euclidienne sur* $\mathbb{R}^n$, *ou simplement* $|.|$ *si il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension.*
- $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n ; |x| = 1\}$, *la* $(n-1)$*-sphère euclidienne.*

Montrons que ses deux derniers théorèmes sont équivalents.

(2)⇒(3) Posons $K = \mathrm{Adh}(B_{||.||}(0,1)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$ et appliquons le théorème 2, celui ci nous procure un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$, avec $\dim V := k \geq c.\log(n)$ et $V \cap K$ est ε-ecuclidien.

Donnons nous une base orthonormée $\{v_j\}_{1 \leq j \leq k}$ de V et posons

$$\phi : \begin{array}{ccc} (V, ||.||) & \mapsto & (\mathbb{R}^k, |.|_k) \\ \sum_{i=1}^k x_i v_i & \to & \sum_{i=1}^k x_i e_i \end{array}$$

Soit $v \in V \cap K$ tel que $||v|| = 1$, comme $K \cap V$ est ε-euclidien on a que

$$r \leq |v|_n \leq (1+\varepsilon) r$$

La borne supérieur est immédiate car $K \cap V \subset r(1+\varepsilon).(V \cap B_2^n)$, pour la borne inférieur il suffit de remarquer que $(V \cap K)$ est un fermer de V qui contient l'ouvert $r.(V \cap B_2^n)$ de V, comme v est dans la frontière de $K \cap V$ il n'est pas dans l'intérieur de $K \cap V$ et donc dans aucun ouvert contenue dans $V \cap K$.

Fixons des coordonnées à v dans la base $\{v_j\}_{1 \leq j \leq k}$, $v = \sum_{i=1}^k x_i v_i$, on a que $|v|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$ et donc :

$$r \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2} \leq (1+\varepsilon) r$$

Mais comme $|\phi(v)|_k = \left|\sum_{i=1}^k x_i e_i\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$, on a que :

$$r \leq |\phi(v)|_k \leq (1+\varepsilon) r$$

Pour tous $x \in V\backslash\{0\}$ on peut appliqué ce qui précède à $\frac{x}{||x||}$, en utilisant la linéarité de ϕ on obtient :

$$r||x|| \leq |\phi(x)|_k \leq (1+\varepsilon)r||x||$$

(3)⇒(2) Soit $\varepsilon > 0$, par le théorème 3 il existe $c > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$ il existe un $k > c.\log(n)$ tel que l_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans $(R^n, ||.||)$ pour n'importe quelle norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$. Considérons un compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$ et $||y|| = \inf\left\{\lambda > 0\,;\, \frac{y}{\lambda} \in K\right\}$, alors $\exists T : l_2^k \to (\mathbb{R}^n, ||.||)$ linéaire tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^k\,,\ |x| \leq ||Tx|| \leq (1+\varepsilon)|x|$$

ceci implique immédiatement que T est injective, notons $V = \mathrm{Im}T$, alors la co-restriction a V de T est bijective. Soit $y \in \partial(K \cap V)$, c'est à dire $||y|| = 1$, on sait qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^k$ tel que $Tx = y$, on en déduit donc

$$|x| \leq 1 \leq (1+\varepsilon)|x| \iff \frac{1}{1+\varepsilon} \leq |x| \leq 1$$

la convexité et la symétrie centrale de $K \cap V$ nous permet de conclure que :

$$\frac{1}{1+\varepsilon} T(B_2^k) \subset K \cap V \subset T(B_2^k)$$

2. Existence du sous-espace

2.1. Mesures de Haar

Définition & Théorème (Mesures de Haar)**.** *Soit* (X,d) *un espace métrique,* G *un groupe topologique localement compact qui agit sur* X *et tel que :*

$$\forall x,y \in X \ \forall g \in G\,,\ d(gx,gy) = d(x,y) \tag{$\star$}$$

alors il existe une unique mesure à un coefficient multiplicatif près, régulière définit sur les boréliens de X *qui est invariante sous l'action de* G*, cette mesure est appeler mesure de Haar de* X *(où* G *est sous-entendu).*

Considérons $X = S^{n-1}$ avec la distance euclidienne et $X = O(n)$ avec la norme $||M|| = \sup_{|x|=1}|Mx|$ alors $G = O(n)$ le groupe des isométries vérifie $(\star)$ pour la multiplication matricielle sur S^{n-1} et $O(n)$.

