

## 1 Prélude Mathématiques

Dans cette partie on s'intéresse d'un point de vue mathématique aux fonctions définies sur les nombres réels de la forme

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(2\pi \cdot k \cdot F \cdot t + \phi_k) \\ &= A_0 + A_1 \cos(2\pi F \cdot t + \phi_1) + \cdots + A_n \cos(2\pi \cdot n \cdot F \cdot t + \phi_n) \end{aligned} \quad (1)$$

Pour un entier  $n \geq 1$ , et des réels  $F, A_0, \dots, A_n, \phi_1, \dots, \phi_n$  avec  $A_1$  non nul, et  $F$  strictement positif

**Remarque.** Dans votre cours vous ne traitez que deux cas particuliers de (1) soit le cas :

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(2\pi \cdot k \cdot F \cdot t)$$

Ou alors le cas :

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \cos(2\pi \cdot k \cdot F \cdot t - \frac{\pi}{2}) \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^n A_k \sin(2\pi \cdot k \cdot F \cdot t) \end{aligned}$$

C'est à dire les cas  $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_n = 0$  (le cas avec que des cosinus) ou alors  $\phi_1 = \phi_2 = \dots = \phi_n = -\frac{\pi}{2}$  (le cas avec que des sinus en vertu de  $\cos(a - \frac{\pi}{2}) = \sin(a)$ ).

**Exemple 1.**

$$f(t) = 1 + \cos(2\pi \cdot t) - 2 \cos(6\pi \cdot t + 2)$$

Ici on identifie que  $n = 3$ ,  $F = 1$ ,  $A_0 = 1$ ,  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0$ ,  $A_3 = -2$  et tous les  $\phi_i$  sont nuls sauf pour  $i = 3$   $\phi_3 = 2$ .

### 1.1 Définitions

**Définition 1.** Pour  $f$  définie par (1) on dit que

- ◇  $A_0$  est la **composante continue** de  $f$ .
- ◇  $A_1 \cos(2\pi \cdot F \cdot t + \phi_1)$  est la **fondamentale** de  $f$
- ◇  $|A_1|$  est l'**amplitude de la fondamentale**.
- ◇ Pour  $k \geq 1$ ,  $A_k \cos(2\pi \cdot kF \cdot t + \phi_k)$  est l'**harmonique de rang  $k$**
- ◇ Pour  $k \geq 1$ ,  $|A_k|$  est l'**amplitude de l'harmonique de rang  $k$** .

**Remarque.** La fondamentale est l'harmonique de rang 1.

**Définition 2.** Pour  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  périodique de période  $T > 0$ . On définit sa fréquence comme  $\frac{1}{T}$ .

**Remarque.** En physique le mot fréquence est utiliser spécifiquement si  $t$  représente le temps.

En utilisant les propriétés de la fonction cosinus (qui est périodique de période  $2\pi$ ), on déduit le résultat suivant :

**Proposition 1.** Pour  $f$  définie par (1) on a que :

- ◇  $F$  est la **fréquence de la fondamentale**, donc la fondamentale est de période  $\frac{1}{F}$ .
- ◇ Pour  $k \geq 2$ ,  $k \cdot F$  est la **fréquence de l'harmonique de rang  $k$** , donc l'harmonique de rang  $k$  est de période  $\frac{1}{kF}$ .

*Démonstration.* Je vous laisse regarder. La question à laquelle vous devez répondre est : Quelle est la période de la fonction,

$$\cos(2\pi \cdot kF \cdot t + \phi_k)$$

pour  $k \geq 1$  un entier. □

## 1.2 Exercices

**Exercice 1. C'est quoi une telle fonction ?**

On considère  $f$  définie par (1).

- (i) Montrez que  $f(t + \frac{1}{F}) = f(t)$ .

