UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Ejercicios capítulo 2.

Estudiante:
Lina Maria Simbaqueba M.

Profesor:
Francisco A. Gómez J.

29 de abril de 2022

2.1 Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo, con $x_1, \cdots x_k \in C$ y sean $\theta_1, \cdots \theta_k \in \mathbb{R}$ tales que $\theta_i \geq 0$, y $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$. Muestre que $\theta_1 x_1 + \cdots \theta_k x_k \in C$.

Solución. Procedamos por inducción sobre k. El caso base se tiene por definición de conjunto convexo: para todo $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1, x_2 \in C$, si $\theta_1 + \theta_2 = 1$, entonces $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$.

Para la hipótesis de inducción, supongamos que para todo $\theta_1, \cdots \theta_k \in \mathbb{R}$ y $x_1, \cdots, x_k \in C$, si $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$, entonces $\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k \in C$.

Tomemos ahora, $x_1 \cdots x_{k+1} \in C$ y $\theta_1 \cdots \theta_{k+1} \in \mathbb{R}$, tales que $\theta_1 + \cdots + \theta_{k+1} = 1$. Sea $\theta^* = \theta_1 + \cdots + \theta_k$. Tendremos que:

$$\begin{aligned}\theta_1 x_1 \cdots \theta_k x_k + \theta_{k+1} x_{k+1} =& \frac{\theta^*}{\theta^*}(\theta_1 x_1 + \cdots + \theta_k x_k) + \theta_{k+1} x_{k+1} \\ =& \theta^*(\frac{\theta_1}{\theta^*} x_1 + \cdots + \frac{\theta_k}{\theta^*} x_k) + \theta_{k+1} x_{k+1}\end{aligned}$$

Por definición de θ^*, $\frac{\theta_1}{\theta^*} + \cdots \frac{\theta_k}{\theta^*} = 1$ y por hipótesis de inducción, $\frac{\theta_1}{\theta^*} x_1 + \cdots + \frac{\theta_k}{\theta^*} x_k = x^* \in C$. La ecuación anterior se puede reescribir como sigue:

$$\theta_1 x_1 \cdots \theta_k x_k + \theta_{k+1} x_{k+1} = \theta^* x^* + \theta_{k+1} x_{k+1}$$

Dado que $\theta^* + \theta_{k+1} = 1$, por definición de conjunto convexo, $\theta^* x^* + \theta_{k+1} x_{k+1} \in C$.

2.3 *Convexidad de punto medio.* Un conjunto C es *punto-medio convexo* si cualesquiera dos puntos $a, b \in C$, su punto medio $\frac{a+b}{2} \in C$. Es obvio que todo conjunto convexo es punto-medio convexo. Pruebe que si C es cerrado y punto-medio convexo, entonces C es convexo.

Solución. Sea C conjunto punto-medio convexo y cerrado, $0 \leq \theta \leq 1 \in \mathbb{R}$ y $x_1, x_2 \in C$. Para ver que C es convexo, hay que probar que $x^* = \theta x_2 + (1 - \theta x_1) = \theta(x_2 - x_1) + x_1 \in C$.

Caso i. θ tiene expansión binaria finita. Es decir, $\theta = 0.a_1 a_2 \cdots a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{2^i}$ con $a_i \in \{0, 1\}$

Probemos por inducción que $x^* \in C$.

Caso base $n = 1$. En este caso, $\theta = 0.a_1$ con $a_1 \in \{0, 1\}$. Si $a_1 = 0$, se tiene que $x^* = x_1 \in C$; por otro lado, si $a_1 = 1$, $x^* = x_2 \in C$.

Como hipótesis de inducción, supongamos que para todo $\theta = 0.a_1 \cdots a_n$, $x^* = \theta(x_2 - x_1) + x_1 \in C$. Tomemos ahora $\theta = 0.a_1 \cdots a_{n+1}$, si se da el caso en que $a_{n+1} = 0$, por hipótesis de inducción se concluye que $x^* \in C$. Supongamos entonces que $a_{n+1} = 1$; en este caso, $x^* = (x_1^* + x_2^*)/2$, donde $x_1^* = (\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{2^i})(x_2 - x_1) + x_1$ el cuál pertenece a C por hipótesis de inducción y $x_2^* = (\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^n})(x_2 - x_1) + x_1$, x_2^* también pertenece a C debido a que, si $a_i = 1$ para todo i, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^n} = 1$ y, por tanto, $x_2^* = x_2$ por otro lado, si existe un $a_i \neq 1$, $\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^n} < 1$ y por hipótesis de inducción, $x_2^* \in C$. Dado que C es punto-medio convexo, se concluye que $x^* \in C$.

Caso ii. θ tiene expansión binaria infinita. Es decir, $\theta = \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{1}{2^i}$, donde $a_i = 1$ para todo $1 \leq i$, excepto una cantidad finita. Veamos que $x^* = \theta(x_2 - x_1) + x_1$ es un punto de acumulación del conjunto C y, dado que C es cerrado, $x^* \in C$.

Sea $r > 0$ un número real. para mostrar que x^* es punto de acumulación, veamos que existe θ^f con expansión binaria finita tal que $||x^* - \theta^f(x_2 - x_1) + x_1|| < r$. Por el razonamiento anterior se sabe que $\theta^f(x_2 - x_1) + x_1 \in C$.

