

SORBONNE UNIVERSITÉ

TRAVAUX D'ÉTUDE ET DE RECHERCHE

Autour du théorème de Dvoretzky

Mathieu GALLO

Enseignant : Omer Friedland

date



Partie 1

La genèse du théorème de Dvoretzky provient d'une conjecture proposée par Grothendieck en 1956, inspiré par le théorème de Dvoretzky-Rogers (1950). Dvoretzky répondra positivement à la conjecture en 1960, aboutissant au résultat suivant :

Théorème 1. *Il existe une fonction $k :]0, 1[\times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tel que $\forall \varepsilon \in]0, 1[, k(\varepsilon, n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe un sous espace $V \subset \mathbb{R}^n$ tel que :*

(i) $\dim V = k(\varepsilon, n)$

(ii) $\exists r > 0$ tel que, $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1 + \varepsilon)r.(V \cap B_2^n)$

V. Milman en 1971 donna une nouvelle preuve du théorème de Dvoretzky en utilisant le phénomène de concentration de la mesure, il a de plus amélioré le théorème en donnant une estimation de la dépendance en n pour la dimension de V , $k(\varepsilon, n) \geq c(\varepsilon) \cdot \log(n)$.

Théorème 2. *Pour toute $\varepsilon > 0$, il existe une constante $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous corps convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$, il existe un sous espace $V \subset \mathbb{R}^n$ tel que :*

(i) $\dim V \geq c \cdot \log(n)$

(ii) $\exists r > 0$ tel que, $r.(V \cap B_2^n) \subset V \cap K \subset (1 + \varepsilon)r.(V \cap B_2^n)$

Il existe une reformulation du théorème en terme de norme.

Théorème 3. *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $c > 0$ tel que pour toute $n \in \mathbb{N}$ et pour toute norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n alors l_2^k est $(1 + \varepsilon)$ -isomorphe à $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ pour un $k \geq c \cdot \log(n)$.*

Nous allons montrer que ses deux derniers théorèmes sont équivalents.

(2) \Rightarrow (3) Posons $K = \text{Adh}(B_{\|\cdot\|}(0, 1)) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ et appliquons le théorème 2, celui-ci nous procure un sous-espace V de \mathbb{R}^n , avec $\dim V := k \geq c \cdot \log(n)$ et $V \cap K$ est ε -euclidien.

Donnons-nous une base orthonormée $\{v_j\}_{1 \leq j \leq k}$ de V et posons

$$\phi : \begin{array}{ll} (V, \|\cdot\|) & \mapsto (\mathbb{R}^k, |\cdot|_k) \\ \sum_{i=1}^k x_i v_i & \mapsto \sum_{i=1}^k x_i e_i \end{array}$$

Soit $v \in V \cap K$ tel que $\|v\| = 1$, comme $K \cap V$ est ε -euclidien on a que

$$r \leq |v|_n \leq (1 + \varepsilon)r$$

La borne supérieure est immédiate car $K \cap V \subset r(1 + \varepsilon).(V \cap B_2^n)$, pour la borne inférieure il suffit de remarquer que $(V \cap K)$ est un fermé de V qui contient l'ouvert $r.(V \cap B_2^n)$ de V , comme v est dans la frontière de $K \cap V$ il n'est pas

dans l'intérieur de $K \cap V$ et donc dans aucun ouvert contenue dans $V \cap K$.

Fixons des coordonnées à v dans la base $\{v_j\}_{1 \leq j \leq k}$, $v = \sum_{i=1}^k x_i v_i$, on a que $|v|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$ et donc :

$$r \leq \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2} \leq (1 + \varepsilon)r$$

