Sorbonne Université

Travaux d'étude et de recherche

Autour du théorème de Dvoretzky

"It soon became clear that an outstanding breakthrough in Geometric Functional Analysis had been achieved."

Vitali Milman à propos du théorème de Dvoretzky dans *Dvoretzky theorem - thirty years later*

Mathieu GALLO

Enseignant : Omer Friedland

date

1. Introduction

Alexandre Grothendieck en 1956 dans son article "*sur certains classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers*", inspiré par le lemme de Dvoretzky-Rogers (1950) propose une conjecture, a la quelle Aryeh Dvoretzky répondra positivement en 1961, aboutissant au résultat suivant :

Théorème 1.1 (A. Dvoretzky, 1961)**.** *Il existe une fonction* $k :]0,1[\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$*, tel que* $\forall \varepsilon \in]0,1[$*,* $k(\varepsilon, n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et tous compact convexe symétrique* $K \subset \mathbb{R}^n$*, il existe un sous espace* $V \subset \mathbb{R}^n$ *tel que :*

(i) $\dim V = k(\varepsilon, n)$

(ii) $\exists r > 0$ *tel que ,* $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1+\varepsilon)r.(V \cap B_2^n)$

V. Milman en 1971 donna une nouvelle preuve du théorème de Dvoretzky en utilisant le phénomène de concentration de la mesure, il a de plus amélioré le théorème en donnant une estimation de la dépendance en n pour la dimension de V, $k(\varepsilon, n) \geq c(\varepsilon).\log(n)$.

Théorème 1.2 (V. Milman, 1971)**.** *Pour toute* $\varepsilon > 0$*, il existe une constante* $c > 0$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et pour tous compact convexe symétrique* $K \subset \mathbb{R}^n$*, il existe un sous espace* $V \subset \mathbb{R}^n$ *tel que :*

(i) $\dim V \geq c.\log(n)$

(ii) $\exists r > 0$ *tel que ,* $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1+\varepsilon)r.(V \cap B_2^n)$

Défintion. *Soit* $(X, ||.||_X), (Y, ||.||_Y)$ *deux espaces normés et* $C > 0$*, on dis que* X *s'injecte* C*-continûment dans* Y*, si il existe* $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ *tel que pour tous* $x \in X$

$$||x||_X \leq ||Tx||_Y \leq C||x||_X$$

Il existe une reformulation du théorème de Dvoretzky en terme de norme, en utilisant la relation entre un compact convexe symétrique K et la norme $||y||_K = \inf\left\{\lambda \ ; \ \frac{y}{\lambda} \in K\right\}$.

Théorème 1.3. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $c > 0$ *tel que pour toute* $n \in \mathbb{N}$ *et pour toute norme* $||.||$ *sur* $\mathbb{R}^n$ *,* l_2^k *s'injecte* $(1+\varepsilon)$*-continûment dans* $(\mathbb{R}^n, ||.||)$ *pour un* $k \geq c.\log(n)$*.*

Notation. *Pour la suite on utiliseras les notations :*

- $|.|_n$ *la norme euclidienne sur* $\mathbb{R}^n$*, ou simplement* $|.|$ *si il n'y a pas d'ambiguïté sur la dimension.*
- $S^{n-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x| = 1\right\}$*, la* $(n-1)$*-sphère euclidienne.*

Montrons que ses deux derniers théorèmes sont équivalents.

(2)⇒(3) Posons $K = \mathrm{Adh}(B_{||.||}(0,1)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leq 1\}$ et appliquons le théorème 2, celui ci nous procure un sous-espace V de $\mathbb{R}^n$, avec $\dim V := k \geq c.\log(n)$ et $V \cap K$ est ε-ecuclidien. Donnons nous une base orthonormée $\{v_j\}_{1\leq j\leq k}$ de V et posons

$$\phi : \begin{array}{ccc} (V, ||.||) & \mapsto & (\mathbb{R}^k, |.|_k) \\ \sum_{i=1}^k x_i v_i & \to & \sum_{i=1}^k x_i e_i \end{array}$$

Soit $v \in V \cap K$ tel que $||v|| = 1$, comme $K \cap V$ est ε-euclidien on a que

$$r \leq |v|_n \leq (1+\varepsilon) r$$

La borne supérieur est immédiate car $K \cap V \subset r(1+\varepsilon).(V \cap B_2^n)$, pour la borne inférieur il suffit de remarquer que $(V \cap K)$ est un fermer de V qui contient l'ouvert $r.(V \cap B_2^n)$ de V, comme v est dans la frontière de $K \cap V$ il n'est pas dans l'intérieur de $K \cap V$ et donc dans aucun ouvert contenue dans $V \cap K$.