Primero, analicemos cómo es la distancia entre dos puntos que se encuentran en el segmento de recta que conecta a x_1 con x_2: sean x_{θ_1} y x_{θ_2}, puntos en este segmento.

$$||x_{\theta_1} - x_{\theta_2}|| = ||\theta_1(x_2 - x_1) + x_1 - \theta_2(x_2 - x_1) - x_1|| = |\theta_1 - \theta_2| \cdot ||x_2 - x_1||$$

Dado que la distancia entre x_1 y x_2 es una constante, de la ecuación anterior se observa que la distancia entre dos puntos en el segmento que conecta a x_1 con x_2 depende del valor de θ_1 y θ_2.

Por la continuidad en los reales se sabe que existe un $n \in \mathbb{R}$ tal que $2^{-n} < \frac{r}{||x_2-x_1||}$; tomamos $\theta^f = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$. Se tiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}
||x^* - x_{\theta^f}|| =& |\theta - \theta^f| \cdot ||x_2 - x_1|| \\
=& (\sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{1}{2^i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}) \cdot ||x_2 - x_1|| \\
\leq& (1 - 2(1 - 2^{-n-1}) + 1) \cdot ||x_2 - x_1|| \\
=& (2 - 2(1 - 2^{-n-1})) \cdot ||x_2 - x_1|| = (2^{-n}) \cdot ||x_2 - x_1|| < r
\end{aligned}$$

Lo anterior muestra que x^* es punto de acumulación y, por tanto, pertenece a C.

2.4 Muestre que la envolvente convexa de un conjunto S es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen S.

Solución. Recordemos que la envolvente convexa de un conjunto S, es el conjunto de todas las combinacioness convexas con elementos en S. Queremos ver que:

$$conv(S) = \{\theta_1 x_1 + ... + \theta_k x_k | x_i \in S, \theta_i \geq 0, i = 1, ..., k, \theta_1 + ... + \theta_k = 1\} = \cap\{C \subseteq \mathbb{R}^n | C \text{ convexo}, \ S \subseteq C\} = \cap_C$$

Sea $x = \theta_1 x_1 + ... + \theta_k x_k \in conv(S)$, una combinación convexa de elementos de S; si $S \subseteq C$ y C es convexo, por definición, $x \in C$. Así, queda demostrado que $conv(s) \subseteq \cap_C$.

Dado que, en particular, $S \subseteq conv(S)$ y $conv(S)$ es un conjunto convexo, $conv(S) \in \{C \subseteq \mathbb{R}^n | C \text{ convexo}, \ S \subseteq C\}$ y esto implica que $\cap_C \subseteq conv(S)$.

2.5 ¿Cuál es la distancia entre dos hiperplanos paralelos $A_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_1\}$ y $A_2 = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = b_2\}$?

Solución. Se sabe que b_1 y b_2 representan el desfase entre el hiperplano A_1 y A_2 respectivamente y el origen, específicamente, $\frac{|b_1|}{||a||}$ y $\frac{|b_2|}{||a||}$ representan la distancia entre cada hiperplano y el origen. Esto implica, que la distancia entre planos viene dada por la cantidad: $\frac{|b_2-b_1|}{||a||}$. En $\mathbb{R}^2$ esta situación se representa como se ve en la Figura 1.

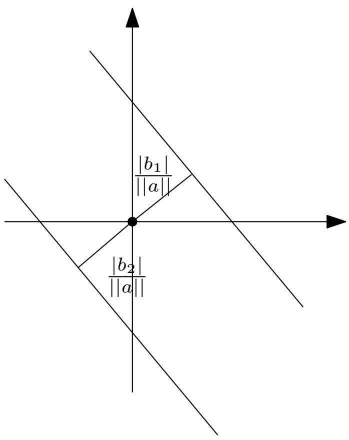

Figura 1: Distancia entre hiperplanos en $\mathbb{R}^2$

2.8 Cuál de los siguientes conjuntos S son poliedros?

- $S = \{y_1a_1 + y_2a_2 | -1 \leq y_1 \leq 1, -1 \leq y_2 \leq 1\}$, con $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$.
  S es un poliedro.
  Si a_1 y a_2 son linealmente independientes, S consta de la región limitada por los segmentos de recta: $\overline{a_1 + a_2, a_1 - a_2}$, $\overline{a_1 + a_2, a_2 - a_1}$, $\overline{a_2 - a_1, -a_1 - a_2}$ y $\overline{a_1 - a_2, -a_1 - a_2}$.
  Para ver esto, consideremos b_1 y b_2, vectores ortogonales a a_1 y a_2 respectivamente.
  Consideremos la matriz $A = (b_2^T, -b_2^T, b_1^T, -b_1^T)^T$, y el vector $b = (b_2^T a_1, b_2^T a_1, b_1^T a_2, b_1^T a_2)^T$. Veamos que $S = \{x | Ax \preceq b\}$. Sea $x \in S$.