Notation. *Par le théorème précédent on peut définir sans ambiguïté* μ,ν *les mesures de Haar normalisés respectivement sur* S^{n-1} *et* $O(n)$.

Montrons quelques propriétés qui serons utile par la suite.

Lemme 2.1. *Soit* $f \in C(S^{n-1})$ *et* $Y = (g_1,...,g_n)$ *où les* $\{g_i\}_{1\leq i\leq n}$ *sont i.i.d suivant une loi normale* $\mathcal{N}(0,1)$*, alors*

$$\int_{S^{n-1}} f\,d\mu = \mathbb{E}\left[f\Big(\frac{Y}{|Y|}\Big)\right]$$

Démonstration. Par unicité de la mesure de Haar , il nous suffit de montrer que pour tous $M \in O(n)$ et $f \in C(S^{n-1})$:

$$\mathbb{E}\left[f\Big(\frac{MY}{|MY|}\Big)\right] = \mathbb{E}\left[f\Big(\frac{Y}{|Y|}\Big)\right]$$

$$\mathbb{E}\left[f\Big(\frac{MY}{|MY|}\Big)\right] = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f\big(\frac{My}{|y|}\big)\exp\Big\{-\frac{1}{2}|y|^2\Big\}dy_1...dy_n = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f\big(\frac{y}{|y|}\big)\exp\Big\{-\frac{1}{2}|M^{-1}y|^2\Big\}dy_1...dy_n$$

comme $|\det M| = 1$ et $|M^{-1}y| = |y|$, on a :

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{MY}{|MY|}\right)\right] = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y}{|Y|}\right)\right]$$

□

Lemme 2.2. *Soit $A \subset S^{n-1}$ un borélien alors pour tous $x \in S^{n-1}$*

$$\nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A\Big) = \mu\big(A\big)$$

Démonstration. Soit $M \in O(n)$ et $x \in S^{n-1}$ alors la mesure définis par

$$\omega_x(A) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A\Big)$$

ω_x vérifie les propriétés suivantes :

$$\omega_x(MA) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\, M^T Tx \in A\Big) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A\Big) = \omega_x(A)$$

$$\omega_x(\emptyset) = 0$$

$$\begin{aligned}\omega_x\big(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) &= \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \nu\Big(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} \big\{T \in O(n)\,;\, Tx \in A_i\big\}\Big) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \omega_x(A_i)\end{aligned}$$

L'unicité de la mesure de Haar nous permet de conclure que $\omega_x = \mu$, en particulier ω_x ne dépend pas de x. □

2.2. Début de la démonstration du théorème de Dvoretzky

Notation. *Si il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme $||.||$ de $\mathbb{R}^n$ utilisé on noteras :*

- $E = \int_{S^{n-1}} ||x|| d\mu(x)$
- b *le plus petit réel positif tel que* $||.|| \leq b|.|$

Théorème 2.1 (Concentration de la mesure sur la sphère). *Soit $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L > 0$, alors*

$$\mu\left\{x \in S^{n-1} \ ; \ |f(x) - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon\right\} \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2L^2}}$$

Lemme 2.3. *Pour tous $0 < \theta < 1$, $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous espace de dimension $k > 0$, alors il existe un θ-net sur $V \cap S^{n-1}$ de cardinal inférieur à $\left(\frac{3}{\theta}\right)^k$.*