*$f$  est même périodique de période  $\frac{1}{F}$ . Ceci justifie l'appellation "fondamentale".*

**On retient que c'est le terme en  $A_1$  qui impose la période de  $f$  (ou la fréquence c'est pareil).**

- (ii) Montrez que  $f$  peut se réécrire sous la forme :

$$f(t) = A_0 + \sum_{k=1}^n B_k \cos(2\pi \cdot k \cdot F \cdot t) + \sum_{k=1}^n C_k \sin(2\pi \cdot k \cdot F \cdot t) \quad (2)$$

Où les  $B_k$  et  $C_k$  sont des réels. Et donnez une relation qui relie les  $A_k, B_k$  et  $C_k$  pour  $k \geq 1$

**Indication :** Pensez aux formules trigonométriques !

- (iii) Dessinez les fonctions suivantes sur  $[-1, 1]$ , dans deux graphiques différents **l'un au dessus de l'autre**.

$$f(t) = 1 + \cos(2\pi \cdot t)$$

$$g(t) = 1 + \cos(4\pi \cdot t)$$

Faites ensuite en dessous le dessin de la somme des deux ondes  $h = f + g$ .

**Exercice 2.  $A_0$  et valeur moyenne**

Soit  $f$  une fonction continue définie sur un intervalle  $[a, b]$ . On appelle la moyenne de  $f$  la quantité :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Montrez que la moyenne de  $f$  définie par (1) sur l'intervalle  $[0, 1/F]$  est  $A_0$ .

*On comprend donc que la composante continue de  $f$  est la **valeur moyenne** prise par  $f$  sur une période.*

**Exercice 3. Applications**

Ecrivez les fonctions suivantes sous la forme (1) puis identifiez leurs valeurs moyennes, leurs fondamentales et leurs harmoniques.

- (i) Soit  $f(t) = 3 + \cos(2\pi \cdot t) + \sin(\pi \cdot t)$

- (ii) Soit  $f(t) = \cos^2(\pi t) + \cos(4\pi t)$  (attention au carré !)

### 1.3 Pourquoi on s'intéresse à ces fonctions ?

L'intérêt autour de ses fonctions vient du fait que si on a une fonction périodique avec un «minimum de régularité» alors on peut l'approcher par une fonction de la forme (1). Plus précisément on a le théorème suivant :

**Théorème 1. (Décomposition en série de Fourier)**

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue par morceaux et périodique de période  $T = \frac{1}{F} > 0$ . Il existe alors  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de réels tel que pour tous  $t \in \mathbb{R}$  où  $f$  est continue, la série suivante :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2\pi \cdot kF \cdot t) + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(2\pi \cdot kF \cdot t)$$

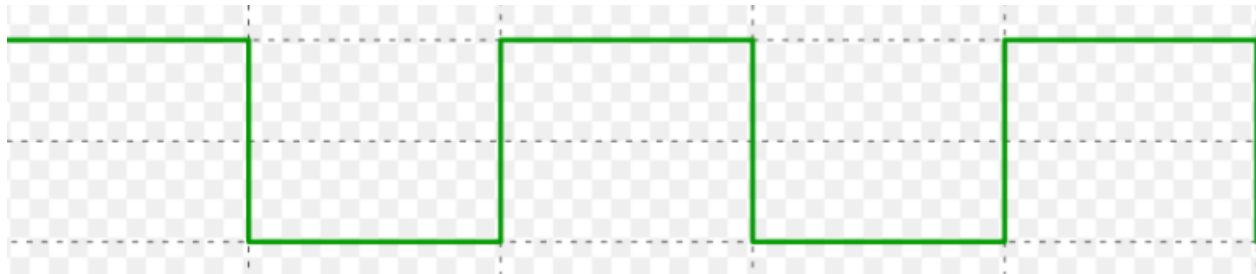
est convergente et converge vers  $f(t)$ . Dit autrement :

$$\sum_{k=0}^n a_k \cos(2\pi \cdot kF \cdot t) + \sum_{k=0}^n b_k \sin(2\pi \cdot kF \cdot t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t)$$

**Remarque.** Il existe en plus des formules explicites pour calculer les  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et les  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ .

**Remarque.** On dit que  $f$  est continue par morceaux si il existe des intervalles  $(I_n)$  de  $\mathbb{R}$  tels que les  $I_n$  recouvrent  $\mathbb{R}$ , c'est à dire  $\cup_n I_n = \mathbb{R}$  et  $f$  est continue sur chaque  $I_n$ .

On peut penser par exemple à la fonction qui vaut 1 entre  $[2n, 2n+1[$  et vaut 0 entre  $[2n+1, 2n+2[$ , c'est à dire la fonction qui vaut un si la partie entière de  $t$  est paire et 0 sinon. Cette fonction n'est pas continue au point entier, mais est continue par morceaux.