$$Ax = A(y_1a_1 + y_2a_2) = \begin{bmatrix} b_2^T(y_1a_1 + y_2a_2) \\ -b_2^T(y_1a_1 + y_2a_2) \\ b_1^T(y_1a_1 + y_2a_2) \\ -b_1^T(y_1a_1 + y_2a_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1b_2^T a_1 \\ -y_1b_2^T a_1 \\ y_2b_1^T a_2 \\ -y_2b_1^T a_2 \end{bmatrix} \preceq \begin{bmatrix} b_2^T a_1 \\ b_2^T a_1 \\ b_1^T a_2 \\ b_1^T a_2 \end{bmatrix} = b$$

  Lo anterior implica que $x \in \{x | Ax \preceq b\}$.
  Tomemos ahora $x \in \{x | Ax \preceq b\}$. Dado que a_1 y a_2 son linealmente independientes, $x = y_1a_1 + y_2a_2$ para $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, veamos que $-1 \leq y_1, y_2 \leq 1$.
  Dado que $Ax \preceq b$, de las dos primeras filas de A, se tiene que $b_2^T x \leq b_2^T a_1$ y $-b_2^T x \leq b_2^T a_1$, esto implica que $-b_2^T a_1 \leq b_2^T(y_1a_1 + y_2a_2) = y_1b_2^T a_1 \leq b_2^T a_1$, como a_1 y a_2 son linealmente independientes y b_2 es perpendicular a a_2, $b_2^T a_1 \neq 0$ y, por tanto, $-1 \leq y_1 \leq 1$. Análogamente, de las filas 3 y 4 de A se concluye que $-1 \leq y_2 \leq 1$.
  En otro caso, si a_1 y a_2 son linealmente dependientes, es fácil ver que S equivale a $\{y_1a_1 + \alpha y_2a_1, -1 \leq y_1, y_2 \leq 1\}$ el cuál corresponde al segmento de recta $\{a_1t | -1 - \alpha \leq t \leq 1 + \alpha\}$
- $S = \{x \in \mathbb{R}^n | x \succeq 0, \mathit{1}^T x = 1, \sum_{i=1}^n x_ia_i = b_1, \sum_{i=1}^n x_ia_i^2 = b_2\}$, donde $a_1, ..., a_n, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.
  Es un poliedro. Sea $A = Id_n$, y F de dimensión $3 \times n$:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix}$$

  y el vector $g = (1, b_1, b_2)^T$. Tendremos que el conjunto S se puede reescribir de la forma: $S = \{x | Ax \succeq 0, Fx = g\}$.
- $S = \{x \in \mathbb{R}^n | x \succeq 0, x^T y \leq 1 \text{para todo } y \text{ con } ||y||_2 = 1\}$
  No es un poliedro. Para reescribir este conjunto utilicemos la forma geométrica del producto punto: $x^T y = x \cdot y = ||x|| ||y|| \cos(\theta)$, donde θ es el ángulo entre x y y. Dado que $||y|| = 1$, se tiene que $x \cdot y = ||x|| \cos(\theta)$. Así, si $x \in S$, $||x|| \cos(\theta) \leq 1$; como esto debe cumplirse para todo y con norma 1, en particular debe cumplirse si $\theta = 0$; así, $||x|| \leq 1$.
  El razonamiento anterior implica que S puede reescribirse de la siguiente forma $S = \{x \in \mathbb{R}^n | x \succeq 0, ||x|| \leq 1\}$; en $\mathbb{R}^2$ este conjunto representa la intersección entre el círculo unitario y el primer cuadrante y esta región no es un poliedro ya que no puede expresarse como la intersección finita de semiespacios.
- $S = \{x \in \mathbb{R}^n | x \succeq 0, x^T y \leq 1 \text{para todo } y \text{ con } \sum_{i=1}^n |y_i| = 1\}$
  S es un poliedro. Considere $S' = \{x \in \mathbb{R}^n | 0 \preceq x \preceq 1\}$. Veamos que $S' = S$.
  Si $x \in S'$ y $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sum_{i=1}^n |y_i| = 1$. Tendremos que:

$$\begin{aligned} x^T y \leq |x \cdot y| =& |x_1y_1 + \cdots x_ny_n \\ \leq& x_1|y_1| + \cdots + x_n|y_n| \\ \leq& x_1|y_1| + \cdots + x_n|y_n| \\ \leq& |y_1| + \cdots + |y_n| = 1 \end{aligned}$$

  Con lo que se concluye que $x \in S$.
  Tomemos ahora $x \in S$. Como $x^T y \leq 1$ para todo y tal que $\sum_{i=1}^n |y_i| = 1$, en particular, $x^T y \leq 1$ si se toma $y = e_i$, donde e_i es el vector que tiene en todas las entradas 0, excepto en la posición i-ésima,

donde tiene un 1. En este caso, $x^T y = x_i \leq 1$. Así, $0 \leq x_i \leq 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Esto implica que $x \in S'$.
Sea $A = (-e_1^T \quad -e_2^T \cdots -e_n^T \quad e_1^T \quad e_2^T \cdots e_n^T)^T$, una matriz de dimensión $2n \times n$, y $b = (0 \quad 0 \cdots 0 \quad 1 \quad 1 \cdots 1)^T$ un vector con 0 en las primeras n coordenadas y 1 en las siguientes n coordenadas. $S' = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \preceq b\}$.