Fixons des coordonnées à v dans la base $\{v_j\}_{1\leq j\leq k}$, $v = \sum_{i=1}^k x_i v_i$, on a que $|v|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$ et donc :

$$r \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2} \leq (1+\varepsilon) r$$

Mais comme $|\phi(v)|_k = \left|\sum_{i=1}^k x_i e_i\right| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$, on a que :

$$r \leq |\phi(v)|_k \leq (1+\varepsilon) r$$

Pour tous $x \in V \backslash \{0\}$ on peut appliqué ce qui précède à $\frac{x}{||x||}$, en utilisant la linéarité de ϕ on obtient :

$$r||x|| \leq |\phi(x)|_k \leq (1+\varepsilon) r ||x||$$

(3)⇒(2) Soit $\varepsilon > 0$, par le théorème 3 il existe $c > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$ il existe un $k > c.\log(n)$ tel que l_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans $(R^n, ||.||)$ pour n'importe quelle norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$. Considérons un compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$ et $||y|| = \inf\left\{\lambda > 0 \, ; \, \frac{y}{\lambda} \in K\right\}$, alors $\exists T : l_2^k \to (\mathbb{R}^n, ||.||)$ linéaire tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^k, \; |x| \leq ||Tx|| \leq (1+\varepsilon)|x|$$

ceci implique immédiatement que T est injective, notons $V = \mathrm{Im} T$, alors la co-restriction a V de T est bijective. Soit $y \in \partial(K \cap V)$, c'est à dire $||y|| = 1$, on sait qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^k$ tel que $Tx = y$, on en déduit donc

$$|x| \leq 1 \leq (1+\varepsilon)|x| \iff \frac{1}{1+\varepsilon} \leq |x| \leq 1$$

la convexité et la symétrie centrale de $K \cap V$ nous permet de conclure que :

$$\frac{1}{1+\varepsilon} T(B_2^k) \subset K \cap V \subset T(B_2^k)$$

Soit $r = \sup\{\lambda > 0 \, ; \, \lambda(V \cap B_2^n) \subset K \cap V\}$, alors :

$$\frac{1}{1+\varepsilon} T(B_2^k) \subset r(V \cap B_2^n) \subset K \cap V$$

d'où $T(B_2^k) \subset (1+\varepsilon) r(V \cap B_2^n)$ et finalement :

$$r(V \cap B_2^n) \subset K \cap V \subset (1+\varepsilon) r(V \cap B_2^n)$$

2. Préliminaire

3. Existence du sous-espace

3.1. Mesures de Haar

Définition & Théorème (Mesures de Haar). *Soit* (X, d) *un espace métrique,* G *un groupe topologique localement compact qui agit sur* X *et tel que :*

$$\forall x, y \in X \ \forall g \in G\,,\ d(gx, gy) = d(x, y) \qquad (\star)$$

alors il existe une unique mesure à un coefficient multiplicatif près, régulière définit sur les boréliens de X *qui est invariante sous l'action de* G*, cette mesure est appeler mesure de Haar de* X *(où* G *est sous-entendu).*

Considérons $X = S^{n-1}$ avec la distance euclidienne et $X = O(n)$ avec la norme $||M|| = \sup_{|x|=1} |Mx|$ alors $G = O(n)$ le groupe des isométries vérifie $(\star)$ pour la multiplication matricielle sur S^{n-1} et $O(n)$.

Notation. *Par le théorème précédent on peut définir sans ambiguïté* μ,ν *les mesures de Haar normalisés respectivement sur* S^{n-1} *et* $O(n)$.

Montrons quelques propriétés qui serons utile par la suite.