Mais comme $|\phi(v)|_k = \left| \sum_{i=1}^k x_i e_i \right| = \sqrt{\sum_{i=1}^k x_i^2}$, on a que :

$$r \leq |\phi(v)|_k \leq (1 + \varepsilon)r$$

Pour tous $x \in V \setminus \{0\}$ on peut appliqué ce qui précède à $\frac{x}{||x||}$, en utilisant la linéarité de ϕ on obtient :

$$r||x|| \leq |\phi(x)|_k \leq (1 + \varepsilon)r||x||$$

(3) \Rightarrow (2) Soit $\varepsilon > 0$, par le théorème 3 il existe $c > 0$ tel que pour tous $n \in \mathbb{N}$ il existe un $k > c \cdot \log(n)$ tel que l_2^k est $(1 + \varepsilon)$ -isomorphe à $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ pour n'importe quelle norme $||\cdot||$ sur \mathbb{R}^n . Considérons un compact convexe symétrique $K \subset \mathbb{R}^n$ et $||y|| = \inf \left\{ \lambda > 0 ; \frac{y}{\lambda} \in K \right\}$, alors $\exists T : l_2^k \rightarrow (\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ linéaire tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^k, |x| \leq ||Tx|| \leq (1 + \varepsilon)|x|$$

ceci implique immédiatement que T est injective, notons $V = \text{Im} T$, alors la co-restriction à V de T est bijective. Soit $y \in \partial(K \cap V)$, c'est à dire $||y|| = 1$, on sait qu'il existe un unique $x \in \mathbb{R}^k$ tel que $Tx = y$, on en déduit donc

$$|x| \leq 1 \leq (1 + \varepsilon)|x| \iff \frac{1}{1 + \varepsilon} \leq |x| \leq 1$$

la convexité et la symétrie centrale de $K \cap V$ nous permet de conclure que :

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} T(B_2^k) \subset K \cap V \subset T(B_2^k) \tag{1.1}$$

je n'ai pas encore réussi a conclure ici



Partie 2

Mesures de Haar

Définition & Théorème. (Mesures de Haar) Soit (X, d) un espace métrique, G un groupe topologique localement compact qui agit sur X et tel que :

$$\forall x, y \in X \quad \forall g \in G, \quad d(gx, gy) = d(x, y) \quad (\star)$$

alors il existe une unique mesure à un coefficient multiplicatif près, régulière définie sur les boréliens de X qui est invariante sous l'action de G , cette mesure est appelée mesure de Haar de X (où G est sous-entendu).

Considérons $X = S^{n-1}$ avec la distance euclidienne et $X = O(n)$ avec la norme $\|M\| = \sup_{|x|=1} |Mx|$ alors $G = O(n)$ le groupe des isométries vérifie (\star) pour la multiplication matricielle pour S^{n-1} et $O(n)$, par le théorème précédent on peut définir sans ambiguïté μ, ν les mesures de Haar normalisées respectivement sur S^{n-1} et $O(n)$. Montrons quelques propriétés qui seront utiles par la suite.

Lemme. Soit $f \in C(S^{n-1})$ et $Y = (g_1, \dots, g_n)$ où les $\{g_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sont i.i.d suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$\int_{S^{n-1}} f d\mu = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{Y}{|Y|} \right) \right]$$

Démonstration. Par unicité de la mesure de Haar, il nous suffit de montrer que pour tous $M \in O(n)$ et $f \in C(S^{n-1})$:

$$\mathbb{E} \left[f \left(\frac{MY}{|MY|} \right) \right] = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{Y}{|Y|} \right) \right]$$

Posons $Z = \frac{Y}{|Y|}$ et ρ_Z la densité de Z alors :

$$\mathbb{E} \left[f \left(\frac{MY}{|MY|} \right) \right] = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f \left(\frac{My}{|y|} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} |y|^2 \right\} dy_1 \dots dy_n = \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f \left(\frac{y}{|y|} \right) \det M \exp \left\{ -\frac{1}{2} |M^{-1}y|^2 \right\} dy_1 \dots dy_n$$

comme $\det M = 1$ et $|M^{-1}y| = |y|$, on a :

$$\mathbb{E} \left[f \left(\frac{MY}{|MY|} \right) \right] = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{Y}{|Y|} \right) \right]$$

□

Lemme. Soit $A \subset S^{n-1}$ un borélien alors pour tous $x \in S^{n-1}$

$$\nu(T \in O(n); Tx \in A) = \mu(A)$$

Démonstration. Soit $M \in O(n)$ alors la mesure définies par $\omega(A) = \nu(T \in O(n); Tx \in A)$ vérifie

$$\omega(MA) = \nu(T \in O(n); M^T Tx \in A) = \nu(T \in O(n); Tx \in A) = \omega(A)$$