Si  $t$  est un point où  $f$  n'est pas continue, la série converge toujours mais vers :

$$\frac{\lim_{y \rightarrow t^+} f(y) + \lim_{y \rightarrow t^-} f(y)}{2}$$

Dans le cas où  $f$  est continue en  $t$ , on a  $f(t) = \lim_{y \rightarrow t^+} f(y) = \lim_{y \rightarrow t^-} f(y)$  et donc on retrouve

$$f(t) = \frac{f(t) + f(t)}{2} = \frac{\lim_{y \rightarrow t^+} f(y) + \lim_{y \rightarrow t^-} f(y)}{2}$$

Si on reformule le théorème en disant que  $t \in \mathbb{R}$  un réel quelconque (où  $f$  n'est pas forcément continue), la conclusion devient :

$$\sum_{k=0}^n a_k \cos(2\pi \cdot F \cdot t) + \sum_{k=0}^n b_k \sin(2\pi \cdot F \cdot t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lim_{y \rightarrow t^+} f(y) + \lim_{y \rightarrow t^-} f(y)}{2}$$

On peut retenir que dans le cas où  $t$  est un point de discontinuité de  $f$ , alors **la série converge vers la moyenne des deux valeurs de f en "chaques bords" de la discontinuité**. Pour l'exemple donné au dessus qui vaut 0 et 1, en un point de discontinuité, la série converge vers  $\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ .

**Remarque.** Ce théorème nous dit que toute fonction périodique et continue par morceaux se décompose en une somme de fonctions cosinus et sinus. Dans notre cadre, nous nous intéressons en particulier au cas où la somme est finie pour simplifier et éviter les questions de convergence de séries qui sont hors programme. L'étude de ses fonctions fait donc sens puisque toutes les fonctions périodiques continues par morceaux admettent une décomposition de la sorte.

## 2 Le son

Le son, tout comme les vagues est une onde mécanique. Les ondes mécaniques sont caractérisées par le fait qu'elles proviennent de **la propagation d'une perturbation dans un milieu matériel**.

Dans le cadre du son, c'est l'air autour de nous qui constitue le milieu. Pour être précis, l'émission d'un son est la création d'une surpression qui se propage dans l'espace. Notons  $\Delta P(\vec{p}, t)$  la surpression créée au temps  $t$  au point  $\vec{p}$  de l'espace. Si on place un récepteur immobile au point  $\vec{p}_0$ , il va percevoir une surpression  $\Delta P(\vec{p}_0, t)$  au temps  $t$ , la pression  $P(t)$  que l'émetteur détecte est donc donnée par :

$$P(t) = P_0 + \Delta P(\vec{p}_0, t)$$

Où on note  $P_0$  la pression atmosphérique.

C'est alors  $f(t) = \Delta P(\vec{p}_0, t)$  **que l'on considère de la forme (1) et que l'on étudie**.

Quand on parle de son, on distingue plusieurs choses :

- (i) Le timbre du son : riche ou pauvre.
- (ii) La hauteur du son : aigu ou grave.
- (iii) L'intensité sonore : fort ou faible.

### 2.1 Timbre

Le timbre est lié aux nombres d'harmoniques dans l'onde. Prenons un exemple, soit  $f$  définie par  $f(t) = 2 + 3 \cos(\pi \cdot t) + \cos(2\pi \cdot t) + \cos(4\pi \cdot t)$  :

$$f(t) = \underbrace{2}_{\text{composante continue}} + \underbrace{3 \cos(2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot t)}_{\text{fondamentale}} + \underbrace{\cos(2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot t)}_{2^{eme} \text{ harmonique}} + \underbrace{\cos(2\pi \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot t)}_{4^{eme} \text{ harmonique}}$$

Plus un son a d'harmoniques, plus on le qualifie de riche. Lorsque  $f$  est de la forme :

$$f(t) = A_1 \cos(2\pi \cdot F \cdot t)$$

on dit que **le son est pur**. En toutes lettres, l'onde n'est **constituée que de sa fondamentale**.