Lemme 3.1. *Soit* $f \in C(S^{n-1})$ *et* $Y = (g_1, ..., g_n)$ *où les* $\{g_i\}_{1 \le i \le n}$ *sont i.i.d suivant une loi normale* $\mathcal{N}(0,1)$*, alors*

$$\int_{S^{n-1}} f \, d\mu = \mathbb{E}\left[f\Big(\frac{Y}{|Y|}\Big)\right]$$

Démonstration. Par unicité de la mesure de Haar , il nous suffit de montrer que pour tous $M \in O(n)$ et $f \in C(S^{n-1})$:

$$\mathbb{E}\left[f\Big(\frac{MY}{|MY|}\Big)\right] = \mathbb{E}\left[f\Big(\frac{Y}{|Y|}\Big)\right]$$

$$\mathbb{E}\left[f\Big(\frac{MY}{|MY|}\Big)\right] = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f\big(\frac{My}{|y|}\big) \exp\Big\{-\frac{1}{2}|y|^2\Big\} dy_1...dy_n = \int_{\mathbb{R}^n\setminus\{0\}} f\big(\frac{y}{|y|}\big) \exp\Big\{-\frac{1}{2}|M^{-1}y|^2\Big\} dy_1...dy_n$$

comme $|\det M| = 1$ et $|M^{-1}y| = |y|$, on a :

$$\mathbb{E}\left[f\left(\frac{MY}{|MY|}\right)\right] = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{Y}{|Y|}\right)\right]$$

□

Lemme 3.2. *Soit $A \subset S^{n-1}$ un borélien alors pour tous $x \in S^{n-1}$*

$$\nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A\Big) = \mu\big(A\big)$$

Démonstration. Soit $M \in O(n)$ et $x \in S^{n-1}$ alors la mesure définis par

$$\omega_x(A) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A\Big)$$

ω_x vérifie les propriétés suivantes :

$$\omega_x(MA) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\, M^T Tx \in A\Big) = \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A\Big) = \omega_x(A)$$

$$\omega_x(\emptyset) = 0$$

$$\begin{aligned}\omega_x\big(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\big) &= \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in \bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\Big) = \nu\Big(\bigsqcup_{i\in\mathbb{N}} \big\{T \in O(n)\,;\, Tx \in A_i\big\}\Big) \\ &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \nu\Big(T \in O(n)\,;\, Tx \in A_i\Big) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \omega_x(A_i)\end{aligned}$$

L'unicité de la mesure de Haar nous permet de conclure que $\omega_x = \mu$, en particulier ω_x ne dépend pas de x. □

3.2. Début de la démonstration du théorème de Dvoretzky

Notation. *Si il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme $||.||$ de $\mathbb{R}^n$ utilisé on noteras :*

- $E = \int_{S^{n-1}} ||x|| d\mu(x)$
- *b le plus petit réel tel que $||.|| \leq b|.|$*

Théorème 3.1 (Concentration de la mesure sur la sphère)**.** *Soit $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L > 0$, alors*

$$\mu\left\{x \in S^{n-1} \; ; \; |f(x) - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon\right\} \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2L^2}}$$

Lemme 3.3. *Pour tous $0 < \theta < 1$, $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous espace de dimension $k > 0$, alors il existe un θ-net sur $V \cap S^{n-1}$ de cardinal inférieur à $\left(\frac{3}{\theta}\right)^k$.*

Démonstration. Notons $B_V(x,r) = \left\{y \in V \; ; \; |x-y| < r\right\}$ la boules de centre $x \in V$ et de rayon $r \geq 0$, soit $N = \{x_i\}_{i=1,\ldots,m}$ un sous ensemble de $V \cap S^{n-1}$ maximal pour la propriété : $x, y \in N$, $|x-y| \geq \theta$, c'est à dire pour tous $x \in V \cap S^{n-1} \setminus N$ il existe $i \leq m$ tel que $|x - x_i| < \theta$, donc N est un θ-net et les $\left\{B_V(x_i, \theta/2)\right\}_{i=1,\ldots,m}$ sont donc disjointes deux à deux et toutes contenues dans $B_V(0, 1+\frac{\theta}{2})$ d'ou :

$$m\mathrm{Vol}(B_V(x_1, \frac{\theta}{2})) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Vol}(B_V(x_i, \frac{\theta}{2})) = \mathrm{Vol}(\cup_{1\leq i\leq m} B_V(x_i, \frac{\theta}{2})) \leq \mathrm{Vol}(B_V(0, 1+\frac{\theta}{2}))$$

$$m \leq \frac{\mathrm{Vol}(B_V(0, 1+\frac{\theta}{2}))}{\mathrm{Vol}(B_V(x_1, \frac{\theta}{2}))}$$

