1 Dérivées des fonctions usuelles

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \ \ (x > 0)$$

2 Opération autour de la dérivation

Théorème 1. Soit f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions **derivable** et $a \in \mathbb{R}$. On as les formules suivantes :

(i) **Formule de Leibnitz**

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

(ii) **Linéarité**

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \ \ \& \ \ (a \cdot f)'(x) = a \cdot f'(x)$$

(iii) **Formule de composition**

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

(iii) **Dérivée de l'inverse**, on suppose f non nul.

$$(\frac{1}{f})'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

3 Exercices

Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3 \cdot x^4 + 1$$

$$f(x) = x \cdot e^{\cos(x)}$$

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 + x^4}$$

4 Les elements différentielles en physique

On va utiliser des notations qui vont rendre le calcul plus simple et plus intuitif. Si l'on se donne une fonction f dérivable qui dépend d'une variable x, on notera Δx une petite variation de x. Et ensuite on définit

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

la variation de f entre x et $x + \Delta x$, on alors par définition de la dérivée :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f'(x)$$

Ceci justifie en partie la notation $\frac{df}{dx}$ où l'on voit df comme une variation infinitésimale de f sur un déplacement de x à $x + dx$.
Commençons par montrer le (ii), on se donne f et g dérivable alors :

$$\begin{aligned}
\Delta(f + g) &= f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - (f(x) + g(x)) \\
&= \big(f(x + \Delta x) - f(x)\big) + \big(g(x + \Delta x) - g(x)\big) \\
&= \Delta f + \Delta g
\end{aligned}$$

en divisant par Δx des deux cotés :

$$\frac{\Delta(f + g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

en prenant la limite quand Δx tend vers 0 on obtient :

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Pour le (i)

$$\begin{aligned}
\Delta(fg) &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\
&= (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x) \\
&= f(x)g(x) + g(x)\Delta f + f(x)\Delta g + \Delta g\Delta f - f(x)g(x) \\
&= g(x)\Delta f + f(x)\Delta g + \Delta g\Delta f \\
\frac{\Delta(fg)}{\Delta x} &= g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} + f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f\Delta g}{\Delta x}
\end{aligned}$$

Ici il faut comprendre que dans la dérivée, seuls les termes «d'ordre 1» compte, c'est-à-dire ceux qui n'ont qu'un seule Δ au numérateur. Autrement dit le terme $\frac{\Delta f\Delta g}{\Delta x}$ tend vers 0. En effet :

$$\frac{\Delta f\Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} f'(x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta g$$

Et par continuité de g :

$$\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x) \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} g(x) - g(x) = 0$$

On trouve donc finalement :

$$(fg)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

4.1 Un peu de BlaBla

Revenons un peu à la physique. Et posons-nous une question : qu'est que la vitesse ? La première intérprétation de la vitesse que l'on a c'est celle de la vitesse moyenne. Disons qu'un point matériel parcours Δx mètres en Δt seconds, alors sa vitesse moyenne est donnée par :

$$v_{\text{moyenne}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Mais cette quantité ne reflète pas réelement la notion de vitesse. En effet entre t et Δt la vitesse du point matèriel peut très bien varriée, elle n'est pas forcément toujours égale à sa valeur moyenne. Pour cela on définit **la vitesse instantanée** v que l'on appelle juste vitesse comme :

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$$

Ici on considère le cas unidimensionnelle (le point ne ce déplace que dans une direction). Mais ceci est identique pour un point materiel qui ce déplace dans un espace à trois dimensions. Dans ce cas le déplacement est un vecteur $\Delta \vec{p}$:

$$\Delta \vec{p} = (\Delta x)\vec{u_x} + (\Delta y)\vec{u_y} + (\Delta z)\vec{u_z}$$

Qui est simplement la sommes des déplacements dans chaques directions décomposé sur les vecteurs de la base unitaire de $\mathbb{R}^3$. Et donc en divisant par Δt :

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{u_x} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{u_y} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{u_z}$$

Si on passe à la limite quand $\Delta t \to 0$:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t)\vec{u_x} + \frac{dy}{dt}(t)\vec{u_y} + \frac{dz}{dt}(t)\vec{u_z}$$

Où encore avec l'écriture «mathématique» :

$$\vec{v}(t) = \left(\vec{p}\right)'(t) = x'(t)\vec{u_x} + y'(t)\vec{u_y} + z'(t)\vec{u_z}$$