UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

# Semana 1. Mínimos cuadrados.

*Estudiante:*
Lina Maria Simbaqueba M.

*Profesor:*
Francisco A. Gómez J.

21 de marzo de 2022

# Condiciones para garantizar la solubilidad de un sistema desde la perspectiva de mínimos cuadrados.

Supongamos que se desea encontrar un polinomio $p(x) = a_n x^n + ... + a_0$ que modele un conjunto de $m$ datos dado: $\{(x_1, y_1), \cdots, (x_m, y_m)\}$. En lo que sigue supondremos que la cantidad $x_i = i$ corresponde al día $i$-ésimo de la medición. Desde la perspectiva de mínimos cuadrados se define la siguiente matriz de dimensión $(m) \times (n+1)$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2^n & 2^{n-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m^n & m^{n-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Así, si $x = [a_n, a_{n-1}, \cdots, 1]^T$ y $b = [y_m, y_{m-1}, \cdots y_1]^T$, el problema se reduce a encontrar el valor de $x$ tal que $||Ax - b||_2^2$ sea mínimo.

Al derivar el valor anterior e igualar a cero, se observa que para minimizar la función anterior se debe encontrar la solución el sistema $A^T A x = A^T b$, por lo cuál $x = (A^T A)^{-1} A^T b$, dónde $(A^T A)^{-1}$ es conocida como la matriz pseudo-inversa de A de Moore-Penrose. Para que este sistema tenga solución es fundamental que la matriz $A^T A$ sea una matriz invertible; es decir, que tenga determinante no nulo. Además de ser necesaria la condición de que la matriz A no tenga filas o columnas linealmente dependientes, el siguiente teorema muestra una condición para que la matriz $A^T A$ sea invertible. Al final de la demostración se muestran ejemplos específicos del procedimiento que se describe de forma general.

**Teorema 1.** *Sea $A$ la matriz definida anteriormente. Si $m \leq n$, $A^T A$ no es invertible .*

*Demostración.* Supongamos primero que $m = n$.

$$\begin{aligned} A^T A &= \begin{bmatrix} 1 & 2^m & \cdots & m^m \\ 1 & 2^{m-1} & \cdots & m^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2^m & 2^{m-1} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m^m & m^{m-1} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 + 2^{2m} + \cdots + m^{2m} & 1 + 2^{2m-1} + \cdots + m^{2m-1} & \cdots & 1 + 2^m + \cdots + m^m \\ 1 + 2^{2m-1} + \cdots + m^{2m-1} & 1 + 2^{2m-2} + \cdots + m^{2m-2} & \cdots & 1 + 2^{m-1} + \cdots + m^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 + 2^{m+1} + \cdots + m^{m+1} & 1 + 2^m + \cdots + m^m & \cdots & 1 + 2 + \cdots m \\ 1 + 2^m + \cdots + m^m & 1 + 2^{m-1} + \cdots + m^{m-1} & \cdots & 1 + 1 + \cdots 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2}$$

Sea $s[n,k] = \sum_{i=1}^{n} i^k$. Para determinar el determinante de $A^T A$ se utiliza la siguiente propiedad de los determinantes:

$$|A^T A| = \sum_{i=1}^{m} \begin{vmatrix} s[m,2m] & s[m,2m-1] & \cdots & s[m,m] \\ s[m,2m-1] & s[m,2m-2] & \cdots & s[m,m-1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s[m,m+1] & s[m,m-1] & \cdots & s[m,1] \\ i^m & i^{m-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{3}$$

Mostraremos que cada uno de los sumandos de la expresión anterior es igual a 0. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $i = m$; si $i \neq m$, se puede realizar una permutación $\pi(i) = m$, $\pi(m) = i$ y $\pi(j) = j$ para $j \notin \{i, m\}$. El determinante es invariante bajo esta permutación dada la conmutatividad de la suma.

Si se realiza sucesivamente las operaciones entre filas: $F_j = F_j - m^{m-j+1} * F_{m+1}$ para $1 \leq j \leq m$, se obtiene que:

$$\begin{vmatrix} s[m,2m] & s[m,2m-1] & \cdots & s[m,m] \\ s[m,2m-1] & s[m,2m-2] & \cdots & s[m,m-1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s[m,m+1] & s[m,m-1] & \cdots & s[m,1] \\ m^m & m^{m-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s[m-1,2m] & s[m-1,2m-1] & \cdots & s[m-1,m] \\ s[m-1,2m-1] & s[m-1,2m-2] & \cdots & s[m-1,m-1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s[m-1,m+1] & s[m-1,m] & \cdots & s[m-1,1] \\ m^m & m^{m-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{4}$$

Nuevamente, por propiedades de los determinantes, se tiene que el determinante anterior equivale a:

$$\sum_{i=1}^{m-1} \begin{vmatrix} s[m-1,2m] & s[m-1,2m-1] & \cdots & s[m-1,m] \\ s[m-1,2m-1] & s[m-1,2m-2] & \cdots & s[m-1,m-1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ i^{m+1} & i^m & \cdots & i \\ m^m & m^{m-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{5}$$

