

Engineering week 3 opgaven

Simcha van Helvoort

May 17, 2017

Dit bestand bevat de samenvatting en de antwoorden van Engineering week 3 voor het oefenen van mijn LaTeX skills. Eerst zal wordt de stof van deze week uitgelegd en daarna zal ik mijn uitwerkingen van het huiswerk publiceren.

1 Voorbeeld

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 1 = f(x) = f_\Omega$$

met $x \in (0, 1)$

Met randvoorwaarden:

$$u(0) = 1$$
$$\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = \alpha = 0$$

We benaderen $u(x)$ met de centrale differentie techniek.

Dit is de vergelijking voor $n = 5$.

We beginnen met de basis vergelijking en gaan stap voor stap naar de vergelijking die hetzelfde als ODE representeerd:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = -h^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix}$$
$$u(0) = u_1 = 1$$

Dit doen we op dezelfde manier als bij de Dirichletvoorwaarden, maar wat moet komen te staan op de plek van de Neumann randvoorwaarden?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ & & ? & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -h^2 f_2 \\ -h^2 f_3 \\ -h^2 f_4 \\ -h^2 f_5 \end{pmatrix}$$
$$\frac{du_5}{dx} = \alpha = 0$$

Dit kan benaderd worden als $\frac{u_6 - u_4}{2h} = \alpha$.

Zoals je weet licht u_6 buiten je domein, daarom definiëren we u_6 als volgt:

$$\frac{u_6 - u_4}{2h} = \alpha \implies u_6 - u_4 = 2h\alpha \implies u_6 = u_4 + 2h\alpha$$

Dus

$$\begin{aligned}
 d^2 u dx^2 &\approx -\frac{1}{h^2}(u_4 - 2u_5 + (u_4 + 2h\alpha)) = f_5 \implies \\
 -\frac{1}{h^2}(2u_4 - 2u_5 + 2h\alpha) &= f_5 \implies (2u_4 - 2u_5 + 2h\alpha) = -h^2 f_5 \implies \\
 (2u_4 - 2u_5) &= -h^2 f_5 - 2h\alpha
 \end{aligned}$$

Dit geeft de uiteindelijke vergelijking:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -h^2 f_2 \\ -h^2 f_3 \\ -h^2 f_4 \\ -h^2 f_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2h\alpha \end{pmatrix}$$

2 Opgave 1

ODE:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = 1$$

Randvoorwaarden:

$$\begin{aligned}\frac{du(0)}{dx} &= 0 \\ u(1) &= 0\end{aligned}$$

a: De exacte oplossing

$$\begin{aligned}\int d^2 u &= \int dx^2 \implies \frac{du}{dx} = -x + C \implies \frac{du(0)}{dx} = C = 0 \\ \int du &= \int -x dx \implies u = -\frac{1}{2}x^2 + D \implies u(1) = -\frac{1}{2} + D = 0 \implies D = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Het uiteindelijke antwoord:

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

b: De numerieke oplossing met $n = 5$.

$$\begin{aligned}u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}) &= -h^2 f_\Omega \\ \begin{pmatrix} ? \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} &= -h^2 \vec{f} \\ \frac{du_1}{dx} \Big|_{x=0} = \alpha = 0 &\approx \frac{u_2 - u_0}{2h}\end{aligned}$$

Netzo als het voorbeeld drukken we u_0 uit in u_2 .

$$u_0 = -2h\alpha + u_2$$

Daardoor kunnen u_1 omschrijven naar

$$u_1 = \frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2} = \frac{-2u_1 + u_2 - 2h\alpha}{h^2} = -2u_1 + 2u_2 - 2h\alpha \quad \text{want } \alpha = 0$$

De uiteindelijke vergelijking:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{u} = -h^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Het bijbehorende matlab-script:

```
1 a = 0;
2 b = 1;
3 n = 3;
4 h = (b-a)/(n-1);
5 v = a:h:b;
6
7 % make matrix A
8 rowToeplitz = zeros(1,n);
9 rowToeplitz(1) = -2;
10 rowToeplitz(2) = 1;
11
12 coefMAT = toeplitz(rowToeplitz);
13 du0dxRow = zeros(1,n);
14 du0dxRow(1) = -2;
15 du0dxRow(2) = 2;
16 coefMAT(1,:) = du0dxRow;
17
18 u0Row = zeros(1,n);
19 u0Row(n) = 1;
20 coefMAT(n,:) = u0Row;
21
22 % make vector f
23 f = ones(n,1)*-h^2;
24 f(n) = 0;
25
26 U = coefMAT\f;
27
28 X = linspace(a,b,100);
29 syms u(x)
30 equation = -diff(u,x,2) == 1;
31 du = diff(u,x);
32 BC = [du(0) == 0, u(1) == 0];
33 uSol(x) = dsolve(equation, BC);
34 plot(X,uSol(X));
35 hold on;
36 plot(v,U, '*-');
```

3 Opdracht 2

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 12x^2$$
$$x \in (0, 1)$$

Met randvoorwaarden:

$$\frac{du(0)}{dx} = 0$$
$$u(1) = 0$$

a: De exacte oplossing

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -12x^2 \implies \frac{du}{dx} = -4x^3 + C$$
$$\frac{du(0)}{dx} = -4 \times 0^3 + C = 0 \implies C = 0$$
$$\frac{du}{dx} = -4x^3 \implies u(x) = -x^4 + D$$
$$u(1) = -1^4 + D = 0 \implies D = 1$$

b: De numerieke benadering voor $u(\frac{1}{2})$ met centrale differentie

$$u(\frac{1}{2}) \approx \frac{u(0) - 2u(\frac{1}{2}) + u(1)}{h^2} = -12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$u(0) - 2u\left(\frac{1}{2}\right) + 0 = -12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \implies u(0) = -\frac{3}{4} + 2u\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\frac{-\frac{3}{4} + 2u\left(\frac{1}{2}\right) - 2u\left(\frac{1}{2}\right) + 0}{h^2} =$$