2.9 Sea $x_0, \cdots x_K \in \mathbb{R}^n$. Considere el conjunto V de puntos que son más cercanos a x_0 que a x_i para $1 \leq i \leq K$.

$$V = \{x \in \mathbb{R}^n | ||x - x_0||_2 \leq ||x - x_i||_2, i = 1, \cdots, K\}$$

V es conocido como la *región de Voronoi* al rededor de x_0 con respecto a $x_1, \cdots x_k$.

a. Muestre que V es un poliedro. Exprese a V en la forma $V = \{x | Ax \preceq b\}$.

Solución. Para cada i, el conjunto de puntos que está más cerca a x_0 que a x_i corresponde a un semiespacio limitado por el hiperplano cuyo vector normal es $x_i - x_0$ y pasa por el punto medio entre x_0, x_i. Es decir, el conjunto de puntos que está más cercano a x_0 que a x_i corresponde al semiespacio: $(x_i - x_0) \cdot (x - \frac{x_i + x_0}{2}) \leq 0$, el cuál equivale a $(x_i - x_0) \cdot x \leq (x_i - x_0) \cdot \frac{x_i + x_0}{2}$. La siguiente cadena de desigualdades muestra que $x \in V$ si y solo si $(x_i - x_0) \cdot x \leq (x_i - x_0) \cdot \frac{x_i + x_0}{2}$.

$$\begin{aligned}
||x - x_0|| \leq& ||x - x_i|| \\
||x - x_0||^2 \leq& ||x - x_i||^2 \\
(x - x_0) \cdot (x - x_0) \leq& (x - x_i) \cdot (x - x_i) \\
x \cdot x - 2x \cdot x_0 + x_0 \cdot x_0 \leq& x \cdot x - 2x \cdot x_i + x_i \cdot x_i \\
-2x \cdot x_0 + 2x \cdot x_i \leq& x_i \cdot x_i - x_0 \cdot x_0 \\
-2x \cdot x_0 + 2x \cdot x_i \leq& x_i \cdot x_i - x_0 \cdot x_0 + x_i \cdot x_0 - x_0 \cdot x_i \\
(x_i - x_0) \cdot x \leq& \frac{1}{2}(x_i - x_0) \cdot (x_i + x_0)
\end{aligned}$$

Así, si $A = ((x_1 - x_0)^T \cdots (x_K - x_0)^T)^T$ y $b = \frac{1}{2}((x_1 - x_0)^T (x_1 + x_0) \cdots (x_K - x_0)^T (x_K + x_0)^T)^T$, $V = \{x | Ax \preceq b\}$.

b. Recíprocamente, dado un poliedro P con interior no vacío, muestre como encontrar $x_0, \cdots x_k$ tal que el poliedro es la región de Voronoi de x_0 con respecto a $x_1, \cdots x_k$.

Solución. Sea $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \preceq b\}$ un poliedro con interior no vacío, dónde A es una matrix $k \times n$. Sea $x_0 \in int(P)$. Para cada $1 \leq i \leq k$, si N_i corresponde al i-ésimo renglón de la matriz A, se sabe que N_i representa el vector normal a un hiperplano que genera el semiespacio: $\pi_i := N \cdot x \leq b_i$, donde b_i es la coordenada i-ésima del vector b. Se sabe que la distancia del hiperplano π_i al punto x_0 viene dada por la ecuación:

$$d_i(x_0, \pi_i) = \frac{|N_i \cdot x_0 - b_i|}{||N_i||}$$

Así, para cada i, $x_i \neq x_0$ corresponde a un punto sobre la recta perpendicular al plano π_i que pasa por el punto x_0 tal que la distancia entre x_i y π_i sea igual a $d_i(x_0, \pi_i)$.
La ecuación de la recta perpendicular a π_i y que pasa por x_0 viene dada por la ecuación $x_0 + tN_i$, con $t \in \mathbb{R}$. Queremos encontrar el t tal que $||x_0 - (x_0 + tN)|| = 2d_i(x_0, \pi_i)$, es decir, $t = \frac{2d_i(x_0, \pi_i)}{||N||}$. Esto implica que $x_i = x_0 + \frac{2|N_i \cdot x_0 - b_i|}{||N||^2} N$.

c. También podemos considerar los conjuntos:

$$V_k = \{x \in \mathbb{R}^n | ||x - x_k|| \leq ||x - x_i||, i \neq k\}$$

El cuál corresponde a los puntos en $\mathbb{R}^n$ para los cuales el punto más cercano en el conjunto $\{x_0, \cdots x_K\}$ es x_k.

Los conjuntos $V_0, \cdots V_K$ corresponden a la descomposición poliedral de $\mathbb{R}^n$. Específicamente, los conjuntos V_k son poliedros, $\cup_{k=0}^{K} V_k = \mathbb{R}^n$, y $intV_i \cap intV_j = \emptyset$ para $i \neq j$.
Suponga que $P_1, \cdots P_m$ son poliedros tales que $\cup_{i=1}^{m} P_i = \mathbb{R}^n$, tales que $intP_i \cap intP_j = \emptyset$ para $i \neq j$. ¿Puede esta descomposición ser descrita como la región de Voronoi generada por un conjunto apropiado de puntos?