El proceso anterior puede repetirse una vez más tomando $i = m-1$. En general, después de repetir este proceso $j$ veces con $1 \leq j \leq m-1$, se tendrá que demostrar que el siguiente determinante es cero:

$$\begin{vmatrix} s[m-j,2m] & s[m-j,2m-1] & \cdots & s[m-j,m] \\ s[m-j,2m-1] & s[m-j,2m-2] & \cdots & s[m-j,m-1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m-j)^{m+j} & (m-j)^{m+j-1} & \cdots & m^j \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m-1)^{m+1} & (m-1)^m & \cdots & m-1 \\ m^m & m^{m-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{6}$$

Así, al repetir el procedimiento anterior $m-1$ veces se tiene el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (m-1)^{m+1} & (m-1)^m & \cdots & m-1 \\ m^m & m^{m-1} & \cdots & 1 \end{vmatrix} \tag{7}$$

El cuál es cero dado que $F_1 = F_2$.

Si $m < n$, el procedimiento que se mostró anteriormente debe repetirse una cantidad menor de veces para que en cada término de la expresión del determinante se encuentren dos filas linealmente dependientes.

□

**Ejemplo 2.** A continuación se muestra un ejemplo específico del procedimiento general de la demostración de la primera implicación cuando $m = n = 3$.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2^3 & 3^3 \\ 1 & 2^2 & 3^2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2^6+3^6 & 1+2^5+3^5 & 1+2^4+3^4 & 1+2^3+3^3 \\ 1+2^5+3^5 & 1+2^4+3^4 & 1+2^3+3^3 & 1+2^2+3^2 \\ 1+2^4+3^4 & 1+2^3+3^3 & 1+2^2+3^2 & 1+2+3 \\ 1+2^3+3^3 & 1+2^2+3^2 & 1+2+3 & 1+1+1 \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$|A^TA| = \sum_{i=1^3} \begin{vmatrix} 1+2^6+3^6 & 1+2^5+3^5 & 1+2^4+3^4 & 1+2^3+3^3 \\ 1+2^5+3^5 & 1+2^4+3^4 & 1+2^3+3^3 & 1+2^2+3^2 \\ 1+2^4+3^4 & 1+2^3+3^3 & 1+2^2+3^2 & 1+2+3 \\ i^3 & i^2 & i & 1 \end{vmatrix} \tag{9}$$

Si $i = 3$, el determinante correspondiente a este término corresponde a:

$$\begin{vmatrix} 1+2^6+3^6 & 1+2^5+3^5 & 1+2^4+3^4 & 1+2^3+3^3 \\ 1+2^5+3^5 & 1+2^4+3^4 & 1+2^3+3^3 & 1+2^2+3^2 \\ 1+2^4+3^4 & 1+2^3+3^3 & 1+2^2+3^2 & 1+2+3 \\ 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2^6 & 1+2^5 & 1+2^4 & 1+2^3 \\ 1+2^5 & 1+2^4 & 1+2^3 & 1+2^2 \\ 1+2^4 & 1+2^3 & 1+2^2 & 1+2 \\ 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \tag{10}$$

Este último determinante corresponde a la suma:

$$\sum_{i=1}^{2} = \begin{vmatrix} 1+2^6 & 1+2^5 & 1+2^4 & 1+2^3 \\ 1+2^5 & 1+2^4 & 1+2^3 & 1+2^2 \\ i^4 & i^3 & i^2 & i \\ 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \tag{11}$$

Tomando $i = 2$ se tiene que el determinante que corresponde a este término equivale a:

$$\begin{vmatrix} 1+2^6 & 1+2^5 & 1+2^4 & 1+2^3 \\ 1+2^5 & 1+2^4 & 1+2^3 & 1+2^2 \\ 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2 \\ 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2 \\ 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{12}$$

Por otro lado, si tomamos $m = 3$ y $n = 2$:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2^2 & 3^2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2^4+3^4 & 1+2^3+3^3 & 1+2^2+3^2 \\ 1+2^3+3^3 & 1+2^2+3^2 & 1+2+3 \\ 1+2^2+3^2 & 1+2+3 & 1+1+1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$|A^TA| = \sum_{i=1}^{3} \begin{vmatrix} 1+2^4+3^4 & 1+2^3+3^3 & 1+2^2+3^2 \\ 1+2^3+3^3 & 1+2^2+3^2 & 1+2+3 \\ i^2 & i & 1 \end{vmatrix} \tag{14}$$

Si $i = 3$, el determinante correspondiente a este término corresponde a:

$$\begin{vmatrix} 1+2^4+3^4 & 1+2^3+3^3 & 1+2^2+3^2 \\ 1+2^3+3^3 & 1+2^2+3^2 & 1+2+3 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{2} \begin{vmatrix} 1+2^4 & 1+2^3 & 1+2^2 \\ i^3 & i^2 & i \\ 3^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \tag{15}$$

Con $i = 2$ obtenemos el término

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^3 & 2^2 & 2 \\ 3^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \tag{16}$$

El anterior determinante es distinto de cero ya que todas sus filas y columnas son linealmente independientes. Realizando los cálculos consecutivos se obtiene que el determinante $|A^TA| = 4$.