### 2.2 Hauteur

La hauteur du son est liée à la fréquence. Plus précisément, dans le cas d'un son pur, plus la fréquence est basse (donc la courbe "étalée") plus le son est grave, et réciproquement plus la fréquence est haute (donc la courbe fait "beaucoup" d'allers-retours en "peu" de temps) plus le son est aigu. Ceci est dû à la manière dont notre cerveau interprète les signaux électriques transmis par notre oreille, qui elle mesure la variation de pression. C'est donc le "tempo" auquel "vibre l'air", qui différencie un son grave d'un son aigu.

### 2.3 Intensité sonore

La puissance  $E$  (*Energie/Temps*) propagée par une onde émise d'un point matériel dans toutes les directions de manière uniforme, doit se répartir dans l'espace sur une surface de plus en plus grande au fur et à mesure que l'onde se propage. Par le principe de conservation de l'énergie, la puissance transportée par unité de surface doit donc diminuer si on s'éloigne de la source (car la surface couverte par l'onde augmente, mais l'énergie totale reste la même).

Cette puissance est liée à la fréquence de l'onde **et** à son amplitude. Si la fréquence augmente, la puissance augmente ; de même si l'amplitude augmente, la puissance augmente.

**L'intensité sonore  $I$**  est alors définie comme **la puissance transportée (par l'onde) par unité de surface**. On a la formule suivante :

$$I(r) = \frac{E}{4\pi r^2} \quad (W.m^{-2})$$

Où  $r$  est la distance entre l'émetteur et le récepteur.

Pour des raisons pratiques, plutôt que de parler d'intensité sonore  $I$ , on parlera plus souvent **de niveau sonore**  $L$  qui se calcule en déciBels (dB) :

$$L = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

Où  $I_0 = 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$  est le seuil d'audibilité. Cette valeur a été fixée ainsi, car c'est l'intensité sonore minimale à partir de laquelle l'homme peut entendre un son. On peut noter que  $dB$  est une unité artificielle (comme les pourcentages), c'est à dire que c'est une unité de comparaison.

On peut remarquer que :

(i)  $L > 0$  si et seulement si  $I > I_0$ .

(ii)  $L = 0$  si et seulement si  $I = I_0$ .

(iii)  $L < 0$  si et seulement si  $I < I_0$ .

Et autrement dit, un son est "entendable" si  $L \geq 0$ .

**Remarque.** En réalité il y a moins de 1% de la population qui entend les sons ayant une valeur proche de 0db.

## 2.4 Addition d'ondes sonores

Si deux surpressions sont créées, la surpression résultante est la somme des deux (à quelques approximations près). **Donc les ondes sonores s'additionnent !** (c'est une propriété générale des ondes.) Dans le cas où deux sons purs d'équations :  $A \cos(2\pi \cdot F_1 \cdot t)$  et  $B \cos(2\pi \cdot F_2 \cdot t)$  sont reçus simultanément par un récepteur. La surpression reçue  $f(t)$  a pour équation :

$$f(t) = A \cos(2\pi \cdot F_1 \cdot t) + B \cos(2\pi \cdot F_2 \cdot t)$$

Et en particulier si  $F_1 = F_2$

$$f(t) = (A + B) \cos(2\pi \cdot F_1 \cdot t)$$

Et de plus si  $A = -B$

$$f(t) = 0$$

Il n'y a plus de surpression ! On peut "faire disparaître un son" avec un autre son !

### 3 Les Ondes Electromagnétiques

Les ondes électromagnétiques contrairement aux ondes mécaniques n'ont pas besoin de milieu matériel pour se propager.

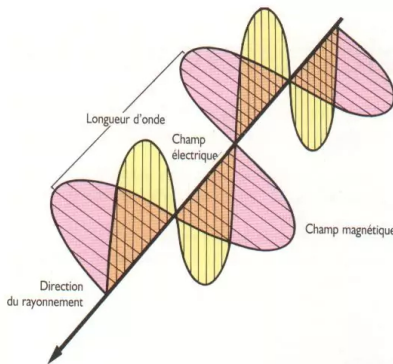
**Parenthèse Historique.** Au 17<sup>e</sup> siècle, Christiaan Huygens (1629 - 1695) mathématicien, physicien et astronome Néerlandais publie «Traité de la lumière», en étudiant les phénomènes de réflexion et de réfraction, il montre que la lumière a une nature ondulatoire. Or pour les savants de l'époque les seules ondes connues sont les ondes mécaniques. Il est assez naturel que s'impose chez eux l'idée que la lumière, comme les ondes mécaniques soit la propagation d'une perturbation d'un milieu. De cette idée naîtront de nombreuses hypothèses sur les propriétés de ce milieu, que l'on appellera «ether luminifère». Ce n'est qu'en 1905 qu'Albert Einstein balaya d'un revers de main cette idée d'ether luminifère en publiant «De la dynamique des corps en mouvement» où on peut y lire dans son introduction :