L'unicité de la mesure de Haar nous permet de conclure que $\omega = \nu$ car $\omega(S^{n-1}) = 1$. □

Théorème 4. Soit $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction Lipschitzienne de constante $L > 0$, alors

$$\mu\left\{x \in S^{n-1}; |f(x) - \mathbb{E}[f]| > \varepsilon\right\} \leq 2e^{-\frac{\varepsilon^2 n}{2L^2}}$$

Dans cette partie on s'intéresse à démontrer le résultat suivant :

Théorème 5. Pour tous $\varepsilon > 0$ il existe $c > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{R}^n il existe un sous-espace $V \subset \mathbb{R}^n$ tel que :

(i) $\dim V \geq c \cdot \left(\frac{E}{b}\right)^2 n$

(ii) Pour tous $x \in V : (1 - \varepsilon)E|x| \leq \|x\| \leq (1 + \varepsilon)E|x|$

où $E = \int_{S^{n-1}} \|y\| d\mu(y)$ et $b > 0$ est le plus petit réel positif tel que $\|\cdot\| \leq b|\cdot|$.

Démonstration. Soit $1 > \delta, \theta > 0$ tel que

$$\frac{1}{1 - \theta} < 1 + \varepsilon/2 \text{ et } \frac{1 - 2\theta}{1 - \theta} > 1 - \varepsilon/2$$

$$\frac{1 + \delta}{1 - \theta} < 1 + \varepsilon \text{ et } \frac{1 - 2\theta - \delta}{1 - \theta} > 1 - \varepsilon$$

Posons $\eta = \frac{\delta E}{b}$ et fixons $V_0 \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace et $M \subset V_0 \cap S^{n-1}$ un θ -net, où $\dim V_0 = k$ avec $|M| < \frac{1}{2} e^{\frac{\eta^2 n}{2}} < \left(\frac{3}{\theta}\right)^k$. (on justifiera l'existence d'un tel ensemble dans lemme qui suit cette démonstration)

$$\nu\left(\cap_{x \in M} \{T \in O(n); \left|\|Tx\| - E\right| \leq b\eta\}\right) \geq 1 - |M| \nu\left(\{T \in O(n); \left|\|Ty\| - E\right| > b\eta\}\right), \text{ pour un } y \in M.$$

$$\nu\left(\cap_{x \in M} \{T \in O(n); \left|\|Tx\| - E\right| \leq b\eta\}\right) \geq 1 - |M| 2e^{-\frac{\eta^2 n}{2}} > 0$$

Il existe donc $T \in O(n)$ tel que pour tous $x \in M$ on ait $\left|\|Tx\| - E\right| \leq b\eta$, comme T est une isométrie on a que $N =: TM$ est un θ -net sur $V \cap S^{n-1}$ avec $V =: TV_0$.

Si $x \in V \cap S^{n-1}$, il existe $\{y_i\} \subset N$ et $\{\beta_i\}$ une suite avec $|\beta_i| \leq \theta^i$ tel que $x = y_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \beta_i y_i$, on a donc

$$\|x\| \leq \|y_1\| + \sum_{i=2}^{\infty} \theta^i \|y_i\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} \theta^i (b\eta + E) = \frac{1}{1 - \theta} (b\eta + E)$$

Trouvons maintenant une minoration de $\|x\|$, on a $\|x - y_1\| = \left\| \sum_{i=2}^{\infty} \beta^i y_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \theta^i \|y_i\| \leq \frac{\theta}{1-\theta} (b\eta + E)$ et donc

$$\|x\| \geq \|y_1\| - \|x - y_1\| \geq (b\eta + E) - \frac{\theta}{1-\theta} (E + b\eta) = E \frac{1-2\theta}{1-\theta} - b\eta \frac{1}{1-\theta}$$

$$E \frac{1-2\theta}{1-\theta} - b\eta \frac{1}{1-\theta} \leq \|x\| \leq \frac{1}{1-\theta} (b\eta + E)$$

