

## 1 Dérivées des fonctions usuelles

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

$$\cos'(x) = -\sin(x)$$

$$\sin'(x) = \cos(x)$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

## 2 Opération autour de la dérivation

**Théorème 1.** Soit  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions **derivable** et  $a \in \mathbb{R}$ . On as les formules suivantes :

(i) **Formule de Leibnitz**

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

(ii) **Linéarité**

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \quad \& \quad (a \cdot f)'(x) = a \cdot f'(x)$$

(iii) **Formule de composition**

$$(f \circ g)'(x) = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

(iii) **Dérivée de l'inverse**, on suppose  $f$  non nul.

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

## 3 Exercices

Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = 3 \cdot x^4 + 1$$

$$f(x) = x \cdot e^{\cos(x)}$$

$$f(x) = \ln(1 + x^2)$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3}{1 + x^4}$$

## 4 Les elements différentielles en physique

On va utiliser des notations qui vont rendre le calcul plus simple et plus intuitif. Si l'on se donne une fonction  $f$  dérivable qui dépend d'une variable  $x$ , on notera  $\Delta x$  une petite variation de  $x$ . Et ensuite on définit

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

la variation de  $f$  entre  $x$  et  $x + \Delta x$ , on alors par définition de la dérivée :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{(x + \Delta x) - x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f'(x)$$

Ceci justifie en partie la notation  $\frac{df}{dx}$  où l'on voit  $df$  comme une variation infinitésimale de  $f$  sur un déplacement de  $x$  à  $x + dx$ .

Commençons par montrer le (ii), on se donne  $f$  et  $g$  dérivable alors :

$$\begin{aligned}\Delta(f + g) &= f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x) - (f(x) + g(x)) \\ &= (f(x + \Delta x) - f(x)) + (g(x + \Delta x) - g(x)) \\ &= \Delta f + \Delta g\end{aligned}$$

en divisant par  $\Delta x$  des deux cotés :

$$\frac{\Delta(f + g)}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}$$

en prenant la limite quand  $\Delta x$  tend vers 0 on obtient :

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Pour le (i)

$$\begin{aligned}\Delta(fg) &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) \\ &= (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) - f(x)g(x) \\ &= f(x)g(x) + g(x)\Delta f + f(x)\Delta g + \Delta g\Delta f - f(x)g(x) \\ &= g(x)\Delta f + f(x)\Delta g + \Delta g\Delta f \\ \frac{\Delta(fg)}{\Delta x} &= g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x} + f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f\Delta g}{\Delta x}\end{aligned}$$

Ici il faut comprendre que dans la dérivée, seuls les termes «d'ordre 1» compte, c'est-à-dire ceux qui n'ont qu'un seul  $\Delta$  au numérateur. Autrement dit le terme  $\frac{\Delta f\Delta g}{\Delta x}$  tend vers 0. En effet :

$$\frac{\Delta f\Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} f'(x) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta g$$

Et par continuité de  $g$  :

$$\Delta g = g(x + \Delta x) - g(x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} g(x) - g(x) = 0$$

On trouve donc finalement :

$$(fg)'(x) = g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$$

### 4.1 Un peu de BlaBla

Revenons un peu à la physique. Et posons-nous une question : qu'est que la vitesse ? La première interprétation de la vitesse que l'on a c'est celle de la vitesse moyenne. Disons qu'un point matériel parcourt  $\Delta x$  mètres en  $\Delta t$  seconds, alors sa vitesse moyenne est donnée par :

$$v_{\text{moyenne}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Mais cette quantité ne reflète pas réellement la notion de vitesse. En effet entre  $t$  et  $\Delta t$  la vitesse du point matériel peut très bien varier, elle n'est pas forcément toujours égale à sa valeur moyenne. Pour cela on définit **la vitesse instantanée**  $v$  que l'on appelle juste vitesse comme :

$$v = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t)$$

Ici on considère le cas unidimensionnelle (le point ne se déplace que dans une direction). Mais ceci est identique pour un point matériel qui se déplace dans un espace à trois dimensions. Dans ce cas le déplacement est un vecteur  $\Delta \vec{p}$  :

$$\Delta \vec{p} = (\Delta x)\vec{u}_x + (\Delta y)\vec{u}_y + (\Delta z)\vec{u}_z$$

Qui est simplement la somme des déplacements dans chaque direction décomposé sur les vecteurs de la base unitaire de  $\mathbb{R}^3$ . Et donc en divisant par  $\Delta t$  :

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{u}_x + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{u}_y + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{u}_z$$

Si on passe à la limite quand  $\Delta t \rightarrow 0$  :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{p}}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t)\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}(t)\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}(t)\vec{u}_z$$

Où encore avec l'écriture «mathématique» :

$$\vec{v}(t) = (\vec{p})'(t) = x'(t)\vec{u}_x + y'(t)\vec{u}_y + z'(t)\vec{u}_z$$