*Des exemples similaires, tout comme l'essai infructueux de confirmer le mouvement de la Terre relativement au «médium de la lumière», nous amène à la supposition que non seulement en mécanique, mais aussi en électrodynamique, aucune propriété des faits observés ne correspond au concept de repos absolu [...] Dans le texte qui suit, nous élevons cette conjecture au rang de postulat (que nous appellerons dorénavant «principe de relativité») et introduisons un autre postulat qui au premier regard est incompatible avec le premier : que la lumière se propage dans l'espace vide, à une vitesse  $V$  indépendante de l'état de mouvement du corps émetteur. [...] Il sera démontré que l'introduction d'un «ether luminifère» est superflu, puisque selon les conceptions que nous développerons, nous n'introduirons ni un «espace absolument au repos» muni de propriétés spéciales et ni n'associerons un vecteur vitesse à un point où des phénomènes électromagnétiques se déroulent.*

(Albert Einstein — De l'électrodynamique des corps en mouvement)

La même année Einstein publie un autre article, dans lequel il démontre que la lumière se comporte comme si elle était composée de corpuscules. Ce qui semble contredire l'hypothèse admise que la lumière était une onde. Contredire ? Non Einstein montre qu'il n'y a pas de contradiction.

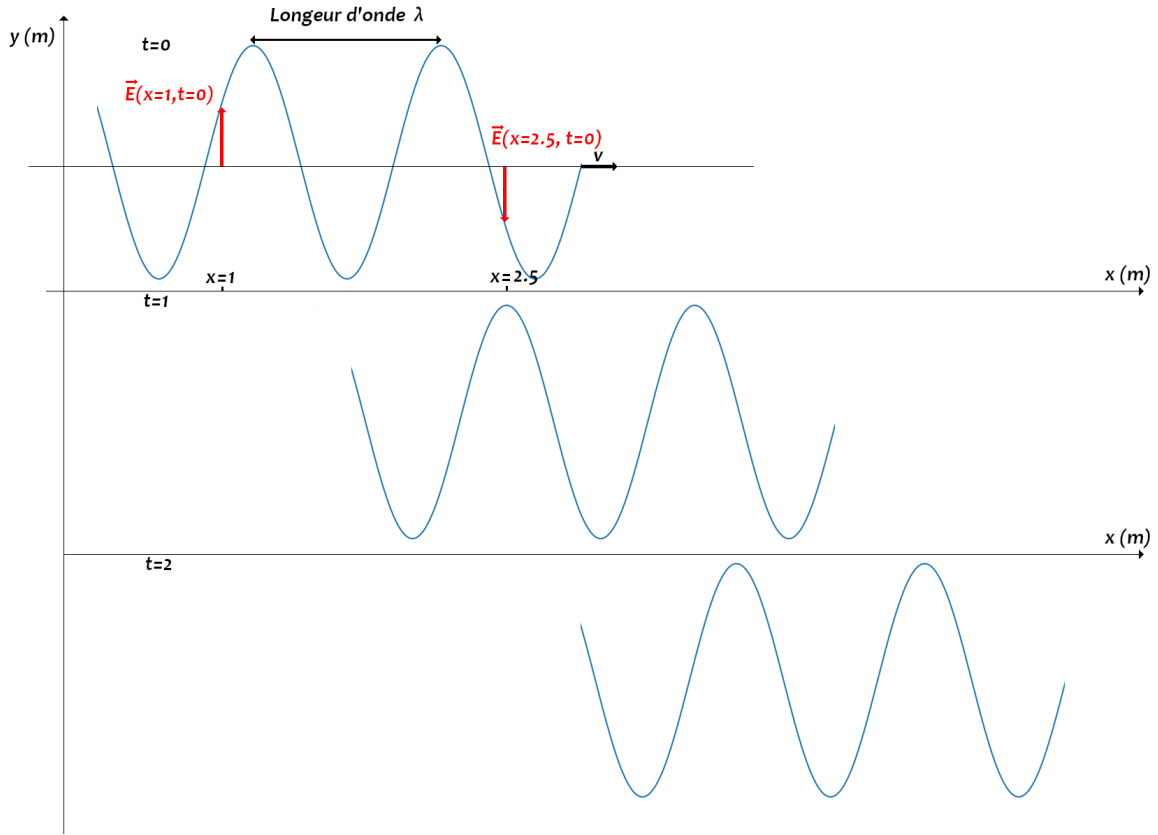
Dans le cadre du son, nous avons regardé le problème en un point fixé de l'espace et nous avons fait varier le paramètre temps. Nous pouvons aussi renverser le point de vue et fixer le temps (comme si l'on prenait une photo) et regarder la forme qu'a l'onde électromagnétique dans l'espace à un temps fixé. Il se trouve que son mouvement dans l'espace est aussi périodique (sur des distances raisonnablement courtes). La période  $\lambda$  ( $m^{-1}$ ) par rapport au paramètre d'espace est appelé **longueur d'onde**.