2.10 *Conjunto solución de una inecuación cuadrática.* Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ el conjunto solución de una desigualdad cuadrática,

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T Ax + b^T x + c \leq 0\}$$

Con $A \in S^n$, $b \in \mathbb{R}^n$, y $c \in \mathbb{R}$.

a. Muestre que C es convexo si $A \succeq 0$.

Solución. Sea $\theta_1 \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \theta_1 \leq 1$, $\theta_2 = 1 - \theta_1$ y $x_1, x_2 \in C$. Para ver que C es convexo, veamos que $m = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in C$.
Para esto, notemos que dado que $A \succeq 0$, $x^T Ax \geq 0$ para todo $x \neq 0$ y, por tanto, $\theta_1^2 x_1^T Ax_1 + \theta_1 b^T x_1 \leq -\theta_1 c$, análogamente, $\theta_2^2 x_2^T Ax_2 + \theta_2 b^T x_2 \leq -\theta_2 c$. Así, se tiene que:

$$\begin{aligned}(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2)^T A(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2) + b^T(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2) + c =& \theta_1^2 x_1^T Ax_1 + \theta_2^2 x_2^T Ax_2 + \theta_1 b^T x_1 + \theta_2 b^T x_2 + c \\ \leq& -\theta_1 c - \theta_2 c + c = -\theta_1 c - (1-\theta_1)c + c = 0\end{aligned}$$

Así, se concluye que $m \in C$ y, por tanto, C es convexo.

b. Muestre que la intersección de C y el hiperplano definido por $g^T x + h = 0$ con $g \neq 0$ es convexo si $A + \lambda gg^T \succeq 0$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solución. Sea $B = A + \lambda gg^T$, entonces $A = B - \lambda gg^T$. Reescribimos el conjunto C en términos de B, con las hipótesis del problema:

$$\begin{aligned}x^T Ax + b^T x + c =& x^T(B - \lambda gg^T)x + b^T x + c \\ =& x^T Bx - x^T \lambda gg^T x + b^T x + c \\ =& x^T Bx - \lambda x^T gg^T x + b^T x + c \\ =& x^T Bx - \lambda(g^T x)^T g^T x + b^T x + c \\ =& x^T Bx - \lambda h^2 + b^T x + c \\ =& x^T Bx - b^T x + (c - \lambda h^2)\end{aligned}$$

Dado que, por hipótesis, B es semidefinida positiva, $\{x | x^T Bx - b^T x + (c - \lambda h^2) \leq 0\}$ es un conjunto convexo (esto se demostró en la parte a. de este punto). Dado que un hiperplano es un conjunto convexo, se sabe que la intersección de conjuntos convexos es convexo.

Además, el converso de estos enunciados no es cierto. Basta con ver que el primer enunciado no se cumple ya que el segundo puede verse como un caso particular del primero:
Tomemos $A = -1$, $b = c = 0$. En este caso $A \not\succeq 0$ y, sin embargo, $-x^2 \leq 0$ se cumple para todos los reales y este conjunto es convexo.

2.14 *Conjuntos expandidos y restringidos.* Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, y sea $||\cdot||$ la norma sobre $\mathbb{R}^n$.

a. Para $a \geq 0$ definimos $S_a = \{x | dist(x, S) \leq a\}$, donde $dis(x, S) = \inf_{y \in S} ||x - y||$. Nos referimos a S_a como S extendido por a. Muestre que si S es convexo, entonces S_a es convexo.

Solución. Sean $x_1, x_2 \in S_a$, entonces $dist(x_1, S), dist(x_2, S) \leq a$. Como S es convexo, dado $0 \leq \theta_1 \leq 1$ y $\theta_2 = 1 - \theta_1$, se sabe que $S' = \{\theta_1 y_1 + \theta_2 y_2 | y_1, y_2 \in S\} \subseteq S$ y, por tanto, $\inf_{y_1, y_2 \in S'} ||x - y|| \geq \inf_{y \in S} ||x - y||$. Se tiene la siguiente cadena de desigualdades:

$$
\begin{aligned}
dist(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2, S) =& \inf_{y\in S}||\theta_1 x_2 + \theta_2 x_2 - y|| \\
&\leq \inf_{y_1,y_2\in S}||\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 - \theta_1 y_1 - \theta_2 y_2|| \\
&\leq \inf_{y_1,y_2\in S}\theta_1||x_1 - y_1|| + \theta_2||x_2 - y_2|| \\
&\leq \inf_{y_1\in S}\theta_1||x_1 - y_1|| + \theta_2 \inf_{y_2\in S}||x_2 - y_2|| \\
\leq \theta_1 a + (1-\theta_1)a = a
\end{aligned}
$$

Así, $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in S_a$ y, por tanto, S_a es convexo.

b. Para $a \geq 0$ definimos $S_{-a} = \{x|B(x,a) \subseteq S\}$, donde $B(x,a)$ es la bola con centro en x y radio a. Nos referimos a S_{-a} como el truncamiento o la restricción de S por a. Dado que S_{-a} es el conjunto de todos los puntos que se encuentran al menos a una distancia de a del conjunto $\mathbb{R}^n/S$. Muestre que si S es convexo, S_{-a} es convexo.