Démonstration. Notons $B_V(x,r) = \left\{y \in V \ ; \ |x-y| < r\right\}$ la boules de centre $x \in V$ et de rayon $r \geq 0$, soit $N = \{x_i\}_{i=1,\ldots,m}$ un sous ensemble de $V \cap S^{n-1}$ maximal pour la propriété : $x, y \in N$, $|x-y| \geq \theta$, c'est à dire pour tous $x \in V \cap S^{n-1} \backslash N$ il existe $i \leq m$ tel que $|x - x_i| < \theta$, donc N est un θ-net et les $\left\{B_V(x_i, \theta/2)\right\}_{i=1,\ldots,m}$ sont donc disjointes deux à deux et toutes contenues dans $B_V(0, 1+\frac{\theta}{2})$ d'ou :

$$m\mathrm{Vol}(B_V(x_1, \frac{\theta}{2})) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}(B_V(x_i, \frac{\theta}{2})) = \mathrm{Vol}(\cup_{1 \leq i \leq m} B_V(x_i, \frac{\theta}{2})) \leq \mathrm{Vol}(B_V(0, 1+\frac{\theta}{2}))$$

$$m \leq \frac{\mathrm{Vol}(B_V(0, 1+\frac{\theta}{2}))}{\mathrm{Vol}(B_V(x_1, \frac{\theta}{2}))}$$

Par homogénéité de la mesure de Lebesgue :

$$m \leq \left(\frac{1+\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^k = \left(1 + \frac{2}{\theta}\right)^k < \left(\frac{3}{\theta}\right)^k$$

□

Lemme 2.4. *Soient $\alpha \in S^{n-1}$, A un θ-net pour un $1 > \theta > 0$, alors il existe $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset A$ et $(\beta_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \quad \textit{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \ \beta_i \leq \theta^i$$

Démonstration. Comme A est un θ-net alors il existe $y_0 \in A$ tel que $|\alpha - y_0| < \theta$, et donc

$$\alpha = y_0 + \lambda_1 \alpha'$$

avec $\lambda_1 = |\alpha - y_0| \leq \theta$ et $\alpha' = \frac{\alpha - y_0}{\lambda_1} \in S^{n-1}$, on peut donc itéré le même procédé sur α' et réitéré indéfiniment :

$$\begin{array}{lll}
\alpha = y_0 + \lambda_1(y_1 + \lambda_2\alpha'') = y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_1\lambda_2\alpha'' & \text{avec} & \lambda_2 \leq \theta,\ y_1 \in A \text{ et } \alpha'' \in S^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha = y_0 + \sum_{i=1}^{N-1} y_i \left(\prod_{1\leq k\leq i} \lambda_k\right) + \tilde{\alpha} \prod_{1\leq k\leq N} \lambda_k & \text{avec} & \forall i \leq N\ \lambda_i \leq \theta, y_i \in A \text{ et } \tilde{\alpha} \in S^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Si l'on pose $S_N = y_0 + \sum_{i=1}^{N} y_i \left(\prod_{1\leq k\leq i} \lambda_k\right)$, alors il existe $\tilde{\alpha} \in S^{n-1}$ tel que :

$$|\alpha - S_N| \leq |\lambda_1 ... \lambda_N||\tilde{\alpha} - y_N| \leq \theta^{N+1} \to 0 \quad \text{avec} \quad N \to \infty$$

il ne reste plus qu'as poser $\beta_0 = 1$ et pour $i > 0$, $\beta_i = \prod_{1\leq k\leq i} \lambda_k \leq \theta^i$ et l'on a :

$$\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i y_i$$

□

Lemme 2.5. *$\forall \varepsilon > 0$, il existe $1 > \theta > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$, si l'on a A un θ-net sur $V \cap S^{n-1}$ pour $V \underset{sev}{\subset} \mathbb{R}^n$ de dimension k, $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $T \in \mathscr{L}(l_2^k, \mathbb{R}^n)$, tel que :*

$$\forall x \in A, \quad (1-\theta)E \leq \left|\left|Tx\right|\right| \leq (1+\theta)E$$

alors ,

$$\forall x \in V, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} E|x| \leq \left|\left|Tx\right|\right| \leq \sqrt{1+\varepsilon} E|x|$$

de plus si $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$, on peu prendre $\theta = \frac{\varepsilon}{9}$