Par homogénéité de la mesure de Lebesgue :

$$m \leq \left(\frac{1+\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^k = \left(1 + \frac{2}{\theta}\right)^k < \left(\frac{3}{\theta}\right)^k$$

□

Lemme 3.4. *Soient $\alpha \in S^{n-1}$, A un θ-net pour un $1 > \theta > 0$, alors il existe $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ et $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tel que*

$$\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N}, \; \beta_i \leq \theta^i$$

Démonstration. Comme A est un θ-net alors il existe $y_0 \in A$ tel que $|\alpha - y_0| < \theta$, et donc

$$\alpha = y_0 + \lambda_1 \alpha'$$

avec $\lambda_1 = |\alpha - y_0| \leq \theta$ et $\alpha' = \frac{\alpha - y_0}{\lambda_1} \in S^{n-1}$, on peut donc itéré le même procédé sur α' et réitéré indéfiniment :

$$\begin{array}{ccc}
\alpha = y_0 + \lambda_1(y_1 + \lambda_2\alpha'') = y_0 + \lambda_1 y_1 + \lambda_1\lambda_2\alpha'' & \text{avec} & \lambda_2 \leq \theta,\ y_1 \in A \text{ et } \alpha'' \in S^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\alpha = y_0 + \sum_{i=1}^{N-1} y_i \left(\prod_{1\leq k\leq i}\lambda_k\right) + \tilde{\alpha}\prod_{1\leq k\leq N}\lambda_k & \text{avec} & \forall i \leq N\ \lambda_i \leq \theta, y_i \in A \text{ et } \tilde{\alpha} \in S^{n-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Si l'on pose $S_N = y_0 + \sum_{i=1}^{N} y_i \left(\prod_{1\leq k\leq i}\lambda_k\right)$, alors il existe $\tilde{\alpha} \in S^{n-1}$ tel que :

$$|\alpha - S_N| \leq |\lambda_1 ... \lambda_N||\tilde{\alpha} - y_N| \leq \theta^{N+1} \to 0 \quad \text{avec} \quad N \to \infty$$

il ne reste plus qu'as poser $\beta_0 = 1$ et pour $i > 0$, $\beta_i = \prod_{1\leq k\leq i}\lambda_k \leq \theta^i$ et l'on a :

$$\alpha = \sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i y_i$$

□

Lemme 3.5. *$\forall \varepsilon > 0$, il existe $1 > \theta > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$, si l'on a A un θ-net sur $V \cap S^{n-1}$ pour $V \underset{sev}{\subset} \mathbb{R}^n$ de dimension k, $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et $T \in \mathscr{L}(l_2^k, \mathbb{R}^n)$, tel que :*

$$\forall x \in A, \quad (1-\theta)E \leq \left|\left|Tx\right|\right| \leq (1+\theta)E$$

alors ,

$$\forall x \in V, \quad \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} E|x| \leq \left|\left|Tx\right|\right| \leq \sqrt{1+\varepsilon} E|x|$$

de plus si $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$, on peu prendre $\theta = \frac{\varepsilon}{9}$

Démonstration. Soient $1 > \theta > 0$, A un θ-net sur $S(V) = \{x \in V \,;|x| = 1\}$ et $x \in S(V)$ par le **lemme 3.4**, il existe $(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ et $(\beta_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tel que

$$x = \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \mathbb{N},\ \beta_i \leq \theta^i$$

Notons $T = (a_1, ..., a_k)$

$$\begin{aligned} ||Tx|| &= \Big|\Big|T \sum_{i=0}^{+\infty} y_i \beta_i\Big|\Big| \\ &= \Big|\Big|\sum_{i=0}^{+\infty} \beta_i \sum_{p=1}^{k} y_{i,p} a_p\Big|\Big| \\ &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i || \sum_{p=1}^{k} y_{i,p} a_p|| \\ &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i ||Ty_i|| \\ &\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \theta^i (1+\theta)E = \frac{1+\theta}{1-\theta} E \end{aligned}$$

de même :