Solución. Se sabe que $B(x,a) = \{x + x_0|||x_0|| \leq a\}$. Sean $x_1, x_2 \in S_{-a}$ y $\theta_1 \in \mathbb{R}$ con $0 \leq \theta_1 \leq 1$ y $\theta_2 = 1 - \theta_1$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $||x_0|| \leq a$. Veamos que $x_1\theta_1 + x_2\theta_2 + x_0 \in S$, para así concluir que $B(x_1\theta_1 + x_2\theta_2, a) \subseteq A$.
En efecto, consideremos la siguiente cadena de igualdades:

$$
\begin{aligned}
x_1\theta_1 + \theta_2 x_2 + x_0 =& x_1\theta_1 + \theta_2 x_2 + \theta_1 x_0 + \theta_2 x_0 \\
=& \theta_1(x_1 + x_0) + \theta_2(x_2 + x_0)
\end{aligned}
$$

Como $B(x_1, a) \subseteq S$ y $B(x_2, a) \subseteq S$, entonces $x_1 + x_0 \in S$ y $x_2 + x_0 \in S$. Dado que S es convexo, se concluye que $\theta_1(x_1 + x_0) + \theta_2(x_2 + x_0) \in S$ y así, queda demostrado que $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \in S_{-a}$ y, por tanto, S_{-a} es un conjunto convexo.

2.15 *Algunos conjuntos de distribuciones de probabilidad.* Sea x una variable aleatoria con valor real tal que $\boldsymbol{prob}(x = a_i) = p_i$, para $i = 1, ..., n$, donde $a_1 < a_2 < \cdots a_n$. Por supuesto $p \in \mathbb{R}^n$ se encuentra en el simplejo de probabilidad estándar: $P = \{p|\mathbf{1}^T p = 1, p \succeq 0\}$. ¿Cuáles de las siguientes condiciones son convexas en p?

a. $\alpha \leq \boldsymbol{E}f(x) \leq \beta$ con $\boldsymbol{E}f(x) = \sum_{i=1}^n p_i f(a_i)$. Este conjunto es convexo dado que puede representarse como un poliedro.

b. $\boldsymbol{prob}(x \geq \alpha) \leq \beta$. Dado que esta equivale a $\sum_{i|a_i \geq a} p_i \leq \beta$, esta condición es convexa ya que puede representarse como un poliedro.

c. $\boldsymbol{E}|x^3| \leq \alpha \boldsymbol{E}|x|$. Esta condición puede reescribirse como sigue:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n p_i|a_i|^3 \leq& \alpha \sum_{i=1}^n p_i a_i \\
\sum_{i=1}^n p_i(|a_i|^3 -& \alpha a_i) \leq 0
\end{aligned}
$$

La cuál es convexa ya que representa a un poliedro.

d. $\boldsymbol{E}x^2 \leq \alpha$. Análogo al caso anterior, esta condición es convexa ya que puede representarse por el poliedro: $\sum_{i=1}^n p_i a_i^2 \leq \alpha$

e. $\boldsymbol{E}x^2 \geq \alpha$. Análogo al caso anterior, es una condición convexa.

f. $\boldsymbol{var}(x) \leq \alpha$, donde $\boldsymbol{var}(x) = \boldsymbol{E}(x - \boldsymbol{E}x)^2$. NO es una condición convexa sobre la variable p necesariamente. Hallemos otra expresión para la varianza:

$$
\begin{aligned}
Var(x) = E(x - Ex)^2 =& E(x - \sum_{i=1}^{n} Ex)^2 \\
=& \sum_{j=1}^{n} p_j (a_j - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i)^2 \\
=& \sum_{j=1}^{n} p_j (a_j^2 - 2a_j \sum_{i=1}^{n} p_i a_i + (\sum_{i=1}^{n} p_i a_i)^2) \\
=& \sum_{j=1}^{n} p_j a_j^2 - 2\sum_{j=1}^{n} p_j a_j \sum_{i=1}^{n} p_i a_i + \sum_{j=1}^{n} p_j (\sum_{i=1}^{n} p_i a_i)^2 \\
=& Ex^2 - 2(Ex)^2 + (E(x))^2 = Ex^2 - (Ex)^2
\end{aligned}
$$

Tomando $n = 2$ tendremos:

$$Var(x) = p_1 a_1^2 + p_2 a_2^2 - p_1^2 a_1^2 - 2p_1 p_2 a_1 a_2 - p_2^2 a_2^2 \leq \alpha$$

Tomando $a_1 = 1$, $a_2 = 0$ y $\alpha = 0$, tendremos:

$$Var(x) = p_1 - p_1^2 \leq 0$$

Lo anterior implica $p_1(1 - p_1) \leq 0$ y esta inecuación tiene solución para $p_1 \leq 0$ y $p_1 \geq 1$. Este conjunto no es convexo ya que $(0, 0)$ y $(1, 0)$ pertenecen al conjunto, sin embargo, ningún punto en el segmento que une a estos dos puntos pertenece al conjunto solución.