Démonstration. Soient $1 > \theta > 0$, A un θ-net sur $S(V) = \left\{x \in V \,; |x| = 1\right\}$ et $x \in S(V)$ par le **lemme 2.4**, il existe $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ et $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tel que

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i\beta_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N},\ \beta_i \leq \theta^i$$

Notons $T = (a_1, ..., a_k)$

$$\begin{aligned}
||Tx|| &= \Big|\Big| T\sum_{i=0}^{+\infty} y_i\beta_i \Big|\Big| \\
&= \Big|\Big| \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i \sum_{p=1}^{k} y_{i,p} a_p \Big|\Big| \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i || \sum_{p=1}^{k} y_{i,p} a_p || \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i ||Ty_i|| \\
&\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i (1+\theta) E = \frac{1+\theta}{1-\theta} E
\end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned}
||Tx|| &\geq ||Ty_0|| - ||Tx - Ty_0|| \\
&= E(1-\theta) - || \sum_{p=1}^{k} a_p \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i y_{i,p} || \\
&\geq E(1-\theta) - \sum_{i=1}^{+\infty} \theta^i ||Ty_i|| \\
&\geq E\Big((1-\theta) - \theta\frac{1+\theta}{1-\theta}\Big) = E\frac{1-3\theta}{1-\theta}
\end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre θ tel que

$$\sqrt{1+\varepsilon} \geq \tfrac{1+\theta}{1-\theta}$$
$$\tfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \leq \tfrac{1-3\theta}{1-\theta}$$

et pour tous $y \in V\backslash\{0\}$ on a

$$E\tfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \leq \Big|\Big| \tfrac{y}{|y|} \Big|\Big| \leq E\sqrt{1+\varepsilon}$$
$$E\tfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}|y| \leq ||y|| \leq E|y|\sqrt{1+\varepsilon}$$

Ce qui fini la première partie de la preuve, dans la suite on suppose $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$. On cherche $\theta =: \theta(\varepsilon) \in]0,1[$, tel que $\sqrt{1+\varepsilon} \geq \max\left(\frac{1-\theta}{1-3\theta}, \frac{1+\theta}{1-\theta}\right)$, supposons $\theta \leq \frac{1}{3}$ alors

$$\frac{1-\theta}{1-3\theta} - \frac{1+\theta}{1-\theta} = \frac{4\theta^2}{(1-3\theta)(1-\theta)} > 0$$

Donc $\sqrt{1+\varepsilon} \geq \frac{1-\theta}{1-3\theta}$

$$1+\varepsilon \geq \left(\frac{1-\theta}{1-3\theta}\right)^2$$
$$(9\varepsilon+8)\theta^2 - 2(3\varepsilon+2)\theta + \varepsilon \geq 0$$

les deux racines de ce polynôme sont $0<\frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon} < \frac{3\varepsilon+2+2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon}$, on cherche donc un θ dans $]0, \frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon}]$. Pour finir

$$\frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon} \geq \frac{3\varepsilon+2-2-2\varepsilon}{8+9\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{8+9\varepsilon}$$
$$\geq \frac{\varepsilon}{9}$$

donc pour $\varepsilon \in]0, 9^{-1}[$ on peu prendre $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{9}$. □

Théorème 2.2. *Pour tous $\varepsilon > 0$ il existe $c(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$, l_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans $(\mathbb{R}^n, ||.||)$, pour $k =: \left[c(\varepsilon).\left(\frac{E}{b}\right)^2 n\right]$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, on se donne un $1 > \theta > 0$ donné par le **lemme 2.5** et on note

- $c(\theta) = \frac{\theta^2}{4\log(\frac{3}{\theta})}$
- $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous espace avec $\dim V := k = \left[c(\theta)\left(\frac{E}{b}\right)^2 n\right]$
- $\eta = \frac{\theta E}{b}$
- $f(\theta) = 2(3/\theta)^{c(\theta)(E/b)^2 n} e^{-\eta^2 n/2} = 2\exp\left(-\frac{\eta^2 n}{4}\right)$

Distinguons deux cas

- $f(\theta) \geq 1$

  on a alors :

$$\frac{\eta^2 n}{4} \leq \log(2)$$

$$k \leq \frac{\eta^2}{4\log(3/\theta)} n \leq \frac{\log(2)}{\log(3/\theta)} < 1$$

Donc $k = 0$, dans ce cas il n'y a rien a montrer.