Or on a $E \frac{1-2\theta}{1-\theta} - b\eta \frac{1}{1-\theta} = E \frac{1-2\theta-\delta}{1-\theta} > E(1-\varepsilon)$ et $\frac{1}{1-\theta} (b\eta + E) = E \frac{1+\delta}{1-\theta} < E(1+\varepsilon)$ et donc

$$E(1-\varepsilon) \leq \|x\| \leq E(1+\varepsilon)$$

Pour $y \in V$ il suffit de prendre $x = \frac{y}{|y|}$ et l'on a :

$$E(1-\varepsilon)|y| \leq \|y\| \leq E(1+\varepsilon)|y|$$

Il ne nous reste plus qu'à discuter de la minoration de k , en prenant le logarithme dans $\frac{1}{2} e^{\frac{\eta^2 n}{2}} < \left(\frac{3}{\theta}\right)^k$, on obtient :

$$k > \frac{1}{\log(3/\theta)} \left(\frac{\delta^2 E^2}{2b^2} n - \log(2) \right)$$

Je n'arrive pas à conclure pour la dimension, par rapport au livre de Gideon et Milman j'ai remplacé dans les notations ε par η , ε' par δ , δ par ε □

Lemme. Pour tous $0 < \varepsilon < 1$ il existe un ε -net sur S^{k-1} de cardinal inférieur à $\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^k$.

Démonstration. Soit $N = \{x_i\}_{i=1, \dots, m}$ un sous ensemble de S^{k-1} maximal pour la propriété : $x, y \in N$, $|x - y| \geq \varepsilon$, c'est à dire pour tous $x \in S^{k-1} \setminus N$ il existe $i \leq m$ tel que $|x - x_i| < \varepsilon$, donc N est un ε -net. Les boules de centre x_i et de rayon $\varepsilon/2$ sont donc disjointes deux à deux et toutes contenues dans $B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2})$ d'où :

$$m \text{Vol}(B(x_1, \frac{\varepsilon}{2})) = \sum_{i=1}^m \text{Vol}(B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})) = \text{Vol}(\cup_{1 \leq i \leq m} B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})) \leq \text{Vol}(B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}))$$

$$m \leq \frac{\text{Vol}(B(0, 1 + \frac{\varepsilon}{2}))}{\text{Vol}(B(x_1, \frac{\varepsilon}{2}))} = \left(\frac{1 + \frac{\varepsilon}{2}}{\frac{\varepsilon}{2}} \right)^k = \left(1 + \frac{2}{\varepsilon} \right)^k \leq \left(\frac{3}{\varepsilon} \right)^k$$

□



Partie 3

Par la suite on fixe $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^n , $K = \text{Adh}(B_{\|\cdot\|})$ tel que B_2^n soit l'ellipsoïde de volume maximale incluse dans K , on a donc $b = 1$. Dans cette partie nous allons donner une estimation de E .

Définition. Un ellipsoïde D de \mathbb{R}^n est l'image de la boule unité euclidienne par un élément de $GL(n)$.

Admettons le théorème suivant de Fritz John (1910-1994) :

Théorème 6. (Ellipsoïde de John) Tous compact convexe symétrique d'intérieur non vide contient un unique ellipsoïde de volume maximale.

Lemme. (Dvoretzky-Rogers) Il existe une base orthonormée $\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$ tel que

$$\forall 1 \leq i \leq n, \quad e^{-1} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) \leq \|x_i\| \leq 1$$

Démonstration. S^{n-1} est compact et $\|\cdot\|$ continue, on peut donc prendre un $x_1 \in S^{n-1}$ qui maximise $\|\cdot\|$ c'est à dire $\|x_1\| = 1$, supposons que l'on ait x_1, \dots, x_{k-1} avec $k \leq n$ tel que pour tous $1 \leq i \leq k-1$, x_i maximise $\|\cdot\|$ sur $S^{n-1} \cap_{j < i} x_j \neq \emptyset$ car les $\{x_i\}_{i=1,\dots,k-1}$ sont orthogonaux deux à deux et est compact, on peut donc répéter le procédé pour trouver x_k qui maximise $S^{n-1} \cap_{j < k} x_j$, par récurrence on peut donc avoir n vecteurs avec ses propriétés. Fixons $1 \leq k \leq n$, $a, b \in \mathbb{R}^*$ et définissons :

$$\mathcal{E} = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i ; \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{a_i}{a}\right)^2 + \sum_{i=k}^n \left(\frac{b_i}{b}\right)^2 \leq 1 \right\}$$

