Engineering week 3 opgaven

Simcha van Helvoort

May 18, 2017

Dit bestand bevat de samenvatting en de antwoorden van Engineering week 3 voor het oefenen van mijn LaTeX skills. Eerst zal wordt de stof van deze week uitgelegd en daarna zal ik mijn uitwerkingen van het huiswerk publiceren.

1 Voorbeeld

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 1 = f(x) = f_\Omega$$

met $x \in (0,1)$
Met randvoorwaarden:

$$u(0) = 1$$

$$\left.\frac{du}{dx}\right|_{x=1} = \alpha = 0$$

We benaderen $u(x)$ met de centrale differentie techniek.
Dit is de vergelijking voor $n = 5$.
We beginnen met de basis vergelijking en gaan stap voor stap naar de vergelijking die hetzelfde als ODE representeerd:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = -h^2 \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \end{pmatrix}$$

$$u(0) = u_1 = 1$$

Dit doen we op dezelfde manier als bij de Dirichletvoorwaarden, maar wat moet komen te staan op de plek van de Neumann randvoorwaarden?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ & & ? & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -h^2 f_2 \\ -h^2 f_3 \\ -h^2 f_4 \\ -h^2 f_5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{du_5}{dx} = \alpha = 0$$

Dit kan benaderd worden als $\frac{u_6 - u_4}{2h} = \alpha$.
Zoals je weet licht u_6 buiten je domein, daarom defineren we u_6 als volgt:

$$\frac{u_6 - u_4}{2h} = \alpha \implies u_6 - u_4 = 2h\alpha \implies u_6 = u_4 + 2h\alpha$$

Dus

$$
d^2udx^2 \approx -\frac{1}{h^2}\big(u_4 - 2u_5 + (u_4 + 2h\alpha)\big) = f_5 \implies
$$
$$
-\frac{1}{h^2}(2u_4 - 2u_5 + 2h\alpha) = f_5 \implies (2u_4 - 2u_5 + 2h\alpha) = -h^2 f_5 \implies
$$
$$
(2u_4 - 2u_5) = -h^2 f_5 - 2h\alpha
$$

Dit geeft de uiteindelijke vergelijking:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -h^2 f_2 \\ -h^2 f_3 \\ -h^2 f_4 \\ -h^2 f_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2h\alpha \end{pmatrix}
$$

2 Opgave 1

ODE:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 1$$

Randvoorwaarden:

$$\frac{du(0)}{dx} = 0$$
$$u(1) = 0$$

a: De exacte oplossing

$$\int d^2u = \int dx^2 \implies \frac{du}{dx} = -x + C \implies \frac{du(0)}{dx} = C = 0$$
$$\int du = \int -xdx \implies u = -\frac{1}{2}x^2 + D \implies u(1) = -\frac{1}{2} + D = 0 \implies D = \frac{1}{2}$$

Het uiteindelijke antwoord:

$$u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

b: De numerieke oplossing met $n = 5$.

$$u(x_{i-1}) - 2u(x_i) + u(x_{i+1}) = -h^2 f_\Omega$$
$$\begin{pmatrix} & & ? & & \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = -h^2 \vec{f}$$
$$\left.\frac{du_1}{dx}\right|_{x=0} = \alpha = 0 \approx \frac{u_2 - u_0}{2h}$$

Netzo als het voorbeeld drukken we u_0 uit in u_2.

$$u_0 = -2h\alpha + u_2$$

Daardoor kunnen u_1 omschrijven naar

$$u_1 = \frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{h^2} = \frac{-2u_1 + u_2 - 2h\alpha}{h^2} = -2u_1 + 2u_2 - \cancel{2h\alpha} \text{ want } \alpha = 0$$

De uiteindelijke vergelijking:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{u} = -h^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Het bijbehorende matlab-script:

```matlab
a = 0;
b = 1;
n = 3;
h = (b-a)/(n-1);
v = a:h:b;

% make matrix A
rowToeplitz = zeros(1,n);
rowToeplitz(1) = -2;
rowToeplitz(2) = 1;

coefMAT = toeplitz(rowToeplitz);
du0dxRow = zeros(1,n);
du0dxRow(1) = -2;
du0dxRow(2) = 2;
coefMAT(1,:) = du0dxRow;

u0Row = zeros(1,n);
u0Row(n) = 1;
coefMAT(n,:) = u0Row

% make vector f
f = ones(n,1)*-h^2;
f(n) = 0

U = coefMAT\f

X = linspace(a,b,100);
syms u(x)
equation = -diff(u,x,2) == 1
du = diff(u,x)
BC = [du(0) == 0, u(1) == 0];
uSol(x) = dsolve(equation, BC)
plot(X,uSol(X))
hold on
plot(v,U, '*-')
```

3 Opdracht 2

$$-\frac{d^2u}{dx^2} = 12x^2$$
$$x \in (0,1)$$

Met randvoorwaarden:

$$\frac{du(0)}{dx} = 0$$
$$u(1) = 0$$

a: De exacte oplossing

$$\frac{d^2u}{dx^2} = -12x^2 \implies \frac{du}{dx} = -4x^3 + C$$
$$\frac{du(0)}{dx} = -4 \times 0^3 + C = 0 \implies C = 0$$
$$\frac{du}{dx} = -4x^3 \implies u(x) = -x^4 + D$$
$$u(1) = -1^4 + D = 0 \implies D = 1$$

b: De numerieke benadering voor $u(\frac{1}{2})$ met centrale differentie

$$u(\frac{1}{2}) \approx \frac{u(0) - 2u(\frac{1}{2}) + u(1)}{h^2} = -12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\begin{pmatrix} & ? & \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = -h^2 \vec{f}$$
$$\frac{du_1}{dx} = \frac{u_2 - u_0}{2h} = 0 \implies u_0 = u_2 \implies$$
$$\frac{d^2u_1}{dx^2} = \frac{-2u_1 + 2u_2}{h^2}$$
$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = -h^2 \vec{f}$$

Met $f = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$ geeft $u = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$

De exacte waarde van $u\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{16} = 0.9375$. Dit geeft een error van $0.9375 -$

$0.75 = 0.1875$ bij $n = 3$ c: Bereken de error voor $n = 3, 5, 7$

n	$u(\frac{1}{2})$	*error*
3	0.9375	6
5	0.9375	0.0469
7	0.9375	0.0208

```
N = [3, 5, 7];
errors = zeros(1,length(N));
for ii = 1:length(N)
    a = 0;
    b = 1;
    n = N(ii);
    h = (b-a)/(n-1);
    v = a:h:b;

    % make matrix A
    rowToeplitz = zeros(1,n);
    rowToeplitz(1:2) = [-2:1];
    coefMAT = toeplitz(rowToeplitz);

    du0dxRow = zeros(1,n);
    du0dxRow(1) = -2;
    du0dxRow(2) = 2;
    coefMAT(1,:) = du0dxRow;

    u0Row = zeros(1,n);
    u0Row(n) = 1;
    coefMAT(n,:) = u0Row

    % make vector f
    f =@(x) 12.*x.^2;
    f = f(v').*-(h)^2;
    f(n) = 0

    U = coefMAT\f
    X = linspace(a,b,100);

    syms u(x)
    equation = -diff(u,x,2) == 12*x^2
    du = diff(u,x);
    BC = [du(0) == 0, u(1) == 0];
    uSol(x) = dsolve(equation, BC)

    epsilon = U(ceil(numel(U)/2))-uSol(0.5);
    error(ii) = epsilon
end
```