- $f(\theta) < 1$

  Soit A un θ-net sur $V \cap S^{n-1}$, avec $|A| \leq (\frac{3}{\theta})^k$ nous allons montrer qu'il existe $T \in O(n)$ tel que pour tous $x \in A$

$$(1-\theta)E \leq ||Tx|| \leq (1+\theta)$$

  Tous d'abord remarquons ceci :

$$\begin{aligned} 1 > f(\theta) &\geq 2(\frac{3}{\theta})^k e^{-\frac{\eta^2}{2}n} \\ &> 2|A|e^{-\frac{\eta^2}{2}n} \end{aligned}$$

  On a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \nu\Big(\cap_{x\in A}\left\{T \in O(n)\,;\, \big|||Tx|| - E\big| \leq b\eta\right\}\Big) &= 1 - \nu\big(\cup_{x\in A}\left\{T \in O(n)\,;\, \big|||Tx|| - E\big| > b\eta\right\}\big) \\ &\geq 1 - |A|\nu\big(T \in O(n)\,;\, \big|||Ty|| - E\big| > b\eta\big) \qquad \text{pour un } y \in A \\ &\geq 1 - |A|\mu\Big(y \in S^{n-1}\,;\, \big|||y|| - E\big| > b\eta\Big) \end{aligned}$$

  En appliquant la concentration de la mesure

$$\nu\Big(\cap_{x\in A}\left\{T \in O(n)\,;\, \big|||Tx|| - E\big| \leq b\eta\right\}\Big) \geq 1 - |A|2e^{-\frac{\eta^2 n}{2}} > 0$$

  Il existe donc $T \in O(n)$ tel que pour tous $x \in A$ on ait $\big|||Tx|| - E\big| \leq b\eta$, c'est à dire

$$E(1-\theta) = E - b\eta \leq ||Tx|| \leq E + b\eta = E(1+\theta)$$

  Par le **lemme 2.5** pour tous $x \in V$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}|x|E \leq ||Tx|| \leq \sqrt{1+\varepsilon}|x|E$$

et pour $\varepsilon < 9^{-1}$ on peut prendre $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{9}$ et donc $c(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{4\times 81\log(\frac{3\times 9}{\varepsilon})}$.

□

3. Minoration de la dimension du sous-espace

Par la suite on fixe $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, $K = \mathrm{Adh}\big(B_{||.||}\big)$ tel que B_2^n soit l'ellipsoïde de volume maximale incluse dans K, on a donc $b = 1$. Dans cette partie nous allons donner une estimation de E.

Défintion. *Un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ est l'image de la boule unité euclidienne par un élément de $GL(n)$.*

Admettons le théorème suivant de Fritz John (1910-1994) :

Théorème 3.1 (Ellipsoïde de John)**.** *Tous compact convexe symétrique d'intérieur non vide contient un unique ellipsoïde de volume maximale.*

Pour estimer E nous aurons besoin d'une minoration de $\mathbb{E}\Big[\max_{1\le i\le N} g_i\Big]$ pour des $\{g_i\}$ i.i.d suivant $\mathcal{N}(0,1)$, nous démontrons une telle borne dans le lemme suivant.