g. $Var(x) \geq \alpha$.
Siguiendo el razonamiento anterior, tenemos que $Var(x) = Ex^2 - (Ex)^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} p_i a_i)^2 \geq \alpha$. La condición anterior equivale a la desigualdad: $(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i)^2 - \sum_{i=}^{n} p_i a_i^2 \leq \alpha$. Reescribamos la expresión anterior, sea $p = (p_1, p_2 \cdots, p_n)$

$$
\begin{aligned}
(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2 =& \sum_{i=1}^{n} p_i^2 a_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} p_i a_i (\sum_{j=i+1}^{n} p_j a_j) - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i^2 \\
=& p^T \begin{bmatrix} a_1^2 & \cdots & a_1 a_i & \cdots & a_1 a_n \\ a_2 a_1 & \cdots & a_2 a_i & \cdots & a_2 a_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_j a_1 & \cdots & a_j a_i & \cdots & a_j a_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_n a_1 & \cdots & a_n a_i & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix} p - \left[a_1^2, \cdots a_n^2\right] \\
=& p^T a a^T p - a' p
\end{aligned}
$$

La ecuación anterior tiene la fórma de una inecuación cónica, las cuales se estudiaron en el punto 2,10. Dado que aa^T es una matriz definida semipositiva, se concluye que el conjunto que satisface esa desigualdad es convexo.

h. $\boldsymbol{quartile}(x) \geq \alpha$, donde $\boldsymbol{quartile}(x) = \text{ínf}\{\beta | \boldsymbol{prob}(x \leq \beta) \geq 0{,}25\}$
Esta condición es convexa. Si se da el caso en que $\boldsymbol{quartile}(x) \geq \alpha$, por definición: $\text{ínf}\{\beta | \boldsymbol{prob}(x \leq \beta) \geq 0{,}25\} \geq \alpha$. Se sabe que $prob(x \leq m) = \sum_{i=1}^{k} a_i$, dónde k es el máximo índice tal que $a_k \leq m$. Además, por definición de ínfimo, si $a < \alpha$, $prob(x \leq a) < 0{,}25$. Se concluye que si k es el máximo índice tal que $a_k < \alpha$, se tendrá que $prob(x \leq a_k) < 0{,}25$. Recíprocamente, si $prob(x \leq a) < 0{,}25$ para todo $a \leq \alpha$, se concluye que $\alpha \leq \text{ínf}\{\beta | \boldsymbol{prob}(x \leq \beta) \geq 0{,}25\}$. Así, una condición equivalente para que $\boldsymbol{quartile}(x) \geq \alpha$ es que $\sum_{i=1}^{k} p_i < 0{,}25$. Dado que esta desigualdad es lineal en p y, por tanto, se puede expresar como un poliedro, esta condición en convexa.

i. $\boldsymbol{quartile}(x) \leq \alpha$.
Por definición de ínfimo, esta condición equivale a que para todo $m \geq \alpha$, $prob(x \leq m) \geq 0{,}15$ así, si k es el mínimo índice tal que $a_k \geq \alpha$, se debe satisfacer la desigualdad $\sum_{i=1}^{k} p_i \geq 0{,}25$, la cuál, al ser una desigualdad lineal en p, muestra que esta condición es convexa.

2.16 Muestre que si S_1 Y s_2 son conjuntos convexos en $\mathbb{R}^{m+n}$, entonces su suma parcial también lo es:

$$S = \{(x, y_1 + y_2) | x \in \mathbb{R}^m, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n, (x, y_1) \in S_1, (x, y_2) \in S_2\}$$

Solución. Sean $(x_1, y_1 + y_2)$, $(x_2, y_3 + y_4)$ elementos de S y $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq \theta \leq 1$ y $theta_1 = 1 - \theta$. Se tiene que:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1 + y_2)\theta + (x_2, y_3 + y_4)\theta_1 =& (x_1\theta + x_2\theta_1, y_1\theta + y_2\theta + y_3\theta_1 + y_4\theta_1)\\ =& (x^*, (y_1\theta + y_3\theta_1) + (y_2\theta + y_4\theta_1))\\ =& (x^*, y_1^* + y_2^*)\end{aligned}$$

Por convexidad, se tiene que $x^* \in S_1$ y $y_1^*, y_2^* \in S_2$. Se concluye que $(x_1, y_1 + y_2)\theta + (x_2, y_3 + y_4)\theta_1 \in S$ y, por tanto, S es convexo.

2.17 *Imagen de poliedros bajo función perspectiva.* In este problema estudiamos la imagen de hiperplanos, subespacios y poliedros bajo la función perspectiva $P(x, t) = x/t$, con $don(P) = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}$. Para cada una de las definiciones del conjunto C, de una simple descripción de $P(C) = \{v/t | (v, t) \in C, t > 0\}$.

a. El poliedro $C = \boldsymbol{conv}\{(v_1, t_1), \cdots, (v_k, t_k)\}$, donde $v_i \in \mathbb{R}^n$ y $t_i > 0$.
Tomemos un elemento de $m \in P(C)$. Por definición, $m = \frac{\theta_1 v_1 + \cdots \theta_k v_k}{\theta_1 t_1 + \cdots \theta_k t_k}$ con $\theta_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq k$ y $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$. m se puede reescribir como sigue:

$$m = \frac{\theta_1 t_1}{\theta_1 t_1 + \cdots + \theta_k t_k} \frac{v_1}{t_1} + \cdots + \frac{\theta_k t_k}{\theta_1 t_1 + \cdots \theta_k t_k} \frac{v_k}{t_k}$$

