Engineering week 3 opgaven

Simcha van Helvoort

May 16, 2017

Dit bestand bevat de samenvatting en de antwoorden van Engineering week 3 voor het oefenen van mijn LaTeX skills. Eerst zal wordt de stof van deze week uitgelegd en daarna zal ik mijn uitwerkingen van het huiswerk publiceren.

1 Voorbeeld

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 1 = f(x) = f_\Omega$$

met $x \in (0, 1)$
Met randvoorwaarden:

$$u(0) = 1$$
$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = \alpha = 0$$

We benaderen $u(x)$ met de centrale differentie techniek.
Dit is de vergelijking voor $n = 5$.
We beginnen met de basis vergelijking en gaan stap voor stap naar de vergelijking die hetzelfde als ODE representeerd:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = -h^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix}$$
$$u(0) = u_1 = 1$$

Dit doen we op dezelfde manier als bij de Dirichletvoorwaarden, maar wat moet komen te staan op de plek van de Neumann randvoorwaarden?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ & & ? & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -h^2 f_2 \\ -h^2 f_3 \\ -h^2 f_4 \\ -h^2 f_5 \end{pmatrix}$$
$$\frac{du_5}{dx} = \alpha = 0$$

Dit kan benaderd worden als $\frac{u_6 - u_4}{2h} = \alpha$.
Zoals je weet licht u_6 buiten je domein, daarom defineren we u_6 als volgt:

$$\frac{u_6 - u_4}{2h} = \alpha \implies u_6 - u_4 = 2h\alpha \implies u_6 = u_4 + 2h\alpha$$

Dus

$$d^2udx^2 \approx -\frac{1}{h^2}\big(u_4 - 2u_5 + (u_4 + 2h\alpha)\big) = f_5 \implies$$
$$-\frac{1}{h^2}(2u_4 - 2u_5 + 2h\alpha) = f_5 \implies (2u_4 - 2u_5 + 2h\alpha) = -h^2 f_5 \implies$$
$$(2u_4 - 2u_5) = -h^2 f_5 - 2h\alpha$$

Dit geeft de uiteindelijke vergelijking:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -h^2 f_2 \\ -h^2 f_3 \\ -h^2 f_4 \\ -h^2 f_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2h\alpha \end{pmatrix}$$

2 Opgave 1

ODE:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 1$$

Randvoorwaarden:

$$\frac{du(0)}{dx} = 0$$
$$u(1) = 0$$

a: De exacte oplossing

$$\int d^2u = \int dx^2 \implies \frac{du}{dx} = -x + C \implies \frac{du(0)}{dx} = C = 0$$
$$\int du = \int -xdx \implies u = -\frac{1}{2}x^2 + D \implies u(1) = -\frac{1}{2} + D = 0 \implies D = \frac{1}{2}$$

Het uiteindelijke antwoord:

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

b: De numerieke oplossing met $n = 5$.

$$u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}) = -h^2 f_\Omega$$

$$\begin{pmatrix} & & ? & & \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = -h^2 \vec{f}$$

$$\left.\frac{du_1}{dx}\right|_{x=0} = \alpha = 0 \approx \frac{u_2 - u_0}{2h}$$

Netzo als het voorbeeld drukken we u_0 uit in u_2.

$$u_0 = -2h\alpha + u_2$$

Daardoor kunnen u_1 omschrijven naar

$$u_1 = \frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2} = \frac{-2u_1 + u_2 - 2h\alpha}{h^2} = -2u_1 + 2u_2 - \cancel{2h\alpha} \text{want } \alpha = 0$$