Lemme 3.1. *il existe $c > 0$ tel que $\forall N > 1$ et $\{g_i\}_{1\le i\le N}$ des variables aléatoire i.i.d suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$ on ait :*

$$c\sqrt{\log N} \le \mathbb{E}\big[\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i|\big]$$

où $\tilde{N} = \left[\frac{\sqrt{N}}{16\sqrt{2}}\right]$

Démonstration. Commençons par montrer que pour $n > 1$, $\mathbb{P}\big(|g_1| > \sqrt{\log n}\big) \ge \frac{1}{n}$, on a :

$$\mathbb{P}\big(|g_1| > \sqrt{\log n}\big) = 2\int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \ge \int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}(1+\frac{1}{x^2})dx \qquad \text{pour } x > \sqrt{\log(2)} > 1$$

$$\int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}(1+\frac{1}{x^2})dx = \Big[-\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\Big]_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{n\log n}} > \frac{1}{n}$$

On à $\mathbb{P}\big(|g_1| > \sqrt{\log\sqrt{N}}\big) \ge \frac{1}{\sqrt{N}}$, et donc

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i| \le \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big) = \mathbb{P}\Big(|g_1| \le \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big)^{\tilde{N}} = \Big(1 - \mathbb{P}\Big(|g_1| > \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big)\Big)^{\tilde{N}}$$

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i| \le \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big) \le \Big(1-\frac{1}{\sqrt{N}}\Big)^{\tilde{N}} \le e^{-\frac{\tilde{N}}{\sqrt{N}}} \le e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}$$

Ce qui équivaut a

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i| > \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big) \ge 1-e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}$$

Par l'inégalité de Markov on a finalement :

$$\mathbb{E}\big[\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i|\big] \ge \mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i| > \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big)\sqrt{\log\sqrt{N}} \ge \frac{1-e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\log N}$$

avec $c =: \frac{1-e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \approx 0.3235$ $\square$

Lemme 3.2 (Dvoretzky-Rogers)**.** *Il existe une base orthonormée* $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ *tel que* $\forall 1 \le i \le n$

$$e^{-1}\big(1-\frac{i-1}{n}\big) \le ||x_i|| \le 1$$

Démonstration. S^{n-1} est compact et $||.||$ continue, on peux donc prendre un $x_1 \in S^{n-1}$ qui maximise $||.||$ c'est à dire $||x_1|| = 1$, supposons que l'on ai $x_1,\dots,x_{k-1}$ avec $k \le n$ tel que pour tous $1 \le i \le k-1$, x_i maximise $||.||$ sur $S^{n-1}\backslash\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{k-1}) \neq \emptyset$ car les $\{x_i\}_{i=1,\dots,k-1}$ sont orthogonaux deux à deux. On peut donc répéter le procéder pour trouver x_k qui maximise $S^{n-1}\backslash\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{k-1})$, par récurrence on peut donc avoir n vecteurs avec ses propriétés. Fixons $1 \le k \le n$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ et définissons :

$$\mathscr{E} = \Big\{\sum_{i=1}^n a_i x_i \,;\, \sum_{i=1}^{k-1}\big(\frac{a_i}{a}\big)^2 + \sum_{i=k}^n \big(\frac{b_i}{b}\big)^2 \le 1\Big\}$$

Supposons $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in \mathscr{E}$, alors $\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \in aB_2^n$ et donc $||\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i|| \le a$. Si $x \in \mathrm{Vect}(x_k,\dots,x_n) \cap B_2^n$ on a $||x|| \le ||x_k||$ par construction, et donc $\sum_{i=k}^n a_i x_i \in bB_2^n \Rightarrow ||\sum_{i=k}^n a_i x_i|| \le b||x_k||$, ce qui nous donne la majoration suivante

$$||\sum_{i=1}^n a_i x_i|| \le ||\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i|| + ||\sum_{i=k}^n a_i x_i|| \le a + b||x_k||$$

Posons $\phi \in GL(n)$ définit par $\phi(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} a a_i x_i + \sum_{i=k}^n b a_i x_i$ on a $\phi = \mathrm{diag}\big(\overbrace{a,\dots,a}^{(k-1)\times}, \overbrace{b,\dots,b}^{(n-k+1)\times}\big)$ et donc $\det\phi = a^{k-1}b^{n-k+1}$ d'où :

$$\int_{\mathscr{E}} dx_1 \dots dx_n = \int_{B_2^n} \det\phi\, dx_1 \dots dx_n = a^{k-1} b^{n-k-1} \int_{B_2^n} dx_1 \dots dx_n$$