$$\begin{aligned} ||Tx|| &\geq ||Ty_0|| - ||Tx - Ty_0|| \\ &= E(1-\theta) - || \sum_{p=1}^{k} a_p \sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i y_{i,p}|| \\ &\geq E(1-\theta) - \sum_{i=1}^{+\infty} \theta^i ||Ty_i|| \\ &\geq E\Big((1-\theta) - \theta \frac{1+\theta}{1-\theta}\Big) = E\frac{1-3\theta}{1-\theta} \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre θ tel que

$$\sqrt{1+\varepsilon} \geq \tfrac{1+\theta}{1-\theta}$$
$$\tfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \leq \tfrac{1-3\theta}{1-\theta}$$

et pour tous $y \in V \backslash \{0\}$ on a

$$E\tfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}} \leq \Big|\Big|\tfrac{y}{|y|}\Big|\Big| \leq E\sqrt{1+\varepsilon}$$
$$E\tfrac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}|y| \leq ||y|| \leq E|y|\sqrt{1+\varepsilon}$$

Ce qui fini la première partie de la preuve, dans la suite on suppose $\varepsilon \leq \frac{1}{9}$. On cherche $\theta =: \theta(\varepsilon) \in]0,1[$, tel que $\sqrt{1+\varepsilon} \geq \max\left(\frac{1-\theta}{1-3\theta}, \frac{1+\theta}{1-\theta}\right)$, supposons $\theta \leq \frac{1}{3}$ alors

$$\frac{1-\theta}{1-3\theta} - \frac{1+\theta}{1-\theta} = \frac{4\theta^2}{(1-3\theta)(1-\theta)} > 0$$

Donc $\sqrt{1+\varepsilon} \geq \frac{1-\theta}{1-3\theta}$

$$1+\varepsilon \geq \left(\frac{1-\theta}{1-3\theta}\right)^2$$
$$(9\varepsilon+8)\theta^2 - 2(3\varepsilon+2)\theta + \varepsilon \geq 0$$

les deux racines de ce polynôme sont $0 < \frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon} < \frac{3\varepsilon+2+2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon}$, on cherche donc un θ dans $]0, \frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon}]$. Pour finir

$$\begin{aligned}\frac{3\varepsilon+2-2\sqrt{1+\varepsilon}}{8+9\varepsilon} &\geq \frac{3\varepsilon+2-2-2\varepsilon}{8+9\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{8+9\varepsilon} \\ &\geq \frac{\varepsilon}{9}\end{aligned}$$

donc pour $\varepsilon \in]0, 9^{-1}[$ on peu prendre $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{9}$. □

Théorème 3.2. *Pour tous $\varepsilon > 0$ il existe $c(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$, l_2^k s'injecte $(1+\varepsilon)$-continûment dans $(\mathbb{R}^n, ||.||)$, pour $k =: \left[c(\varepsilon).\left(\frac{E}{b}\right)^2 n\right]$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, on se donne un $1 > \theta > 0$ donné par le **lemme 3.5** et on note

- $c(\theta) = \frac{\theta^2}{4\log(\frac{3}{\theta})}$
- $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous espace avec $\dim V := k = \left[c(\theta)\left(\frac{E}{b}\right)^2 n\right]$
- $\eta = \frac{\theta E}{b}$
- $f(\theta) = 2(3/\theta)^{c(\theta)(E/b)^2 n} e^{-\eta^2 n/2} = 2\exp\left(-\frac{\eta^2 n}{4}\right)$

Distinguons deux cas

- $f(\theta) \geq 1$

  on a alors :

$$\frac{\eta^2 n}{4} \leq \log(2)$$

$$k \le \frac{\eta^2}{4\log(3/\theta)} n \le \frac{\log(2)}{\log(3/\theta)} < 1$$

Donc $k = 0$, dans ce cas il n'y a rien a montrer.