Supposons $\sum_{i=1}^n a_i x_i \in \mathcal{E}$, alors $\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \in aB_2^n$ et donc $\|\sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i\| \leq a$. Si $x \in \text{Vect}(x_k, \dots, x_n) \cap B_2^n$ on a $\|x\| \leq \|x_k\|$ par construction, et donc $\sum_{i=k}^n a_i x_i \in bB_2^n \Rightarrow \|\sum_{i=k}^n a_i x_i\| \leq b\|x_k\|$, ce qui nous donne la majoration suivante

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{k-1} a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=k}^n a_i x_i \right\| \leq a + b\|x_k\|$$

Posons $\phi \in GL(n)$ défini par $\phi(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \sum_{i=1}^{k-1} a a_i x_i + \sum_{i=k}^n b a_i x_i$ on a $\phi = \text{diag}(\overbrace{a, \dots, a}^{(k-1) \times}, \overbrace{b, \dots, b}^{(n-k+1) \times})$ et donc $\det \phi = a^{k-1} b^{n-k+1}$ d'où :

$$\int_{\mathcal{E}} dx_1 \dots dx_n = \int_{B_2^n} \det \phi dx_1 \dots dx_n = a^{k-1} b^{n-k+1} \int_{B_2^n} dx_1 \dots dx_n$$

On prend $a + b\|x_k\| = 1$ de sorte que $\mathcal{E} \subset K$, comme B_2^n est l'ellipsoïde de volume maximale incluse dans K , on a que

$$1 \geq \frac{\int_{\mathcal{E}} dx_1 \dots dx_n}{\int_{B_2^n} dx_1 \dots dx_n} = a^{k-1} b^{n-k+1}$$

Fixons donc pour $k \geq 2$, $b = \frac{1-a}{\|x_k\|}$ et $a = \frac{k-1}{n}$, en remplaçant dans l'inégalité on obtient :

$$1 \geq a^{k-1} \left(\frac{1-a}{\|x_k\|} \right)^{n-k+1} \iff \|x_k\| \geq a^{\frac{k-1}{n-k+1}} (1-a) = \left(\frac{k-1}{n} \right)^{\frac{k-1}{n-k+1}} \left(1 - \frac{k-1}{n} \right)$$

et $\log a^{\frac{k-1}{n-k+1}} = \frac{k-1}{n-k+1} \log \left(\frac{k-1}{n} \right) > -1$. □

Proposition. (Estimation de E) Il existe $c = c(\varepsilon) > 0$ tel que $E \geq c \sqrt{\frac{\log n}{n}}$.

Démonstration. Par le lemme de Dvoretzky-Rogers il existe une base orthonormée x_1, \dots, x_n tel que pour $1 \leq i \leq [n/2]$, $\|x_i\| \geq e^{-1} \left(1 - \frac{n/2-1}{n} \right) = e^{-1} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right) \geq (2e)^{-1}$. Comme μ est invariante par composition par une transformation orthogonale on a que

$$\int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| d\mu(a) = \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n \right\| d\mu(a)$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| d\mu(a) &= \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| d\mu(a) + \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - a_n x_n \right\| d\mu(a) \\ \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| d\mu(a) &\geq \frac{1}{2} \int_{S^{n-1}} 2 \max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\|, \|a_n x_n\| \right\} d\mu(a) \geq \dots \geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ |a_i| \|x_i\| \right\} d\mu(a) \\ \int_{S^{n-1}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| d\mu(a) &\geq \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq [n/2]} \left\{ |a_i| \|x_i\| \right\} d\mu(a) \geq (2e)^{-1} \int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq [n/2]} |a_i| d\mu(a) \end{aligned}$$

Soit (g_1, \dots, g_n) , des variables aléatoire i.i.d de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors

$$\int_{S^{n-1}} \max_{1 \leq i \leq [n/2]} |a_i| d\mu(a) = \mathbb{E} \left[\left(\sum_{i=1}^n g_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \max_{1 \leq i \leq [n/2]} |g_i| \right]$$

□