On prend $a + b||x_k|| = 1$ de sorte que $\mathscr{E} \subset K$, comme B_2^n est l'ellipsoïde de volume maximale inclue dans K, on a que

$$1 \geq \frac{\int_{\mathscr{E}} dx_1 \dots dx_n}{\int_{B_2^n} dx_1 \dots dx_n} = a^{k-1} b^{n-k+1}$$

Fixons donc pour $k \geq 2$, $b = \frac{1-a}{||x_k||}$ et $a = \frac{k-1}{n}$, en remplaçant dans l'inégalité on obtient :

$$1 \geq a^{k-1} \Big(\frac{1-a}{||x_k||}\Big)^{n-k+1} \iff ||x_k|| \geq a^{\frac{k-1}{n-k+1}} (1-a) = \Big(\frac{k-1}{n}\Big)^{\frac{k-1}{n-k+1}} \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)$$

et $\log a^{\frac{k-1}{n-k+1}} = \frac{k-1}{n-k+1} \log\Big(\frac{k-1}{n}\Big) > -1.$ □

Proposition 3.1 (Estimation de E). *Il existe $c > 0$ tel que $E \geq c\sqrt{\frac{\log n}{n}}$.*

Démonstration. Par le lemme de Dvoretzky-Rogers il existe une base orthonormé $x_1, \dots, x_n$ tel que pour $1 \leq i \leq \tilde{n} =: [\frac{\sqrt{n}}{16\sqrt{2}}] (\leq n)$, $||x_i|| \geq e^{-1}\Big(1 - \frac{\tilde{n}-1}{n}\Big) \geq e^{-1}\Big(1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{16\sqrt{2n}}\Big) \geq (2e)^{-1}$. Comme μ est invariante par composition par une transformation orthogonale on a que

$$E =: \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^n a_i x_i|| d\mu(a) = \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n|| d\mu(a)$$

et donc

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^n a_i x_i|| d\mu(a) + \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n|| d\mu(a) \\ &\geq \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} 2\max\Big\{||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i||, ||a_n x_n||\Big\} d\mu(a) \geq \dots \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq n} \Big\{|a_i|\, ||x_i||\Big\} d\mu(a) \\ &\geq \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} \Big\{|a_i|\, ||x_i||\Big\} d\mu(a) \geq (2e)^{-1} \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |a_i| d\mu(a) \end{aligned}$$

Soit $(g_1,...,g_n)$, des variables aléatoire i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1\le i\le \tilde{n}} |a_i| d\mu(a) = \mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{-\frac{1}{2}} \max_{1\le i\le \tilde{n}} |g_i|\Big]$$

Lemme 3.3. $\left(\sum_{i=1}^n g_i^2\right)^{-\frac{1}{2}}(g_1,...,g_n)$ *et* $\left(\sum_{i=1}^n g_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *sont indépendants.*

Démonstration du lemme. □

Par le lemme on à donc

$$\mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{-\frac{1}{2}} \max_{1\le i\le \tilde{n}} |g_i|\Big].\mathbb{E}\Big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{\frac{1}{2}}\Big] = \mathbb{E}\big[\max_{1\le i\le \tilde{n}} |g_i|\big]$$

la fonction racine carré est concave, par l'inégalité de Jensen on a donc :

$$\mathbb{E}\big[\big(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big)^{\frac{1}{2}}\big] \le \mathbb{E}\big[\sum_{i=1}^{n} g_i^2\big]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\mathbb{E}[g_1^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$

Et finalement par le lemme 4, il existe $K > 0$ tel que :

$$E \ge \frac{1}{2e\sqrt{n}}\mathbb{E}\big[\max_{1\le i\le \tilde{n}} |g_i|\big] \ge \frac{K}{2e}\sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

Pour finir il suffit de poser $c =: \frac{K}{2e}$ □

3. Sources

- Euclidean sections of convex bodies , Gideon Schechtman (2008)

- Sur certains classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers, Alexandre Grothendieck (1956)

-Dvoretzky theorem - thirty years later , Vitali Milman (1992)