- $f(\theta) < 1$

  Soit A un θ-net sur $V \cap S^{n-1}$, avec $|A| \le (\frac{3}{\theta})^k$ nous allons montrer qu'il existe $T \in O(n)$ tel que pour tous $x \in A$

$$(1-\theta)E \le ||Tx|| \le (1+\theta)$$

  Tous d'abord remarquons ceci :

$$\begin{aligned} 1 > f(\theta) &\ge 2(\frac{3}{\theta})^k e^{-\frac{\eta^2}{2}n} \\ &> 2|A| e^{-\frac{\eta^2}{2}n} \end{aligned}$$

  On a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \nu\Big(\cap_{x\in A}\left\{T \in O(n)\,;\, \big|||Tx|| - E\big| \le b\eta\right\}\Big) &= 1 - \nu\big(\cup_{x\in A}\left\{T \in O(n)\,;\, \big|||Tx|| - E\big| > b\eta\right\}\big) \\ &\ge 1 - |A|\nu\big(T \in O(n)\,;\, \big|||Ty|| - E\big| > b\eta\big) \qquad \text{pour un } y \in A \\ &\ge 1 - |A|\mu\Big(y \in S^{n-1}\,;\, \big|||y|| - E\big| > b\eta\Big) \end{aligned}$$

  En appliquant la concentration de la mesure

$$\nu\Big(\cap_{x\in A}\left\{T \in O(n)\,;\, \big|||Tx|| - E\big| \le b\eta\right\}\Big) \ge 1 - |A| 2 e^{-\frac{\eta^2 n}{2}} > 0$$

  Il existe donc $T \in O(n)$ tel que pour tous $x \in A$ on ait $\big|||Tx|| - E\big| \le b\eta$, c'est à dire

$$E(1-\theta) = E - b\eta \le ||Tx|| \le E + b\eta = E(1+\theta)$$

  Par le **lemme 3.5** pour tous $x \in V$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}|x|E \le ||Tx|| \le \sqrt{1+\varepsilon}|x|E$$

et pour $\varepsilon < 9^{-1}$ on peut prendre $\theta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{9}$ et donc $c(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2}{4\times 81 \log(\frac{3\times 9}{\varepsilon})}$.

□

4. Minoration de la dimension du sous-espace

4.1. Invariance pour des compositions par des applications linéaire

Pour simplifier un peu les calculs nous allons montrer que l'on peut se restreindre aux normes qui vérifies $||.|| \leq |.|$ et qui ont de plus la propriété d'être l'ellipsoïde de John, c'est à dire l'ellipsoïde de volume maximal incluse dans K, nous donnons la définition d'une ellipsoïde et un théorème de Fritz John sur l'unicité de l'ellipsoïde de volume maxime qui seras admis.

Défintion. *Un ellipsoïde de $\mathbb{R}^n$ est l'image de la boule unité euclidienne par un élément de $GL(n)$.*

Théorème 4.1 (Ellipsoïde de John)**.** *Tous compact convexe symétrique d'intérieur non vide contient un unique ellipsoïde de volume maximale.*

Considérons un compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$ et $T \in GL(n)$ tel que S^{n-1} est l'ellipsoïde de volume maximale inscrite dans TK alors si l'on montre le théorème 1.2 pour TK, c'est à dire que l'on montre qu'il existe V avec $\dim V > c.\log(n)$ et

$$(V \cap B_2^n) \subset TK \cap V \subset (1+\varepsilon)(V \cap B_2^n)$$

alors $W = T^{-1}V$ vérifie $\dim W = \dim V$ et

$$(W \cap T^{-1}(B_2^n)) \subset K \cap W \subset (1+\varepsilon)(W \cap T^{-1}(B_2^n))$$

Soit $r = \inf\{\lambda > 0\,;\, \lambda(W \cap B_2^n) \subset K \cap W\}$, alors

$$r(W \cap B_2^n) \subset K \cap W \subset r(1+\varepsilon)(W \cap B_2^n)$$

Donc K vérifie aussi le **théorème 1.2**.

4.2. Estimation de E

Par la suite on fixe $||.||$ une norme sur $\mathbb{R}^n$, $K = \mathrm{Adh}\big(B_{||.||}\big)$ tel que B_2^n soit l'ellipsoïde de volume maximale incluse dans K, on a donc $b = 1$. Dans cette partie nous allons donner une estimation de E.

Pour estimer E nous aurons besoin d'une minoration de $\mathbb{E}\Big[\max_{1\le i\le N} g_i\Big]$ pour des $\{g_i\}$ i.i.d suivant $\mathcal{N}(0,1)$, nous démontrons une telle borne dans le lemme suivant.