Dado que $\frac{\theta_i t_i}{\theta_1 t_1 + \cdots + \theta_k t_k} \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq k$, y, además $\sum_{i=1}^{k} \frac{\theta_i t_i}{\theta_1 t_1 + \cdots + \theta_k t_k} = 1$, se concluye que m es un elemento de $\boldsymbol{conv}\{\frac{v_1}{t_1}, \cdots, \frac{v_k}{t_k} | v_i \in \mathbb{R}^n, t_i > 0\}$. Se concluye que $P(C) \subseteq \boldsymbol{conv}\{\frac{v_1}{t_1}, \cdots, \frac{v_k}{t_k}\}$.
Recíprocamente, si se tiene un elemento $m \in \boldsymbol{conv}\{\frac{v_1}{t_1}, \cdots, \frac{v_k}{t_k}\}$. Por definición:

$$m = \theta_1 \frac{v_1}{t_1} + \cdots + \theta_k \frac{v_k}{t_k}$$

con $\theta_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$, se puede definir $\bar{\theta}_i = \frac{\theta_i t_i}{\theta_1 t_1 + \cdots \theta_k t_k}$ y es fácil verificar que $m = \frac{\bar{\theta}_1 v_1 + \cdots + \bar{\theta}_k v_k}{\theta_1 t_1 + \cdots + \theta_k t_k}$.
Así, se concluye que $P(C) = \boldsymbol{conv}\{\frac{v_1}{t_1}, \cdots \frac{v_k}{t_k}\}$.

b. El hiperplano $C = \{(v, t) | f^T v + gt = h\}$ con al menos una: f y g distinta de cero.
Por definición, un elemento de $P(C)$ satisface la relación $\frac{f^T v + gt}{t} = f^T v' + g = \frac{h}{t}$. Así, $P(C) = \{v \in \mathbb{R}^n | f^T v + g = \frac{h}{t}, t \in \mathbb{R}_{++}\}$. Dado que t es variable, el conjunto anterior puede expresarse como desigualdades, dependiendo del valor de h:
   - Si $h = 0$, $P(C) = \{v \in \mathbb{R}^n | f^T v + g = 0\}$
   - Si $h > 0$. $P(C) = \{v \in \mathbb{R}^n | f^T v + g > 0\}$
   - Si $h < 0$. $P(C) = \{v \in \mathbb{R}^n | f^T v + g < 0\}$

c. El semiespacio $C = \{(v, t) | f^T v + gt \leq h\}$
Análogamente al caso anterior, tendremos que $P(C) = \{v \in \mathbb{R}^n | f^T v + g \leq \frac{h}{t}, t \in \mathbb{R}_{++}\}$, el cuál variará dependiendo el valor de h:
   - $h = 0$, $P(C) = \{v \in \mathbb{R}^n | f^T v + g \leq 0\}$
   - $h > 0$, $\mathbb{R}^n$.

- $h < 0$, $P(C) = \emptyset$

d. El poliedro $C = \{(v,t)|Fv + gt \preceq h\}$
Este caso es una combinación de los casos anteriores ya que el conjunto es una intersección de semiespacios.

2.18 *Funciónes fraccionales lineales invertibles.* Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función fraccional lineal:

$$f(x) = \frac{Ax+b}{c^Tx+d} \qquad dom(f) = \{x|c^Tx + d > 0\}$$

Suponga que la matriz:

$$\begin{bmatrix} A & b \\ c^T & d \end{bmatrix}$$

Es una matriz no singular. Muestre que f es invertible y que f^{-1} es una función fraccional lineal. De una expresión explicita para f^{-1} y su dominio en términos de A, b, c y d.

Solución. Sea $P(x) = (x, 1)$; esta función posee una única inversa: $P^{-1}(x,y) = \frac{x}{y}$. La función fraccional lineal puede verse como sigue:

$$\begin{aligned} P^{-1}QP(x) =& P^{-1}\begin{bmatrix} A & b \\ c^T & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \\ =& P^{-1}\begin{bmatrix} Ax+b \\ c^Tx+d \end{bmatrix} \\ =& \frac{Ax+b}{c^Tx+d} \end{aligned}$$

Así, dado que la matriz Q es invertible, es posible encontrar la función inversa de $f = P^{-1}QP$, $f^{-1} = P^{-1}Q^{-1}P$. Para ver que esta es una función fraccional lineal, calculemos explícitamente f^{-1}:

$$\begin{aligned} P^{-1}Q^{-1}P =& P^{-1}\begin{bmatrix} \frac{d}{Ad-bc^T} & \frac{-b}{Ad-bc^T} \\ \frac{-c^T}{Ad-bc^T} & \frac{A}{Ad-bc^T} \end{bmatrix} P(x) \\ =& P^{-1}\begin{bmatrix} \frac{d}{Ad-bc^T} & \frac{-b}{Ad-bc^T} \\ \frac{-c^T}{Ad-bc^T} & \frac{A}{Ad-bc^T} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} \\ =& P^{-1}\begin{bmatrix} \frac{dx}{Ad-bc^T} - \frac{b}{Ad-bc^T} \\ \frac{-c}{Ad-bc^T} + \frac{A}{Ad-bc^T} \end{bmatrix} = \frac{dx-b}{-c^Tx+A} \end{aligned}$$