1 Dérivées des fonctions usuelles

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

2 Opération autour de la dérivation

Théorème 1. Soit f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $a \in \mathbb{R}$. On as les formules suivantes :

(i) **Formule de Leibnitz**

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

(ii) **Linéarité**

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \& \quad (a \cdot f)'(x) = a \cdot f'(x)$$

(iii) **Formule de composition**

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

(iii) **Dérivée de l'inverse**, on suppose f est non nul.

$$(\frac{1}{f})'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

3 Exercices

Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3 \cdot x^4 + 1$$

$$f(x) = x \cdot e^{\cos(x)}$$

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 + x^4}$$

4 Les elements différentielles en physique

Montrons les formulles avec des outils intuitif. Commençons par le (ii). Si x varie de Δx alors on note Δf la variation de f entre x et $x + \Delta x$. De même pour g et $f + g$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\Delta(f+g) &= f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x) - (f(x) + g(x)) \\
&= \big(f(x+\Delta x) - f(x)\big) + \big(g(x+\Delta x) - g(x)\big) \\
&= \Delta f + \Delta g
\end{aligned}$$

en divisant par dx des deux cotés :

$$\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

en prennant la limite quand Δx tend vers 0 on obtient :

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Pour le (i)

$$\begin{aligned}
\Delta(fg) &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x) \\
&= (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x) \\
&= f(x)g(x) + g(x)\Delta f + f(x)\Delta g + \Delta g \Delta f - f(x)g(x) \\
&= g(x)\Delta f + f(x)\Delta g + \Delta g \Delta f \\
\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} &= g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} + f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f \Delta g}{\Delta x}
\end{aligned}$$

Ici il faut comprendre que dans la dérivé, seules les termes «d'ordre 1» compte, c'est à dire ceux qui n'ont qu'un seule d au numérateur. Autrement on peut vérifier que Le terme $\frac{\Delta f \Delta g}{\Delta x}$ tend vers 0. On trouve donc finalement :

$$(fg)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$