Lemme 4.1. *il existe $c>0$ tel que $\forall N>1$ et $\{g_i\}_{1\le i\le N}$ des variables aléatoire i.i.d suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$ on ait :*

$$c\sqrt{\log N} \le \mathbb{E}[\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i|]$$

où $\tilde{N} = \left[\frac{\sqrt{N}}{16\sqrt{2}}\right]$

Démonstration. Commençons par montrer que pour $n>1$, $\mathbb{P}\big(|g_1| > \sqrt{\log n}\big) \ge \frac{1}{n}$, on a :

$$\mathbb{P}\big(|g_1| > \sqrt{\log n}\big) = 2\int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \ge \int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}(1+\frac{1}{x^2})dx \qquad \text{pour } x > \sqrt{\log(2)} > 1$$

$$\int_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}(1+\frac{1}{x^2})dx = \Big[-\frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{t}\Big]_{\sqrt{\log n}}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{n\log n}} > \frac{1}{n}$$

On à $\mathbb{P}\big(|g_1| > \sqrt{\log\sqrt{N}}\big) \ge \frac{1}{\sqrt{N}}$, et donc

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i| \le \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big) = \mathbb{P}\Big(|g_1| \le \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big)^{\tilde{N}} = \Big(1-\mathbb{P}\Big(|g_1| > \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big)\Big)^{\tilde{N}}$$

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i| \le \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big) \le \Big(1-\frac{1}{\sqrt{N}}\Big)^{\tilde{N}} \le e^{-\frac{\tilde{N}}{\sqrt{N}}} \le e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}$$

Ce qui équivaut a

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i| > \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big) \ge 1-e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}$$

Par l'inégalité de Markov on a finalement :

$$\mathbb{E}[\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i|] \ge \mathbb{P}\Big(\max_{1\le i\le \tilde{N}} |g_i| > \sqrt{\log\sqrt{N}}\Big)\sqrt{\log\sqrt{N}} \ge \frac{1-e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\log N}$$

avec $c =: \frac{1-e^{-\frac{1}{16\sqrt{2}}}}{\sqrt{2}} \approx 0.3235$ □

Lemme 4.2 (Dvoretzky-Rogers)**.** *Il existe une base orthonormée* $\{x_i\}_{i=1,...,n}$ *tel que* $\forall 1 \leq i \leq n$

$$e^{-1}\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \leq ||x_i|| \leq 1$$

Démonstration. S^{n-1} est compact et $||.||$ continue, on peux donc prendre un $x_1 \in S^{n-1}$ qui maximise $||.||$ c'est à dire $||x_1|| = 1$, supposons que l'on ai $x_1, ..., x_{k-1}$ avec $k \leq n$ tel que pour tous $1 \leq i \leq k-1$, x_i maximise $||.||$ sur $S^{n-1} \backslash \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_{k-1}) \neq \emptyset$ car les $\{x_i\}_{i=1,...,k-1}$ sont orthogonaux deux à deux. On peut donc répéter le procéder pour trouver x_k qui maximise $S^{n-1} \backslash \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_{k-1})$, par récurrence on peut donc avoir n vecteurs avec ses propriétés. Fixons $1 \leq k \leq n$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ et définissons :

$$\mathscr{E} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \, ; \, \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{a_i}{a}\right)^2 + \sum_{i=k}^{n} \left(\frac{b_i}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

Supposons $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in \mathscr{E}$, alors $\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \in aB_2^n$ et donc $||\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i|| \leq a$. Si $x \in \mathrm{Vect}(x_k, ..., x_n) \cap B_2^n$ on a $||x|| \leq ||x_k||$ par construction, et donc $\sum_{i=k}^{n} a_i x_i \in bB_2^n \Rightarrow ||\sum_{i=k}^{n} a_i x_i|| \leq b||x_k||$, ce qui nous donne la majoration suivante

$$||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| \leq ||\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i|| + ||\sum_{i=k}^{n} a_i x_i|| \leq a + b||x_k||$$

Posons $\phi \in GL(n)$ définit par $\phi(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} a a_i x_i + \sum_{i=k}^{n} b a_i x_i$ on a $\phi = \mathrm{diag}\big(\overbrace{a, ..., a}^{(k-1)\times}, \overbrace{b, ..., b}^{(n-k+1)\times}\big)$ et donc $\mathbf{det}\phi = a^{k-1} b^{n-k+1}$ d'où :

$$\int_{\mathscr{E}} dx_1 ... dx_n = \int_{B_2^n} \mathbf{det}\phi \, dx_1 ... dx_n = a^{k-1} b^{n-k-1} \int_{B_2^n} dx_1 ... dx_n$$