On a la formule suivante :

$$\lambda = \frac{v}{f}$$

Où  $f$  est la fréquence de l'onde, et  $v$  est la vitesse en valeur absolue de propagation de l'onde.



Dans le vide les ondes électromagnétiques se déplacent à vitesse constante  $c \approx 3.10^8 m.s^{-1}$ . Mais la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu (par exemple eau, air, plexiglass, etc ...) est inférieure.

Les équations qui décrivent le comportement du rayonnement électromagnétique sont appelées les équations de Maxwell (elles sont hors programme). Le type d'onde la plus simple satisfaisant les équations de Maxwell dans le vide sont de la forme :

$$E(\vec{p}, t) = A \cos \left( 2\pi \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{\lambda} - f \cdot t \right) \right)$$

Où  $E(\vec{p}, t)$  est la norme du champ électrique au point  $\vec{p}$  de l'espace, au temps  $t$  et  $\vec{u}$  est un vecteur unitaire qui pointe dans la direction de propagation de l'onde ( $\vec{u} = \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}$ ). Si l'on prend le bon repère et que l'on note  $\vec{p} = (x, y, z)$  on a l'équation :

$$E(\vec{p}, t) = A \cos \left( 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - f \cdot t \right) \right)$$

**Remarque.** Cette fonction est du type (1) par rapport à  $x$  et  $t$  !

### 3.1 Modulation

La modulation est une méthode permettant de transmettre une information encodée dans une onde (un son, une vidéo, etc...) en évitant certaines restrictions techniques telles que le parasitage par les installations électriques. Pour effectuer une modulation on a besoin de **deux** ondes, une onde porteuse que l'on a besoin pour «encoder» et «decoder» l'onde, et une onde qui représente le signal à transmettre que l'on appelle onde modulante. On utilise deux types de modulations différentes la modulation d'amplitude (AM) et la modulation de fréquence (FM) :

**[AM]** La modulation d'amplitude consiste en une modification de l'amplitude de la porteuse. Dans le cas simplifié où la porteuse  $F_p$  et l'information  $F_i$  sont sinusoïdales :

$$F_p(t) = A_p \cos(2\pi f_p \cdot t) \quad \& \quad F_i(t) = A_i \cos(2\pi f_i \cdot t)$$

Le signal modulé  $F_m$  est alors de la forme :

$$F_m(t) = A_p(1 + k \cdot F_i(t)) \cos(2\pi f_p \cdot t)$$

Où  $k$  est une valeur fixée, choisie de sorte que le signal modulé ait une variation d'amplitude mesurable dans les conditions de l'expérience.

**[FM]** La modulation de fréquence consiste en une modification de la fréquence de la porteuse. Il est plus dur d'obtenir des formules dans le cas de la modulation de fréquence. La modulation de fréquence est plus robuste que la modulation d'amplitude pour transmettre un message dans des conditions difficiles.