On prend $a + b||x_k|| = 1$ de sorte que $\mathscr{E} \subset K$, comme B_2^n est l'ellipsoïde de volume maximale inclue dans K, on a que

$$1 \geq \frac{\int_{\mathscr{E}} dx_1 ... dx_n}{\int_{B_2^n} dx_1 ... dx_n} = a^{k-1} b^{n-k+1}$$

Fixons donc pour $k \geq 2$, $b = \frac{1-a}{||x_k||}$ et $a = \frac{k-1}{n}$, en remplaçant dans l'inégalité on obtient :

$$1 \geq a^{k-1} \left(\frac{1-a}{||x_k||}\right)^{n-k+1} \iff ||x_k|| \geq a^{\frac{k-1}{n-k+1}} (1-a) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{\frac{k-1}{n-k+1}} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

et $\log a^{\frac{k-1}{n-k+1}} = \frac{k-1}{n-k+1}\log\left(\frac{k-1}{n}\right) > -1.$ □

Proposition 4.1 (Estimation de E). *Il existe $c>0$ tel que $E \geq c\sqrt{\frac{\log n}{n}}$.*

Démonstration. Par le lemme de Dvoretzky-Rogers il existe une base orthonormé $x_1, ..., x_n$ tel que pour $1 \leq i \leq \tilde{n} =: [\frac{\sqrt{n}}{16\sqrt{2}}](\leq n)$, $||x_i|| \geq e^{-1}\left(1-\frac{\tilde{n}-1}{n}\right) \geq e^{-1}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{16\sqrt{2n}}\right) \geq (2e)^{-1}$. Comme μ est invariante par composition par une transformation orthogonale on a que

$$E =: \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| d\mu(a) = \int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n|| d\mu(a)$$

et donc

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n} a_i x_i|| d\mu(a) + \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} ||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n|| d\mu(a) \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} 2\max\left\{||\sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i||, ||a_n x_n||\right\} d\mu(a) \geq ... \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq n}\left\{|a_i|\,||x_i||\right\} d\mu(a) \\
&\geq \int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}}\left\{|a_i|\,||x_i||\right\} d\mu(a) \geq (2e)^{-1}\int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |a_i| d\mu(a)
\end{aligned}$$

Soit $(g_1, ..., g_n)$, des variables aléatoire i.i.d de loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |a_i| d\mu(a) = \mathbb{E}\Big[(\sum_{i=1}^{n} g_i^2)^{-\frac{1}{2}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |g_i|\Big]$$

Lemme 4.3. $\left(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\right)^{-\frac{1}{2}}(g_1, ..., g_n)$ *et* $\left(\sum_{i=1}^{n} g_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *sont indépendants.*

Démonstration du lemme. □

Par le lemme on à donc

$$\mathbb{E}\Big[(\sum_{i=1}^{n} g_i^2)^{-\frac{1}{2}} \max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |g_i|\Big].\mathbb{E}\Big[(\sum_{i=1}^{n} g_i^2)^{\frac{1}{2}}\Big] = \mathbb{E}[\max_{1\leq i\leq \tilde{n}} |g_i|]$$

la fonction racine carré est concave, par l'inégalité de Jensen on a donc :

$$\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^{n} g_i^2)^{\frac{1}{2}}] \leq \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} g_i^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\mathbb{E}[g_1^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$$

Et finalement par le lemme 4, il existe $K > 0$ tel que :

$$E \geq \frac{1}{2e\sqrt{n}} \mathbb{E}\Big[\max_{1 \leq i \leq \tilde{n}} |g_i|\Big] \geq \frac{K}{2e}\sqrt{\frac{\log n}{n}}$$

Pour finir il suffit de poser $c =: \frac{K}{2e}$ $\square$

4. Sources

- Euclidean sections of convex bodies , Gideon Schechtman (2008)

- Sur certains classes de suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers, Alexandre Grothendieck (1956)

-Dvoretzky theorem - thirty years later , Vitali Milman (1992)